

UNIVERSITE DE LIEGE  
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES  
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION

UNE THEORIE ABSTRAITE DES ERREURS D'APPROXIMATION  
DES MODELES D'ELEMENTS FINIS

J.F. DEBONGNIE

*Rapport LMF/D32, janvier 1994*

## RÉSUMÉ

*Les erreurs d'approximation par éléments finis sont examinées dans un cadre abstrait et indépendant du procédé d'obtention de la solution. On montre que l'erreur peut toujours être décomposée en une erreur d'équilibre et une erreur de compatibilité, qui se composent comme des vecteurs orthogonaux. Chacune de ces deux erreurs peut être encadrée par des bornes supérieures et inférieures accessibles en post-traitement.*

## 1. INTRODUCTION

Les premiers efforts d'évaluation globale des erreurs d'approximation par éléments finis semblent dus à FRAEIJIS de VEUBEKE qui a développé l'*analyse duale* [7]. Cette technique nécessite, et c'est là son principal inconvénient, une double analyse du problème, à l'aide des deux types d'éléments finis purs, à savoir, éléments primaux conformes et éléments duaux codiffusifs. Dans sa version initiale, la seule qui soit largement connue, son application est restreinte aux seuls cas où l'une des deux approches mène à un problème homogène. La méthode peut néanmoins être élargie au cas général [6], mais au prix de calculs supplémentaires *a posteriori*.

Divers auteurs [8] ont utilisé la méthode d'*extrapolation de RICHARDSON* qui, par essence, nécessite également plusieurs analyses, avec le même type de modèle cette fois, ainsi que la connaissance *a priori* ou l'évaluation numérique de l'*ordre de convergence*. Outre que ces analyses successives sont coûteuses, l'ordre de convergence peut, pour des problèmes peu réguliers, être aussi petit que l'on veut, ce qui rend la méthode caduque.

C'est pourquoi les efforts actuels semblent se tourner vers des méthodes d'évaluation d'erreur *ne demandant que des calculs de post-traitement* et, à tout le moins, bien inférieurs en volume à une seconde analyse. Malheureusement, bien peu de ces analyses d'erreur reposent sur une base théorique sérieuse, et l'heuristique s'est peu à peu érigée en règle [9, 10]. Ainsi, dans le cas des éléments primaux conformes, on sait de longue date que les erreurs se manifestent localement par des défauts d'équilibre, que l'on peut diviser en défauts d'équilibre à l'intérieur des éléments, défauts aux interfaces et enfin, défauts sur la frontière chargée. Mais on adopte souvent des normes inappropriées n'ayant pas la propriété de tendre vers zéro lorsque la solution converge [5]. Ou alors [10, on construit un "meilleur" champ de contraintes dont la seule vertu est d'être continu, ce qui en termes d'équilibre est à la fois trop et trop peu, et on calcule l'erreur comme si ce champ artificiel était le champ exact. Une mention spéciale doit cependant être faite de la méthode de LADEVEZE [3] qui, sur base d'un champ de contraintes *en équilibre* construit par des moyens relativement simples, conduit à une surestimation de l'erreur.

En ce qui concerne les éléments duaux codiffusifs, ZHONG [10] dit qu'on n'a pas encore "identifié les défauts de conformité qui sont significatifs" [10] et il est vrai que vu sous cet angle, le

problème semble difficilement soluble. On doit cependant à cet auteur la suggestion d'une méthode de LADEVEZE duale qui semble prometteuse.

La difficulté est doublée dans le cas des éléments qui ne sont ni conformes ni codiffusifs et, malheureusement, ils sont légion.

Il nous a donc semblé qu'il ne serait pas inutile de reprendre le problème d'une manière plus générale, en analysant l'erreur d'une approximation *quelconque*, indépendamment du chemin suivi pour l'obtenir. Dans un cadre abstrait, où sont préalablement bien définies les notions d'équilibre et de compatibilité, il est assez aisé de mettre en évidence la décomposition générale de l'erreur en une erreur d'équilibre et une erreur de compatibilité. Après avoir examiné leurs expressions, qui sont doubles, on s'aperçoit que ces deux erreurs admettent chacune des approximations par défaut et par excès. Ces dernières s'identifient aux estimateurs de LADEVEZE pour l'erreur d'équilibre et de ZHONG-LADEVEZE pour l'erreur de compatibilité. Quant à la technique de borne inférieure, quoique un peu paradoxale, elle ouvre la porte à des mesures locales de ce que l'on pourrait appeler la partie principale de l'erreur, selon la technique décrite en [5].

Pour tempérer un peu le caractère abstrait de l'exposé, nous avons ajouté une dernière section où les différentes normes et fonctionnelles sont explicitées dans le cas de problèmes aux limites schématisés. Il sera toujours possible au lecteur de se reporter anticipativement à cette section pour mieux appréhender les notions introduites.

## 2. PROBLÈMES VARIATIONNELS

Nous commencerons par rappeler un certain nombre de résultats classiques relatifs aux problèmes variationnels.

### 2.1 - Problème variationnel homogène

Soit  $X$  un espace de Hilbert et soit  $a(x,y)$  une forme bilinéaire définie sur  $X \times X$  et jouissant des propriétés suivantes:

a) elle est *bornée*, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif  $M$  tel que

$$|a(x,y)| \leq M \|x\|_X \|y\|_X \quad (1)$$

b) elle est *symétrique*, ce qui signifie que, quels que soient les éléments  $x$  et  $y$  de  $X$ ,

$$a(x,y) = a(y,x) \quad (2)$$

c) elle est *elliptique sur  $X$* , c'est-à-dire qu'il existe un nombre  $\gamma$  non nul tel que pour tout  $x \in X$ ,

$$a(x,x) \geq \gamma^2 \|x\|^2 \quad (3)$$

Rappelons encore que l'on appelle *dual* d'un espace d'Hilbert  $X$  l'espace  $X'$  des fonctionnelles linéaires  $f$  bornées sur  $X$ , c'est-à-dire vérifiant pour tout  $x \in X$

$$|f(x)| \leq C \|x\|_X \quad (4)$$

où  $C$  est une constante positive bornée. Pour  $f \in X'$ , on appelle *norme de  $f$  subordonnée à la norme  $\|\cdot\|_X$*  le nombre

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\substack{x \in X \\ \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} \quad (5)$$

C'est donc la meilleure possible des constantes  $C$  pour lesquelles l'inégalité (4) est vérifiée.

Cela étant, considérons le *problème* suivant:

**P.V.H.** - *Etant donné une fonctionnelle linéaire  $f \in X'$ , trouver l'élément  $u$  de  $X$  qui vérifie, pour tout  $y \in X$ , la relation*

$$a(x,y) = f(y) \quad (6)$$

L'existence et l'unicité de la solution de ce problème se démontrent aisément. En effet, les conditions (1) à (3) impliquent que la forme bilinéaire  $a(x,y)$  définit sur  $X$  un produit scalaire *équivalent* au produit scalaire naturel  $(x,y)$ . Il suffit alors de faire appel au théorème de représentation des fonctionnelles de F. RIESZ [1,2], qui affirme que dans un espace de Hilbert, toute fonctionnelle linéaire bornée  $f$  peut s'exprimer sous la forme d'un produit scalaire avec un élément unique  $x$  représentant cette fonctionnelle, ce qui équivaut à l'équation (6).

Remarquons qu'en faisant  $y = x$  dans (6), on obtient

$$a(x,x) = f(x)$$

ce qui implique par (3)

$$\gamma^2 \|x\|_X^2 \leq \|f\|_{X'} \|x\|_X$$

et

$$\|x\|_X \leq \gamma^{-2} \|f\|_{X'} \quad (7)$$

La solution  $x$  est donc continue par rapport à la donnée  $f$ . On dit que le problème est *bien posé*.

## 2.2 - Lien avec un problème de minimum [4]

Le problème précédent peut être interprété comme la recherche du minimum de la fonctionnelle

$$\mathcal{F}(y) = \frac{1}{2} a(y,y) - f(y) \quad (8)$$

sur l'espace  $X$ . En effet, dire que  $\mathcal{F}$  admet un minimum en  $x$  revient à écrire que

$$\mathcal{F}(x+z) - \mathcal{F}(x) \geq 0$$

pour tout  $z$  appartenant à une certaine boule  $B$  centrée sur l'origine,

$$B = \{ z \in X \mid \|z\|_X \leq \varepsilon \}$$

Comme

$$\mathcal{F}(x+z) = \frac{1}{2} a(x,x) - f(x) + a(x,z) - f(z) + \frac{1}{2} a(z,z)$$

on obtient aisément

$$\mathcal{F}(x+z) - \mathcal{F}(x) = [a(x,z) - f(z)] + \frac{1}{2} a(z,z) \quad (9)$$

Le terme entre crochets, linéaire en  $z$ , est appelé *variation première de  $\mathcal{F}$* . Montrons qu'elle doit être nulle pour tout  $u \in X$ . En effet, dans l'hypothèse contraire, il existerait un  $u \in X$  tel que

$$a(x,u) - f(u) = \beta \neq 0$$

Or, pour tout  $\vartheta \in \mathbb{R}$  tel que

$$|\vartheta| \leq \varepsilon / \|u\|_X$$

on doit avoir

$$\mathcal{F}(x+\vartheta u) - \mathcal{F}(u) = \vartheta\beta + \frac{1}{2} \vartheta^2 a(u,u) \geq 0$$

Mais ceci est absurde, car pour tout  $\vartheta$  situé dans l'intervalle ouvert dont les limites sont 0 et

$$\vartheta_1 = - \frac{2\beta}{a(u,u)}$$

le second membre est strictement négatif. En conclusion, la recherche du minimum de  $\mathcal{F}$  mène bien à l'équation variationnelle (6). Ajoutons que, puisque la variation première est nulle dans l'équation (9), la valeur de  $\mathcal{F}$  en un point quelconque est toujours supérieure à  $\mathcal{F}(x)$ . Le minimum en question est donc *unique*. Ce résultat est connu sous le nom de *Théorème de Kirchhoff*.

### 2.3 - Un problème de maximum associé

Posons-nous à présent le problème de la recherche de l'élément qui réalise le maximum de l'expression

$$\frac{|f(y)|}{[a(y,y)]^{1/2}} \quad (10)$$

En d'autres termes, il s'agit de trouver l'élément  $x$  de  $X$  qui réalise la norme de  $f$  subordonnée à la norme  $[a(.,.)]^{1/2}$ . Nous allons montrer que c'est encore la solution  $x$  du problème variationnel (6). A cette fin, considérons un élément  $y$  non nul de  $X$ , et cherchons le minimum de  $\mathcal{F}$  dans le sous-espace des multiples de  $y$ . Il s'agit donc de minimiser la fonction

$$F(\lambda) = \mathcal{F}(\lambda y) = \frac{1}{2} \lambda^2 a(y,y) - \lambda f(y)$$

par rapport à  $\lambda$ , ce qui conduit à la condition

$$\lambda = \frac{f(y)}{a(y,y)} = \lambda_0$$

Pour cette valeur, on obtient

$$\mathcal{F}(\lambda_0 y) = \frac{1}{2} \frac{f^2(y)}{a(y,y)} - \frac{f^2(y)}{a(y,y)} = -\frac{1}{2} \frac{f^2(y)}{a(y,y)} \geq \mathcal{F}(x) \quad (11)$$

puisque la minimisation n'a porté que sur un sous-espace. Or, la solution  $x$  du problème variationnel (6) vérifie en particulier

$$a(x,x) = f(x)$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2} a(x,x) - f(x) = -\frac{1}{2} f(x) = -\frac{1}{2} \frac{f^2(x)}{a(x,x)}$$

On déduit donc de (11)

$$-\frac{1}{2} \frac{f^2(y)}{a(y,y)} \geq -\frac{1}{2} \frac{f^2(x)}{a(x,x)}$$

soit

$$\frac{|f(y)|}{[a(y,y)]^{1/2}} \leq \frac{|f(x)|}{[a(x,x)]^{1/2}} = [a(x,x)]^{1/2}$$

En d'autres termes, le maximum de l'expression (10) s'obtient pour  $x$  solution du problème variationnel (6) et est égal à  $[a(x,x)]^{1/2}$ .

### 2.4 - Problème variationnel non homogène

On rencontre fréquemment le problème suivant, qui est un peu plus général.  $X$  est toujours un espace de Hilbert, la forme bilinéaire  $a(x,y)$  est toujours bornée et symétrique sur  $X$ . Quant

à son ellipticité, nous y reviendrons. Soit  $X_0$  un sous-espace fermé de  $X$ . On se pose le problème variationnel *non homogène* suivant:

**PVNH** - Etant donné un élément  $x_0$  de  $X$  et une fonctionnelle linéaire  $f$  de  $X'$ , trouver  $x \in x_0 \oplus X_0$  tel que, pour tout  $y \in X_0$ , on ait

$$a(x, y) = f(y) \quad (6 \text{ bis})$$

Ce problème se ramène aisément à un problème homogène en notant que l'élément  $x$  cherché est de la forme  $(x_0 + x'')$ , avec  $x'' \in X_0$ . L'équation (6 bis) se ramène donc à

$$a(x_0 + x'', y) = f(y)$$

soit

$$a(x'', y) = f(y) - a(x_0, y) = g(y)$$

où le dernier membre est une fonctionnelle linéaire bornée, car

$$\begin{aligned} |g(y)| &\leq |f(y)| + |a(x_0, y)| \\ &\leq \|f\|_{X'} \|y\|_X + M \|x_0\|_X \|y\|_X \end{aligned}$$

donc

$$\|g\|_{X'} \leq \|f\|_{X'} + M \|x_0\|_X$$

On est donc ramené à un problème variationnel homogène sur  $X_0$ . En conséquence, l'existence et l'unicité de la solution seront garanties moyennant la condition d'*ellipticité* sur  $X_0$ , moins forte que l'ellipticité sur  $X$ :

$$a(y, y) \geq \gamma^2 \|y\|_X^2, \quad \gamma \neq 0, \quad \text{pour tout } y \in X_0 \quad (3 \text{ bis})$$

On déduit immédiatement des résultats relatifs au problème homogène la bornation de la solution partielle  $x''$ :

$$\|x''\|_X \leq \gamma^{-2} [ \|f\|_{X'} + M \|x_0\|_X ]$$

et, de là, la bornation de la solution complète  $x$ :

$$\|x\|_X \leq \|x_0\|_X + \|x''\|_X \leq \gamma^{-2} \|f\|_{X'} + (1 + M \gamma^{-2}) \|x_0\|_X \quad (12)$$

Le problème non homogène est donc également *bien posé*, en ce sens que sa solution dépend continûment des données  $f$  et  $x_0$ .

## 2.5 Problèmes variationnels non homogènes équivalents

On remarquera qu'il existe un grand nombre d'éléments  $x_0$  pour lesquels le problème ci-dessus admet *la même solution*. Soient en effet  $x_{01}$  et  $x_{02}$  deux éléments différents de  $X$ . Les problèmes variationnels associés mènent aux équations

$$\begin{cases} a(x_{01} + x_1'', y) = f(y) \\ a(x_{02} + x_2'', y) = f(y) \end{cases}$$

vraies pour tout  $y \in X_0$ . Soustrayant, on obtient

$$a((x_{01} + x_1'') - (x_{02} + x_2''), y) = 0 .$$

Dans la mesure où

$$(x_{01} + x_1'') - (x_{02} + x_2'') \in X_0 \quad (13)$$

on peut choisir cet élément comme un  $y$  particulier, ce qui donne

$$a((x_{01} + x_1'') - (x_{02} + x_2''), (x_{01} + x_1'') - (x_{02} + x_2'')) = 0$$

soit, en vertu de l'ellipticité de  $a(x,y)$  sur  $X_0$ ,

$$x_{01} + x_1'' = x_{02} + x_2''$$

On obtient donc la même solution complète. Or, la relation (13) est vraie si et seulement si

$$x_{01} - x_{02} \in X_0 \quad (14)$$

ou comme on dit encore, chaque fois que  $x_{01}$  et  $x_{02}$  sont  $X_0$ -équivalents. Nous avons donc démontré que deux problèmes variationnels faisant intervenir la même forme bilinéaire, la même fonctionnelle  $f$ , le même sous-espace  $X_0$ , mais deux termes non-homogènes  $X_0$ -équivalents, conduisent à la même solution complète. Cette équivalence peut être mise à profit de plusieurs manières:

a) Etant donné une fonctionnelle linéaire  $g \in X'$ , non identiquement nulle dans  $X_0$ , on peut choisir  $x_0$  de telle façon que  $g(x_0) = 0$ .

Soit en effet un  $x_0^\#$  de départ. Si  $g(x_0^\#) = 0$ , la proposition est triviale. Dans le cas contraire, choisissons  $x_1 \in X_0$  tel que

$g(x_1) \neq 0$ . Alors, l'élément

$$x_0 = x_0^\# - \frac{g(x_0^\#)}{g(x_1)} x_1$$

conduit au résultat annoncé.

b) On peut choisir  $x_0$  orthogonal à  $X_0$  pour le produit scalaire  $a(x, y)$ .

Soit en effet un  $x_0^\#$  de départ. Cherchons  $x_0$  de la forme

$$x_0 = x_0^\# + x^\circ, \quad x^\circ \in X_0,$$

de manière à vérifier pour tout  $y \in X_0$

$$0 = a(x_0, y) = a(x^\circ, y) + a(x_0^\#, y)$$

Cela revient à chercher  $x^\circ \in X_0$  tel que, pour tout  $y \in X_0$ ,

$$a(x^\circ, y) = -a(x_0^\#, y)$$

Il s'agit d'un problème variationnel homogène, qui admet une solution unique.

### 2.6 - Problème variationnel non homogène et minimisation de fonctionnelle

Soit à minimiser la fonctionnelle

$$\mathcal{F}(y) = \frac{1}{2} a(y, y) - f(y)$$

dans  $x_0 \oplus X_0$ . Si le minimum a lieu en  $x$ , on a la condition

$$\mathcal{F}(x+z) \geq \mathcal{F}(x)$$

pour tout  $z$  appartenant à une certaine boule de  $X_0$ . A ce détail près, on peut répéter le raisonnement du § 2.2 et en déduire la nullité de la variation première pour toute variation de  $X_0$ .

## 3. CADRE GÉNÉRAL DE L'ANALYSE ET TERMINOLOGIE

Notre analyse se fonde sur le cadre abstrait suivant, dans lequel le lecteur reconnaîtra une généralisation de bien des situations concrètes dans le domaine des équations aux dérivées

partielles elliptiques. Pour faciliter la lecture, nous utiliserons la *terminologie* du calcul des structures, ce qui n'enlève rien à la généralité des résultats obtenus, mais les rend plus parlants.

a) On se donne un espace de Hilbert  $V$ , appelé *espace des déplacements*.

b) On se donne un opérateur  $\partial$  qui, à chaque déplacement  $u \in V$ , associe une *déformation*  $\varepsilon = \partial u$  appartenant à un nouvel espace de Hilbert  $H$  que nous appellerons *espace de travail*. Le choix des espaces  $V$  et  $H$  est tel que l'opérateur  $\partial$  est borné:

$$\|\partial u\|_H \leq M_1 \|u\|_V \quad (15)$$

c) Pour un certain sous-espace fermé  $V_0$  de  $V$ , que nous appellerons sous-espace des déplacements *homogènes*, l'opérateur  $\partial$  admet un inverse borné:

$$\|\partial u\|_H^2 \geq \gamma_1^2 \|u\|_V^2, \quad \gamma_1 \neq 0, \quad \forall u \in V_0 \quad (16)$$

Notons que cette inégalité implique que l'image  $\partial V_0$  de  $V_0$  dans  $H$  est *fermée*.

d) On se donne un opérateur  $C$  de  $H$  dans lui-même, qui est

- borné:  $\|C\varepsilon\|_H \leq M_2 \|\varepsilon\|_H \quad (17)$

- hermitien:  $(C\varepsilon, \eta)_H = (\varepsilon, C\eta)_H \quad (18)$

- elliptique:  $(C\varepsilon, \varepsilon)_H \geq \gamma_2^2 \|\varepsilon\|_H^2, \quad \gamma_2 \neq 0 \quad (19)$

Dans ces conditions, on peut utiliser sur  $H$  le produit scalaire équivalent

$$(\varepsilon, \eta)_E = (C\varepsilon, \eta)_H \quad (20)$$

que nous appellerons *produit scalaire énergétique*. L'espace  $H$ , muni de ce produit scalaire, sera noté  $E$  et appelé *espace des déformations*.

e) Etant donné un élément  $\sigma$  de  $H$ , le problème variationnel consistant à chercher  $\varepsilon \in E$  tel que, pour tout  $\eta \in E$ ,

$$(\varepsilon, \eta)_E = (\sigma, \eta)_H$$

admet visiblement une solution unique, qui vérifie pour tout  $\eta$

$$(C\varepsilon - \sigma, \eta)_H = 0,$$

ce qui entraîne

$$C\varepsilon = \sigma$$

L'opérateur C est donc *inversible* et on vérifie sans peine que

$$\|C^{-1}\sigma\|_H \leq \gamma_2^{-1} \|\sigma\|_H \quad (21)$$

$$(C^{-1}\sigma, \tau)_H = (\sigma, C^{-1}\tau)_H \quad (22)$$

$$(C^{-1}\sigma, \sigma)_H \geq M_2^{-2} \|\sigma\|_H^2 \quad (23)$$

On peut donc également utiliser sur H le produit scalaire équivalent

$$(\sigma, \tau)_{E'} = (C^{-1}\sigma, \tau)_H \quad (24)$$

que nous appellerons *produit scalaire énergétique dual*. L'espace H, muni de ce produit scalaire, sera noté E' et appelé *espace des contraintes*.

f) A toute déformation  $\varepsilon \in E$ , on peut associer une contrainte  $\sigma \in E'$  par la relation

$$\sigma = C \varepsilon$$

et ces deux éléments conjugués vérifient

$$\|\varepsilon\|_E^2 = (C\varepsilon, \varepsilon)_H = (\sigma, C^{-1}\sigma)_H = \|\sigma\|_{E'}^2, \quad (25)$$

g) Dans le cas où  $\varepsilon = \partial u$ , le produit scalaire  $(\sigma, \partial u)_H$  sera appelé *travail de la contrainte  $\sigma$  sur la déformation  $\partial u$* .

h) Un élément f du dual V' de V sera appelé *force*. La valeur de la forme linéaire f(u) pour un déplacement u de V sera appelé *travail de f pour le déplacement u*.

#### 4. PROBLÈME PRIMAL OU PROBLÈME AUX DÉPLACEMENTS

4.1 - Le problème primal s'énonce comme suit:

PP - Etant donné un déplacement quelconque  $u_0 \in V$  et une force  $f \in V'$ , chercher dans la variété linéaire  $u_0 \oplus V_0$  le déplacement u tel que

$$(\partial u, \partial v)_E = f(v) \quad (26)$$

pour tout  $v \in V_0$ .

Ce problème admet une solution unique, car les relations (16) à (19) impliquent que le produit scalaire  $(\partial u, \partial v)_E$  remplit les conditions énoncées au § 2.4 pour un problème variationnel non homogène. Nous noterons dorénavant

$$u = u_0 + u'' , \quad u'' \in V_0 , \quad (27)$$

la solution de ce problème.

4.2 - Il est utile de noter qu'à ce déplacement  $u$ , on peut associer une déformation  $\varepsilon = \partial u$  et une contrainte  $\sigma = C\partial u$ , et que cette dernière vérifie, pour tout déplacement  $v \in V_0$ , l'équation

$$(\sigma, \partial v)_H = f(v) \quad (28)$$

### 4.3 - Compatibilité, équilibre

Nous appellerons  $u_0$ - compatible une contrainte  $\sigma \in E'$  telle que

$$\sigma \in C\partial u_0 \oplus C\partial V_0$$

Dans le cas où  $u_0 = 0$ , nous dirons que la contrainte  $\sigma$  est *zéro-compatible* ou encore, *compatible homogène*:  $\sigma \in C\partial V_0$ .

Une contrainte  $\sigma \in E'$  qui vérifie l'équation (28) pour tout  $v \in V_0$  sera dite *en équilibre sous la force  $f$* .

Dans le cadre de cette terminologie, on peut dire que le problème primal consiste à chercher, parmi les contraintes  $u_0$ -compatibles, celle qui est en équilibre sous la force  $f$ .

## 5 - PROBLÈME DUAL OU PROBLÈME AUX CONTRAINTES

Le problème dual consiste à chercher la même contrainte  $\sigma$ , mais en procédant en sens inverse: parmi les contraintes en équilibre sous  $f$ , on détermine celle qui est  $u_0$ - compatible.

### 5.1 - Contraintes auto-équilibrées

Notons  $S$  le sous-espace orthogonal dans  $H$  à  $\partial V_0$  (ou, ce qui revient au même, orthogonal dans  $E'$  à  $C\partial V_0$ ):

$$S = \{ \sigma \in H : (\forall v \in V_0) (\sigma, \partial v)_H = 0 \} \quad (29)$$

En comparant cette condition à l'équation variationnelle (28), on

constate qu'il s'agit de contraintes en équilibre sous une force nulle ou encore, *auto-équilibrées*. Comme  $S$  et  $\partial V_0$  sont fermés, on a la décomposition

$$H = S \oplus \partial V_0 \quad (30)$$

qui se traduit dans  $E'$  par

$$E' = S \oplus C\partial V_0 \quad (30 \text{ bis})$$

### 5.2 - Solution particulière à l'équilibre sous $f$

Etant donné une force  $f \in V'$ , il est toujours possible de trouver une solution particulière à l'équilibre, c'est-à-dire une contrainte  $\sigma_0 \in H$  telle que

$$(\sigma_0, \partial v)_H = f(v) \quad (31)$$

pour tout déplacement homogène  $v \in V_0$ . En effet, si  $u$  est la solution du problème primal, toute contrainte de la forme

$$\sigma_0 = C\partial u + \tau$$

avec  $\tau$  auto-équilibré, convient.

### 5.3 - Condition d' $u_0$ -compatibilité

Supposons donc que l'on ait déterminé par une méthode quelconque une solution particulière  $\sigma_0$  de l'équilibre sous la force  $f$ . La solution générale de l'équation d'équilibre sous  $f$  est donc de la forme

$$\sigma = \sigma_0 + \tau$$

avec  $\tau$  auto-équilibré. Dans quelles conditions est-elle également  $u_0$ -compatible? Il faut pour cela que

$$\sigma = C\partial u_0 + C\partial v$$

avec  $v$  homogène. Multipliant scalairement les deux membres par  $\tau \in S$ , on obtient alors

$$(\sigma, \tau)_{E'} = (C\partial u_0, \tau)_{E'} + (C\partial v, \tau)_{E'} = (C\partial u_0, \tau)_{E'}$$

soit

$$(\sigma, \tau)_{E'} = (\partial u_0, \tau)_H \quad (34)$$

ce qui nous donne une condition *nécessaire*. La vérification de cette condition pour toute contrainte auto-équilibrée est également *suffisante*, car elle entraîne

$$(\sigma - C\partial u_0, \tau)_{E'} = 0$$

soit

$$\sigma - C\partial u_0 \in S_{\perp} = C\partial V_0$$

ce qui signifie qu'il existe un déplacement homogène  $v$  tel que

$$\sigma = C\partial(u_0 + v)$$

**5.4 -** Les considérations qui précèdent montrent que la contrainte  $\sigma$ , solution du problème primal, est également solution du problème dual, qui s'énonce comme suit:

*PD - Etant donné un déplacement quelconque  $u_0 \in V$  et une force  $f \in V'$ , fixons d'abord une solution particulière  $\sigma_0$  de l'équation d'équilibre*

$$(\forall v \in V_0) \quad (\sigma_0, \partial v)_H = f(v)$$

*Il faut alors chercher une contrainte  $\sigma \in \sigma_0 \oplus S$  telle que*

$$(\sigma, \tau)_{E'} = (\partial u_0, \tau)_H \quad (35)$$

*pour tout  $\tau$  auto-équilibré.*

L'unicité de la solution découle des relations (21) à (23). Dans la suite, nous la décomposerons en

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma'' \quad , \quad \sigma'' \in S \quad (36)$$

## 6. CHOIX PARTICULIER DES TERMES NON HOMOGÈNES

Nous avons vu, lors des considérations générales sur les problèmes non homogènes (§ 2.5) qu'il existe un arbitraire quant au choix des  $u_0$  et  $\sigma_0$ . En particulier, il nous est loisible de choisir  $u_0$  de telle manière que, pour tout déplacement homogène  $v \in V_0$ ,

$$0 = (\partial u_0, \partial v)_E = (C\partial u_0, \partial v)_H$$

ce qui revient à dire que l'on peut supposer que  $C\partial u_0$  est

auto-équilibré:

$$C\partial u_0 \in S \quad (36)$$

De la même façon, on peut choisir un  $\sigma_0$  satisfaisant à la condition

$$0 = (\sigma_0, \tau)_{E'}$$

ce qui revient à imposer que  $\sigma_0$  soit compatible homogène:

$$\sigma_0 \in C\partial V_0 \quad (37)$$

Dès lors, la double décomposition

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 + \sigma'' = C\partial u_0 + C\partial u'' \\ &\in C\partial V_0 \quad \in S \quad \in S \quad \in C\partial V_0 \end{aligned}$$

conduit au résultat suivant, en vertu de l'unicité de la décomposition orthogonale:

$$\begin{cases} \sigma_0 = C\partial u'' \\ C\partial u_0 = \sigma'' \end{cases} \quad (38)$$

Ce résultat est schématisé par la figure 1.

## 7. ERREUR D'UNE CONTRAINTE QUELCONQUE

7.1 - La solution commune des deux problèmes énoncés ci-dessus est rarement accessible au calcul direct. On en est donc réduit à en chercher des approximations numériques. Supposons donc que, par un moyen *quelconque*, on ait obtenu une *solution approchée*  $\vartheta \in E'$ . Il est naturel de se poser des questions quant à la *qualité* de l'approximation obtenue. Celle-ci peut être mesurée par la distance (au sens de la topologie de l'espace  $E'$ ) entre la solution approchée  $\vartheta$  et la solution exacte  $\sigma$ , soit

$$d(\vartheta, \sigma) = \|\vartheta - \sigma\|_{E'}$$

C'est donc la norme de l'*erreur de contrainte*

$$\eta = \vartheta - \sigma \quad (39)$$

qui peut du reste se décomposer en

$$\eta = \eta_c + \eta_e, \quad \eta_c \in S, \quad \eta_e \in C\partial V_0 \quad (40)$$

En d'autres termes, l'erreur de contrainte comporte un terme compatible homogène  $\eta_e$  et un terme auto-équilibré  $\eta_c$ . Cette situation est schématisée par la figure 2. Bien entendu, la norme de l'erreur vérifie

$$\|\eta\|_{E'}^2 = \|\eta_c\|_{E'}^2 + \|\eta_e\|_{E'}^2,$$

Proposons-nous d'examiner séparément chacun de ces termes.

## 7.2 - Erreur d'équilibre

Comme

$$\eta = \vartheta - \sigma$$

on a, pour tout déplacement homogène  $v \in V_0$ ,

$$\begin{aligned} (\eta_e, C\partial v)_{E'} &= (\eta, C\partial v)_{E'} = (\vartheta, C\partial v)_{E'} - (\sigma, C\partial v)_{E'} \\ &= (\vartheta, \partial v)_H - f(v) \end{aligned}$$

Le dernier membre de cette équation fait apparaître la fonctionnelle linéaire

$$\mathcal{D}(v) = (\vartheta, \partial v)_H - f(v) \quad (41)$$

visiblement bornée sur  $V$ . Sa propriété fondamentale est de s'annuler chaque fois que la contrainte  $\vartheta$  est en équilibre sous la force  $f$ . En conséquence, nous donnerons à  $\mathcal{D}(v)$  le nom de *fonctionnelle de déséquilibre*. Tenant compte du fait que  $\eta_e$  est compatible homogène, on trouve alors

$$\begin{aligned} \|\eta_e\|_{E'} &= \sup_{\substack{\psi \in E' \\ \neq 0}} \frac{(\eta_e, \psi)_{E'}}{\|\psi\|_{E'}} = \sup_{\substack{\psi \in C\partial V_0 \\ \neq 0}} \frac{(\eta_e, \psi)_{E'}}{\|\psi\|_{E'}} \\ &= \sup_{\substack{v \in V_0 \\ \neq 0}} \frac{\mathcal{D}(v)}{\|\partial v\|_E} \end{aligned} \quad (42)$$

Cette expression montre que la partie compatible homogène de l'erreur peut être interprétée comme une *erreur d'équilibre*. Du reste, il résulte du § 2.3 que cette borne supérieure est atteinte pour le déplacement homogène  $v_e \in V_0$  solution du problème variationnel

$$(\forall v \in V_0) \quad (\partial v_e, \partial v)_E = \mathcal{D}(v) \quad (43)$$

qui n'est autre que le problème primal homogène, avec pour second membre le déséquilibre. Ce problème admettant l'écriture équivalente

$$(C\partial v_e, \partial v)_H = \mathcal{D}(v)$$

on déduit aisément que

$$\eta_e = C\partial v_e \quad ; \quad \|\eta_e\|_{E'} = \|\partial v_e\|_{E'} \quad (44)$$

### 7.3 - Erreur de compatibilité

On a par ailleurs, pour toute contrainte auto-équilibrée  $\tau \in S$ ,

$$\begin{aligned} (\eta_c, \tau)_{E'} &= (\eta, \tau)_{E'} = (\vartheta, \tau)_{E'} - (\sigma, \tau)_{E'} \\ &= (\vartheta, \tau)_{E'} - (\partial u_0, \tau)_H \end{aligned}$$

Le dernier membre fait apparaître la fonctionnelle linéaire bornée sur S

$$\mathfrak{J}(\tau) = (\vartheta, \tau)_{E'} - (\partial u_0, \tau)_H \quad (45)$$

dont la propriété essentielle est de s'annuler chaque fois que  $\vartheta$  est  $u_0$ -compatible. Nous l'appellerons en conséquence *fonctionnelle d'incompatibilité*. Tenant compte du caractère auto-équilibré de  $\eta_c$ , on a alors

$$\begin{aligned} \|\eta_c\|_{E'} &= \sup_{\substack{\psi \in E' \\ \neq 0}} \frac{(\eta_c, \psi)_{E'}}{\|\psi\|_{E'}} = \sup_{\substack{\tau \in S \\ \neq 0}} \frac{(\eta_c, \tau)_{E'}}{\|\tau\|_{E'}} \\ &= \sup_{\substack{\tau \in S \\ \neq 0}} \frac{\mathfrak{J}(\tau)}{\|\tau\|_{E'}} \end{aligned} \quad (46)$$

Ce résultat montre que la partie auto-équilibrée de l'erreur s'interprète comme une *erreur de compatibilité*. Du reste, il résulte du § 2.3 que la contrainte  $\eta_c$  est solution du problème variationnel

$$(\forall \tau \in S) \quad (\eta_c, \tau)_{E'} = \mathfrak{J}(\tau) \quad (47)$$

où l'on reconnaît le problème dual homogène avec l'incompatibilité comme second membre.

## 8. LES ERREURS EN TANT QUE DISTANCES À CERTAINES VARIÉTÉS

On peut donner à  $\eta_e$  et  $\eta_c$  une autre interprétation également utile.

### 8.1 - Erreur d'équilibre

Proposons-nous de rechercher, parmi les contraintes en équilibre sous  $f$ , celle qui est la plus proche de  $\vartheta$ . Il s'agit donc de minimiser par rapport à  $\tau \in S$  le carré de la distance

$$\|\vartheta - \sigma_0 - \tau\|_{E'}^2 = \|\vartheta - \sigma_0\|_{E'}^2 - 2(\vartheta - \sigma_0, \tau)_{E'} + \|\tau\|_{E'}^2,$$

Si ce minimum est réalisé pour un certain  $\tau^*$ , on a, pour tout  $\delta\tau \in S$ , la relation

$$(\tau^*, \delta\tau)_{E'} - (\vartheta - \sigma_0, \delta\tau)_{E'} = 0$$

ce qui signifie que

$$\vartheta - \sigma_0 - \tau^* \in C\partial V_0$$

Il existe donc un déplacement homogène  $v^*$  tel que

$$\vartheta = \sigma_0 + \tau^* + C\partial v^* = (\sigma_0 + \sigma'') + (\tau^* - \sigma'') + C\partial v^*$$

soit

$$\begin{aligned} \eta &= (\tau^* - \sigma'') + C\partial v^* \\ &\in S \quad \quad \quad \in C\partial V_0 \end{aligned}$$

L'unicité de la décomposition orthogonale entraîne alors

$$\eta_e = C\partial v^* = \vartheta - \sigma_0 - \tau^*$$

et, par conséquent,

$$\|\eta_e\|_{E'} = \inf_{\psi \in \sigma_0 \oplus S} \|\vartheta - \psi\|_{E'} \quad (48)$$

*L'erreur d'équilibre est donc la distance entre la solution approchée et la variété d'équilibre sous  $f$ .*

### 8.2 - Erreur de compatibilité

De la même façon, cherchons la contrainte  $u_0$ -compatible la plus proche de  $\vartheta$ . Il s'agit de minimiser par rapport à  $v \in V_0$  l'expression

$$\|\vartheta - C\partial u_0 - C\partial v\|_E^2 = \|\vartheta - C\partial u_0\|_E^2 - 2(\vartheta - C\partial u_0, C\partial v)_E + \|C\partial v\|_E^2,$$

Si ce minimum est réalisé en  $v^*$ , on a, pour tout  $\delta v \in V_0$ ,

$$(\vartheta - C\partial u_0 - C\partial v^*, C\partial \delta v)_E = 0$$

ce qui signifie que

$$\vartheta - C\partial u_0 - C\partial v^* \in S$$

Il existe donc une contrainte auto-équilibrée  $\tau^*$  telle que

$$\vartheta = C\partial u_0 + C\partial v^* + \tau^* = (C\partial u_0 + C\partial u'') + (C\partial v^* - C\partial u'') + \tau^*$$

soit

$$\begin{aligned} \eta &= (C\partial v^* - C\partial u'') + \tau^* \\ &\in C\partial V_0 \quad \in S \end{aligned}$$

Or, ceci implique

$$\eta_c = \tau^* = \vartheta - C\partial u_0 - C\partial v^*$$

et

$$\|\eta_c\|_E = \inf_{\vartheta \in C\partial u_0 \oplus C\partial V_0} \|\vartheta - \psi\|_E, \quad (49)$$

*L'erreur de compatibilité est donc la distance entre la solution approchée  $\vartheta$  et la variété d' $u_0$ -compatibilité.*

## 9. ENCADREMENT DES ERREURS

**9.1 -** Malheureusement, on imagine mal de calculer *exactement* les erreurs  $\eta_e$  et  $\eta_c$  définies ci-dessus, car cela exigerait la résolution *exacte* d'un problème au moins équivalent en difficulté au problème initial, pour lequel on a dû se contenter d'une solution *approchée*. L'évaluation des erreurs devra donc nécessairement être approchée elle-aussi. Mais il se trouve que les résultats précédents contiennent implicitement une méthodologie d'*encadrement* des erreurs.

### 9.2 - Encadrement de l'erreur d'équilibre

a) Il découle directement de l'expression (42) de la norme de l'erreur d'équilibre que pour tout déplacement homogène  $v$ , on a

$$\|\eta_e\|_E \geq \frac{|D(v)|}{\|\partial v\|_E} \quad (50)$$

ce qui constitue une *borne inférieure* de l'erreur d'équilibre. L'intérêt intrinsèque de ce résultat est cependant limité par le fait suivant. Supposons que  $\vartheta$  ait été obtenu par une approximation de Rayleigh-Ritz du problème primal. En d'autres termes, pour obtenir  $\vartheta$ , on s'est donné un sous-espace  $V_{h0} \subset V_0$  et on a cherché le déplacement  $u_h \in u_0 \oplus V_{h0}$  tel que, pour tout  $v_h \in V_{h0}$ , on ait

$$(\partial u_h, \partial v_h)_E = f(v_h)$$

La contrainte approchée est alors

$$\vartheta = C\partial u_h$$

Il est clair que dans ces conditions, on a nécessairement

$$D(v_h) = 0$$

pour tout  $v_h \in V_{h0}$ . Pour obtenir une borne inférieure non nulle, il faut donc introduire *de nouveaux déplacements n'appartenant pas à  $V_{h0}$*  (quoique appartenant à  $V_0$ ).

La meilleure borne s'obtient évidemment pour le déplacement  $v_e$  introduit au § 7.2, mais il faut le considérer comme inaccessible. En pratique, on utilisera donc un déplacement estimé, auquel on peut donner la forme générale

$$v = \alpha v_e + w$$

avec  $\partial w$  orthogonal à  $\partial v_e$  dans  $E$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Introduisons (fig. 3) l'angle  $\phi$  entre les vecteurs  $\partial v$  et  $\partial v_e$  dans  $E$ , défini par

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\|\partial w\|_E}{\|\alpha \partial v_e\|_E} \quad (51)$$

On a alors

$$\|\partial v\|_E^2 = \|\alpha \partial v_e\|_E^2 + \|\partial w\|_E^2 = \|\alpha \partial v_e\|_E^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \phi)$$

soit

$$\|\partial v\|_E = |\alpha| \|\partial v_e\|_E / \cos \phi$$

Comme

$$D(v) = (\partial v_e, \partial v)_E = \alpha \|\partial v_e\|_E^2$$

on obtient

$$\frac{|D(v)|}{\|\partial v\|_E} = \|\partial v_e\|_E \cos \phi = \|\eta_e\|_E \cos \phi \quad (52)$$

La sous-estimation réalisée est donc *du second ordre* par rapport à l'erreur angulaire de  $\partial v$  dans  $E$ .

Signalons encore que cette technique d'estimation par défaut de l'erreur peut être utilisée pour définir des *indicateurs locaux d'erreur* [5].

b) Il résulte de la définition de  $\|\eta_e\|_E$ , comme minimum que pour toute contrainte  $\tau$  en équilibre sous  $f$ , on a

$$\|\eta_e\|_E \leq \|\vartheta - \tau\|_E, \quad (53)$$

ce qui constitue une *borne supérieure*. Introduite par LADEVEZE [3] pour évaluer les erreurs des éléments finis conformes, cette méthode s'applique donc à l'erreur d'équilibre dans le cas général.

Le choix idéal de la contrainte  $\tau$  est évidemment le pied de la perpendiculaire abaissée de  $\vartheta$  sur la variété d'équilibre sous  $f$ . Soit  $\tau^*$  cette contrainte. En pratique, on devra se contenter d'une contrainte de la forme

$$\tau = \tau^* + \chi$$

avec  $\chi$  auto-équilibré. On a alors

$$\vartheta - \tau = (\vartheta - \tau^*) - \chi = \eta_e - \chi$$

et, en vertu de l'orthogonalité de  $\eta_e$  à  $S_0$ ,

$$\|\vartheta - \tau\|_E^2 = \|\eta_e\|_E^2 + \|\chi\|_E^2$$

Appelant  $\omega$  l'angle entre  $\chi$  et  $\eta_e$ , défini par (fig. 4)

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\|\chi\|_E}{\|\eta_e\|_E}, \quad (54)$$

on obtient

$$\|\vartheta - \tau\|_E = \frac{\|\eta_e\|_E}{\cos \omega} \quad (55)$$

La surévaluation réalisée est donc *du second ordre* en l'erreur de perpendicularité de  $(\vartheta - \tau)$  par rapport à la variété d'équilibre sous  $f$ .

### 9.3 - Encadrement de l'erreur de compatibilité

Les raisonnements étant symétriques des précédents, nous nous bornerons à énoncer les résultats.

a) D'abord, toute contrainte  $\tau$  auto-équilibrée donne lieu à l'inégalité

$$\|\eta_c\|_{E'} \geq \frac{|\mathfrak{J}(\tau)|}{\|\tau\|_{E'}} \quad (56)$$

qui constitue une borne inférieure de l'erreur. Les mêmes restrictions quant à l'applicabilité de cette borne dans le cadre d'une méthode de Rayleigh-Ritz pour le problème dual s'appliquent: sans enrichir le sous-espace des contraintes, on trouvera nécessairement une borne inférieure nulle. L'erreur d'évaluation est du second ordre par rapport au choix de  $\tau$ .

b) Pour tout champ de déplacement  $v$   $u_0$ -compatible, on a l'inégalité

$$\|\eta_c\|_{E'} \leq \|\vartheta - C\partial v\|_{E'} \quad (57)$$

ce qui définit une méthode de LADEVEZE duale, suggérée du reste par ZHONG [10]. La surévaluation est encore du second ordre par rapport au choix de  $v$ .

## 10. APPLICATION À CERTAINS PROBLÈMES D'ÉLÉMENTS FINIS

10.1 - Envisageons le cas suivant:  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  à frontière  $\Gamma$  lipschitzienne,  $V$  est une certaine puissance  $H^m(\Omega)$  de  $H^m(\Omega)$ . L'opérateur  $\partial$  est un opérateur différentiel matriciel appliquant  $u \in H^m(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  qui est une certaine puissance de  $L^2(\Omega)$ . Il existe une formule d'intégration par parties de la forme

$$\int_{\Omega} \sigma^T \partial u \, dx = \int_{\Gamma} (A\sigma)^T B u \, d\Gamma + \int_{\Omega} u^T \partial' \sigma \, dx \quad (58)$$

où  $\partial'$  est l'adjoint de  $\partial$  et  $A$  et  $B$  sont des opérateurs de trace. Décomposant  $\Gamma$  en deux parties  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , nous poserons

$$V_0 = \{ u \in V \ ; \ B u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \} \quad (59)$$

et nous admettrons que cette condition suffit à assurer la condition d'inversibilité sur  $V_0$ :

$$\int_{\Omega} (\partial u)^T \partial u \, dx \geq \gamma_1^2 \|u\|_V^2 \quad , \quad \gamma_1 \neq 0 \quad , \quad \forall u \in V_0$$

Le sous-espace S est alors défini par la condition

$$\sigma \in S \Leftrightarrow$$

$$(\forall u \in V_0) \quad 0 = \int_{\Omega} \sigma^T \partial u \, dx = \int_{\Gamma} (A\sigma)^T B u \, d\Gamma + \int_{\Omega} u^T \partial' \sigma \, dx$$

ce qui revient à dire qu'au sens faible,

$$\sigma \in S \Leftrightarrow \begin{cases} \partial' \sigma = 0 & \text{dans } \Omega \\ A\sigma = 0 & \text{sur } S_2 \end{cases} \quad (60)$$

Quant à l'opérateur C, ce sera simplement une matrice symétrique, d'éléments dans  $L^\infty(\Omega)$ , vérifiant en outre une condition d'uniforme positive définition presque partout dans  $\Omega$ :

$$\varepsilon^T C \varepsilon \geq \gamma_2^2 \varepsilon^T \varepsilon \quad \text{p.p.} \quad (61)$$

$\gamma_2$  étant un nombre non-nul indépendant du point considéré dans  $\Omega$ .

Pour ce qui est des forces, nous les supposons de la forme

$$f(u) = \int_{\Omega} f^T u \, dx + \int_{\Gamma_2} g^T B u \, d\Gamma \quad (62)$$

avec  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\Gamma_2)$ .

Les normes énergétiques sont

$$\|\partial u\|_E^2 = \int_{\Omega} (\partial u)^T C \partial u \, dx, \quad \|\sigma\|_E^2 = \int_{\Omega} \sigma^T C^{-1} \sigma \, dx \quad (63)$$

**10.2** - Le *problème primal* nécessite d'abord la détermination d'un déplacement  $u_0 \in V$  tel que

$$B u_0 = \bar{B} u \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (64)$$

$\bar{B} u$  étant une trace imposée. Il faut alors trouver  $u \in u_0 \oplus V_0$ , c'est-à-dire un déplacement vérifiant la condition (64) tel que, pour tout déplacement homogène  $v$ , on ait

$$\int_{\Omega} (\partial u)^T C \partial v \, dx = \int_{\Omega} f^T v \, dx + \int_{\Gamma_2} g^T v \, d\Gamma$$

ce qui équivaut à

$$\int_{\Omega} v^T (f - \partial' C \partial u) \, dx + \int_{\Gamma_2} (Bv)^T (g - AC \partial u) \, d\Gamma = 0$$

soit (au sens faible)

$$\begin{cases} \partial' C \partial \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ AC \partial \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (65)$$

La contrainte est alors

$$\sigma = C \partial \mathbf{u} \quad (66)$$

**10.3 - Le problème dual** nécessite au préalable la connaissance d'une contrainte  $\sigma_0$  telle que, pour tout déplacement homogène  $\mathbf{v}$ ,

$$\int_{\Omega} \sigma_0^T \partial \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g}^T B \mathbf{v} \, d\Gamma \quad (67)$$

ce qui équivaut, au sens faible, à

$$\begin{cases} \partial' \sigma_0 = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ A \sigma_0 = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (68)$$

Il faut alors trouver une contrainte dans  $\sigma_0 \in S$ , c'est-à-dire une contrainte vérifiant (68), telle que pour toute contrainte auto-équilibrée, on ait

$$\int_{\Omega} \sigma^T C^{-1} \tau \, dx = \int_{\Omega} (\partial \mathbf{u}_0)^T \tau \, dx = \int_{\Gamma_1} (A \tau)^T B \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (69)$$

#### 10.4 - Fonctionnelle de déséquilibre

La fonctionnelle de déséquilibre s'écrit ici, pour une solution approchée  $\vartheta$ ,

$$\mathcal{D}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \vartheta^T \partial \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{v} \, dx - \int_{\Gamma_2} \mathbf{g}^T B \mathbf{v} \, d\Gamma$$

Dans le cas d'un découpage en éléments finis  $K$ , c'est encore

$$\mathcal{D}(\mathbf{v}) = \sum_K \int_K \vartheta^T \partial \mathbf{v} \, dx - \sum_K \int_K \mathbf{f}^T \mathbf{v} \, dx - \int_{\Gamma_2} \mathbf{g}^T B \mathbf{v} \, d\Gamma$$

et, en intégrant par parties dans chaque élément,

$$\mathcal{D}(\mathbf{v}) = \sum_K \int_{\Gamma_K} (A \vartheta)^T B \mathbf{v} \, d\Gamma + \sum_K \int_K (\partial' \vartheta - \mathbf{f})^T \mathbf{v} \, dx - \int_{\Gamma_2} \mathbf{g}^T B \mathbf{v} \, d\Gamma$$

Les faces d'éléments se scindent en trois espèces:

- faces sur  $\Gamma_1$  où  $B \mathbf{v} = 0$  ;

- faces sur  $\Gamma_2$  ;

- interfaces, que nous noterons I. Sur chaque interface, nous choisirons arbitrairement un côté + et un côté -. Il est clair que

$$B_+ \mathbf{v} = B_- \mathbf{v} = B\mathbf{v}$$

car  $\mathbf{v}$  est nécessairement compatible. On peut donc réarranger les différents termes de  $\mathcal{D}(\mathbf{v})$  sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{v}) = \sum_K \int_K (\partial' \vartheta - \mathbf{f})^T \mathbf{v} \, dx + \sum_I \int_I (A_+ \vartheta + A_- \vartheta)^T B\mathbf{v} \, d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_2} (A\vartheta - \mathbf{g})^T B\mathbf{v} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (70)$$

Les trois termes du second membre représentent respectivement le déséquilibre à l'intérieur des éléments, le déséquilibre aux interfaces et le déséquilibre à la frontière chargée. Il convient de noter [5] que ces trois termes peuvent se compenser partiellement: une majoration séparée de ces trois termes mène à des estimateurs d'erreur ne convergeant pas nécessairement vers zéro lorsque la solution converge.

Les modèles d'éléments finis pour lesquels l'erreur d'équilibre est toujours nulle sont dits *codiffusifs*. Il faut pour cela que la fonctionnelle de déséquilibre soit nulle *a priori*, ce qui suppose les conditions

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial' \vartheta = \mathbf{f} & \text{à l'intérieur de chaque élément} \\ A\vartheta = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_2 \\ A_+ \vartheta + A_- \vartheta = 0 & \text{aux interfaces.} \end{array} \right. \quad (71)$$

Pour ce type d'éléments, l'erreur se limite à une erreur de compatibilité.

### 10.5 - Fonctionnelle d'incompatibilité

La fonctionnelle d'incompatibilité s'écrit

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(\boldsymbol{\tau}) &= \int_{\Omega} \vartheta^T C^{-1} \boldsymbol{\tau} \, dx - \int_{\Omega} (\partial \mathbf{u}_0)^T \boldsymbol{\tau} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \vartheta^T C^{-1} \boldsymbol{\tau} \, dx - \int_{\Gamma_1} (A\boldsymbol{\tau})^T B\bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (72)$$

C'est sous cette forme qu'elle doit être utilisée dans le cas d'éléments finis où sont discrétisées les contraintes. Dans le cas d'éléments primaux non conformes, on a *dans chaque élément*

$$\vartheta = C\partial w_K \quad (73)$$

où  $w_K$  est le déplacement dans l'élément K. On a donc

$$\int_{\Omega} \vartheta^T C^{-1} \tau \, dx = \sum_K \int_K \tau^T \partial w_K \, dx = \sum_K \int_{\Gamma_K} (A\tau)^T B w_K \, d\Gamma$$

Comme sur les interfaces, la contrainte auto-équilibrée  $\tau$  vérifie

$$A_+ \tau + A_- \tau = 0$$

on obtient finalement

$$\mathfrak{J}(\tau) = \sum_I \int_I (A_+ \tau)^T [(B w_K)_+ - (B w_K)_-] \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (A\tau)^T (B w_K - B \bar{u}) \, d\Gamma \quad (74)$$

où l'on peut reconnaître l'incompatibilité *aux interfaces* et l'incompatibilité *sur la frontière fixe*.

Les éléments finis pour lesquels l'erreur de compatibilité est nulle *a priori* sont appelés *conformes*. Il faut pour cela que

$$\begin{cases} \vartheta = C\partial w_K & \text{dans chaque élément} \\ B w_K = B \bar{u} & \text{sur } \Gamma_1 \\ (B w_K)_+ = (B w_K)_- & \text{sur les interfaces} \end{cases} \quad (75)$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. RIESZ, B.Sz. NAGY - *Leçons d'analyse fonctionnelle*  
6<sup>e</sup> éd., Gauthier-Villars, Paris, 1975
- [2] H.G. GARNIR - *Les problèmes aux limites de la physique mathématique* - Birkhäuser, Bâle, 1958
- [3] P. LADEVEZE, D. LEGUILLON - "Error estimate procedure in the finite element method and applications" - *SIAM J. Num. Anal.*, **20**, n°3, pp.483-509, 1983
- [4] R. TEMAM - *Analyse numérique*  
Collection SUP, Presses Universitaires de France, Paris, 1970
- [5] J.F. DEBONGNIE - "Sur une mesure locale de l'erreur de discrétisation par éléments finis" - Université de Liège, Rapport LMF/D28, 1993
- [6] J.F. DEBONGNIE - "A general theory of dual error bounds by finite elements" - Université de Liège, Papport LMF/D5, 1983
- [7] B. FRAEIJIS de VEUBEKE - "Displacement and equilibrium models in the finite element method" - *Stress Analysis*, ed. O.C ZIENKIEWICZ & G.S. HOLISTER, Wiley, London, 1965
- [8] L. BABUSKA, B. SZABO - "On the rates of convergence of the finite element method" - *Int. Jl. Num. Meth. Engng.*, **18**, pp.323-341, 1982
- [9] J.P. de S.R. GAGO - *A posteriori error analysis and adaptivity for the finite element method* - Ph. D. thesis, Univ. of Wales, Swansea, U.K., 1982
- [10] H.G. ZHONG - *Estimateurs a posteriori et adaptation des maillages dans la méthode des éléments finis* - Thèse de doctorat, Université de Liège, 1991

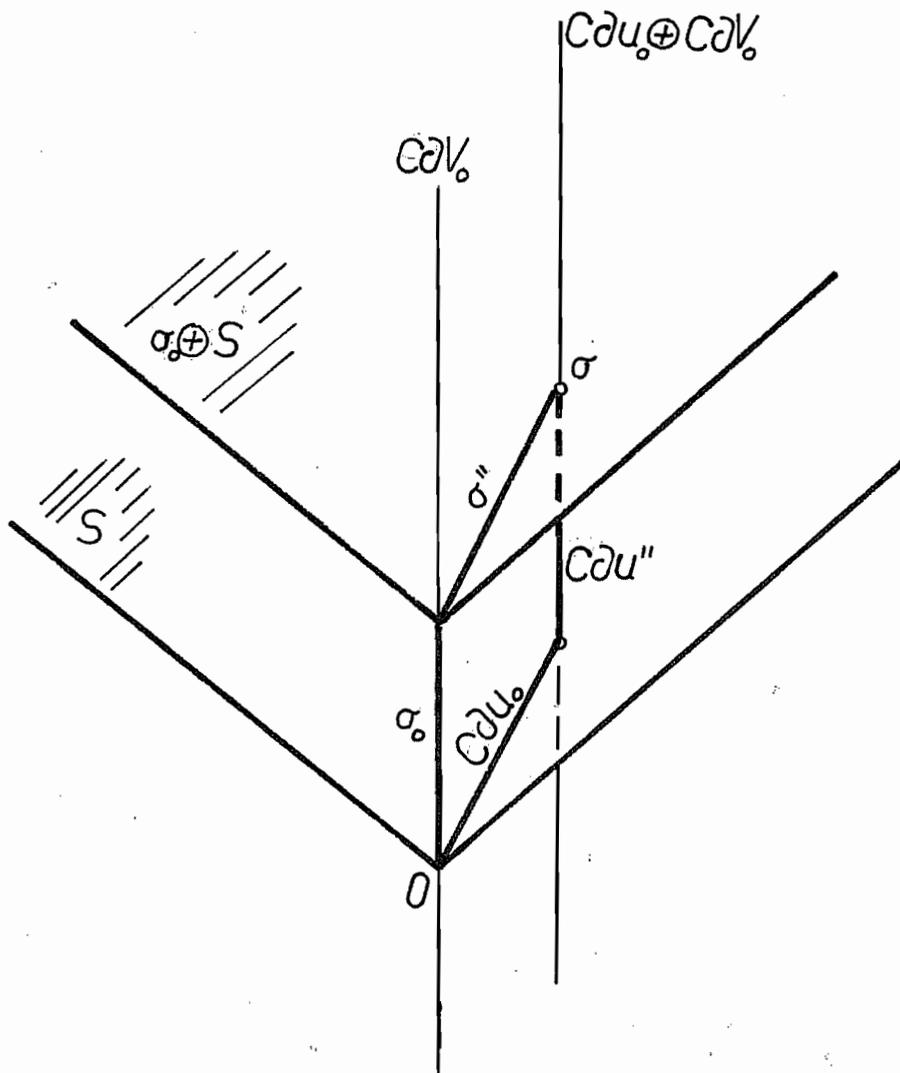


FIG. 1

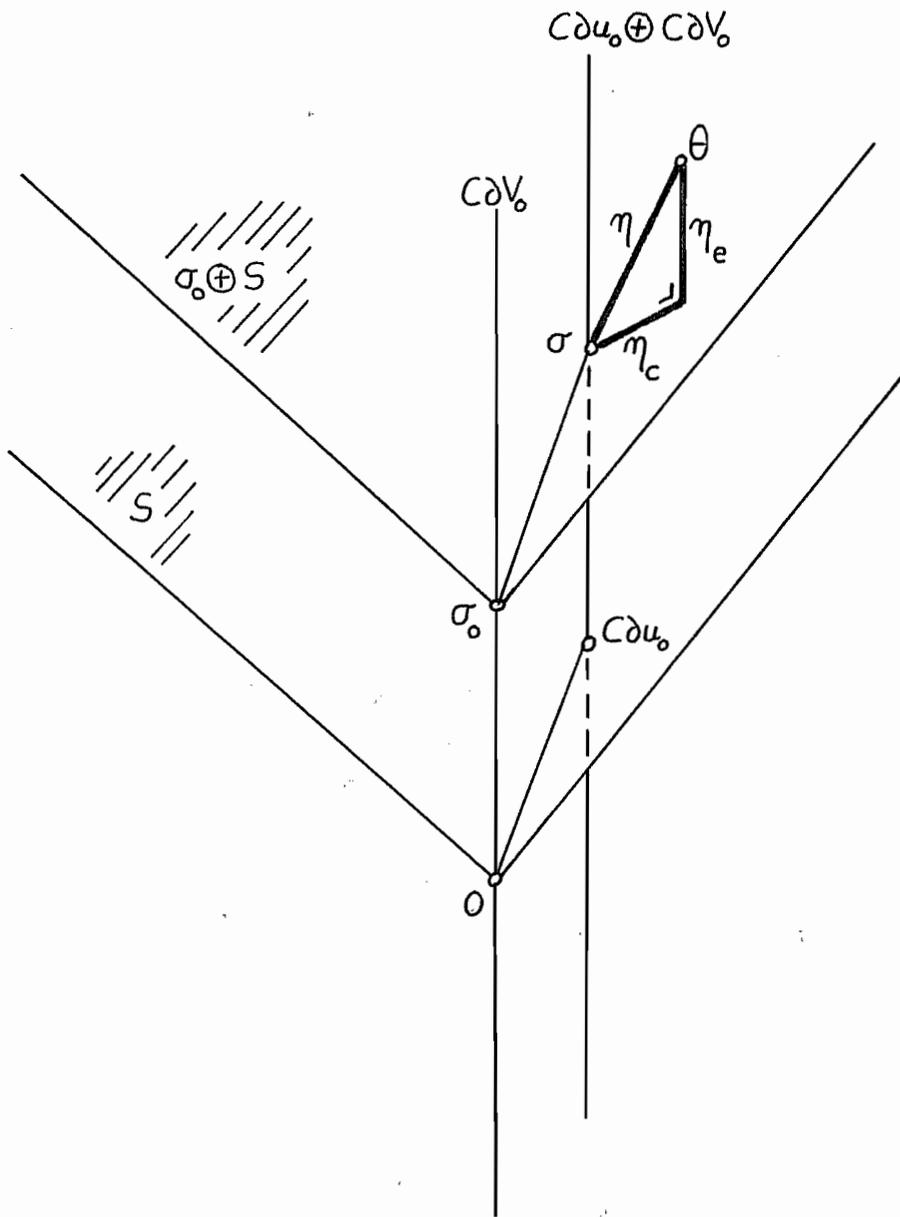


FIG. 2

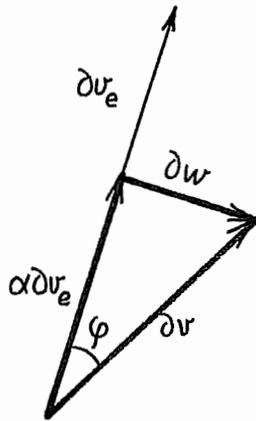


FIG. 3

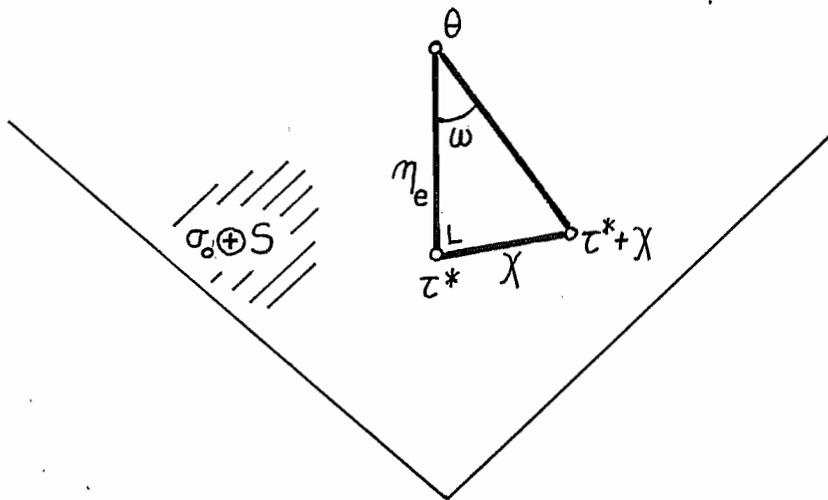


FIG. 4