UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION

PROBLEMES ELLIPTIQUES AVEC LIAISONS

J.F. DEBONGNIE

Rapport LMF/D34, janvier 1994

1. Introduction

Le présent rapport présente la théorie des problèmes elliptiques liés, pour lesquels il existe deux grandes méthodes de résolution, la *dualisation* et la *pénalisation*. La première fait intervenir des champs de multiplicateurs lagrangiens. Bien qu'il s'agisse d'une méthode déjà fort ancienne, sa justification théorique, due à Brezzi, ne date que de 1974. Nous donnons de cette théorie uneprésentation particulièrement élémentaire qui ne fait guère intervenir qu'un peu de géométrie hilbertienne. Axée sur la construction de la solution, la démarche adoptée fait ressortir le caractère *naturel* des deux conditions de Brezzi. Dans le prolongement de cette analyse, il était rationnel d'envisager également la méthode de pénalisation, souvent préférée à la première pour sa simplicité de mise en oeuvre. L'étude de cette méthode montre que sa convergence n'est assurée que moyennant des hypothèses le plus souvent équivalentes aux conditions de Brezzi.

2. Problème variationnel lié

Soient V et P deux espaces de Hilbert. On se donne deux formes bilinéaires

$$(u,v) \in V\times V \longmapsto a(u,v) \in \mathbb{R}$$

et

$$(p,v) \in P\times V \longmapsto b(p,v) \in \mathbb{R}$$

Ces deux formes bilinéaires sont supposées bornées:

$$|a(u,v)| \le M \,\|u\|_V \,\|v\|_V$$

$$|b(p,v)| \le N \,\|p\|_P \,\|v\|_V$$

En outre, la forme bilinéaire $a(u,v)$ est supposée symétrique:

$$a(u,v) = a(v,u)$$

Soient alors deux formes linéaires

$$u \in V \longmapsto f(u) \in \mathbb{R}$$

$$p \in P \longmapsto g(p) \in \mathbb{R}$$

également bornées sur leur espace de définition respectif:

$$\|f\|_{V'} = \sup_{v \in V-\{0\}} \frac{|f(v)|}{\|v\|_V} < \infty$$

$$\|g\|_{P'} = \sup_{p \in P-\{0\}} \frac{|g(p)|}{\|p\|_P} < \infty$$

On désire alors résoudre le problème variationnel suivant:

Chercher le couple $(u,p) \in V \times P$ tel que

$$\begin{cases} (\forall v \in V) \quad a(u,v) + b(p,v) = f(v) & (1) \\ (\forall q \in P) \quad b(q,u) = g(q) & (2) \end{cases}$$

Avant de nous pencher sur les conditions d'existence de la solution, il est intéressant d'interpréter ce problème au sens du calcul des variations. En vertu des équations (1) et (2), on a, pour tout $\delta u \in V$,

$$a(u,\delta u) + b(p,\delta u) - f(\delta u) = 0$$

et pour tout $\delta p \in P$,

$$b(\delta p,u) - g(\delta p) = 0$$

La somme de ces deux relations donne

$$a(u,\delta u) + b(p,\delta u) + b(\delta p,u) - f(\delta u) - g(\delta p) = 0$$

soit

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} a(u,u) + b(p,u) - f(u) - g(p) \right\} = 0$$

Le problème posé revient donc à chercher le point stationnaire de la fonctionnelle

$$\mathcal{E}(u,p) = \frac{1}{2} a(u,u) + b(p,u) - f(u) - g(p)$$

Remarquons cependant qu'il ne s'agit pas d'un problème de minimum, car

$$\delta^2\mathcal{E} = a(\delta u,\delta u) + b(\delta p,\delta u)$$

n'est pas définie positive: en changeant le signe de δp, on change celui de $b(\delta p,\delta u)$. C'est donc un *problème de point de selle.*

3. Forme opératorielle des équations (1) et (2)

Les espaces V et P étant de Hilbert, on peut tirer profit du théorème de représentation des fonctionnelles de F.RIESZ qui permet d'écrire les équations (1) et (2) sous une autre forme. Tout d'abord, pour u donné, l'application

$$v \longmapsto a(u,v)$$

est une fonctionnelle linéaire bornée, qui peut se mettre sous la forme

$$a(u,v) = (Au,v)_V \tag{3}$$

A est visiblement un opérateur linéaire et il est borné, puisque

$$\|Au\|_V = \sup_{v \in V-\{0\}} \frac{(Au,v)_V}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V-\{0\}} \frac{a(u,v)}{\|v\|_V} \leq \frac{M\ \|u\|_V\ \|v\|_V}{\|v\|_V}$$

$$\leq M\ \|u\|_V$$

En outre, on a

$$(u,Av)_V = (Av,u)_V = a(v,u) = a(u,v) = (Au,v)_V$$

ce qui signifie que l'opérateur A est hermitien.

De la même façon, pour p donné, l'application

$$v \in V \longmapsto b(p,v)$$

est une forme linéaire sur V et admet donc l'expression

$$b(p,v) = (Bp,v)_V \tag{4}$$

avec

$$\|Bp\|_V \leq N\ \|p\|_P$$

A l'inverse, pour u donné, l'application

$$q \in P \longmapsto b(q,u)$$

peut pour les mêmes raisons être mise sous la forme

$$b(q,u) = (q,B'u)_P \tag{5}$$

avec

$$\|B'u\|_P \leq N\ \|u\|_V$$

B' est communément appelé *adjoint* de B.

Enfin, les deux fonctionnelles linéaires f et g admettent les expressions

$$f(u) = (F,u)_V \qquad \text{avec} \qquad \|F\|_V = \|f\|_{V'}, \tag{6}$$

et

$$g(q) = (G,p)_P \qquad \text{avec} \qquad \|G\|_P = \|g\|_P, \tag{7}$$

Ces différents résultats permettent de mettre les équations (1) et (2) sous la forme suivante:

$$(\forall v \in V) \qquad (Au + Bp,\ v)_V = (F,v)_V$$

$$(\forall q \in P) \qquad (q,\ B'u)_P = (G,q)_P$$

ce qui revient à dire

$$\begin{cases} Au + Bp = F & \text{(1 bis)} \\ B'u = G & \text{(2 bis)} \end{cases}$$

4. LE CAS PARTICULIER G = 0

Commençons par traiter le cas particulier où la seconde équation est homogène. Elle se ramène alors à

$$B'u = 0$$

ce qui revient à dire que la solution u est à trouver dans le sous-espace fermé

$$Z = \{\ v \in V \ \mid B'u = 0\ \} \tag{8}$$

définition qui équivaut à

$$Z = \{\ v \in V \ \mid (\forall q \in P) \quad b(q,u) = 0\ \} \tag{8 bis}$$

Comme pour tout $v \in Z$, $b(p,v) = 0$, on aura donc

$$(\forall v \in Z) \qquad a(u,v) = f(v) \tag{9}$$

Or, cette condition mène à une solution *unique* dans Z si la forme bilinéaire a(u,v) *est elliptique sur* Z, c'est-à-dire s'*il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que*

$$(\forall v \in Z) \qquad a(v,v) \geq \alpha\ \|v\|_V^2 \tag{10}$$

C'est la *première condition de BREZZI*. En la supposant vérifiée, l'équation variationnelle (9) s'écrit encore

$$(\forall v \in Z) \qquad (Au - F,\ v)_V = 0$$

ce qui signifie que

$$Au - F \in Z_\perp$$

$Z_\perp$ étant l'orthogonal de Z dans V. Pour que l'équation (1 bis) soit vérifiée, il faudra que (F - Au) puisse être mis sous la forme Bp. Comme F est arbitraire dans V, ceci pose la question suivante: *peut-on mettre un élément quelconque* $w \in Z_\perp$ *sous la forme Bp ?* Cela signifierait que la distance

$$\|Bp - w\|_V$$

pourrait s'annuler pour un certain élément p de P. Pour aborder ce problème, commençons par *minimiser* cette distance: nous chercherons donc l'élément p qui rend l'expression

$$d^2 = \|Bp - w\|_V^2 = (Bp,Bp)_V - 2\ (Bp,w)_V + \|w\|_V^2$$

minimale. On reconnaît là un problème variationnel qui sera elliptique sur P et admettra donc une solution *unique* s'il existe un nombre $\beta > 0$ tel que

$$(Bp,Bp)_V \geq \beta^2\ \|p\|_P^2$$

soit

$$\|Bp\|_V \geq \beta\ \|p\|_P \qquad (11)$$

pour tout $p \in P$. C'est la *seconde condition de BREZZI*. Comme

$$\|Bp\|_V = \sup_{v\ \in\ V-\{0\}} \frac{(Bp,v)_V}{\|v\|_V} = \sup_{v\ \in\ V-\{0\}} \frac{b(p,v)}{\|v\|_V}$$

elle s'écrit encore

$$(\forall p \in P) \quad \sup_{v\ \in\ V-\{0\}} \frac{b(p,v)}{\|v\|_V} \geq \beta\ \|p\|_P \qquad (11\ \text{bis})$$

La minimisation de la distance mène alors à l'équation variationnelle

$$(\forall q \in P) \quad (Bp - w,\ Bq)_V = 0 \qquad (12)$$

ce qui s'écrit encore

$$(B'(Bp-w),\ q)_P = 0$$

soit, comme q est arbitraire,

$$B'(Bp-w) = 0$$

ce qui signifie que

$$Bp - w \in Z \qquad (13)$$

Dès lors, à la solution p,

$$d^2 = (Bp - w,\ Bp)_V - (Bp - w,\ w)_V = 0$$

car le premier terme s'annule en vertu de (12) et le second est le produit scalaire de $(Bp-w) \in Z$ par $w \in Z_\perp$. Par conséquent, il existe bien un et un seul élément p tel que

$$F - Au = Bp$$

5. Continuité de la solution par rapport aux données

Avant d'envisager le problème général, montrons que le problème restreint ci-dessus est *bien posé*, c'est-à-dire que sa solution est bornée par rapport aux données. En faisant $v = u$ dans la relation (9), on trouve

$$a(u,u) = f(u) \le \|f\|_{V'}\ \|u\|_V$$

soit, en tenant compte de l'ellipticité sur Z,

$$\alpha\ \|u\|_V^2 \le \|f\|_{V'}\ \|u\|_V$$

ce qui donne

$$\|u\|_V \le \frac{1}{\alpha}\ \|f\|_{V'} \qquad (14)$$

D'autre part, la seconde condition de BREZZI nous permet d'écrire

$$\|p\|_P \le \frac{1}{\beta} \sup_{v \in V-\{0\}} \frac{b(p,v)}{\|v\|_V}$$

Or,

$$b(p,v) = f(v) - a(u,v) \le \|f\|_{V'}\ \|v\|_V + M\ \|u\|_V\ \|v\|_V$$

ce qui entraîne

$$\frac{b(p,v)}{\|v\|_V} \le \|f\|_{V'} + M\ \|u\|_V \le (1 + \frac{M}{\alpha})\ \|f\|_{V'}$$

d'où, en définitive,

$$\|p\|_P \le \frac{1}{\beta}\ (1 + \frac{M}{\alpha})\ \|f\|_{V'} \qquad (15)$$

6. Cas général

Dans le cas général, la seconde équation s'écrit

$$B'u = G \tag{16}$$

Commençons par en chercher une *solution particulière* u_0. Nous allons montrer qu'*une telle solution peut être trouvée sous la forme*

$$u_0 = Bp_0 \qquad \text{avec} \qquad p_0 \in P$$

En effet, l'équation

$$B'Bp_0 = G$$

équivaut à exiger que, *pour tout $q \in P$*,

$$(B'Bp_0,\ q)_P = (G,q)_P$$

soit encore

$$(Bp_0,\ Bq)_V = (G,q)_P$$

C'est à nouveau un problème elliptique en vertu de la seconde condition de BREZZI. En outre, sa solution p_0 vérifie

$$(Bp_0, Bp_0)_V = (G, p_0)_P$$

ce qui entraîne

$$\|Bp_0\|_V^2 \le \|g\|_P,\ \|p_0\|_P$$

Toujours grâce à la seconde condition de BREZZI, on a encore

$$\beta\ \|p_0\|_P\ \|Bp_0\|_V \le \|g\|_P,\ \|p_0\|_P$$

soit

$$\|Bp_0\|_V \le \frac{1}{\beta}\ \|g\|_P,$$

ce qui équivaut à

$$\|u_0\|_V \le \frac{1}{\beta}\ \|g\|_P, \tag{17}$$

La *solution générale* de l'équation (16) est alors de la forme

$$u = u_0 + u'' \qquad \text{avec} \qquad u'' \in Z$$

ce qui donne aux équations (1) et (2) l'expression suivante:

$$\begin{cases} (\forall v \in V) & a(u_0 + u'',\ v) + b(p,v) = f(v) \\ (\forall q \in P) & b(q,\ u_0 + u'') = g(q) \end{cases}$$

qui, du fait de la définition même de u_0, se ramène à

$$\begin{cases} (\forall v \in V) & a(u'',v) + b(p,v) = f(v) - a(u_0,v) \\ (\forall q \in P) & b(q,u'') = 0 \end{cases}$$

Le problème général se réduit ainsi au problème particulier traité aux §§ 4 et 5, avec, à la place de f, la fonctionnelle

$$h(v) = f(v) - a(u_0,v)$$

L'existence et l'unicité de la solution sont donc assurées. Pour ce qui est de la continuité par rapport aux données, notons d'abord que

$$|h(v)| \le \|f\|_{V'} \; \|v\|_V + M \; \|u_0\|_V \; \|v\|_V$$

ce qui implique

$$\|h\|_{V'} \le \|f\|_{V'} + M \; \|u_0\|_V$$

On déduit alors de (14)

$$\|u''\|_V \le \frac{1}{\alpha} \; \|f\|_{V'} + \frac{M}{\alpha} \; \|u_0\|_V$$

et

$$\|u\|_V \le \|u_0\|_V + \|u''\|_V \le \frac{1}{\alpha} \; \|f\|_{V'} + (1 + \frac{M}{\alpha}) \; \|u_0\|_V$$

soit, par (17),

$$\|u\|_V \le \frac{1}{\alpha} \; \|f\|_{V'} + \frac{1}{\beta} \; (1 + \frac{M}{\alpha}) \; \|g\|_{P'} \qquad (18)$$

Pour ce qui est de p, on déduit de (15)

$$\|p\|_P \le \frac{1}{\beta} \; (1 + \frac{M}{\alpha}) \; \|h\|_{V'} \le \frac{1}{\beta} \; (1 + \frac{M}{\alpha}) \; [\; \|f\|_{V'} + M \; \|u_0\|_V \;]$$

d'où, par (17),

$$\|p\|_P \le \frac{1}{\beta} \; (1 + \frac{M}{\alpha}) \; \|f\|_{V'} + \frac{M}{\beta^2} \; (1 + \frac{M}{\alpha}) \; \|g\|_{P'} \qquad (19)$$

7. Synthèse des résultats

Le problème

$$\begin{cases} (\forall v \in V) & a(u,v) + b(p,v) = f(v) \\ (\forall q \in P) & b(q,u) = g(q) \end{cases}$$

est bien posé si les conditions suivantes sont simultanément vérifiées:

1) En notant

$$Z = \{ u \in V \mid (\forall q \in P) \quad b(q,u) = 0 \}$$

la forme bilinéaire symétrique a(u,v) est elliptique sur Z:

$$(\forall v \in Z) \quad a(v,v) \geq \alpha \, \|v\|_V^2 \qquad \text{avec} \quad a > 0$$

2) Il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$(\forall p \in P) \quad \sup_{v \in V-\{0\}} \frac{b(p,v)}{\|v\|_V} \geq \beta \, \|p\|_V$$

8. Une conséquence utile de la deuxième condition de Brezzi

Nous avons montré dans la section 4 que, moyennant la deuxième condition de BREZZI, tout élément u de $Z_\perp$ peut être mis sous la forme

$$u = Bp$$

Il en résulte

$$\|B'u\|_P = \sup_{q \in P-\{0\}} \frac{(B'u,q)_P}{\|q\|_P} = \sup_{q \in P-\{0\}} \frac{(B'Bp,q)_P}{\|q\|_P}$$

$$= \sup_{q \in P-\{0\}} \frac{(Bp,Bq)_V}{\|q\|_P} \geq \frac{\|Bp\|_V^2}{\|p\|_P} \geq \frac{\beta \, \|p\|_P \, \|Bp\|_V}{\|p\|_P} = \beta \, \|Bp\|_V$$

$$= \beta \, \|u\|_V$$

Nous arrivons donc à ce résultat, que *la seconde condition de BREZZI entraîne*

$$(\forall u \in Z_\perp) \quad \|B'u\|_P \geq \beta \, \|u\|_V \tag{20}$$

9. Réciproque

9.1 - La réciproque est-elle vraie ? En d'autres termes, la condition (20) entraîne-t-elle la seconde condition de BREZZI ? D'emblée, on remarque que s'il existe dans P un élément p tel que

$Bp = 0$, la seconde condition de Brezzi ne pourra pas être vérifiée pour cet élément. Ceci amène à considérer le sous-espace fermé

$$Y = \{ p \in P \mid Bp = 0 \} = \{ p \in P \mid (\forall v \in V) \;\; b(p,v) = 0 \} \tag{21}$$

Alors, en notant $Y_\perp$ l'orthogonal de Y dans P, on peut montrer que *l'inégalité (20) entraîne*

$$\sup_{v \in V-\{0\}} \frac{b(p,v)}{\|v\|_V} \geq \beta \|p\|_P$$

pour tout $p \in Y_\perp$.

a) La démonstration repose sur le lemme suivant:

A tout $p \in Y_\perp$*, on peut associer un élément* $u \in Z_\perp$ *tel que* $B'u = p$.

Partons de la minimisation de la distance

$$\|B'u - p\|_P^2 = \|B'u\|_P^2 - 2\,(p,\, B'u)_P + \|p\|_P^2$$

En veru de la condition (20), ce problème est elliptique et admet donc une solution unique qui vérifie

$$(\forall v \in Z_\perp) \quad (B'u - p,\, B'v)_P = 0$$

Bien plus, comme $B'w = 0$ pour tout $w \in Z$, on a aussi

$$(\forall v \in V) \quad (B'u - p,\, B'v)_P = 0 \tag{22}$$

soit

$$(\forall v \in V) \quad (B(B'u-p),\, v)_V = 0$$

ce qui implique

$$B(B'u - p) = 0$$

ou encore

$$B'u - p \in Y$$

Mais alors,

$$\|B'u - p\|_P^2 = (B'u - p,\, B'u)_P - (B'u - p,\, p)_P = 0$$

car le premier terme s'annule en vertu de (22) et le second est le produit scalaire de $B'u - p \in Y$ par $p \in Y_\perp$. (C'est ici que l'hypothèse $p \in Y_\perp$ est nécessaire).

b) Pour $p = B'u$, avec $u \in Z_\perp$, on a alors

$$\sup_{v \in V-\{0\}} \frac{b(p,v)}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V-\{0\}} \frac{(p,B'v)_P}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V-\{0\}} \frac{(B'u,B'v)_P}{\|v\|_V}$$

$$\geq \frac{\|B'u\|_P^2}{\|u\|_V} \geq \beta \ \|B'u\|_P = \beta \ \|p\|_P$$

ce qui achève la démonstration.

9.2 - Ce résultat donne un éclairage nouveau à la deuxième condition de Brezzi. En pratique, il existe souvent un candidat naturel P_0 pour être l'espace P. Il faut toujours y soustraire le noyau Y de l'opérateur B et poser $P = Y_\perp$. Ceci montre que la deuxième condition de Brezzi tend, dans une certaine mesure, à restreindre l'espace P.

10. Exemple: problème de Stokes

10.1 - Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ. Nous envisagerons le problème aux limites suivant:

$$\left\{\begin{array}{ll} -\mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{grad}\ p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array}\right. \tag{23}$$

La *formulation faible* de ce problème s'obtient aisément en multipliant la première équation par une variation $\delta\mathbf{u}$, la seconde par une variation δp, puis en intégrant en tenant compte des conditions aux limites. On obtient pour la première

$$-\mu \int_\Omega \nabla^2 u_i \ \delta u_i \ dx + \int_\Omega D_i p \ \delta u_i \ dx = \int_\Omega f_i \ \delta u_i \ dx$$

soit, puisque $\delta u_i = 0$ sur Γ,

$$\mu \int_\Omega D_j u_i \ D_j \delta u_i \ dx - \int_\Omega p \ D_i \delta u_i \ dx = \int_\Omega f_i \ \delta u_i \ dx$$

Pour la seconde,

$$-\int_\Omega \delta p \ D_i u_i \ dx = 0$$

Le choix de V s'impose dès le premier coup d'oeil: ce sera $(H_0^1(\Omega))^n$. En effet, dans cet espace, la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \mu \int_\Omega D_j u_i \; D_j v_i \; dx \tag{24}$$

est visiblement bornée et elliptique. De même, la forme linéaire

$$f(v) = \int_\Omega f_i v_i \; dx \tag{25}$$

sera bornée dans le cas courant où $f \in (L^2(\Omega))^n$. (On pourrait être plus général, mais ce cas suffit en pratique). Par ailleurs, on notera

$$b(p,u) = - \int_\Omega p \; D_i u_i \; dx \tag{26}$$

et comme, pour notre choix de V, $D_i u_i \in L^2(\Omega)$, on est tenté de poser $P = L^2(\Omega)$. Mais dans cet espace, il existe des champs p pour lesquels b(p,v) s'annule pour tout v. En effet l'équation

$$(\forall v \in V) \quad 0 = b(p,v) = - \int_\Omega p \; D_i v_i \; dx = \int_\Omega v_i \; D_i p \; dx$$

équivaut à $D_i p = 0$, soit p = constante. On a donc

$$Y = \{ \; p \in L^2(\Omega) \quad | \quad p = cte \; \}$$

ce qui mène à restreindre notre espace P à

$$P = Y_\perp = \{ \; p \in L^2(\Omega) \quad | \quad \int_\Omega p \; dx = 0 \; \} \tag{27}$$

Il reste à vérifier la seconde condition de Brezzi pour certifier ce choix. On a

$$\sup_{v \in V-\{0\}} \frac{b(p,v)}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V-\{0\}} \frac{\int_\Omega v_i \; D_i p \; dx}{\|v\|_V} = \|\text{grad } p\|_{(H^{-1}(\Omega))^n}$$

Tout revient donc à montrer que si $p \in P$, on a l'inégalité

$$\|p\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{\beta} \|\text{grad } p\|_{(H^{-1}(\Omega))^n}$$

pour un certain $\beta > 0$. Or, cette propriété a été démontrée par NECAS [2] dans le cas d'un ouvert borné à frontière lipschitzienne. (C'est une inégalité de démonstration difficile). En conséquence, le problème de Stokes admet une solution unique $(\mathbf{u},p)$, avec

$$\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^n \quad \text{et} \quad p \in \{q \in L^2(\Omega) \quad | \quad \int_\Omega p \; dx = 0\}$$

10.2 - Il est clair que dans ce cas,

$$Z = \{\mathbf{u} \in V \; | \; \text{div } \mathbf{u} = 0 \; \} \tag{28}$$

On peut donc le qualifier de *sous-espace incompressible*. L'ensemble $Z_\perp$ est son complémentaire dans V. Une conséquence intéressante de la seconde condition de Brezzi est alors, en vertu de nos résultats du § 8, l'inégalité

$$(\forall \mathbf{v} \in Z_\perp) \qquad \|\mathbf{v}\|_V \le \frac{1}{\beta} \left[\int_\Omega (\mathrm{div}\ \mathbf{v})^2 \right]^{1/2} \tag{29}$$

Nous avons donc obtenu indirectement une inégalité *qui n'a rien de trivial* (nous n'en connaissons pas de démonstration directe). Cette inégalité nous servira dans la suite.

11. Cas des liaisons linéaires en nombre fini

Examinons le cas particulier où

$$b(\lambda,u) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i\ h_i(u)$$

où on désigne par λ_i des nombres, appelés *multiplicateurs de Lagrange*, et par h_i, des fonctionnelles linéaires bornées su V. On a donc ici $P = R^\ell$. Comme on peut écrire

$$h_i(u) = (H_i,\ u)_V$$

il vient

$$\sup_{v \in V-\{0\}} \frac{b(\lambda,v)}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V-\{0\}} \frac{(\sum_i \lambda_i H_i,\ v)_V}{\|v\|_V} = \|\sum_i \lambda_i H_i\|_V$$

Or,

$$\|\sum_i \lambda_i H_i\|_V^2 = \sum_{i,j} (H_i,\ H_j)_V\ \lambda_i\ \lambda_j = \sum_{i,j} H_{ij}\ \lambda_i\ \lambda_j$$

où $\{H_{ij}\}$ est une matrice symétrique à tout le moins semi-définie positive. Dans le cas où elle n'est pas singulière, ce qui suppose *l'indépendance des liaisons* h_i, on a

$$\sum_{i,j} H_{ij}\ \lambda_i\ \lambda_j \ge \omega_1^2\ \sum_i \lambda_i^2$$

où ω_1 est la plus petite valeur propre de la matrice H. La seconde condition de Brezzi est alors vérifiée avec $\beta = \omega_1$.

12. Pénalisation

Le plus souvent, le problème de point de selle se pose avec l'équation (2) homogène. Il équivaut alors à chercher le minimum de

$$\frac{1}{2}\, a(u,u) - f(u)$$

dans le sous-espace Z. Les variables p s'interprètent alors comme des champs de multiplicateurs lagrangiens relatifs à la condition

$$B'u = 0$$

On dit que l'on *dualise* cette condition. Les numériciens utilisent fréquemment une autre méthode, qui consiste à minimiser *dans V* la fonctionnelle

$$\frac{1}{2}\, a(u,u) + \frac{K}{2}\, \|B'u\|_P^2 - f(u)$$

avec K très grand. On obtient ainsi une solution *approchée* qui, lorsque le problème est correctement posé, tend vers la solution exacte du problème pour $K \longrightarrow \infty$. C'est la méthode de *pénalisation*, que nous allons examiner à présent.

13. Ellipticité du problème pénalisé

La première question qui se pose porte sur l'*ellipticité* du problème ainsi transformé. Nous continuerons à n'exiger l'ellipticité de a(u,v) que sur Z. En particulier, on peut même imaginer que cette forme bilinéaire s'annule identiquement sur $Z_\perp$. Dans ce cas, il faudra nécessairement que $\|B'u\|_P$ soit sur $Z_\perp$ une norme équivalente à $\|u\|_V$. Nous verrons d'ailleurs que cette condition est nécessaire pour assurer la convergence de la méthode lorsque $K \longrightarrow \infty$. Enfin, il est clair que si $a(u,u) < 0$ pour quelque élément de $Z_\perp$, l'ellipticité sera plus délicate à prouver. Etant donné que ce cas ne se rencontre guère en pratique, nous l'exclurons *pour la commodité du raisonnement*, bien que nous soyons conscient qu'il est probablement possible de remplacer cette hypothèse par une condition moins forte.En définitive, *nous adopterons les hypothèses suivantes:*

a) a(u,v) est elliptique sur Z

b) $a(u,u) \geq 0$ *dans V tout entier* (30)

c) $\|B'u\|_P \geq \beta \, \|u\|_V$ *dans* $Z_\perp$.

A part la condition b) qui a été posée pour la commodité, on se retrouve donc dans le cadre des conditions de Brezzi.

Moyennant ces conditions, la forme quadratique

$$N^2(u) = a(u,u) + \|B'u\|_P^2$$

définit à coup sûr une norme sur V, car sa nullité entraîne

$$\|B'u\|_P = 0$$

soit $u \in Z$. Mais alors, comme $a(u,u) = 0$ également, on a nécessairement $u = 0$.

Nous allons montrer que cette norme *est équivalente à la norme de V,* c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que

$$\|u\|_V \leq C\ N(u) \qquad (32)$$

(L'inégalité en sens inverse est évidente). Cette démonstration se fera en quatre étapes:

A. Tout $u \in V$ admet la décomposition

$$u = u_1 + u_2 \qquad (33)$$

avec

$$\begin{cases} u_1 \in Z \\ (\forall v \in Z) \quad a(u_2, v) = 0 \end{cases} \qquad (34)$$

En effet, cherchons $u_1 \in Z$ tel que

$$(\forall v \in Z) \quad a(u_1, v) = a(u, v)$$

Ce problème elliptique admet bien une solution unique. Alors, l'élément

$$u_2 = u - u_1$$

vérifie évidemment

$$a(u_2, v) = 0$$

pour tout $v \in Z$.

B. La composante u_1 vérifie

$$a(u_1, u_1) \geq \alpha\ \|u_1\|_V^2 \qquad (35)$$

en vertu de l'ellipticité de $a(u,v)$ sur Z.

C. La composante u_2 peut encore être décomposée en

$$u_2 = u_3 + u_4 \qquad \text{avec} \quad u_3 \in Z \quad \text{et} \quad u_4 \in Z_\perp \tag{36}$$

La définition de u_2 implique alors

$$(\forall v \in Z) \quad 0 = a(u_2, v) = a(u_3, v) + a(u_4, v)$$

En particulier,

$$a(u_3, u_3) = - a(u_4, u_3)$$

ce qui implique

$$\alpha \, \|u_3\|_V^2 \le M \, \|u_4\|_V \, \|u_3\|_V$$

soit

$$\|u_3\|_V \le \frac{M}{\alpha} \, \|u_4\|_V \tag{37}$$

On en déduit

$$\|u_2\|_V^2 = \|u_3\|_V^2 + \|u_4\|_V^2 \le (1 + \frac{M^2}{\alpha^2}) \, \|u_4\|_V^2 \tag{38}$$

Dès lors, comme

$$\|B' u_2\|_P = \|B' u_4\|_P \ge \beta \, \|u_4\|_V$$

on a

$$\|u_4\|_V \le \frac{1}{\beta} \, \|B' u_2\|_P$$

et, en vertu de (38),

$$\|u_2\|_V \le (1 + \frac{M^2}{\alpha^2})^{1/2} \quad \|u_4\|_V \le \frac{1}{\beta} \, (1 + \frac{M^2}{\alpha^2})^{1/2} \, \|B' u\|_P$$

soit

$$\|u_2\|_V \le C_1 \, \|B' u_2\|_P \tag{39}$$

D. Au total, on a donc

$$\|u\|_V \le \|u_1\|_V + \|u_2\|_V \le \alpha^{-1/2} \, [a(u_1, u_1)]^{1/2} + C_1 \, \|B' u_2\|_P$$

et, par l'inégalité de Schwarz-Cauchy,

$$\le \underbrace{[\, \alpha^{-1} + C_1^2 \,]^{1/2}}_{= C} \, [\, a(u_1, u_1) + \|B' u_2\|_P^2 \,]^{1/2}$$

Mais

$$a(u,u) = a(u_1, u_1) + \underbrace{2\, a(u_1, u_2)}_{= 0} + \underbrace{a(u_2, u_2)}_{\geq 0} \geq a(u_1, u_1)$$

et

$$B'u = B'u_1 + B'u_2 = B'u_2$$

Il en résulte

$$\|u\|_V^2 \leq C^2 \; [\; a(u,u) + \|B'u\|_P^2 \;]$$

comme annoncé.

Ce résultat implique automatiquement l'ellipticité du problème pénalisé, quel que soit $K > 0$, car

$$a(u,u) + K\, \|B'u\|_P^2 \leq \max(1, K) \;.\; [a(u,u) + \|B'u\|_P^2 \;]$$

14. Convergence de la solution du problème pénalisé

Le problème pénalisé consistant à chercher u_K tel que

$$(\forall v \in V) \;\; a(u_K, v) + K(B'u_K, v) = f(v) \qquad (40)$$

est donc elliptique. Décomposons sa solution u_K en

$$u_K = u_{K1} + u_{K2}$$

avec

$$\begin{cases} u_{K1} \in Z \\ (\forall v \in Z) \quad a(u_{K2}, v) = 0 \end{cases}$$

Nous avons déjà démontré la possibilité d'une telle décomposition. Alors, pour tout $v \in Z$, l'équation (40) se ramène à

$$a(u_{K1}, v) = f(v)$$

ce qui signifie que u_{K1} *n'est autre que la solution u du problème exact*. L'erreur de pénalisation est donc mesurée par la norme

$$\|u_K - u\|_V = \|u_{K2}\|_V$$

En faisant $v = u_{K2}$ dans (40) on obtient

$$a(u_{K2}, u_{K2}) + K \|B' u_{K2}\|_P^2 = f(u_{K2})$$

ce qui implique

$$K \|B' u_{K2}\|_P^2 \leq f(u_{K2}) \leq \|f\|_{V'} \|u_{K2}\|_V$$

En utilisant le résultat (39) ci-dessus, on peut donc affirmer que

$$\|u_{K2}\|_V \leq C_1 \|B' u_{K2}\|_P$$

ce qui, combiné avec l'inégalité précédente, donne

$$\frac{K}{C_1^2} \|u_{K2}\|_V^2 \leq \|f\|_{V'} \|u_{K2}\|_V \tag{41}$$

soit

$$\|u_{K2}\|_V \leq \frac{C_1^2}{K} \|f\|_{V'} \tag{42}$$

Ce résultat montre que *la norme de l'erreur de pénalisation tend vers zéro comme 1/K.*

Il est du reste intéressant de noter comment varie la valeur de la fonctionnelle

$$N_K^2(u_K) = a(u_K, u_K) + K \|B' u_K\|_P^2$$

lorsque K varie. On a d'une part

$$a(u_K, u_K) = a(u_{K1}, u_{K1}) + a(u_{K2}, u_{K2}) = a(u, u) + a(u_{K2}, u_{K2})$$

d'où, en vertu de (42)

$$0 \leq a(u_{K2}, u_{K2}) \leq \frac{C_1^2 M}{K^2} \|f\|_{V'}^2$$

D'autre part, il résulte de (41) et (42) que

$$K \|B' u_K\|_P^2 = K \|B' u_{K2}\|_P^2 \leq \|f\|_{V'} \|u_{K2}\|_V \leq \frac{C_1^2}{K} \|f\|_{V'}^2$$

ce qui donne finalement

$$a(u,u) \leq N_K^2 (u_K) \leq a(u,u) + C_1^2 \|f\|_{V'} \left(\frac{1}{K} + \frac{M}{K^2} \right) \tag{43}$$

ainsi, $N_K^2(u_K)$ *converge vers a(u,u) à l'ordre (1/K) également.*

15. CONTRÔLE DE LA CONVERGENCE DE LA PÉNALISATION

Il existe également une inégalité inverse, qui permet de mesurer la convergence de u_K vers u par simple inspection de la convergence de $N_K(u)$. En effet, on a par (41)

$$\|u_{K2}\|_V^2 \leq C_1^2 \|B' u_{K2}\|_P^2 \leq C_1^2 \|B' u_K\|_P^2 \leq \frac{C_1^2}{K} [a(u_{K2}, u_{K2}) + K \|B' u_K\|_P^2]$$

$$\leq \frac{C_1^2}{K} [a(u_K, u_K) - a(u, u) + K \|B' u\|_P^2]$$

soit

$$\|u_K - u\|_V \leq \frac{C_1}{\sqrt{K}} [N_K^2(u_K) - a(u,u)]^{1/2} \qquad (43)$$

Comme nous savons que u_K converge vers u à l'ordre K, cette inégalité confirme l'ordre (1/K) trouvé pour la différence entre $N_K^2(u_K)$ et a(u,u). A partir de deux analyses au moins, on peut alors utiliser une *extrapolation de Richardson* consistant à écrire

$$N_K^2(u_K) \cong A + B/K$$

A et B étant ajustés à l'aide des résultats trouvés. La constante A de cette loi empirique est alors une approximation de a(u,u) et pour obtenir une erreur de l'ordre de

$$\|u_K - u\|_V \leq \varepsilon$$

il suffira d'imposer que

$$C_1 B^{1/2}/K \leq \varepsilon$$

soit

$$K \geq \frac{\varepsilon}{C_1\sqrt{B}}$$

16. PÉNALISATION DU PROBLÈME DE STOKES

Montrons qu'il est possible de traiter le problème de Stokes par pénalisation. La condition à pénaliser est ici div $\mathbf{u}$ = 0, ce qui mène à minimiser la fonctionnelle

$$\frac{1}{2}\mu \int_\Omega D_j u_i \, D_j u_i \, dx + \frac{K}{2}\int_\Omega (\mathrm{div}\,\mathbf{u})^2 \, dx - \int_\Omega f_i u_i \, dx$$

La convergence vers la solution exacte lorsque K tend vers l'infini résulte de la propriété

$$\|u\|_V \le \frac{1}{\beta} \left[\int_\Omega (\mathrm{div}\,\mathbf{u})^2 \, dx \right]^{1/2} \qquad \text{dans } Z_\perp$$

que nous avons déduite au § 10.2 . Les autres conditions sont vérifiées de manière évidente.

17. Formulation mixte équivalente à une pénalisation

Cherchons à rendre stationnaire la fonctionnelle

$$\frac{1}{2} a(u,u) + b(p,u) - \frac{1}{2K} c(p,p) - f(u)$$

où $a(u,v)$ et $b(p,v)$ ont la même signification que ci-dessus et $c(p,q)$ est une forme bilinéaire symétrique, bornée et elliptique sur P:

$$(\forall p \in P) \quad c(p,p) \ge \gamma \, \|p\|_P^2$$

On peut naturellement écrire

$$c(p,q) = (Cp,q)_P$$

ce qui mène aux équations

$$\begin{cases} Au + Bp = F \\ B'u - \frac{1}{K} Cp = 0 \end{cases}$$

La deuxième équivaut au problème variationnel elliptique

$$(\forall q \in P) \quad c(p,q) = K \, b(q,u)$$

qui admet la solution

$$p = K \, C^{-1}B'u$$

ce qui ramène la première équation à

$$Au + K \, BC^{-1}B'u = F$$

soit

$$(\forall v \in V) \quad a(u,v) + K \, (B'u, C^{-1}B'u)_P = f(u)$$

qui équivaut à une pénalisation. La théorie précédente s'applique à ce problème à condition d'adopter sur P la norme équivalente

$$\|p\|^2 = (p,\ C^{-1}p)_P$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. BREZZI - "On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers"
R.A.I.R.O., vol 8, R2, 1974, pp. 129-151

[2] J. NECAS - *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*
Masson, Paris et Academia, Prague, 1967