

ANALYSE DYNAMIQUE DES SYSTEMES HYDROELASTIQUES DE *
REVOLUTION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Application à l'étude du phénomène "POGO" dans
les lanceurs à ergols liquides

par

J.F. DEBONGNIE **

A. HUCK ***

Chercheurs à la Faculté des
Sciences Appliquées

RESUME

Le problème hydroélastique consiste en l'étude des petites oscillations d'un milieu fluide contenu dans une structure élastique.

Après un bref passage en revue des travaux antérieurement publiés sur ce sujet, une nouvelle formulation variationnelle du problème est dérivée.

Celle-ci est ensuite appliquée, dans le cadre de la méthode des éléments finis, à l'aide d'un algorithme de résolution original.

Enfin, plusieurs exemples, dont une structure réelle de lanceur, illustrent la validité des solutions proposées.

SUMMARY

The small oscillations of elastic containers partially filled with liquids are studied.

After a brief review of the previously published works on this subject, a new variational formulation of the problem is presented.

The application uses the finite element method and a new algorithm of solution is proposed.

The accuracy of the method is illustrated by several examples including a two tanks launcher structure.

* Cette étude a été partiellement subsidiée par le Centre National d'Etudes Spatiales (France).

** Ingénieur civil Electricien-Mécanicien, tendance mécanique, 1973.

*** Ingénieur civil Physicien (Techniques Spatiales I), 1969.

ZUSAMMENFASSUNG

Das Problem der hydroelastischen Schwingungen in teilweise gefüllten elastischen Behältern ist behandelt.

Nach einer kurtzen Uebersicht des zur Zeit vorhandenen Schrifttums, wird ein neues variationelles Uebertragung des Problems abgeleitet.

Dieses wird im Rahmen der finiten Elemente durch eine originales Lösungsverfahren angewandt.

Die Gültigkeit der vorgeschlagenen Lösung ergibt sich aus verschiedenem Beispiele, besonders im Falle der Struktur einer Raumfahrtrakete.

* *
*

INTRODUCTION

Parmi la diversité croissante des types de structures élastiques complexes que la méthode des éléments finis permet d'analyser numériquement, tant sur le plan statique que dynamique, avec une puissance et une fiabilité sans cesse accrues, nombreux sont les domaines où les structures étudiées sont en fait destinées à interagir, de manière plus ou moins étroite, avec des milieux fluides.

Dans le domaine aérospatial, en particulier, ce type d'interaction est extrêmement fréquent, et la présence de masses plus ou moins importantes d'ergols liquides dans les réservoirs d'un avion ou d'une fusée en vol peut entraîner des modifications considérables de leurs caractéristiques de résonance. Le cas des lanceurs, où des masses très importantes d'ergols (la quasi-totalité de la masse au décollage) sont contenues dans une structure très légère et, par voie de conséquence, assez souple, constitue un exemple typique de problème hydroélastique pour lequel le comportement dynamique de la structure ne saurait être dissocié de celui du fluide qu'elle contient.

Le couplage entre modes de vibration des réservoirs et des ergols y est en particulier responsable du célèbre effet "POGO", de résonance en boucle fermée (la boucle de retour étant assurée par les moteurs), qui, outre le fait de soumettre à rude épreuve les équipements fragiles du lanceur et de sa charge utile, peut, s'il devient instable, provoquer la perte de l'ensemble. Ces quelques exemples suffisent à illustrer l'intérêt considérable que les responsables de projets spatiaux sont amenés à consacrer au problème de l'interaction fluide-structure et la nécessité pour eux de disposer de moyens de calculs efficaces pour le résoudre.

La méthode des éléments finis s'étant depuis plusieurs années affirmée comme étant sans conteste la méthode d'analyse la plus efficace dans le domaine des structures élastiques complexes, il était logique de l'étendre à la partie fluide du problème hydroélastique de manière à constituer un tout homogène et cohérent. Plusieurs tentatives en ce sens ont déjà été faites et ont débouché sur des solutions plus ou moins satisfaisantes, mais parfois incomplètes du problème posé.

Un premier type de méthode, proposé par ARCHER et RUBIN [1], consiste à imposer certaines restrictions sur le mouvement du fluide. On exprime que le déplacement vertical du fluide ne dépend que de sa cote : si l'on considère une tranche dans le fluide, elle peut s'aplatir et s'élargir, mais ses faces planes restent planes. En particulier, la surface libre demeure plane. Cette approximation permet de prévoir correctement les fréquences des modes propres pour lesquels le mouvement de la coque est important, mais ne fournit qu'une idée grossière du mouvement de fluide et il serait vain d'essayer d'en retirer une connaissance précise de la pression. En outre, elle ne permet pas d'étudier le ballonnement du liquide qui suppose nécessairement une surface libre courbe.

D'autres auteurs ont abordé le problème au moyen d'une formulation mixte, en ce sens qu'ils idéalisent la structure au moyen d'éléments finis, tandis que pour le fluide, ils utilisent l'équation intégrale de FREDHOLM : le comportement du liquide est exprimé à l'aide d'une distribution discrète de sources sur sa frontière. C'est de cette façon qu'ont procédé KHABBAZ [2], GUYAN, UJIHARA et WELCH [3]. Il faut cependant remarquer que cette représentation du fluide n'est vraiment intéressante que dans le cas d'un mouvement axisymétrique : on ne doit alors évaluer que des intégrales elliptiques, dont il existe des tables. Pour des mouvements plus compliqués, cette formulation perd un peu de son intérêt. L'étude des résultats obtenus dans [3] suscite les remarques suivantes : tout d'abord, on constate que

l'analyse est alourdie par le grand nombre de modes de surface libre, c'est-à-dire de modes où c'est essentiellement le fluide qui se meut en surface, la coque restant pratiquement immobile. Or, ces modes sont généralement peu intéressants.

Ensuite, on observe que si les premiers modes de surface libre ont leur maximum au centre, ce qui est normal, il n'en est pas de même des modes de fréquence plus élevée.

Pour ceux-ci, en effet, les auteurs obtiennent une surface libre pratiquement plane au centre, et de fortes oscillations sur les bords, ce qui semble assez peu conforme à la réalité.

Il convient encore de noter que les formulations de cette espèce nécessitent un certain nombre de calculs ultérieurs pour obtenir la pression au sein du fluide. Or, la connaissance de la pression est essentielle pour prévoir l'effet "POGO".

La formulation proposée par PINSON et BROWN [21], basée sur la discrétisation du champ des vitesses, se heurte à la même difficulté en ce qui concerne le calcul des pressions et s'avère, de plus, extrêmement onéreuse du point de vue du nombre de degrés de liberté à traiter. Une étude convenable du problème hydroélastique doit donc répondre aux deux conditions suivantes :

- 1) représenter le fluide au moyen d'éléments finis en discrétisant une variable qui permette d'évaluer la pression de manière simple, sans pour autant conduire à la définition d'un nombre excessif de degrés de liberté;
- 2) limiter le nombre de modes de surface libre seule lorsque ceux-ci présentent peu d'intérêt.

Dans cet ordre d'idées, la formulation NASTRAN [4] est basée précisément sur la discrétisation de la pression (ce qui convient surtout pour les fluides compressibles). Mais, jusqu'à présent, nous n'avons pas connaissance de résultats obtenus à l'aide de ce formalisme. Il est cependant évident que la première condition y est vérifiée.

Une autre formulation a été initialement proposée par PIN TONG [5] puis reprise par ANQUEZ, BERGER, BOUJOT, OHAYON et VALID [6,7]. Le mouvement irrotationnel du fluide supposé incompressible et non visqueux est décrit à l'aide du potentiel des vitesses.

Pour les petites oscillations, la pression est directement liée au potentiel et la première condition est donc vérifiée. De plus, il s'agit d'une grandeur scalaire, donc peu onéreuse à discrétiser.

La présente étude reprend cette formulation, mais la présentation du principe variationnel relatif à la partie fluide est nouvelle : au lieu de raisonner à partir d'un principe eulérien (principe de BATEMAN) et de le raccorder au principe de HAMILTON écrit sous forme lagrangienne en faisant l'hypothèse classique des petits déplacements, nous préférons déduire directement le principe relatif au fluide à partir du principe de HAMILTON, en mettant en évidence la linéarisation géométrique.

Dans cette approche, on est amené à définir un potentiel des déplacements, ce qui donne un sens nouveau à la variable effectivement discrétisée par les auteurs précités. Nous montrons en outre qu'il est possible, en jouant sur l'indépendance entre déplacements de surface libre et potentiel des déplacements au sein du fluide, d'idéaliser très sommairement la surface libre, donc de minimiser le nombre de modes propres associés, sans pour autant altérer de manière sensible les fréquences des modes propres hydroélastiques proprement dits et tout en conservant une description très correcte du fluide. La seconde condition est donc elle aussi vérifiée.

La mise en oeuvre pratique de ce formalisme, qui est opérationnelle dans le software S.A.M.C.E.F. d'analyse des milieux continus par la méthode des éléments finis développé par le L.T.A.S. [8,9], a été conduite avec le souci de permettre le traitement de systèmes de grandes dimensions. On s'est particulièrement attaché à concevoir une technique d'assemblage compatible avec la méthode des sous-structures en série [10,11,12] permettant de condenser progressivement, outre la totalité des degrés de liberté de fluide, ceux des degrés de liberté de structure qui sont jugés superflus pour la représentation du comportement basse fréquence du système, ce en une seule et même étape.

Les éléments finis de fluide et de structure disposent tous du degré de variable et offrent une très grande souplesse d'utilisation (telle que possibilité de traiter simultanément plusieurs réservoirs avec ou sans surface libre).

Les résultats numériques obtenus sont illustrés par trois exemples.

Le premier consiste en l'étude des oscillations d'un liquide dans un réservoir cylindrique rigide. La solution obtenue est confrontée avec la solution analytique du problème.

Le second exemple est repris de la référence [3] et les résultats comparés font ressortir un très bon accord avec les fréquences propres calculées par ses auteurs qui avaient eux-mêmes effectué des recoupements avec des résultats numériques antérieurs.

Le troisième exemple est consacré à l'étude numérique du phénomène "POGO" sur une structure réelle du domaine aérospatial : le premier étage "L17" du lanceur "DIAMANT B".

1. FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME HYDROELASTIQUE

1.1. Principe variationnel pour la partie fluide

Le mouvement d'un fluide incompressible et non-visqueux est régi par le principe de HAMILTON. On considère une collectivité de particules. Elle occupe au temps $t=0$, un volume $V(0)$ bordé par une surface $S(0)$. Les mêmes particules occupent au temps t un volume $V(t)$, de surface $S(t)$. Une particule située en $t=0$ au point de coordonnées a_i se trouve au temps t au point x_i . Nous écrirons :

$$D_i = \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \right)_t \quad D_t = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{a_i} \quad (1.1)$$

$$\partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_t \quad \partial_t = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{x_i} \quad (1.2)$$

Cela étant, supposons les déplacements imposés sur une portion S_1 de S , tandis que sur l'autre partie S_2 de la surface, on impose la pression. Le principe de HAMILTON prend alors la forme :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \int_{V(t)} \left(\rho \frac{u_i u_i}{2} - \rho \Omega \right) dV(t) - \int_{S_2(t)} \bar{p} v_i \delta u_i dS(t) \right\} = 0 \quad (1.3)$$

où Ω représente le potentiel gravifique, \bar{p} la pression imposée, v_i la normale à $S_2(t)$.

Dans l'application de ce principe, il convient de vérifier a priori la condition d'incompressibilité. Si l'on appelle J le déterminant jacobien

$$J = \frac{\partial(x)}{\partial(a)} \quad (1.4)$$

la condition d'incompressibilité s'écrit :

$$J = 1 \quad (1.5)$$

Nous adopterons, dans ce qui suit, une description purement lagrangienne. Il faut donc transformer les intégrales sur $V(t)$ et $S(t)$ en intégrales sur la configuration initiale. La transformation est simple pour l'intégrale de volume :

$$\int_{V(t)} \rho f dV = \int_{V(0)} \rho f J dV \quad (1.6)$$

Quant à la pression, elle perd son caractère isotrope. En effet,

$$\begin{aligned} \int_{S(t)} p v_i \delta u_i dS &= \int_{V(t)} \partial_i (p \delta u_i) dV(t) \\ &= \int_{V(0)} J \partial_i (p \delta u_i) dV \end{aligned}$$

et, puisque

$$\partial_i = \partial_i a_j D_j,$$

on obtient :

$$\int_{S(t)} p v_i \delta u_i dS = \int_{V(0)} J \partial_i a_j D_j (p \delta u_i) dV \quad (1.7)$$

En vertu de l'identité de JACOBI

$$D_j (J \partial_i a_j) = 0 \quad (1.8)$$

on peut transformer cette intégrale en

$$\int_{S(0)} n_j [p J \partial_i a_j] \delta u_i dS \quad (1.9)$$

ce qui définit la "pression lagrangienne"

$$P_{ji} = p J \partial_i a_j \quad (1.10)$$

Chargeons encore le principe d'assurer l'incompressibilité : on ajoutera simplement le "potentiel de compression" construit à l'aide d'un multiplicateur λ :

$$C = \int_{V(0)} \lambda (J - 1) dV \quad (1.11)$$

Puisque la condition d'incompressibilité est reprise par la variation de λ , on peut, pour obtenir le principe le plus simple possible, poser $J=1$ dans (1.6). Le principe lagrangien s'écrit alors :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \int_{V(0)} \left(\rho \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} - \rho \Omega \right) dV + \delta \int_{V(0)} \lambda (J - 1) dV - \int_{S_2(0)} n_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS \right\} = 0 \quad (1.12)$$

Cherchons les équations d'Euler de ce principe. Notant que

$$\delta J = J \partial_i \delta u_i \quad (1.13)$$

on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_{V(0)} \left(\rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i - \rho \partial_i \Omega \delta u_i + \lambda J \partial_i \delta u_i \right) dV - \int_{S_2(0)} n_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS \right\} = 0 .$$

Le troisième terme demande une attention particulière : on a

$$\begin{aligned} \int_{V(0)} \lambda J \partial_i \delta u_i &= \int_{V(t)} \lambda \partial_i \delta u_i dV(t) \\ &= \int_{S(t)} \lambda v_i \delta u_i dS(t) - \int_{V(t)} \partial_i \lambda \delta u_i dV(t) \\ &= \int_{S(t)} \lambda v_i \delta u_i dS(t) - \int_{V(0)} J \partial_i \lambda \delta u_i dV . \end{aligned}$$

Vu que $J=1$, on a donc :

$$- \rho \ddot{u}_i - \rho \partial_i \Omega - \partial_i \lambda = 0 \quad (1.14)$$

Cette équation montre que le multiplicateur λ n'est autre que la pression eulérienne qui, pour un fluide incompressible, n'a d'autre sens que celui de réaction correspondant à la liaison d'incompressibilité.

En surface, on obtient la condition d'égalité des pressions puisque, par définition,

$$\int_{S_2(0)} n_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS = \int_{S_2(t)} \bar{p} v_i \delta u_i dS .$$

1.2. Linéarisation géométrique dans le fluide

Dans ce qui suit, nous ne considérerons plus que les petits mouvements du fluide. On peut alors linéariser le problème :

a) Nous admettrons que :

$$D_i \Omega = D_i x_j \partial_j \Omega \approx \partial_i \Omega ,$$

soit

$$D_i x_j = D_i a_j + D_i u_j = \delta_{ij} + D_i u_j \approx \delta_{ij} ;$$

ce qui suppose

$$|D_i u_j| \ll 1 .$$

Tenant le raisonnement inverse, on arrive à

$$\partial_i a_j \approx \delta_{ij}$$

soit

$$|\partial_i u_j| \ll 1 ; \quad (1.16)$$

sous cette condition, les pressions lagrangienne (tenseur) et eulérienne (scalaire) peuvent être confondues, car

$$p_{ji} = p^J \partial_i a_j \approx p \delta_{ij} \quad (1.17)$$

b) Le jacobien peut être développé en

$$J = 1 + I_1 + I_2 + I_3$$

où I_1, I_2, I_3 sont les trois invariants du tenseur $D_i u_j$.

Nous nous limiterons au premier ordre, ce qui donne

$$J - 1 \approx I_1 = D_i u_i . \quad (1.18)$$

Le principe (1.12) linéarisé devient donc

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \int_{V(0)} \left(\rho \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} - \rho \Omega \right) dV + \delta \int_{V(0)} \lambda D_i u_i dV - \int_{S_2(0)} \bar{p} n_i \delta u_i dS \right\} = 0 , \quad (1.19)$$

et les équations d'Euler :

$$\delta u_i \rightarrow -\rho \ddot{u}_i - \rho D_i \Omega - D_i \lambda = 0 \quad \text{dans } V(0) \quad (1.20)$$

$$\rightarrow n_i \lambda - n_i \bar{p} = 0 \quad \text{sur } S_2(0) \quad (1.21)$$

$$\delta \lambda \rightarrow D_i u_i = 0 \quad \text{dans } V \quad (1.22)$$

L'équation (1.20) mène à définir un potentiel tel que :

$$-\ddot{\phi} = +\frac{\lambda}{\rho} + \Omega.$$

On obtient alors, par (1.20) :

$$-\ddot{u}_i + D_i \ddot{\phi} = 0,$$

c'est-à-dire que l'équation d'équilibre est remplacée par la condition d'existence d'un potentiel de déplacement tel que :

$$u_i = +D_i \phi.$$

Supposant cette équation vérifiée en volume dans (1.19), on obtient :

$$a) \quad \int_{V(0)} \rho \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} dV = \int_{V(0)} \rho \frac{D_i \dot{\phi} D_i \dot{\phi}}{2} dV$$

$$b) \quad - \int_{V(0)} \rho \Omega dV = + \int_{V(0)} \rho g_i D_i \phi dV$$

$$c) \quad \int_{V(0)} \lambda D_i u_i dV = \int_{S(0)} \lambda n_i u_i dS - \int_{V(0)} D_i \lambda u_i dV$$

$$= - \int_{S(0)} (\rho \ddot{\phi} + \rho \Omega) n_i u_i dS + \int_{V(0)} \rho (D_i \ddot{\phi} + \underbrace{D_i \Omega}_{-g_i}) D_i \phi dV$$

Finalement, après intégration par parties sur le temps, on obtient le principe :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ - \delta \int_{V(0)} \rho \frac{D_i \dot{\phi} D_i \dot{\phi}}{2} dV - \int_{S_2(0)} (\bar{p} + \rho \Omega) n_i \delta u_i dS \right. \\ \left. - \delta \int_{S(0)} \rho \ddot{\phi} n_i u_i dS \right\} = 0. \quad (1.23)$$

Le terme

$$- \int_{S_2(0)} \rho \Omega n_i \delta u_i dS = \int_{S_2(0)} \rho g_i u_i n_j \delta u_j dS$$

n'est pas auto-adjoint. On pose donc, pour des surfaces élastiques :

$$u_i \approx u_n n_i . \quad (1.24)$$

Cette approximation, initialement due à PIN TONG, revient à dire que le déplacement de la paroi est essentiellement normal.

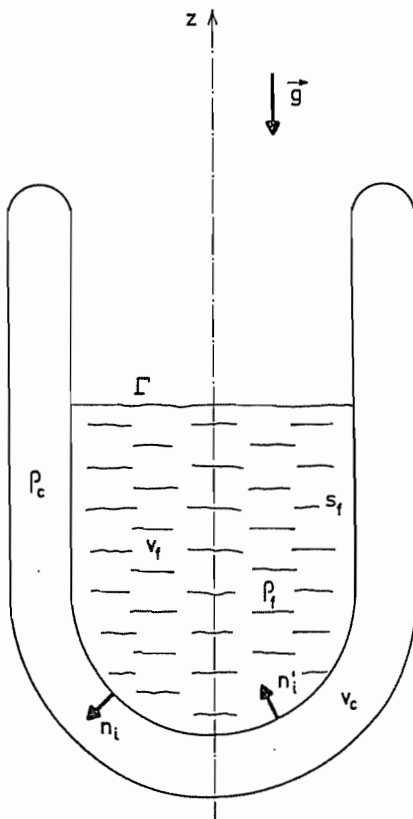
Souvent admise dans certaines théories de coques, cette hypothèse peut cependant être prise en défaut dans certains cas.

En particulier, elle a pour effet néfaste de donner de l'énergie au mode rigide de translation verticale. Il s'ensuit que ce mode rigide ne correspond plus à une fréquence rigoureusement nulle (cependant, les applications pratiques montrent que la forme du mode rigide est très peu détériorée).

Moyennant cette hypothèse, le principe variationnel de la partie fluide s'écrit donc finalement :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ - \delta \int_{V(0)} \rho \frac{D_i \dot{\phi} D_i \dot{\phi}}{2} dV - \int_{S_2(0)} \bar{p} n_i \delta u_i dS \right. \\ \left. + \delta \int_{S_2(0)} \rho \vec{g} \cdot \vec{n} \frac{u_n^2}{2} dS - \delta \int_{S(0)} \rho \ddot{\phi} n_i u_i dS \right\} = 0 . \quad (1.25)$$

1.3. Position du problème fluide-structure



Le fluide est contenu (figure 1.1) dans une structure élastique et possède, en général, une surface libre. Le fluide occupe un volume V_f , la structure un volume V_c .

Leur interface sera appelé S_f , tandis que nous écrirons S_c pour la surface libre.

Pour la partie structure, on utilise simplement le principe de HAMILTON (théorie géométriquement linéarisée) :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \int_{V_c} (\rho_c \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} - W(Du) + \rho_c g_i u_i) dV \right. \\ \left. - \int_{S_f} \bar{p} n'_i \delta u_i dS - \int_{S_c} \bar{t}_i \delta u_i dS \right\} \\ = 0 . \quad (1.26)$$

Dans ce principe, n'_i représente la normale vue de la structure. En termes de la normale du fluide, on a donc :

FIGURE 1.1

$$\dot{n}_i = -n_i \quad (1.27)$$

Dès lors, si l'on additionne les deux principes (1.25) et (1.26) en notant que la pression doit être la même de part et d'autre sur l'interface fluide-structure et nulle à la surface libre, on obtient le principe couplé :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \left[+ \int_{V_c} \rho_c \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} dV_c - \int_{V_f} \rho_f \frac{D_i \dot{\phi} D_i \dot{\phi}}{2} dV_f \right. \right. \\ \left. - \int_{S_f} \rho_f \ddot{\phi} n_i u_i dS - \int_{\Gamma} \rho_f \ddot{\phi} \eta dS \right] \\ - \left[\int_{V_c} W(Du) dV - \int_{S_f} \rho_f \vec{g} \cdot \vec{n} \frac{u_n^2}{2} dS - \int_{\Gamma} \rho_f \vec{g} \cdot \vec{n} \frac{n^2}{2} dS \right. \\ \left. \left. - \int_{V_c} \rho_c g_i u_i dV + \int_{S_c} \bar{t}_i \delta u_i dS \right] \right\} = 0 \quad (1.28) \end{aligned}$$

On peut simplifier ce principe en prenant comme référence la position d'équilibre statique. Dès lors, les termes

$$\int_{V_c} \rho_c g_i u_i dV$$

et

$$\int_{S_c} \bar{t}_i \delta u_i dS$$

disparaissent. Mais l'énergie de déformation prend une forme plus compliquée. Il y a lieu notamment de tenir compte des termes du second ordre résultant du couplage entre les tensions initiales et les carrés des gradients de déplacements, dits "termes géométriques".

Le principe s'écrira alors :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \left[\int_{V_c} \rho_c \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} dV - \int_{V_f} \rho_f \frac{D_i \dot{\phi} D_i \dot{\phi}}{2} dV \right. \right. \\ \left. - \int_{S_f} \rho_f \ddot{\phi} n_i u_i dS - \int_{\Gamma} \rho_f \ddot{\phi} \eta dS \right] \\ - \left[\int_{V_c} (W(Du) + W_g(\sigma_0, Du)) dV \right. \\ \left. - \int_{S_f} \rho_f (\vec{g} \cdot \vec{n}) \frac{u_n^2}{2} dS + \int_{\Gamma} \rho_f g \frac{n^2}{2} dS \right] \right\} = 0 \quad (1.29) \end{aligned}$$

2. DISCRETISATION DU PRINCIPE COUPLE

2.1. Equations d'Euler-Lagrange discrétisées

Après discrétisation des champs ϕ , η et u_i auxquels nous associerons respectivement les vecteurs d'état généralisés f , y et q , le principe (1.29) s'écrit matriciellement :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{f}' N \dot{f} + \dot{f}' B y + \frac{1}{2} y' C y + \dot{f}' D q - \frac{1}{2} \dot{q}' M \dot{q} + \frac{1}{2} q' K q - \frac{1}{2} q' S q \right) dt = 0 \quad (2.1)$$

et la variation indépendante des champs f , y et q conduit aux équations d'Euler-Lagrange :

$$B \ddot{y} + D \ddot{q} - N \ddot{f} = 0 \quad (a)$$

$$C y + B' \ddot{f} = 0 \quad (b) \quad (2.2)$$

$$M \ddot{q} + (K - S) q + D' \ddot{f} = 0 \quad (c)$$

qui peuvent être regroupées sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} K - S & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ y \\ f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & 0 & D' \\ 0 & 0 & B' \\ D & B & -N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{y} \\ \ddot{f} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.3)$$

Les différentes sous-matrices sont respectivement définies par :

$$\frac{1}{2} q' K q = \int_{V_c} [W_k(Du) + W_g(\sigma_0, Du)] dV \quad (a)$$

$$\frac{1}{2} y' C y = \int_{\Gamma} \rho_f g \frac{\eta^2}{2} dS \quad (b)$$

$$\frac{1}{2} q' S q = \int_{S_f} \rho_f (\vec{g} \cdot \vec{n}) \frac{u_n^2}{2} dS \quad (c)$$

$$\frac{1}{2} \dot{q}' M \dot{q} = \int_{V_c} \rho_c \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} dV \quad (d) \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{2} \dot{f}' N \dot{f} = \int_{V_f} \rho_f \frac{D_i \dot{\phi} D_i \dot{\phi}}{2} dV \quad (e)$$

⋮

$$\ddot{f}' B y = \int_{\Gamma} \rho_f \ddot{\phi} \eta \, dS \quad (f)$$

$$\ddot{f}' D q = \int_{S_f} \rho_f \ddot{\phi} n_i u_i \, dS \quad (g)$$

Les matrices C, S et M sont symétriques et définies positives.

Les matrices K et N sont symétriques et semi-définies positives (K est définie positive en l'absence de modes rigides et de mécanismes pour la structure).

Les tableaux B et D sont rectangulaires.

L'équation (2.3) se présente comme un problème aux valeurs propres classique à deux matrices, résultat qui n'a pu être obtenu que grâce à l'introduction dans le principe variationnel des déplacements de surface libre (η, y) . (On vérifie aisément sur (2.2) que l'élimination de y à l'aide de (2.2(b)) fait apparaître des dérivées quatrièmes dans (2.2(a)) et conduit à un problème aux valeurs propres à trois matrices beaucoup plus compliqué à résoudre).

Toutefois, sous la forme (2.3), ce problème aux valeurs propres est peu aisé à traiter en raison du caractère fortement dégénéré des matrices assemblées. Nous allons voir comment ce handicap peut être surmonté.

2.2. Singularité de la matrice N et condition d'incompressibilité

Il est clair qu'en faisant

$$\phi(\vec{r}, t) = \psi(t)$$

dans l'expression (2.4(e)) du principe couplé, il vient :

$$D_i \dot{\phi} = D_i \dot{\psi} = 0$$

et le terme d'énergie cinétique de fluide disparaît du principe (1.29).

Si nous varions alors la variable $\ddot{\psi}$, nous obtenons la condition

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \ddot{\psi} \left\{ \int_{\Gamma} \rho_f \eta \, dS + \int_{S_f} \rho_f n_i u_i \, dS \right\} dt = 0$$

qui entraîne

$$\int_{\Gamma} \rho_f \eta \, dS + \int_{S_f} \rho_f n_i u_i \, dS = 0 \quad (2.5)$$

Cette condition traduit la nullité du flux massique global traversant la frontière du domaine occupé par le fluide, soit, pour un fluide incompressible ($\rho_f = \text{cste}$), la constance du volume occupé par le fluide à l'intérieur de la structure. C'est la seule relation liant les déplacements de structure et de surface libre. C'est en outre la condition d'intégralité du problème $\nabla^2 \phi = 0$ avec conditions de NEUMANN sur toute la frontière.

Dans le principe discrétisé, ceci se traduit par une singularité de la matrice N et l'existence d'un "mode rigide de fluide"

$$f = e \psi(t)$$

correspondant à $\phi = \psi$ et tel que

$$N e = 0$$

e étant le vecteur dont toutes les composantes sont égales à l'unité. Dans ces conditions, on démontre en algèbre linéaire que (2.2(a)) n'admet de solution que si

$$e' [B y + D q] = 0 \quad (2.6)$$

condition qui n'est autre que la forme discrétisée de (2.5).

La singularité de la matrice N apparaît donc comme une caractéristique essentielle du système fluide-structure discrétisé puisque c'est elle qui assure la condition d'incompressibilité (2.6) liant les déplacements de la surface libre à ceux de la structure. D'un autre point de vue, cette singularité constitue un obstacle sérieux à l'élimination de f à l'aide de (2.2(a)) qui, comme nous le verrons par la suite, permet tout en réduisant sensiblement l'ordre du système, de supprimer le caractère dégénéré des matrices assemblées.

Si nous choisissons de fixer arbitrairement à zéro le potentiel en un point quelconque du fluide, la matrice N cesse d'être singulière et admet une inverse N_{iso}^{-1} .

Par contre, nous avons perdu l'équation d'incompressibilité (2.6) qui cesse d'être une condition naturelle du principe (2.1).

Si nous réintroduisons à présent cette équation, en exigeant a priori que q et y vérifient (2.6), la fixation effectuée dans le fluide demeure sans effet et équivaut simplement à se donner une origine des potentiels qui ne sont de toute façon définis qu'à une constante arbitraire près. (2.2(a)) peut donc être remplacée par le couple d'équations :

$$\begin{aligned} e' (D q + B y) &= 0 \\ \ddot{f} &= N_{iso}^{-1} (D \ddot{q} + B \ddot{y}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le raisonnement qui précède est dû à FRAEIJIS de VEUBEKE qui l'a utilisé initialement pour le traitement des structures hypostatiques [13]. Une manière simple d'assurer, a priori, la condition d'incompressibilité (2.6) consiste à l'introduire directement dans le principe couplé (2.1) à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange v . Ce dernier devient :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} [&\frac{1}{2} \dot{f}' N \dot{f} + \dot{f}' B y + \dot{f}' D q + v e' (B y + D q) \\ &+ \frac{1}{2} y' C y + \frac{1}{2} q' (K - S) q - \frac{1}{2} \dot{q}' M \dot{q}] dt = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

et les équations d'Euler-Lagrange associées, obtenues en variant successivement f , v , y et q , s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 B \ddot{y} + D \ddot{q} - N \ddot{f} &= 0 & (a) \\
 e' B y + e' D q &= 0 & (b) \\
 C y + B' \ddot{f} + B' e v &= 0 & (c) \\
 (K - S) q + M \ddot{q} + D' \ddot{f} + D' e v &= 0 & (d)
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} K-S & 0 & D'e & 0 \\ 0 & D & B'e & 0 \\ e'D & e'B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ y \\ v \\ f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & D' \\ 0 & 0 & 0 & B' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & B & 0 & -N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{y} \\ \ddot{v} \\ \ddot{f} \end{bmatrix} = 0
 \tag{2.10}$$

La condition d'incompressibilité (2.6), à présent assurée par la variation du multiplicateur v , demeure condition naturelle du principe modifié indépendamment de la singularité de la matrice N . Celle-ci peut donc être levée sans inconvénient par (2.7) qui, reportée dans (2.10), conduit à :

$$\begin{bmatrix} K-S & 0 & D'e \\ 0 & C & B'e \\ e'D & e'B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ y \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M + D N_{iso}^{-1} D' & D N_{iso}^{-1} B' & 0 \\ B N_{iso}^{-1} D' & B' N_{iso}^{-1} B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{y} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} = 0
 \tag{2.12}$$

C'est un problème aux valeurs propres classique avec un terme de contrainte linéaire et dont les matrices ne sont plus dégénérées. De plus, l'élimination complète des degrés de liberté du fluide au niveau de la résolution finale constitue une substantielle économie de calculs. Ces degrés de liberté peuvent être très facilement restitués a posteriori à l'aide de (2.7). On remarquera encore que la technique d'élimination des degrés de liberté de fluide est en tous points semblable à la technique de réduction de GUYAN couramment utilisée pour réduire l'ordre d'un système ([10],[11]).

Enfin, on observera que cette élimination n'affecte que la matrice des masses du système assemblé et non la matrice des raideurs qui ne subit qu'un simple compactage : ce point est très important car il préserve la possibilité d'assembler et de condenser séparément les matrices des raideurs et des masses du système. Ceci justifie a posteriori le recours à la technique des multiplicateurs de Lagrange de préférence à celle des matrices de projection, utilisée dans [13], qui présenterait ici le grave inconvénient de coupler l'assemblage des deux matrices.

3. DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS

Pour illustrer l'application de la méthode des éléments finis à l'étude du problème de l'interaction fluide-structure, nous nous limiterons au cas où la géométrie initiale du problème (état de référence) présente une symétrie de révolution.

Les modes de déformation pourront par contre être quelconques (axisymétriques ou asymétriques).

Dans un premier temps, les champs de déplacements de la structure et de la surface libre, ainsi que le champ de potentiel du fluide, sont rapportés à un système de coordonnées cylindriques (r, z, θ) puis développés en série de FOURIER suivant la coordonnée circonférentielle θ sous la forme :

$$u_r(r, z, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^1 u_{n,m}(r, z) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$u_z(r, z, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^1 w_{n,m}(r, z) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$u_\theta(r, z, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^1 v_{n,m}(r, z) \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\alpha_r(r, z, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^1 \alpha_{n,m}(r, z) \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\alpha_z(r, z, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^1 \beta_{n,m}(r, z) \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\alpha_\theta(r, z, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^1 \gamma_{n,m}(r, z) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\eta(r, z, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^1 \eta_{n,m}(r, z) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\phi(r, z, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^1 \phi_{n,m}(r, z) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

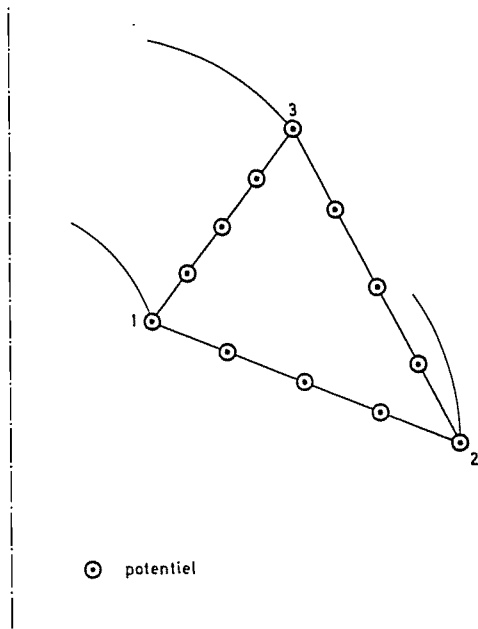
de manière à permettre, en jouant sur les paramètres n et m , la représentation d'un déplacement quelconque par superposition de modes de FOURIER circonférentiels. Cette décomposition, qui conduit à rechercher séparément les modes propres de périodicités circonférentielles différentes, s'avère très économique du point de vue du nombre de degrés de liberté à traiter et permet une parfaite séparation des modes propres de fréquences propres voisines correspondant à des périodicités circonférentielles différentes.

Pour toute périodicité donnée (n et m fixés), le problème tridimensionnel initial se ramène à un problème bidimensionnel équivalent, relatif à une section méridienne de référence, où les champs de déplacements

et de potentiels ne sont plus fonctions que des variables r et z . Ce sont ces fonctions que l'on discrétise par éléments finis.

Tous les modèles d'éléments finis qui vont être présentés sont basés sur une approximation polynomiale des champs précités à l'aide de polynômes complets de degré variable. Cette caractéristique originale autorise une grande souplesse au niveau de l'idéalisation puisque le simple fait d'augmenter ou de diminuer le degré des éléments permet de varier la finesse de la discrétisation sans qu'il soit pour autant nécessaire de modifier le maillage. On notera, en particulier, qu'un choix judicieux du degré des déplacements de surface libre permet de diminuer sensiblement le nombre des modes propres de surface libre associés lorsque ceux-ci, bien que susceptibles d'apparaître aux mêmes fréquences que les modes de couplage fluide-structure proprement dits, ne sont pas expressément désirés.

3.1. Élément fini de volume fluide



ÉLÉMENT DE VOLUME DE FLUIDE
(REPRÉSENTÉ AU DEGRÉ 4)

Il s'agit d'un élément de tore à section méridienne triangulaire (figure 3.1). Sa géométrie est complètement définie par les coordonnées r et z des trois sommets de cette section.

Le champ de potentiel ϕ y est approximé au moyen d'un polynôme complet de degré variable k dans les coordonnées r et z :

$$\phi_{n,m}(r,z) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} r^j z^{i-j}$$

Le degré variable k peut prendre des valeurs allant de 1 à 4, cette dernière valeur étant, pour des raisons qui apparaîtront plus loin, la plus courante. Cet élément contribue à la formation de la matrice des masses N du fluide définie par :

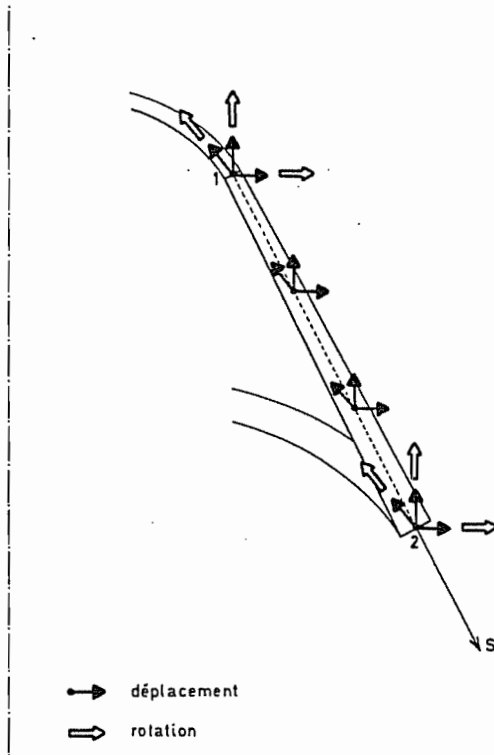
$$\frac{1}{2} \dot{f}' N \dot{f} = \int_{V_f} \rho_f \frac{D_i \dot{\phi}}{2} \frac{D_i \dot{\phi}}{2} dV$$

FIGURE 3.1

Sa contribution à la formation de la matrice des raideurs est identiquement nulle. Les paramètres du champs, en nombre $((k+1)(k+2))/2$, sont exprimés en fonction des valeurs locales du potentiel aux trois sommets, en $(k-1)$ points équidistants sur chacun des trois côtés et en $((k-1)(k-2))/2$ points intérieurs. Ces derniers dont le nombre correspond au nombre de "modes bulles" de l'élément, c'est-à-dire au nombre de polynômes de degré k qui prennent une valeur nulle sur le contour de l'élément et non nulle à l'intérieur, sont sans intérêt du point de vue de la connexion de l'élément et on choisit de les éliminer par une opération classique de condensation qui a pour effet de reporter leur contribution

sur les trois valeurs locales aux sommets et les trois $(k-1)$ valeurs locales d'interfaces au moyen desquelles se fait la connexion avec les éléments adjacents.

3.2. Élément fini de coque d'épaisseur modérée ([14],[15]) (Figure 3.2)



ÉLÉMENT TRONCONIQUE DE COQUE D'ÉPAISSEUR MODÉRÉE
(REPRÉSENTÉ AU DEGRÉ 3)

FIGURE 3.2

$$\alpha_{n,m} = \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i s^i$$

$$\beta_{n,m} = \sum_{i=0}^{k-1} \epsilon_i s^i$$

Il s'agit d'un élément tronconique de coque pour lequel on a tenu compte de la déformabilité à l'effort tranchant (théorie de REISSNER [16], NAGHDI [17], KALNINS [18]), sa géométrie est définie par les coordonnées r et z des deux extrémités du feuillet moyen.

Les champs de déplacements et de rotations, exprimés en fonction de la coordonnée courante s de la section méridienne du feuillet moyen, sont approximés au moyen de polynômes de degrés variables k et $(k-1)$ respectivement :

$$u_{n,m} = \sum_{i=0}^k \alpha_i s^i$$

$$v_{n,m} = \sum_{i=0}^k \beta_i s^i$$

$$w_{n,m} = \sum_{i=0}^k \gamma_i s^i$$

Le degré de variable k peut valoir 2 ou 3 mais seul le degré 3 garantit un comportement satisfaisant vis-à-vis de la flexion avec effort tranchant.

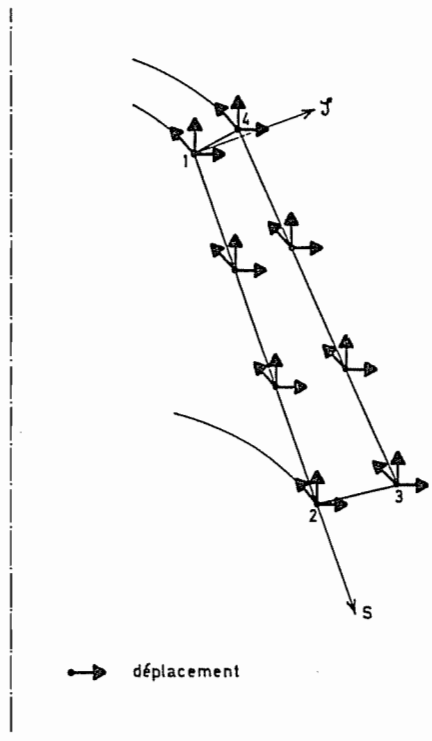
Cet élément contribue à la formation des matrices de raideur K et des masses M de la structure qui sont définies par :

$$\frac{1}{2} \dot{q}' K q = \int_{V_c} W(Du) dV \qquad \frac{1}{2} \dot{q}' M \dot{q} = \int_{V_c} \rho_c \frac{\dot{u}_i^2}{2} dV$$

Les paramètres des champs de déplacements et de rotations, en nombres respectifs $(k+1)$ et k sont exprimés en fonction des valeurs locales de ces champs aux deux noeuds d'extrémités ainsi que respectivement en $(k-1)$ et $(k-2)$ points équidistants pris le long du feuillet moyen.

Toutefois, lorsque l'élément est pris de degré 3, les rotations intermédiaires, qui sont inutiles pour sa connexion, sont éliminées par une opération classique de condensation qui en reporte les contributions sur les rotations d'extrémités. Cet élément se connecte aux éléments adjacents au moyen des déplacements et rotations des noeuds d'extrémités ainsi que par ses déplacements intermédiaires lorsqu'il est bordé sur sa longueur par un élément de volume élastique ou par un élément de connexion fluide-structure. Cette grande facilité de connexion avec des éléments de nature très différente constitue un avantage appréciable par rapport aux éléments basés sur la théorie de KIRCHHOFF-LOVE.

3.3. Élément fini spécialisé de volume élastique [19] (figure 3.3)



ÉLÉMENT SPÉCIALISÉ DE VOLUME ÉLASTIQUE
(REPRÉSENTÉ AU DEGRÉ 3)

FIGURE 3.3

Il s'agit d'un élément spécialisé de tore à section méridienne quadrangulaire destiné à idéaliser certaines parties de structure jugées trop épaisses pour obéir à une théorie de coque sans pour autant relever d'une théorie accordant la même importance aux dimensions longitudinales et transversales (c'est un élément particulièrement bien adapté à l'idéalisation de renforts épais ou de revêtements multicouches).

Sa géométrie, définie par les coordonnées r et z des quatre sommets de sa section méridienne, correspond à celle d'un quadrangle de forme plus ou moins allongée dont les grands côtés sont définis respectivement par les sommets 1-2 et 3-4, les petits côtés joignant respectivement les sommets 1-4 et 2-3.

Si nous désignons par s la coordonnée courante mesurée le long du grand côté 1-2 et par ζ la coordonnée courante de la perpendiculaire au sommet 1 à 1-2, les champs de déplacements de l'élément sont approximés par des polynômes de degré variable k en s et linéaires en ζ du type :

$$u_{n,m} = \sum_{i=0}^k (\alpha_i + \zeta \beta_i) s^i$$

$$v_{n,m} = \sum_{i=0}^k (\gamma_i + \zeta \delta_i) s^i$$

$$w_{n,m} = \sum_{i=0}^k (\epsilon_i + \zeta \eta_i) s^i$$

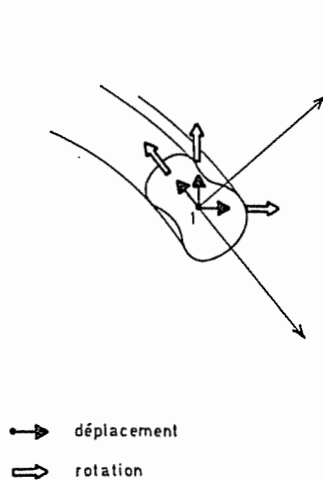
Le degré variable k peut prendre les valeurs 1, 2 ou 3. Cet élément contribue à la formation des matrices de raideur K et des masses M de la structure, telles que :

$$\frac{1}{2} q' K q = \int_{V_c} W(Du) dV$$

$$\frac{1}{2} \dot{q}' M \dot{q} = \int_{V_c} \rho_c \frac{\dot{u}_i^2}{2} dV.$$

Les paramètres des champs de déplacements, en nombre $2(k+1)$ sont exprimés en fonction des valeurs locales de ces champs aux quatre sommets ainsi qu'en $(k-1)$ points équidistants sur chacun des deux côtés principaux. Cet élément se connecte aux éléments adjacents par ses déplacements aux quatre sommets et ses déplacements d'interface : de ce fait, il ne peut être connecté à un élément de coque ou à un élément de couplage fluide-structure que le long de ses côtés principaux 1-2 et 3-4, tandis que le long des petits côtés 2-3 et 1-4, il ne peut être connecté qu'à des éléments de même type.

3.4. Élément fini de poutre de révolution (figure 3.4)



ELEMENT DE POUTRE DE REVOLUTION

FIGURE 3.4

Il s'agit d'un élément de poutre annulaire d'épaisseur modérée, c'est-à-dire avec déformation à l'effort tranchant, destiné à idéaliser des raidisseurs ou des couronnes dont les dimensions transversales sont suffisamment petites vis-à-vis du rayon pour justifier l'emploi d'une théorie de poutres. Il n'y a pas d'approximation polynomiale des trois champs de déplacements ni des trois champs de rotations qui ne sont fonction que de la variable circonférentielle θ et dont la discrétisation est entièrement prise en compte par le développement en séries de FOURIER circonférentielles. La géométrie de l'élément est définie par les coordonnées r et z de la section méridienne de sa fibre neutre ainsi que par l'orientation d'un de ses axes principaux d'inertie.

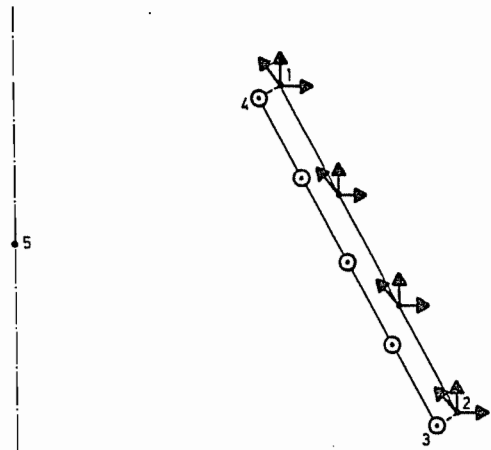
C'est un élément à champs complets, c'est-à-dire que ses trois déplacements et ses trois rotations généralisés sont alimentés en raideur et en masse. Il contribue à la formation des matrices des raideurs K et des masses M de la structure telles que :

$$\frac{1}{2} q' K q = \int_{V_c} W(Du) dV$$

$$\frac{1}{2} \dot{q}' M \dot{q} = \int_{V_c} \rho_c \frac{u_i^2}{2} dV.$$

Il se connecte aux noeuds des éléments de coque par ses trois déplacements et ses trois rotations ainsi qu'aux noeuds des éléments spécialisés de volume mais par ses trois déplacements uniquement.

3.5. Élément de connexion coque-fluide



→ déplacement
 ⊙ potentiel

ELEMENT DE COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE
 (EFFECTIVEMENT SANS EPAISSEUR)

degré de fluide 4
 degré de structure 3

FIGURE 3.5

Il s'agit d'un pseudo-élément de tronc de cône sans épaisseur que l'on intercale entre la structure et le fluide pour réaliser leur connexion. On y définit séparément l'interface de structure et l'interface de fluide, au moyen de quatre noeuds qui, s'ils sont géométriquement confondus deux à deux, n'en sont pas moins différents quant à leurs degrés de liberté (figure 3.5). La première interface appartient à la structure. Qu'il s'agisse d'un élément de coque ou d'un élément spécialisé de volume, le champ de déplacements est toujours un polynôme de degré variable k de la forme :

$$\begin{pmatrix} u_{nm} \\ v_{nm} \\ w_{nm} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^k \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} s^i$$

s étant la coordonnée courante du feuillet moyen de la coque ou de l'interface de l'élément de volume.

La seconde interface est une interface de fluide.

Le potentiel des déplacements y est discrétisé au moyen d'un polynôme de degré variable ℓ :

$$\phi_{nm} = \sum_{i=0}^{\ell} \delta_i s^i.$$

Les degrés du champ des déplacements et du potentiel sont indépendants à condition cependant de vérifier l'inégalité

$$k < \ell.$$

Cette condition, qui revient à dire qu'on ne définit pas plus de flux que ne le permet le degré du potentiel, est nécessaire pour éviter la formation de singularités dans la matrice des masses du problème assemblé.

La contribution S de cet élément à la matrice des raideurs est définie par :

$$\frac{1}{2} q' S q = \int_{S_f} \rho_f \vec{g} \cdot \vec{n} \frac{u_n^2}{2} dS.$$

L'élément apporte aussi une contribution à la matrice des masses, qui est la matrice de couplage D telle que :

$$\ddot{f}' D q = \int_{S_f} \rho_f \ddot{\phi} n_i u_i dS.$$

On a vu en outre, dans le cas $n=0$, $m=0$, qu'il y a lieu d'introduire une contrainte linéaire d'incompressibilité pour permettre de lever la singularité de la matrice N .

La contribution $e'D$ de l'élément à cette contrainte est définie par :

$$v e' D q = v \int_{S_f} \rho_f n_i u_i dS.$$

La présence du multiplicateur de LAGRANGE associé à cette contrainte linéaire nécessite la définition d'un cinquième noeud. Ce noeud est commun à tous les éléments de connexion fluide-coque et fluide-surface libre d'un même réservoir. Comme la position de ce noeud est indifférente, on peut convenir de la placer de telle façon que, pour tous les éléments de connexion fluide-coque, ce cinquième noeud soit situé du même côté que le fluide. C'est une façon simple de définir le sens de la normale extérieure.

On réalise la connexion de cet élément avec la structure en identifiant les trois déplacements aux noeuds et en $(k-1)$ points intermédiaires sur l'interface structure.

Les rotations ne sont jamais connectées.

La connexion au fluide est obtenue par identification du potentiel des déplacements aux deux noeuds de fluide et en $(l-1)$ points intermédiaires sur l'interface fluide.

3.6. Élément de connexion fluide-surface libre

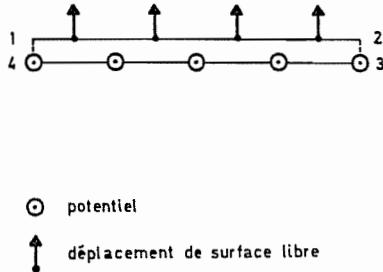
Pour réaliser la connexion entre le potentiel des déplacements discrétisé dans le fluide et les déplacements indépendants de surface libre, on utilise un pseudo-élément spécialisé. Il s'agit d'un disque, circulaire sans épaisseur, défini par quatre noeuds indépendants mais géométriquement confondus deux à deux (figure 3.6).

Sur la première interface, on définit un champ de déplacements de surface libre sous la forme d'un polynôme de degré variable k :

$$\eta_{nm} = \sum_{i=0}^k \alpha_i r^i$$

r étant la coordonnée radiale du disque.

La seconde interface appartient au fluide. Le potentiel des déplacements y est discrétisé au moyen d'un polynôme de degré variable l :



ELEMENT DE COUPLAGE FLUIDE - SURFACE LIBRE
(EFFECTIVEMENT SANS EPAISSEUR)

fluide de degré 4
surface libre de degré 3

FIGURE 3.6

$$\phi_{nm} = \sum_{i=0}^{\ell} \beta_i r^i.$$

Les degrés du champ de déplacements de surface libre et du potentiel sont soumis à la même condition, $k < \ell$, que dans l'élément de connexion fluide-coque, et ce pour les mêmes raisons.

La contribution C de cet élément à la matrice des raideurs est définie par :

$$\frac{1}{2} y' C y = \int_{\Gamma} \rho_f g \frac{\eta^2}{2} d\Gamma.$$

L'élément apporte aussi une contribution à la matrice des masses : c'est la matrice de couplage B telle que :

$$\ddot{f}' B y = \int_{\Gamma} \rho \ddot{\phi} \eta dS.$$

En outre, dans le cas ($n=0, m=0$), il y a lieu de faire participer l'élément à l'expression de la contrainte linéaire d'incompressibilité permettant de lever la singularité de la matrice N.

La contribution e'B de l'élément à cette contrainte est donnée par :

$$v e' B y = v \int_{\Gamma} \rho_f \eta dS.$$

On associe un cinquième noeud au multiplicateur de LAGRANGE v de la contrainte. Ce noeud, commun à tous les éléments de connexion fluide-coque et fluide-surface libre d'un même réservoir, peut avoir une position quelconque par rapport à la surface libre.

On réalise la connexion de cet élément avec le fluide en identifiant le potentiel des déplacements aux noeuds de fluide et en $(\ell-1)$ points intermédiaires sur l'interface fluide.

Quant aux déplacements de surface libre, ils sont libres de toute condition a priori et l'absence des dérivées de ces déplacements dans le principe même à conclure qu'ils n'ont aucune raison d'être continus. On n'exprimera donc pas les paramètres du champ des déplacements de surface libre en fonction de ses valeurs locales aux extrémités de l'élément, ce qui aurait pour effet de mettre en évidence une discontinuité gênante d'un élément à l'autre, mais uniquement en fonction de ses valeurs locales en $(k+1)$ points de l'interface.

Ces points sont choisis tels que leur distance soit constante, même au passage d'un élément à l'autre, du moins pour un découpage régulier. Ainsi, pour définir les $(k+1)$ points intermédiaires, choisit-on les rayons successifs :

$$r_i = \left[r_0 - \frac{r_f - r_0}{2(k+1)} \right] + \frac{i}{k+1} (r_f - r_0)$$

où r_0 et r_f sont les rayons respectifs des noeuds d'extrémités de l'élément.

On notera encore que si le degré du polynôme des déplacements de surface libre ne peut ni égaler, ni excéder celui du potentiel dans le fluide, rien ne s'oppose à ce qu'il lui soit franchement inférieur. Or, le nombre de modes de surface libre dont une idéalisation peut rendre compte est directement proportionnel au nombre d'éléments de surface libre et à leur degré. Un moyen efficace pour éviter la prolifération de ces modes, généralement peu intéressants, consiste donc à limiter le nombre d'éléments de surface libre et à les générer avec un degré peu élevé (degré zéro éventuellement). Les résultats obtenus jusqu'à présent semblent montrer que cet artifice n'entraîne pas de distorsion appréciable des autres modes et fréquences propres du système.

3.7. Assemblage du problème aux valeurs propres de l'ensemble structure-fluide avec réduction de l'ordre du système par condensation de degrés de liberté

Nous avons déjà eu l'occasion de souligner (paragraphe 2.2) l'analogie entre l'élimination des degrés de liberté de fluide et la réduction de l'ordre d'un système élastique discret par la méthode de GUYAN [10] (cf. également [8],[11],[12]).

Rappelons que cette méthode, appliquée aux problèmes dynamiques classiques, consiste à effectuer en premier lieu l'assemblage et la condensation de la matrice des raideurs, puis, en second lieu, l'assemblage et la condensation de la matrice des masses, cette deuxième étape étant conditionnée par la condensation préalable de la matrice des raideurs. A l'inverse, pour un problème dynamique couplé structure-fluide, nous avons vu que la condensation des degrés de liberté de fluide se faisait sur la matrice des masses. Lorsqu'on procède directement à cette condensation, sans levée préalable de la singularité de la matrice N ([6],[7]), celle-ci se termine par la mise en évidence de cette singularité et l'apparition dans la matrice des masses de la contrainte d'incompressibilité. Il convient alors de reporter cette contrainte dans la matrice des raideurs avant de pouvoir débiter la condensation des degrés de liberté de structure. Cette technique présente donc le grave inconvénient de perturber l'ordre d'assemblage des deux matrices et d'exiger une procédure en deux étapes : une première pour condenser les degrés de liberté de fluide et traiter la contrainte d'incompressibilité qui résulte de leur élimination et une seconde éventuelle pour condenser le problème aux valeurs propres ainsi modifié. Outre la lourdeur du procédé, il est clair qu'à la fin de la première étape, les matrices des raideurs et des masses doivent obligatoirement contenir tous les degrés de liberté de structure qui sont adjacents au fluide ainsi que les degrés de liberté de surface libre, ce qui, pour de gros problèmes, peut rapidement conduire à des dimensions prohibitives.

Par contre, si nous procédons à la levée préalable de la singularité de la matrice N par l'introduction a priori de la contrainte d'incompressibilité dans la matrice des raideurs (ce qui n'augmente que d'une unité le nombre total de degrés de liberté à traiter), il en résulte que cette dernière n'est plus du tout affectée par l'élimination des degrés de liberté de fluide. De ce fait, il redevient possible de l'assembler et de la condenser classiquement préalablement à toute opération sur la matrice des masses. On procède ensuite à l'assemblage et à la condensation de cette

dernière qui s'effectue en deux temps : dans un premier temps on élimine les degrés de liberté de fluide, puis immédiatement après, on condense les degrés de liberté de structure qui ont déjà été éliminés de la matrice des raideurs.

Illustrons ces considérations en désignant par q_R les déplacements de structure que nous désirons conserver, par q_C ceux que nous désirons condenser par la méthode de GUYAN, et par q_L les degrés de liberté de fluide (les déplacements de la surface libre et le multiplicateur de la contrainte linéaire d'incompressibilité sont supposés inclus dans q_R et q_C). Après regroupement, nous pouvons réécrire (2.10) sous la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} K_{RR} & K_{RC} & 0 \\ \hline K_{CR} & K_{CC} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) - \omega^2 \left(\begin{array}{c|c|c} M_{RR} & M_{RC} & M_{RL} \\ \hline M_{CR} & M_{CC} & M_{CL} \\ \hline M_{LR} & M_{LC} & M_{LL} \end{array} \right) \begin{array}{c} q_R \\ q_C \\ q_L \end{array} = 0 \quad (3.1)$$

particularisée au cas du mouvement harmonique (la matrice M_{LL} n'est autre que la matrice (-N) désingularisée).

A l'aide de la relation classique

$$q_C = - K_{CC}^{-1} K_{CR} q_R \quad (3.2)$$

nous condensons la matrice des raideurs qui devient :

$$\bar{K}_{RR} = K_{RR} - K_{RC} K_{CC}^{-1} K_{CR} \quad (3.3)$$

puis nous éliminons q_L de la matrice des masses par la relation (2.7) :

$$q_L = - M_{LL}^{-1} (M_{LR} q_R + M_{LC} q_C) \quad (3.4)$$

ce qui nous conduit à une nouvelle matrice des masses :

$$\begin{array}{c|c} M_{RR}^* & M_{RC}^* \\ \hline M_{CR}^* & M_{CC}^* \end{array} \quad (3.5)$$

avec :

$$\begin{aligned} M_{RR}^* &= M_{RR} - M_{RL} M_{LL}^{-1} M_{LR} \\ M_{CR}^* &= M_{CR} - M_{CL} M_{LL}^{-1} M_{LR} \\ M_{CC}^* &= M_{CC} - M_{CL} M_{LL}^{-1} M_{LC} \end{aligned} \quad (3.6)$$

(On remarquera l'analogie complète avec la condensation de la matrice des raideurs).

Enfin, nous procédons à la condensation de la matrice des masses modifiée qui devient finalement :

$$\bar{M}_{RR} = M_{RR}^* - K_{RC} K_{CC}^{-1} M_{CR}^* - M_{RC}^* K_{CC}^{-1} K_{CR} + K_{RC} K_{CC}^{-1} M_{CC}^* K_{CC}^{-1} K_{CR}. \quad (3.7)$$

Cette procédure est parfaitement répétitive et s'intègre tout naturellement dans le cadre de la méthode des sous-structures en série, telle qu'elle est décrite dans [8] et [11] : à chaque sous-structure on élimine simultanément les degrés de liberté de fluide ayant leurs connexions saturées et les degrés de liberté de structure jugés superflus.

La restitution des degrés de liberté éliminés se fait dans l'ordre inverse : pour chaque sous-structure on restitue d'abord q_C par la relation :

$$q_C = - K_{CC}^{-1} K_{CR} q_R \quad (3.8)$$

puis q_L par la relation

$$q_L = - M_{LL}^{-1} (M_{LR} q_R + M_{LC} q_C). \quad (3.9)$$

La possibilité de calculer un premier itéré des modes propres ainsi que des bornes à l'erreur commises sur l'estimation des valeurs propres ([11],[20]) reste acquise au même titre que pour un problème dynamique classique vu que la condensation des degrés de liberté de fluide est parfaitement rigoureuse et n'entraîne à elle seule aucune détérioration du spectre propre du système.

4. APPLICATIONS NUMERIQUES

4.1. Réservoir cylindrique rigide rempli de liquide (figure 4.1)

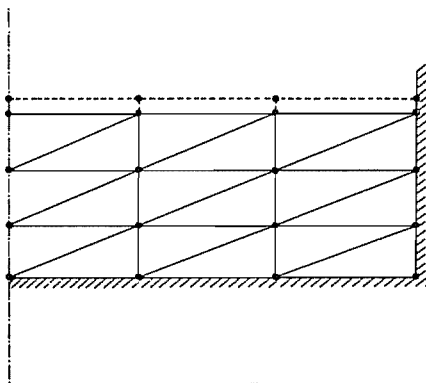


FIGURE 4.1

Il s'agit de déterminer la fréquence des oscillations d'un liquide dans un réservoir cylindrique rigide de rayon r_0 et de hauteur h . A la paroi, le liquide est immobile. Cette condition s'obtient simplement en laissant libre le potentiel des déplacements à la surface rigide. Il n'y a donc pas lieu d'utiliser dans ce cas les éléments de connexion fluide-structure.

Le découpage en éléments finis est illustré en figure (4.1).

Le problème a une solution analytique bien connue et les pulsations propres sont données par :

$$\omega_p^2 = \frac{\lambda_p}{r_0} g \cdot \text{Th} \left(\frac{h \lambda_p}{r_0} \right)$$

où λ_p est le $p^{\text{ème}}$ zéro de l'équation

$$J_n(\lambda) = 0$$

n étant la périodicité circonférentielle du mode considéré.

Le problème a été traité pour $n=0$, en discrétisant le fluide aux degrés 3 et 4, pour $n=1$, au degré 4; enfin, pour $n=2$, au degré 4.

La comparaison des résultats obtenus avec les solutions analytiques est illustrée ci-après.

$n = 0$	analytique	degré 3	degré 4
ω_1	2,642	2,642	2,642
ω_2	3,732	3,735	3,732
ω_3	4,509	4,546	4,510
ω_4	5,162	5,291	5,173
ω_5	5,739	6,175	5,789

$n = 1$	analytique	degré 4
ω_1	1,519	1,520
ω_2	3,220	3,220
ω_3	4,127	4,128
ω_4	4,838	4,842
ω_5	5,452	5,476

$n = 2$	analytique	degré 4
ω_1	2,265	2,265
ω_2	3,645	3,645
ω_3	4,464	4,464
ω_4	5,132	5,141
ω_5	5,718	5,758

On constate que la concordance est excellente dans tous les cas. Pour le cas $n=2$, l'analyse a demandé 63 secondes CPU sur IBM 370/158. Le problème comportait 114 degrés de liberté qui ont été condensés à 12 au terme d'une division en 4 sous-structures.

4.2. Hémisphère élastique rempli de liquide

Cet exemple a été repris de la référence [3]. Les données sont les suivantes :

Rayon de l'hémisphère	: 200. in.
Épaisseur de la coque	: 0.1 in.
Module d'YOUNG	: 10^7 psi.
Coefficient de POISSON	: 0.3
Masse volumique de la coque	: $2.59 \cdot 10^{-4}$ lbs.sec ² /in ⁴
Masse volumique du liquide	: $1.06 \cdot 10^{-4}$ lbs.sec ² /in ⁴ .

Les conditions aux limites sont constituées par un appui simple à l'équateur.

La figure 4.2 illustre le découpage en éléments finis. Le fluide est pris de degré 4, la coque et la surface libre de degré 3.

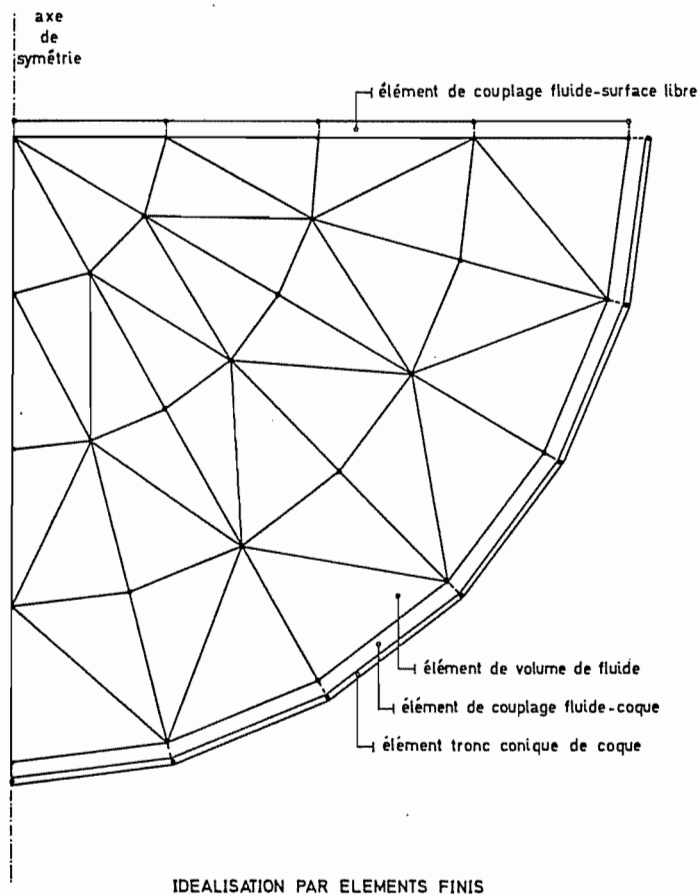


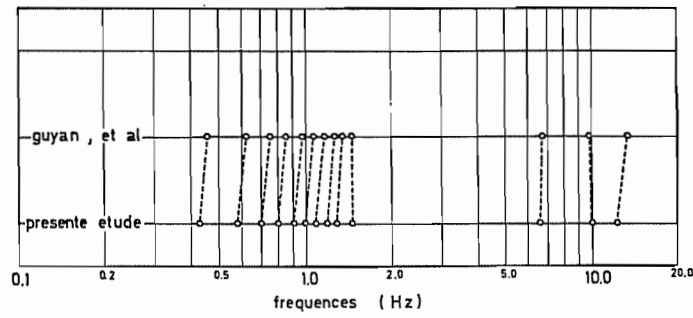
FIGURE 4.2

La figure 4.3 montre la comparaison des fréquences propres avec celles obtenues par GUYAN et al.

Les figures 4.4 à 4.8 représentent les modes propres les plus significatifs parmi ceux obtenus.

On remarquera ici encore le très bon accord avec les résultats de la référence [3] en ce qui concerne l'ensemble des fréquences propres et la forme des premiers modes de surface libre. L'accord est moins bon en ce qui

concerne la forme des modes de couplage coque-fluide. A ce sujet, il convient de remarquer que les déformées de surface libre obtenues dans [3] semblent peu conformes à la réalité, contrairement à celles obtenues par la présente formulation.



COMPARAISON DES RESULTATS

FIGURE 4.3

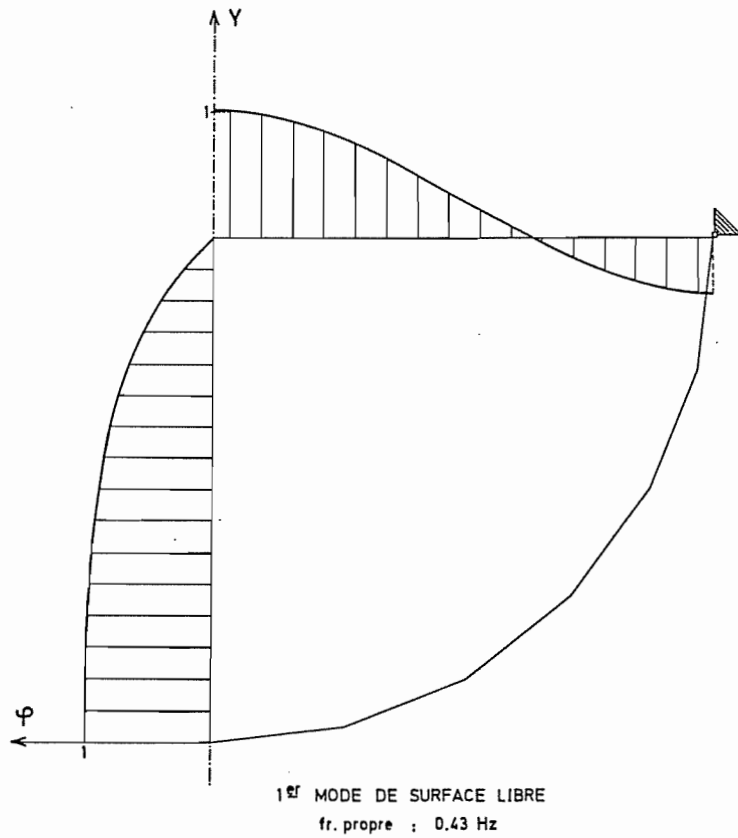
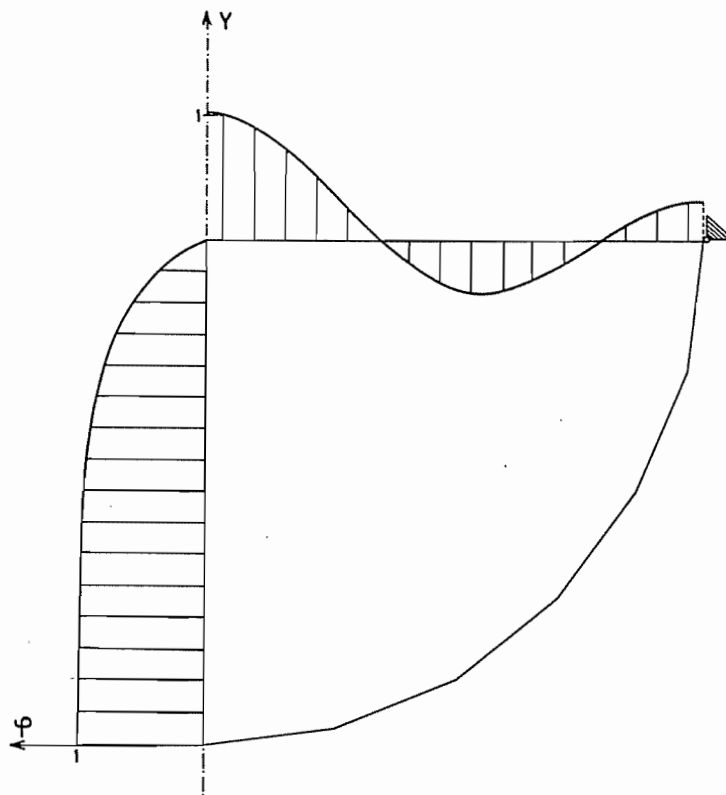
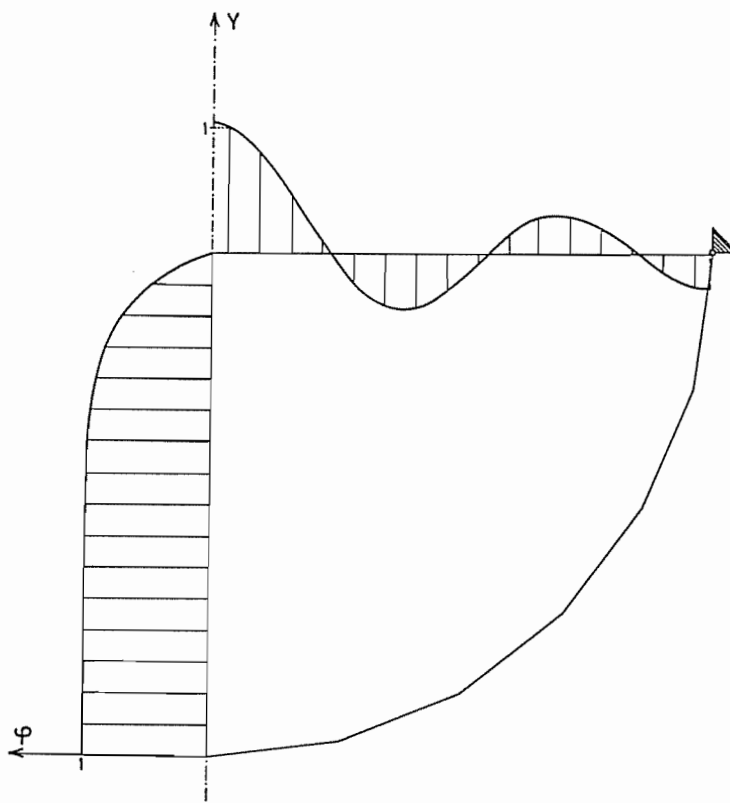


FIGURE 4.4



2^{ème} MODE DE SURFACE LIBRE
fr. propre : 0.58 Hz

FIGURE 4.5



3^{ème} MODE DE SURFACE LIBRE
fr. propre : 0.70 Hz

FIGURE 4.6

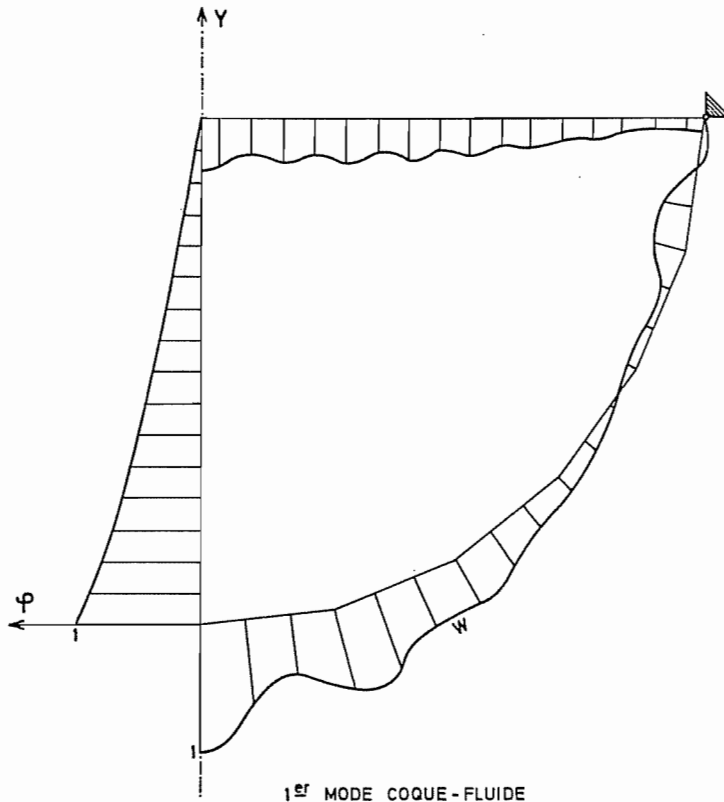


FIGURE 4.7

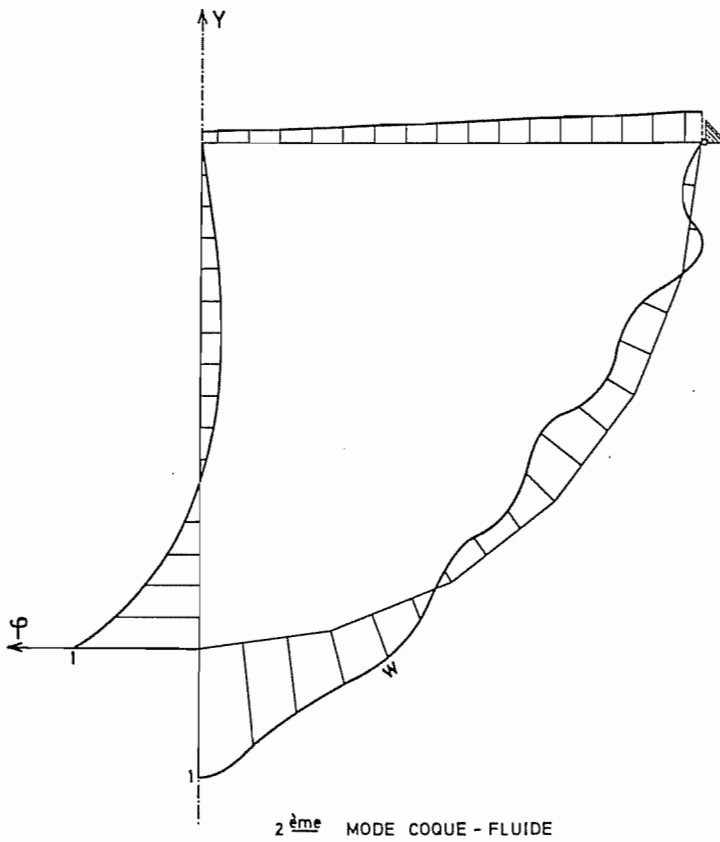


FIGURE 4.8

En ce qui concerne les déformées de la coque, les formes plus tourmentées obtenues ici peuvent s'expliquer par le fait qu'on a tenu compte de la déformation à l'effort tranchant, ce qui n'était pas le cas dans [3].

De plus, il s'agit d'un problème où la masse du liquide est très grande vis-à-vis de la masse de la coque : celle-ci étant non raidie, les déformées trouvées semblent donc plus conformes à la réalité que celles, très régulières, obtenues dans [3].

Cette analyse a nécessité 163 secondes CPU sur ordinateur IBM 370/158 dans une partition de 256 K bytes de mémoire centrale. L'idéalisation comportait 266 degrés de liberté qui ont été condensés à 52 (dont 16 de surface libre) au terme d'une division en 8 sous-structures. L'analyse modale a porté sur le calcul des 18 premiers modes propres parmi lesquels figuraient les 15 modes de surface libre dont l'idéalisation permettait de rendre compte (16 D.D.L. de surface libre moins 1 en raison de la contrainte d'incompressibilité).

Afin d'utiliser l'aptitude du présent formalisme à limiter le nombre de modes de surface libre quand ceux-ci ne sont pas désirés, le même problème a été repris avec rigoureusement le même découpage en éléments finis et les mêmes degrés pour le fluide et la coque mais en spécifiant le degré 0 pour les déplacements de surface libre. Il n'y a donc plus que 4 degrés de liberté de surface libre sur un total de 254, condensé à 40 pour la résolution finale.

Les modes propres de surface libre représentables ne sont plus qu'au nombre de 3 et le troisième mode de couplage coque-fluide, qui était le 18ème mode de la première idéalisation, est à présent le 6ème. On économise donc le calcul de 12 modes de surface libre et le temps de résolution, dans les mêmes conditions, n'est plus que de 117 secondes CPU.

Le tableau suivant illustre les écarts enregistrés sur les fréquences propres :

Nature des modes propres	Surface libre de degré 3		Surface libre de degré 0	
	N°	Fréquence Hz	N°	Fréquence Hz
1ère surface libre	1	0.42656	1	0.44134
2ème surface libre	2	0.58257	2	0.64058
3ème surface libre	3	0.70295	3	0.80039
1ère coque-fluide	15	6.48249	4	6.48193
2ème coque-fluide	17	9.97342	5	9.97237
3ème coque-fluide	18	12.31327	6	12.29545

On remarquera que les fréquences propres des modes de couplage coque-fluide ne sont pratiquement pas affectées (moins de 2‰) par la réduction du degré de la surface libre.

4.3. Etage "L17" du lanceur "Diamant B"

Le lanceur "Diamant B" complet est représenté à la figure 4.9.

Le calcul par éléments finis porte sur son premier étage "L17" constitué de deux réservoirs cylindriques à fonds héli-ellipsoïdaux dont on désire déterminer le comportement dynamique, principalement vis-à-vis de l'effet "POGO", pour un taux de vidange correspondant à 25 % d'ergols consommés. La structure "L17" ainsi que sa modélisation par éléments finis sont représentés à la figure 4.10. Cette dernière comporte 20 éléments de coque de degré 3, 20 éléments de fluide de degré 4. La surface libre est prise de degré 0. De cette façon, il n'apparaît par le calcul aucun mode de surface libre, et les premiers modes obtenus sont directement les modes de couplage fluide-coque. L'idéalisation comporte 444 degrés de liberté qui, après condensation des fluides se réduisent à 95 pour la résolution finale.

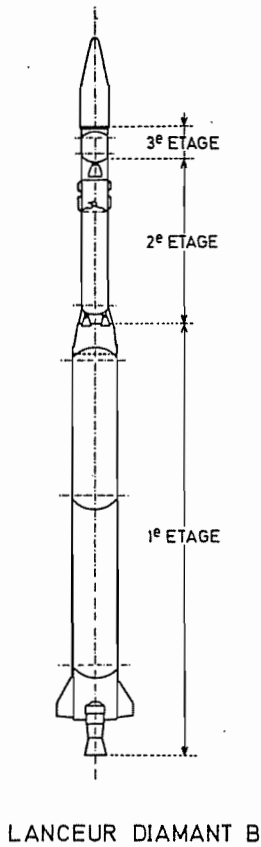


FIGURE 4.9

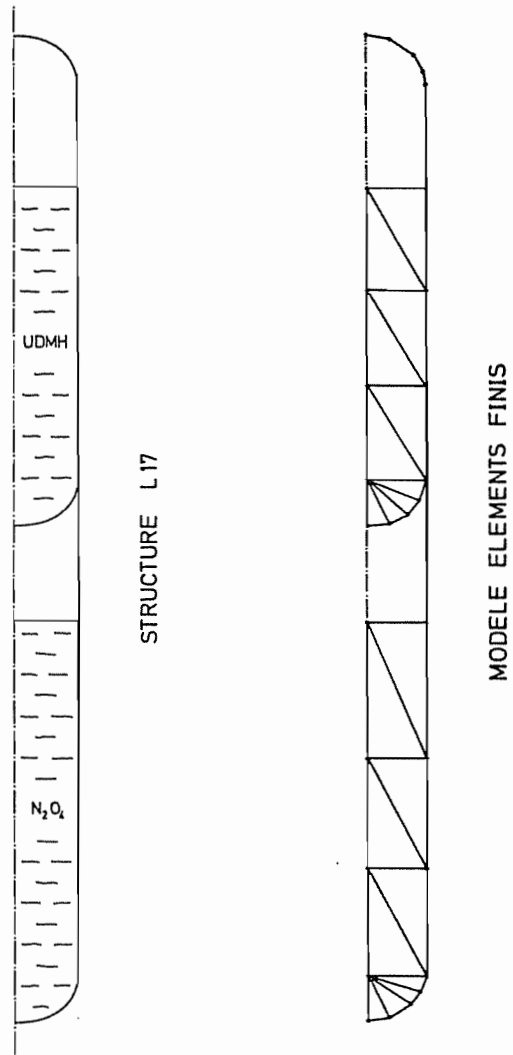


FIGURE 4.10

Le calcul prévoit, pour les deux premiers modes, les fréquences et masses généralisées suivantes :

	f	μ
mode 1	33,189 Hz	$1407 \cdot 10^3 \text{ kg m}^2$
mode 2	57,45 Hz	7064,8 kg m^2

Ces valeurs sont en bon accord avec les mesures réelles ainsi qu'avec d'autres résultats numériques obtenus par la méthode d'ARCHER et RUBIN, la forme très élancée de la structure étudiée se prêtant assez bien à l'utilisation de celle-ci, ce qui pourrait ne pas être le cas pour des structures plus évasées.

La figure 4.11 présente la forme du premier mode propre.

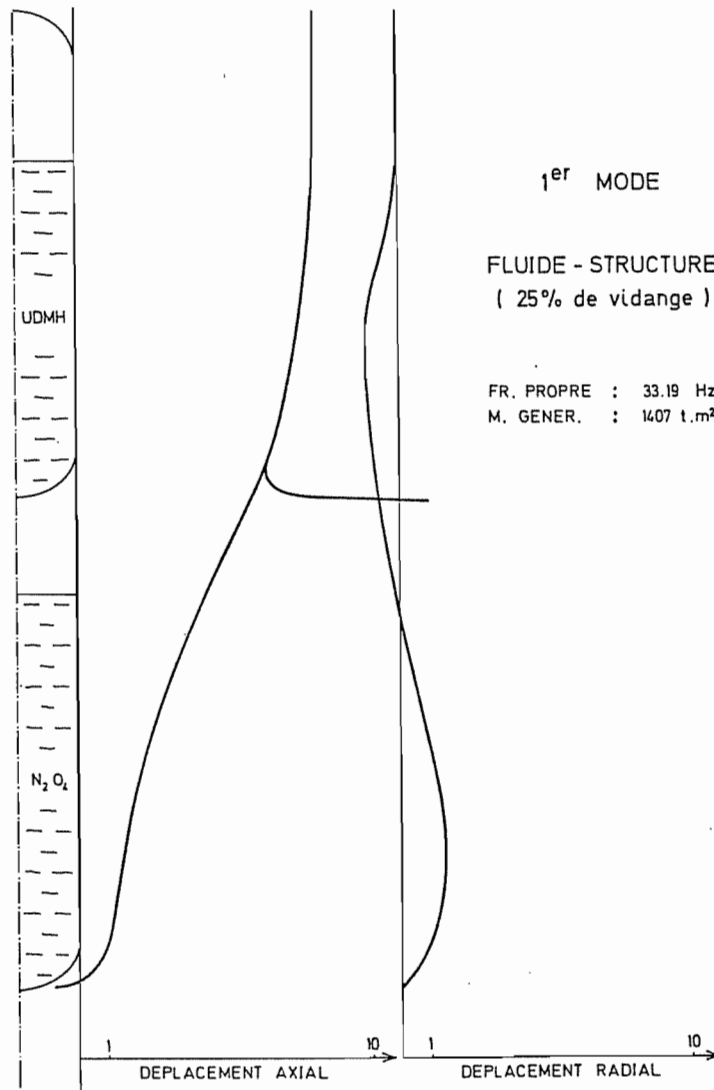


FIGURE 4.11

On trouvera à la figure 4.12 la courbe des pressions le long de l'axe de symétrie.

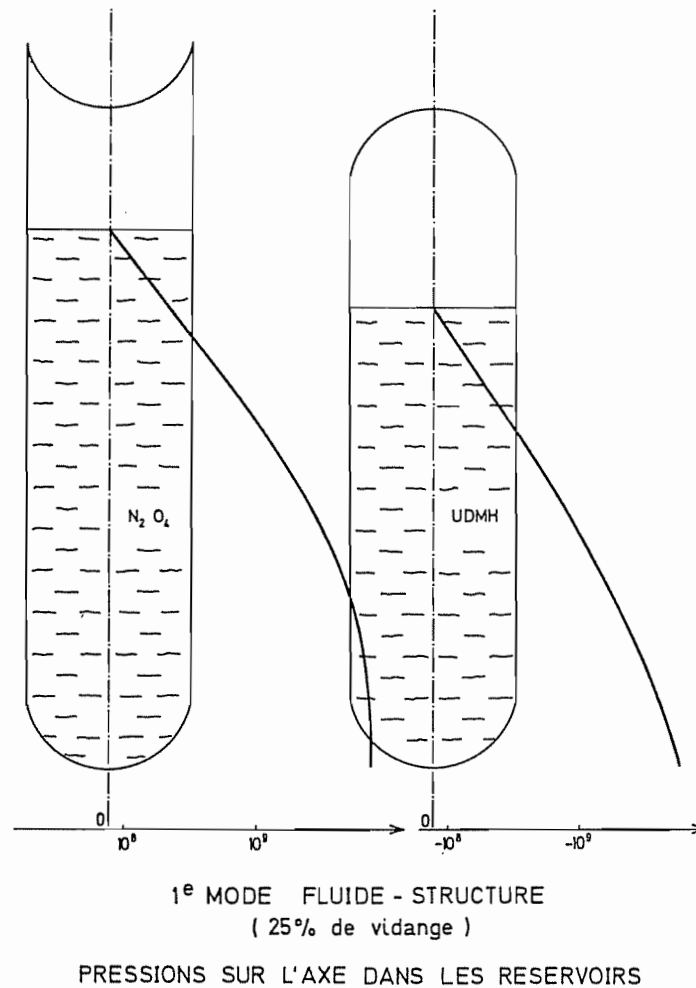
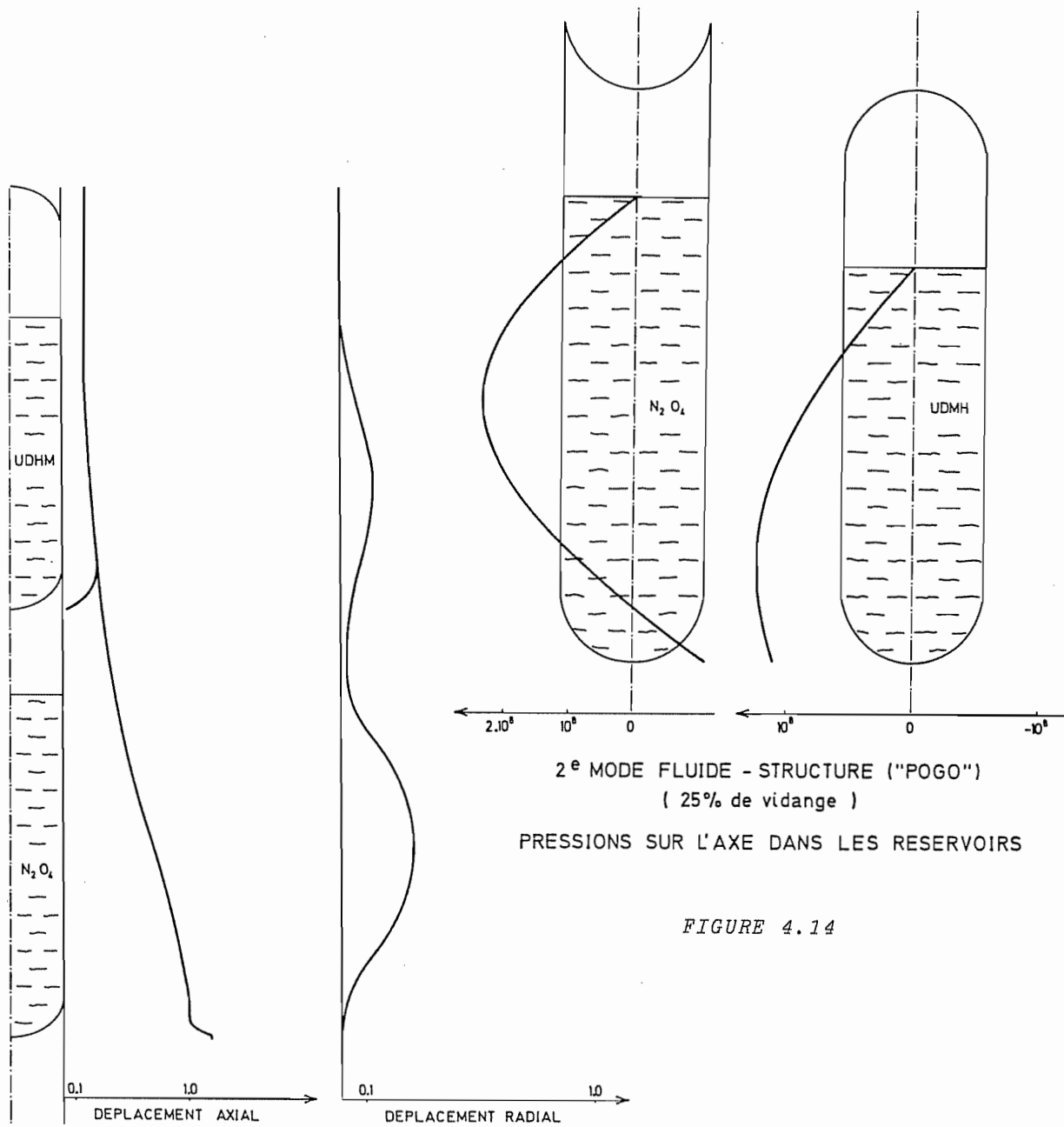


FIGURE 4.12

Dans l'évaluation de la pression, on a négligé la contribution du potentiel gravifique, ce terme étant très faible devant le potentiel des déplacements.

Le second mode, qui correspond à l'effet "POGO", est représenté à la figure 4.13. On remarquera l'importance des déplacements verticaux au fond du réservoir inférieur. Les pressions sont représentées à la figure 4.14.

Cette analyse a nécessité 140 secondes CPU sur ordinateur CDC 6600-3.4.



2^e MODE FLUIDE - STRUCTURE ("POGO")
(25% de vidange)

PRESSIONS SUR L'AXE DANS LES RESERVOIRS

FIGURE 4.14

2^e MODE

FLUIDE-STRUCTURE ("POGO")
(25% de vidange)

FR. PROPRE : 57.45 Hz
M. GENER. : 7064.8 Kg^m²

FIGURE 4.13

CONCLUSION

La présente étude a montré qu'en partant d'un principe variationnel purement lagrangien dans lequel le fluide est effectivement décrit par son potentiel des déplacements on arrivait à une formulation élégante et complète du problème hydro-élastique. Ce formalisme se prête extrêmement bien à une discrétisation par éléments finis de l'ensemble fluide-structure, conduisant ainsi à une méthode de résolution homogène et efficace. La discrétisation du potentiel des déplacements dans le fluide, outre l'avantage d'être particulièrement économique du point de vue nombre de degrés de liberté à traiter puisqu'il s'agit d'un champ scalaire, fournit une description parfaitement satisfaisante du mouvement du fluide et permet d'accéder directement à la connaissance locale de la pression au sein de ce dernier. Nous avons déjà eu l'occasion de souligner que cette condition était essentielle pour la prévision de l'effet "POGO". La discrétisation indépendante des déplacements de la surface libre permet une interprétation aisée de la forme des modes propres tout en offrant, grâce au degré variable, une possibilité de minimiser le nombre de modes de surface libre seule représentables par une idéalisation donnée, et ce sans altérer de manière sensible les autres modes propres du système.

Par ailleurs, la possibilité de condenser simultanément, dans le cadre d'une méthode classique de sous-structures en série, tous les degrés de liberté de fluide et une partie des degrés de liberté de structure permet d'envisager le traitement de systèmes à grand nombre de degrés de liberté.

Enfin, les exemples traités, qui se sont avérés être en excellent accord, tant avec des solutions théoriques qu'avec des résultats numériques et expérimentaux, confirment la validité de la formulation initiale et de sa mise en oeuvre pratique.

* *
*

REFERENCES

- [1] ARCHER, J.S. and RUBIN, C.P., "Improved linear axisymmetric shell - fluid model for launch vehicle longitudinal response analysis". AFFDL-TR-66-80, pp. 823-847.
- [2] KHABBAZ, G.R., "Dynamic behaviour of liquids in elastic tanks". AIAA Journal, vol.9, N° 10, October 1971, pp. 1985-1990.
- [3] GUYAN, R.J. - UJIHARA, B.H. - WELCH, P.W., "Hydroelastic of axisymmetric systems by a finite element method". AFFDL-TR-68-150, pp. 1165-1203.
- [4] The NASTRAN Theoretical Manual (Level 15). Ed. R.H. McNEAL, NASA SP-221(01)-1972.
- [5] PIN TONG, "Liquid sloshing in an elastic container". California Institute of Technology, Pasadena, AS et SR-66-0943 (1966).
- [6] ANQUEZ, L. - BERGER, H. - OHAYON, R. - VALID, R., "Vibrations of tanks partially filled with liquids". Communication présentée au Symposium international sur l'application de la méthode des éléments finis aux problèmes d'écoulements, Swansea (U.K.), 7-11 janvier 1974.
- [7] BERGER, H. - BOUJOT, J. - OHAYON, R., "Un problème spectral en mécanique des vibrations : calcul des réservoirs élastiques partiellement remplis de liquide". Article soumis pour publication dans le Journal of Math. Analysis, document ONERA T.P. 1364 F (1974).
- [8] GERADIN, M. - HOGGE, M. - HUCK, A. et SANDER, G., "Manuel théorique S.A.M.C.E.F.", Document L.T.A.S., IF-4.
- [9] "Manuel d'utilisation S.A.M.C.E.F.". Document L.T.A.S., IF-5.
- [10] GUYAN, R.J., "Reduction of stiffness and mass matrices". AIAA Journal, vol.3, No.2, Feb. 1965.
- [11] GERADIN, M., "Analyse dynamique duale des structures par la méthode des éléments finis". Thèse de doctorat, Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, Collection des Publications, n° 36, 1973.
- [12] FRAEIJIS de VEUBEKE, B.M. - GERADIN, M. - HUCK, A., "Structural Dynamics". Centre International des Sciences Mécaniques, Udine (Italie), textes de la session d'été, juillet 1972, Springer Verlag, Wien - New York.
- [13] FRAEIJIS de VEUBEKE, B.M., "Iteration in semi definite eigenvalue problem". J.A.S., vol. 22, n° 10, Oct. 1955, pp. 710-720.
- [14] HUCK, A. - MOL, A. - IDELSOHN, S. et DEBONGNIE, J.F., "Vibrations asymétriques d'une coque de révolution autour d'un état d'équilibre thermoélastique". L.T.A.S., rapport interne VF-22, 1974.
- [15] DEBONGNIE, J.F., "Elément de coque à géométrie de révolution". L.T.A.S., rapport interne VF-24, 1974.
- [16] REISSNER, E., "On some problems in shell theory". Structural Mechanics, Pergamon Press, 1960, pp. 74-114.

-
- [17] NAGHDI, P.N., "Fundations of elastic shell theory". Progress in Solid Mechanics, vol. IV, North Holland Publishing Company, Amsterdam.
- [18] KALNINS, A., "Static, free vibrations and stability analysis of thin, elastic shells of revolution". AFFDL-TR-68-144, March 1969.
- [19] DELCOURT-BON, C., "Elément de volume pour multicouches à géométrie axisymétrique". L.T.A.S., rapport interne VF-25, 1974.
- [20] GERADIN, M., "Error bounds for eigenvalue analysis by elimination of variables". Journal of Sound and Vibration, vol. 19, No.1, 1971.
- [21] PINSON, L.D. - BROWN, C.G., "A finite element method for nonaxisymmetric vibration of pressurized shells of revolution partially filled with liquid". AIAA Paper No. 73-399.

* *
*