

UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION

ETUDE APPROCHEE DES ROULEMENTS RIGIDES A BILLES
CHARGES RADIALEMENT, DANS LE CAS DES GRANDES VITESSES

J.F. DEBONGNIE

Rapport LMF/D30, juin 1992

INTRODUCTION

Les calculs classiques de roulements supposent la fréquence de rotation suffisamment faible pour que les effets d'inertie des billes soient négligeables.

La plus élémentaire des corrections pour grande vitesse consiste à rajouter la seule force centrifuge. Mais même ainsi, le problème devient déjà nettement plus complexe.

Cependant, dans le cas d'une charge radiale, il est possible de développer une formulation approchée, dont le principal mérite est de conduire simplement à des résultats réalistes. Elle peut donc avoir valeur de recoupement pour les résultats de théories plus complètes, ce qui ne manque pas d'intérêt.

1. Relations d'équilibre

Chaque bille supporte les charges suivantes (fig.1) :

- la charge Q_i appliquée par la bague intérieure
- la force entrifuge F_c
- la charge Q_e appliquée par la bague extérieure.

L'équilibre de ces trois charges s'écrit

$$Q_e = F_c + Q_i \quad (1)$$

Lorsque le roulement tourne sans charge, on a $Q_i = 0$ et $Q_e = F_c$. La charge radiale que supporte le roulement est la résultante des Q_i . Elle vaut donc (fig.2)

$$F_r = \Sigma Q_i \cos \theta \quad (2)$$

2. Déformations de contact

Sous l'effet de la charge Q , la bague extérieure se rapproche de la bague intérieure d'une longueur

$$\delta_i = k_i Q_i^{2/3}$$

A l'opposé, le centre de la bille se rapproche de la bague intérieure de

$$\delta_e = k_e Q_e^{2/3} = k_e (Q_i + F_c)^{2/3}$$

Le rapprochement résultant de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure est donc

$$\delta = \delta_i + \delta_e = k_i Q_i^{2/3} + k_e (Q_i + F_c)^{2/3} \quad (3)$$

En l'absence de charge Q_i , le centre de la bille subit un déplacement centrifuge

$$\delta_c = k_e F_c^{2/3} \quad (4)$$

Soustrayant ces deux résultats, on obtient

$$\delta - \delta_c = k_i Q_i^{2/3} + k_e (Q_i + F_c)^{2/3} - k_e F_c^{2/3}$$

Divisons cette équation par δ_c . Il vient

$$\frac{\delta}{\delta_c} - 1 = \frac{k_i}{k_e} \left(\frac{Q_i}{F_c} \right)^{2/3} + \left(1 + \frac{Q_i}{F_c} \right)^{2/3} - 1 \quad (5)$$

Cette relation est valable pour $\delta > \delta_c$. Lorsque $\delta \leq \delta_c$, on a $Q_i = 0$ et $Q_e = F_c$.

3. Expression approchée de la charge en fonction du déplacement

En pratique, on se donne δ et il faut déterminer Q_i en résolvant l'équation (5). Posons

$$x = \frac{\delta}{\delta_c} - 1, \quad y = \frac{Q_i}{F_c}$$

L'équation (5) s'écrit encore

$$x = \frac{k_i}{k_e} y^{2/3} + (1 + y)^{2/3} - 1 \quad (6)$$

Nous nous proposons de trouver une solution approchée de cette équation, sous la forme

$$y = A x^n \quad (7)$$

Envisageons d'abord le cas où $\frac{k_i}{k_e} = 1$. Un ajustement linéaire des logarithmes, pour des valeurs de x allant de 10^{-2} à 10^2 mène à la formule approchée

$$y = 0,5527 x^{1,380} \quad \left(\frac{k_i}{k_e} = 1 \right) \quad (8)$$

La comparaison de cette formule avec les résultats exacts est donnée dans le tableau suivant :

x	y(exact)	y(formule 8)	Δ %
0,01	$9,104 \cdot 10^{-4}$	$9,605 \cdot 10^{-4}$	5,2
0,016	$1,801 \cdot 10^{-3}$	$1,837 \cdot 10^{-3}$	2,0
0,025	$3,424 \cdot 10^{-3}$	$3,401 \cdot 10^{-3}$	-0,7
0,04	$6,700 \cdot 10^{-3}$	$6,506 \cdot 10^{-3}$	-2,9
0,063	0,01273	0,01218	-4,3
1	0,02429	0,02304	-5,1
0,16	0,04647	0,04407	-5,2
0,25	0,08536	0,08159	-4,4
0,4	0,1607	0,1561	-2,9
0,63	0,2942	0,2921	-0,7
1	0,5424	0,5527	1,9
1,6	1,011	1,057	4,6
2,5	1,833	1,957	6,8
4	3,463	3,744	8,1
6,3	6,479	7,008	8,2
10	12,40	13,26	6,9
16	24,28	25,36	4,5
25	46,37	46,95	1,3
40	92,32	89,81	-2,7
63	180,5	168,1	-6,9
100	358,4	318,0	-11,3

Cette approximation nous semble donc très satisfaisante, puisque y ne s'écarte jamais plus de 11% de la valeur exacte, tout en variant de 10^{-3} à 350.

Dans le cas général où k_i est différent de k_e , commençons par écrire (6) sous la forme

$$x = \left(\frac{k_1}{k_e} - 1 \right) y^{2/3} + \left[y^{2/3} + (1+y)^{2/3} - 1 \right] \quad (9)$$

L'approximation (8) s'inverse en

$$y^{2/3} + (1+y)^{2/3} - 1 \cong 1,537 y^{0,7246},$$

ce qui donne

$$x \cong \left(\frac{k_1}{k_e} - 1 \right) y^{2/3} + 1,537 y^{0,7246} \quad (10)$$

Soit alors m un nombre compris entre $2/3$ et $0,7246$. Posons

$$\frac{2}{3} = m + \alpha \quad ; \quad 0,7246 = m + \beta$$

et écrivons les développements tayloriens

$$\begin{cases} y^{2/3} = y^{m+\alpha} = y^m + \alpha y^m \ln y + O(\alpha^2) \\ y^{0,7246} = y^{m+\beta} = y^m + \beta y^m \ln y + O(\beta^2) \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} x &\cong \left(\frac{k_1}{k_e} - 1 \right) y^{2/3} + 1,537 y^{0,7246} = \left(\frac{k_1}{k_e} + 0,537 \right) y^m \\ &+ \left[\alpha \left(\frac{k_1}{k_e} - 1 \right) + 1,537\beta \right] + O(\alpha^2, \beta^2) \end{aligned}$$

Nous choisirons α et β de manière à annuler l'erreur du premier ordre, ce qui fournit la condition

$$\beta = \frac{-\alpha \left(\frac{k_1}{k_e} - 1 \right)}{1,537} \quad (11)$$

Par ailleurs, il est clair de

$$\beta - \alpha = (m+\beta) - (m-\alpha) = 0,7246 - \frac{2}{3} = 0,05793,$$

ce qui permet d'écrire (11) sous la forme

$$\alpha + 0,05793 = - \frac{\alpha \left(\frac{k_1}{k_e} - 1 \right)}{1,537}$$

soit

$$\alpha = \frac{-0,05793}{\frac{\frac{k_i}{k_e} - 1}{1 + \frac{1}{1,537}}} = - \frac{0,08904}{\frac{k_i}{k_e} + 0,537}$$

Il en découle

$$m = \frac{2}{3} - \alpha = \frac{2}{3} + \frac{0,08904}{\frac{k_i}{k_e} + 0,537}$$

On obtient donc

$$x \cong B y^m$$

avec

$$\begin{cases} B = \frac{k_i}{k_e} + 0,537 \\ m = \frac{2}{3} + \frac{0,08904}{B} \end{cases} \quad (12)$$

Notre solution approchée est alors

$$y = A x^n \quad (13)$$

avec

$$A = B^{-1/m}, \quad n = \frac{1}{m} \quad (14)$$

Voici un tableau donnant quelques valeurs de A et n

k_i/k_e	A	n
0,5	0,9529	1,329
0,6	0,8417	1,342
0,7	0,7498	1,354
0,8	0,6729	1,364
0,9	0,6081	1,372
1	0,5527	1,380
1,2	0,4634	1,393
1,4	0,3955	1,403
1,6	0,3422	1,412
1,8	0,3190	1,419
2	0,2810	1,425

Les valeurs obtenues sont représentées en figure 3.

4. Distribution des efforts

Pour un déplacement radial δ_r de la bague intérieure, on a

$$\delta(\theta) = \delta_r \cos \theta$$

Ce déplacement n'est supérieur à δ_c que pour

$$\delta_r \cos \theta \geq \delta_c$$

soit

$$|\theta| \leq \theta_0,$$

avec

$$\cos \theta_0 = \frac{\delta_c}{\delta_r} \quad (15)$$

On a alors

$$\frac{Q_i}{F_c} = A \left(\frac{\delta}{\delta_c} - 1 \right)^n = A \left(\frac{\delta_r \cos \theta}{\delta_c} - 1 \right)^n = A \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} - 1 \right)^n \quad (16)$$

Dès lors,

$$\frac{Q_{\max i}}{F_c} = A \left(\frac{1}{\cos \theta_0} - 1 \right)^n \quad (17)$$

La charge radiale vaut

$$F_r = \Sigma (Q \cos \theta) = z \frac{1}{z} \Sigma (Q \cos \theta)$$

Selon l'usage, nous remplacerons la moyenne

$$\frac{1}{z} \Sigma (Q \cos \theta)$$

par la moyenne intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} Q \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_0} Q \cos \theta \, d\theta$$

Tenant compte de la distribution (16), on obtient

$$\frac{F_r}{zF_c} = \frac{A}{\pi} \int_0^{\theta_0} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} - 1 \right)^n \cos \theta \, d\theta \quad (18)$$

On a par ailleurs

$$\frac{Q_{\max e}}{F_c} = \frac{Q_{\max i} + F_c}{F_c} = 1 + \frac{Q_{\max i}}{F_c} \quad (19)$$

Ces relations permettent de déduire

$$\frac{zQ_{\max_i}}{F_r} \text{ et } \frac{zQ_{\max_e}}{F_r}$$

La charge statique équivalente est, par définition, la charge radiale qui, à vitesse nulle, donne le même Q_{\max} . On la calcule par

$$P_o = 0,2334 z Q_{\max} \quad (20)$$

Calculons ces grandeurs dans le cas $k_i/k_e = 1$. On a $A = 0,5527$ et $n = 1,380$.

$\frac{\delta_c}{\delta_e}$	θ rad	$\frac{Q_{\max_i}}{F_c}$	$\frac{Q_{\max_e}}{F_c}$	$\frac{F_r}{zF_c}$	$\frac{zQ_{\max}}{F_r}$	$\frac{zQ_{\max_e}}{F_r}$	$\frac{P_o}{F_r}$
0,1	1,471	11,46	12,4	2,585	4,433	4,820	1,125
0,2	1,369	3,744	4,7444	0,8101	4,622	5,856	1,367
0,3	1,266	1,779	2,7779	0,3662	4,857	7,589	1,771
0,4	1,159	0,9672	1,967	0,1873	5,164	10,50	2,451
0,5	1,047	0,5527	1,553	0,09924	5,570	15,65	3,653
0,6	0,9273	0,3159	1,316	0,05149	6,135	25,56	5,966
0,7	0,7954	0,1717	1,172	0,02459	6,982	47,66	11,12
0,8	0,6435	0,08159	1,082	$9,678 \cdot 10^{-3}$	8,431	111,8	26,09
0,9	0,4510	0,02665	1,027	$2,266 \cdot 10^{-3}$	11,76	453,2	105,8
1	0	0	1	0	-	-	-

5. Charge dynamique équivalente

Selon LUNDBERG et PALMGREN [1], la capacité dynamique de charge se calcule par

$$\frac{1}{C^w} = \frac{1}{C_i^w} + \frac{1}{C_e^w}, \quad (21)$$

où C_e et C_i sont les capacités dynamiques des bagues extérieure et intérieure, et $w = 10/3$. On a encore

$$C = g_c C_i, \quad (22)$$

avec

$$g_c = \left[1 + \left(\frac{C_i}{C_e} \right)^w \right]^{-\frac{1}{w}} \quad (23)$$

Enfin,

$$\frac{C_i}{C_e} = 1,04 \left[\frac{1 - \frac{D_a}{d_m}}{1 + \frac{D_a}{d_m}} \right]^{1,72} \cdot \left[\frac{r_i}{r_e} \cdot \frac{2 r_e - D_a}{2 r_i - D_a} \right]^{0,41}, \quad (24)$$

où

D_a = diamètre d'une bille

d_n = diamètre de la trajectoire des centres de billes

r_i = petit rayon de la bague intérieure

r_e = petit rayon de la bague extérieure

A partir de ces relations, il vient

$$C_i = \frac{C}{g_c} \quad (25)$$

et

$$C_e = \frac{C_i}{C_i/C_e} \quad (26)$$

Cela étant, la charge dynamique équivalente se calcule par

$$\left(\frac{P}{C} \right)^w = \left(\frac{P_i}{C_i} \right)^w + \left(\frac{P_e}{C_e} \right)^w, \quad (27)$$

avec

$$\begin{cases} P_i = 0,4068 z Q_{\acute{e}qi} \\ P_e = 0,3894 z Q_{\acute{e}qe} \end{cases} \quad (28)$$

où

$$Q_{\acute{e}qi} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_i^3 d\theta \right)^{1/3} \quad (29)$$

et

$$Q_{\acute{e}qe} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_e^w \delta\theta \right)^{\frac{1}{w}} \quad (30)$$

Tout revient donc à calculer $Q_{\acute{e}qi}$ et $Q_{\acute{e}qe}$. Pour la bague intérieure, on a

$$\frac{Q_{\acute{e}qi}}{F_c} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\theta} A^3 \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} - 1 \right)^{3n} \delta\theta \right)^{1/3} \quad (31)$$

Pour la bague extérieure, il faut se rappeler que

$$Q_e = \begin{cases} F_c + Q_i & \text{pour } -\theta_0 < \theta < \theta_0 \\ F_c & \text{pour } -2\pi < \theta < -\theta_0 \text{ et } \theta_0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

Il vient donc

$$\frac{Q_{\acute{e}qe}}{F_c} = \left\{ \frac{1}{\pi} \left[\int_{\theta_0}^{\theta_0} \left(A \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} - 1 \right)^n + 1 \right)^w \delta\theta + \pi - \theta_0 \right] \right\}^{\frac{1}{w}} \quad (32)$$

On en déduit

$$\frac{P_i}{F_r} = 0,4068 \frac{Q_{\acute{e}qi}}{F_c} \cdot \frac{zF_c}{F_r} \quad (33)$$

et

$$\frac{P_e}{F_r} = 0,3894 \frac{Q_{\acute{e}qe}}{F_c} \cdot \frac{zF_c}{F_r} \quad (34)$$

On calcule alors $\frac{P}{F_r}$ à partir de (27)

$$\left(\frac{P}{F_r} \right)^w = \left(\frac{C}{C_i} \right)^w \left(\frac{P_i}{F_r} \right)^w + \left(\frac{C}{C_e} \right)^w \left(\frac{P_e}{F_r} \right)^w,$$

soit

$$\frac{P}{F_r} = \left[\left(\frac{C}{C_i} \right)^w \left(\frac{P_i}{F_r} \right)^w + \left(\frac{C}{C_e} \right)^w \left(\frac{P_e}{F_r} \right)^w \right]^{\frac{1}{w}} \quad (35)$$

Effectuons les calculs pour $\frac{k_i}{k_e} = 1$, $A = 0,5527$, $n = 1,380$. Nous

supposerons en outre $r_i = r_e$ et $\frac{D_a}{d_m} = \frac{\pi}{16} = 0,1963$. Il vient alors

$$\frac{C_i}{C_e} = 1,04 \left(\frac{0,8036}{1,1963} \right)^{1,72} = 0,5246$$

$$g_c = \left(1 + 0,5246 \frac{10}{3} \right)^{-0,3} = 0,9675$$

et

$$C_i = \frac{C}{0,9675} = 1,034 C$$

$$C_e = \frac{1,034C}{0,5246} = 1,970 C,$$

si bien que

$$\frac{P}{F_r} = \left[0,8945 \left(\frac{P_i}{F_r} \right)^w + 0,1043 \left(\frac{P_e}{F_r} \right)^w \right]^{\frac{1}{w}}$$

On obtient les résultats suivants

δ_c / δ_r	θ rad	$\frac{zF_c}{F_r}$	$\frac{Q_{\acute{e}qi}}{F_c}$	$\frac{P_i}{F_r}$	$\frac{Q_{\acute{e}qe}}{F_c}$	$\frac{P_e}{F_r}$	$\frac{P}{F_r}$
0,1	1,471	0,3868	6,409	1,008	7,388	1,113	1,020
0,2	1,369	1,234	2,051	1,029	2,849	1,369	1,077
0,3	1,266	2,731	0,9525	1,058	1,737	1,847	1,210
0,4	1,159	5,339	0,5041	1,095	1,324	2,752	1,544
0,5	1,047	10,08	0,2792	1,145	1,148	4,506	2,346
0,6	0,9273	19,42	0,1536	1,214	1,068	8,074	4,117
0,7	0,7954	40,67	0,07953	1,316	1,029	16,30	8,278
0,8	0,6435	103,3	0,03530	1,483	1,011	40,65	20,63
0,9	0,4510	441,3	0,01026	1,842	1,002	172,2	87,40

6. Méthode de calcul

Soit à calculer un palier sous une charge F_r , tournant à une fréquence de rotation N . Il faut d'abord calculer la vitesse de rotation des billes par

$$\omega = \pi N$$

On calcule alors la masse d'une bille

$$m = \rho \cdot \frac{1}{6} \pi D_a^3,$$

puis la force centrifuge

$$F_c = m\omega^2 \frac{D_a}{2}$$

Il en découle

$$\delta_c = \left(\frac{F_c}{k_e} \right)^{2/3}$$

Cela étant, pour une charge donnée, on peut calculer $\frac{F_r}{zf_c}$. On peut en déduire $\frac{\delta_c}{\delta_r}$ et, de là,

$$\delta_r = \delta_c / (\delta_c / \delta_r)$$

ce qui permet d'accéder à Q_{\max} , P_o , P .

Les calculs peuvent être menés graphiquement de la manière indiquée à la figure 4.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. LUNDBERG et A. PALMGREN. **Dynamic Capacity of Rolling Bearings**
Acta Polytechnica, Mechanical Engineering Series, Vol. 1,n°3,
Stockholm, 1947.

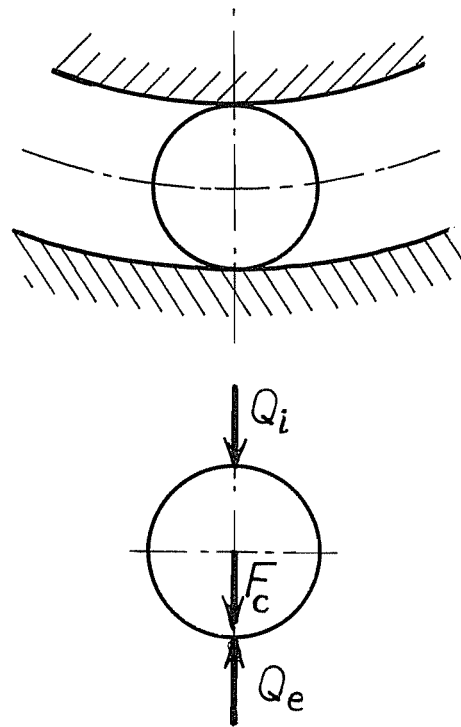


FIG. 1

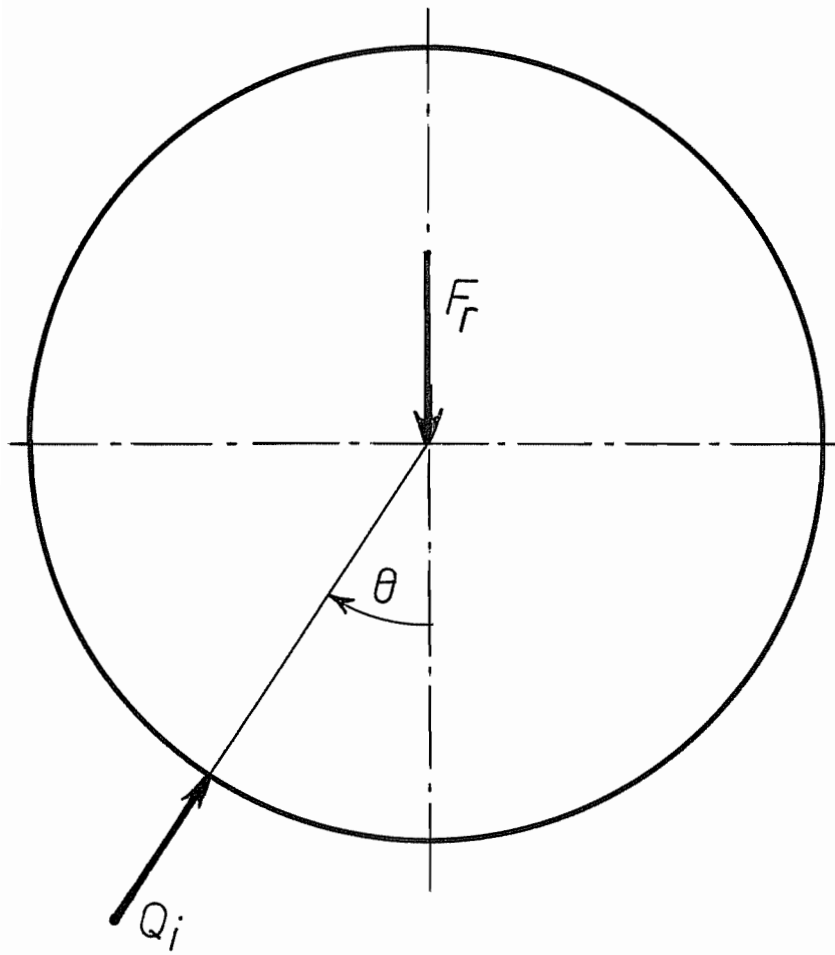


FIG. 2

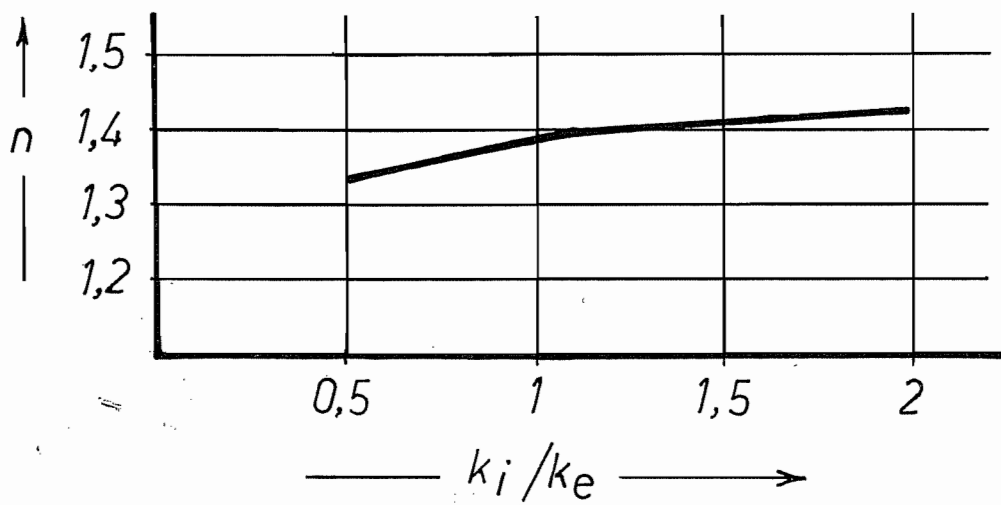
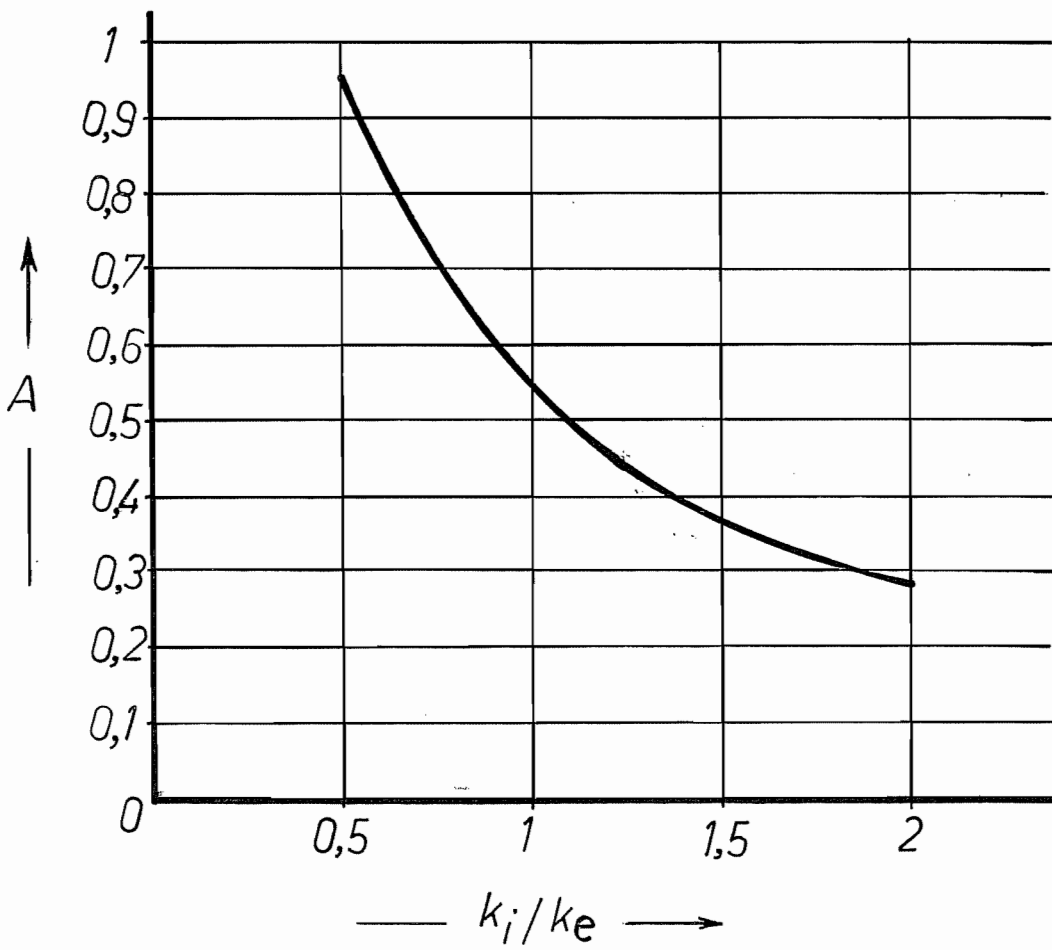
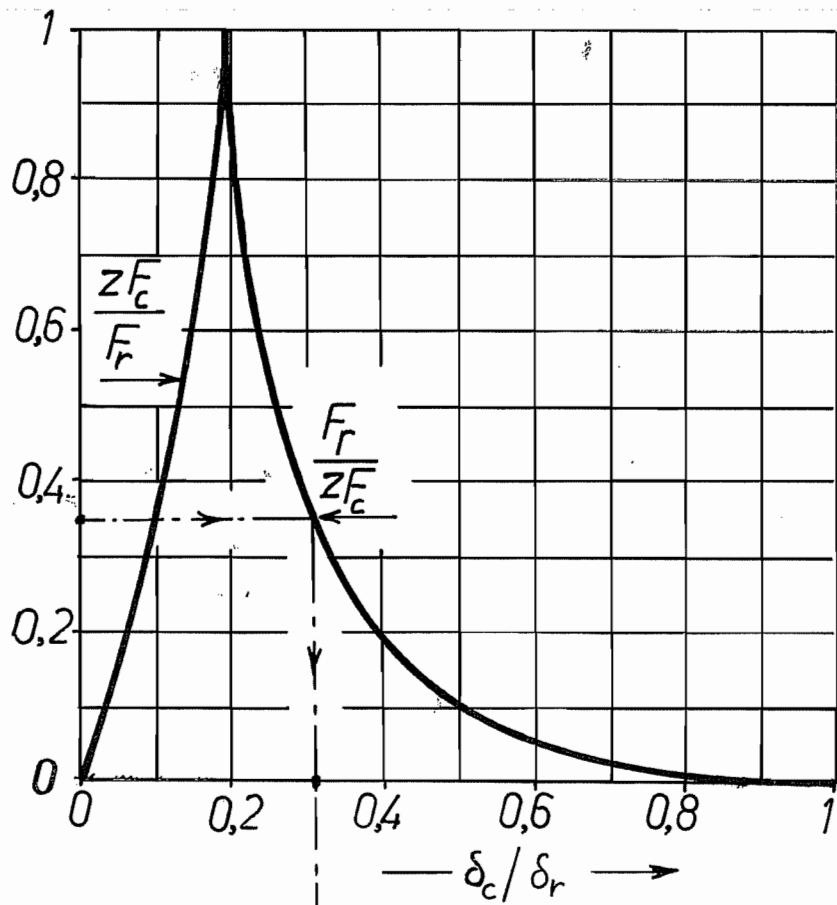


FIG . 3



$k_i/k_e = 1$
 $C_i/C_e = 0,5246$

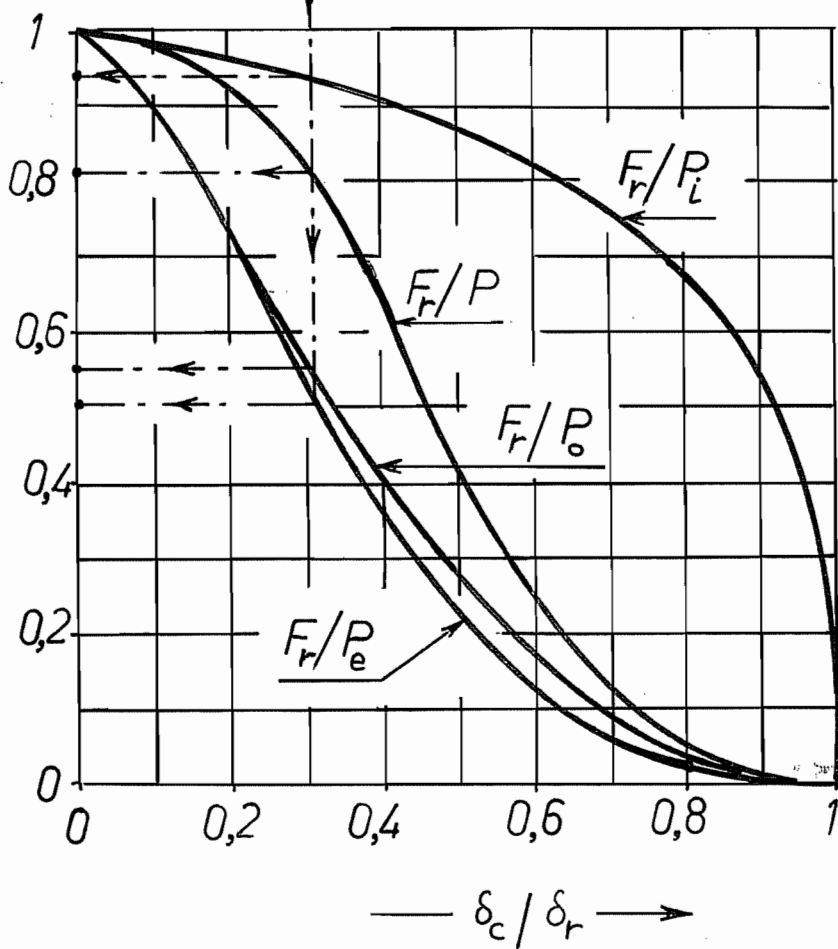


FIG. 4