Quand les maths nous transportent…

Yves Crama

HEC Ecole de Gestion

Université de Liège

Société libre d'Emulation - Novembre 2014 & Mars 2015

Mathématiques cachées, leurs utilités dévoilées

- Faut-il l'expliquer?
- Babylone, 2000 ans avant notre ère:

Mathématiques cachées, leurs utilités dévoilées

« Une tâche importante pour les dirigeants de la Mésopotamie était de creuser des canaux et de les maintenir, car les canaux ne sont pas seulement nécessaires à l'irrigation, mais sont également utiles pour le transport des biens et des armées. Les hauts fonctionnaires du gouvernement ont dû ordonner aux mathématiciens babyloniens de calculer le nombre de travailleurs et les jours nécessaires à la construction d'un canal, et le total des dépenses de salaires des travailleurs. » (K. Muroi, Historia Sci. (1992))

Mathématiques cachées, leurs utilités dévoilées

Aujourd'hui…

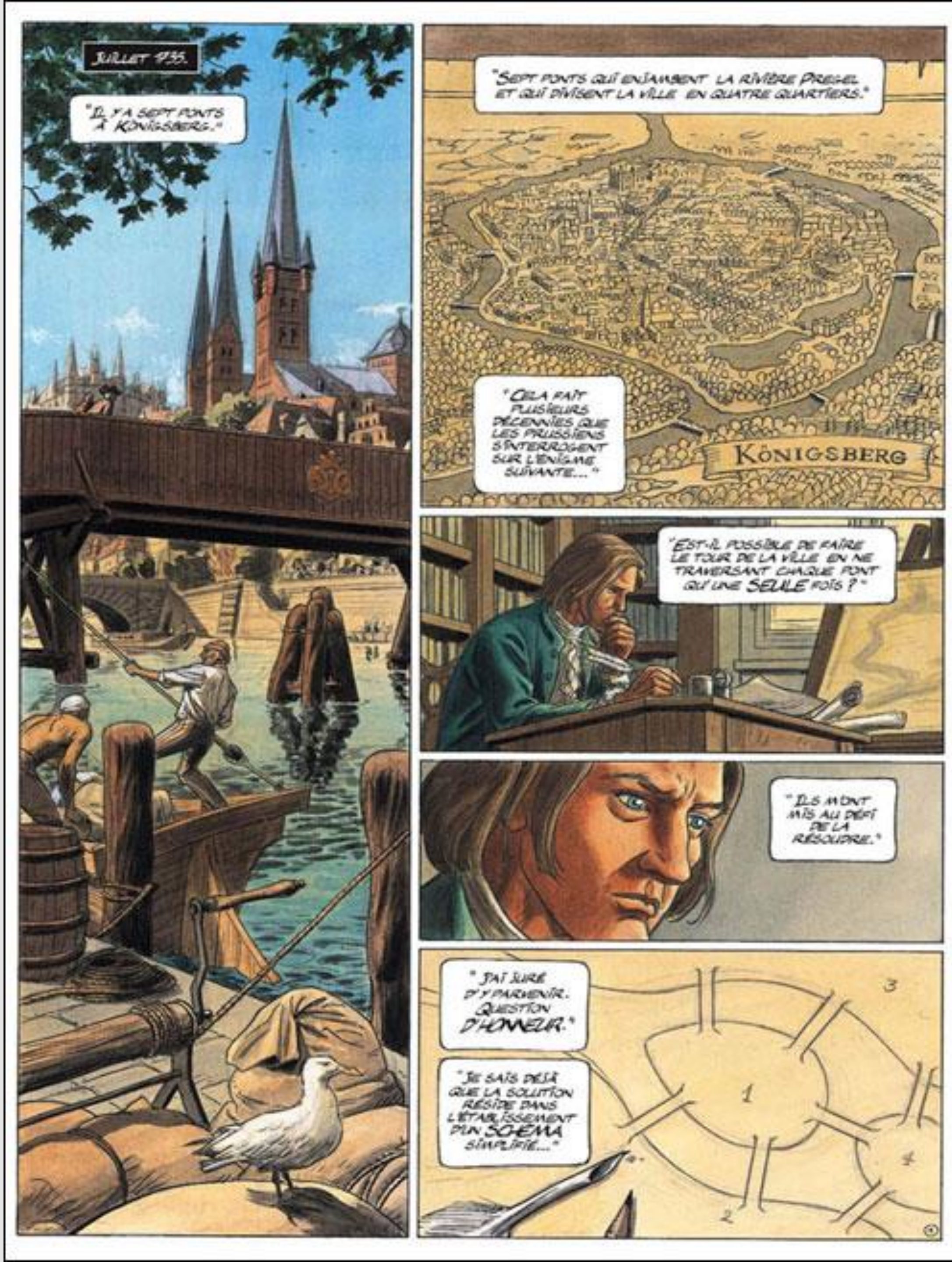
- La **Recherche Opérationnelle** (RO) utilise des modèles mathématiques pour aider les gestionnaires à prendre de meilleures décisions dans des situations complexes.
- « The world's most important invisible profession ».

Plan de l'exposé

1. Planification d'itinéraires
   a) Les ponts de Königsberg
   b) Chemin le plus court
   c) Tournées de distribution
2. Chargement de véhicules
3. Gestion des stocks
   a) Modèle économique de commande
   b) Stocks pharmaceutiques
   c) Tarification et réservation de transports

Euler et les ponts de Königsberg

- Prusse Orientale, vers 1736

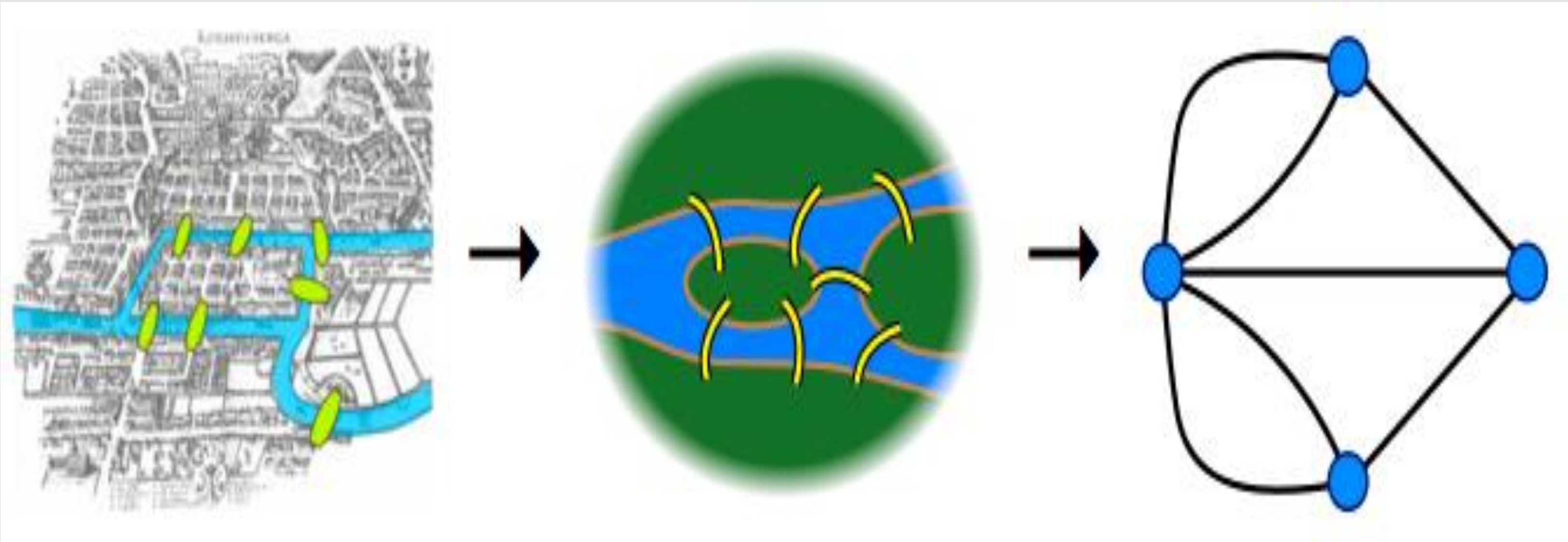


Bollée, Aymon,
Les lois du hasard,
Dargaud 2006

Euler et les ponts de Königsberg

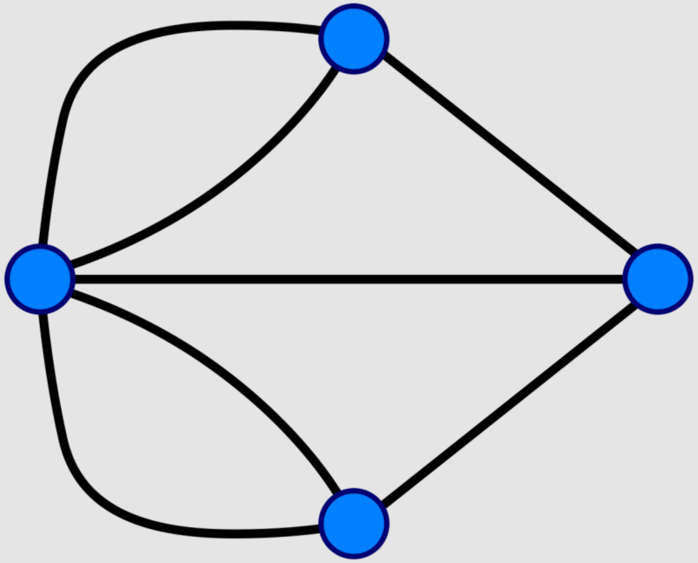
- Sept ponts: est-il possible de les franchir tous consécutivement sans passer deux fois par le même pont?
- Un modèle mathématique (c’est-à-dire, une représentation abstraite et simplifiée): le **graphe**.

Euler et les ponts de Königsberg



- Chaque point du graphe représente une rive (ou une île).
- Chaque ligne reliant deux points représente un pont.

Euler et les ponts de Königsberg



Théorème (facile): si il existe un chemin qui traverse chaque ligne une et une seule fois, alors le nombre de lignes émanant de chaque point est **pair** (sauf pour le point de départ et le point d'arrivée, où il doit être **impair** si ces points sont distincts).

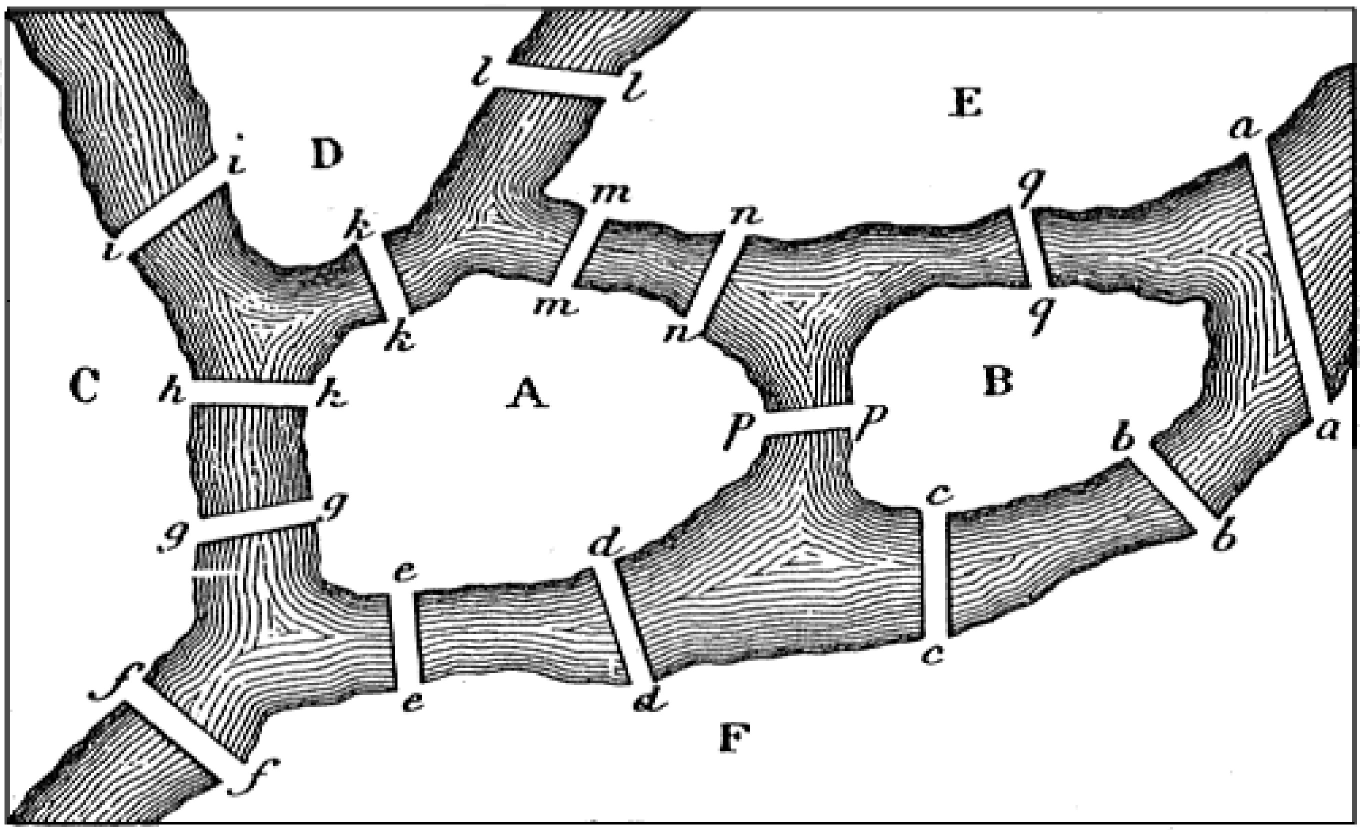
Euler et les ponts de Königsberg

- Conclusion du théorème facile: la légende des ponts de Königsberg est correcte.

- **Théorème** (moins facile): dans un graphe, si le nombre de lignes émanant de tous les points est **pair** (sauf éventuellement pour deux points distincts), alors il existe un chemin qui traverse chaque ligne une et une seule fois.

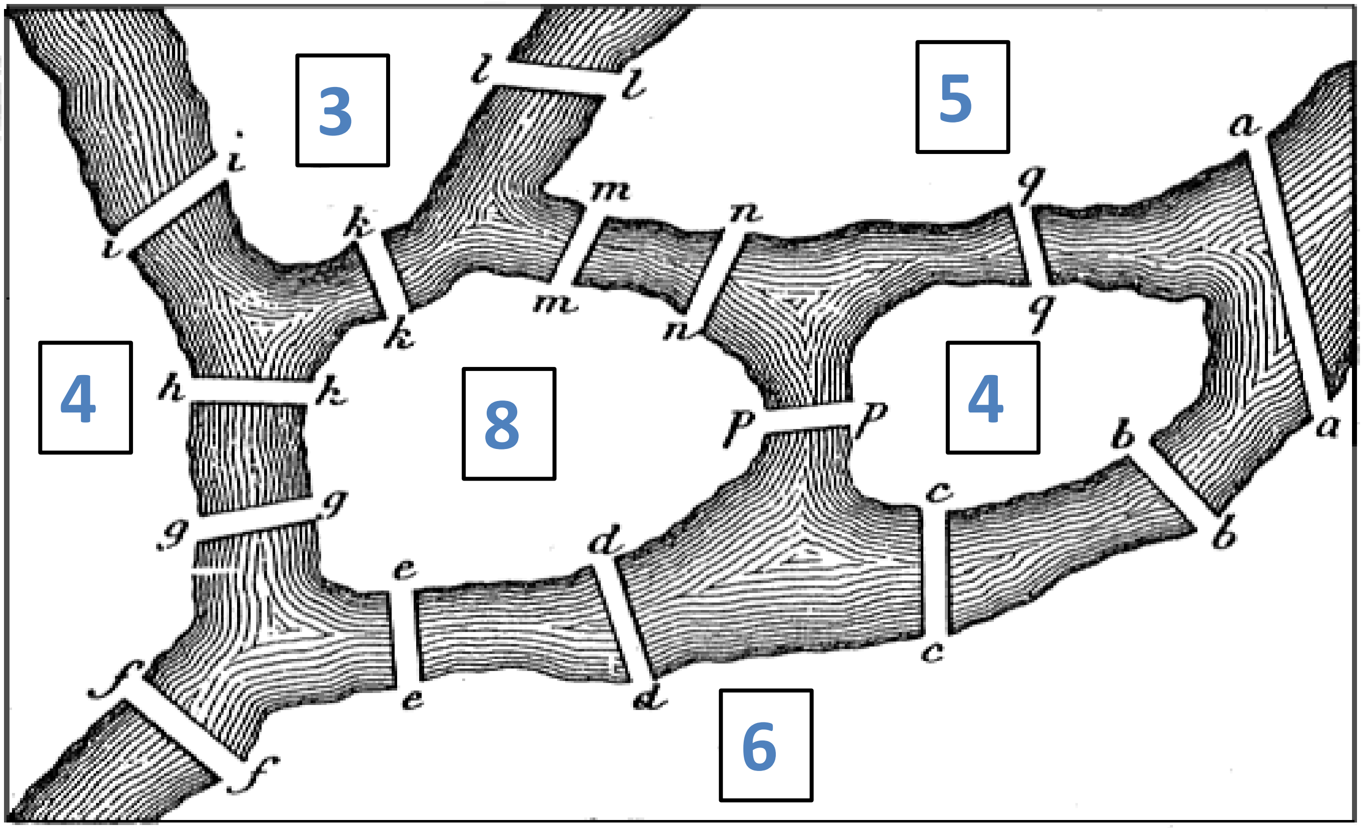
Euler et les ponts de Königsberg

Fig. 2.



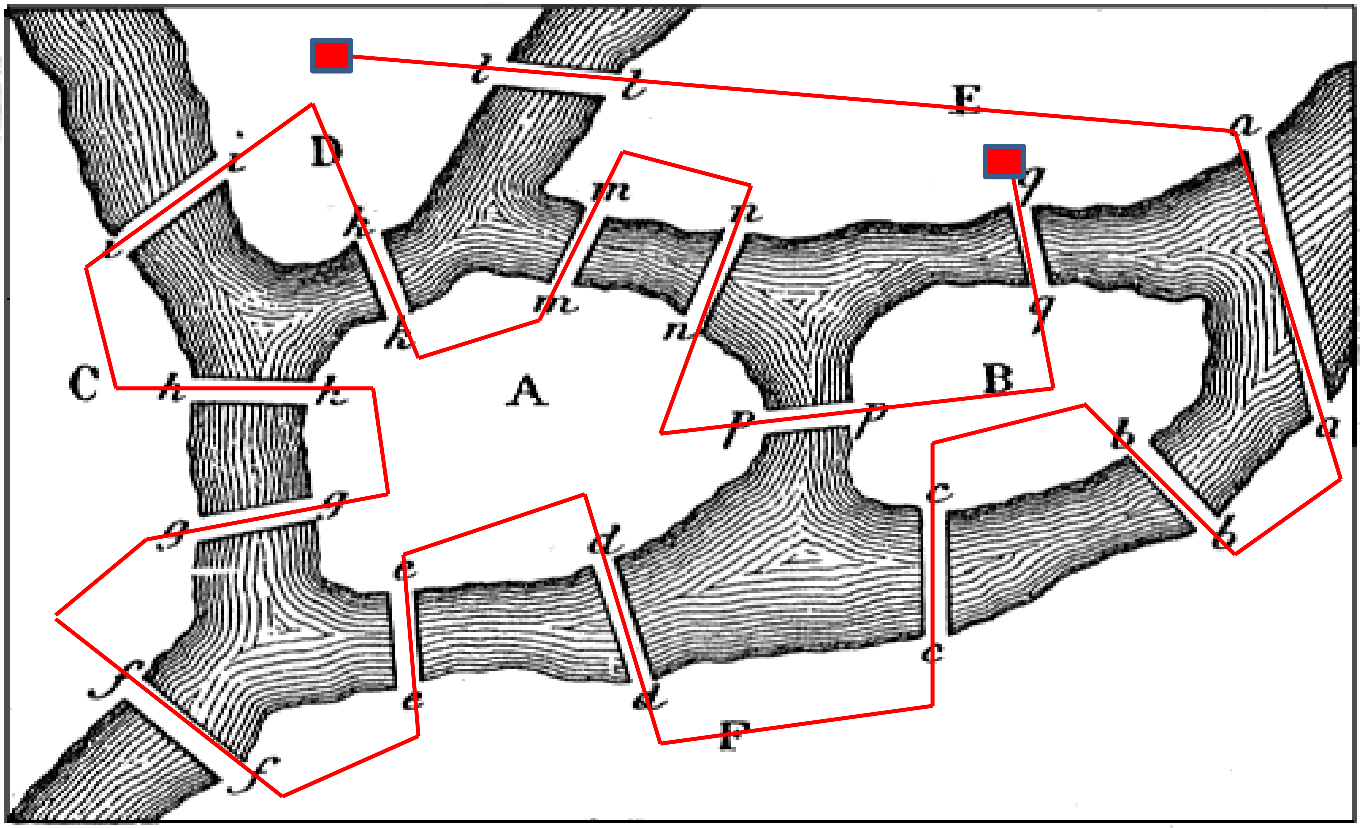
Euler et les ponts de Königsberg

Fig. 2.



Euler et les ponts de Königsberg

Fig. 2.

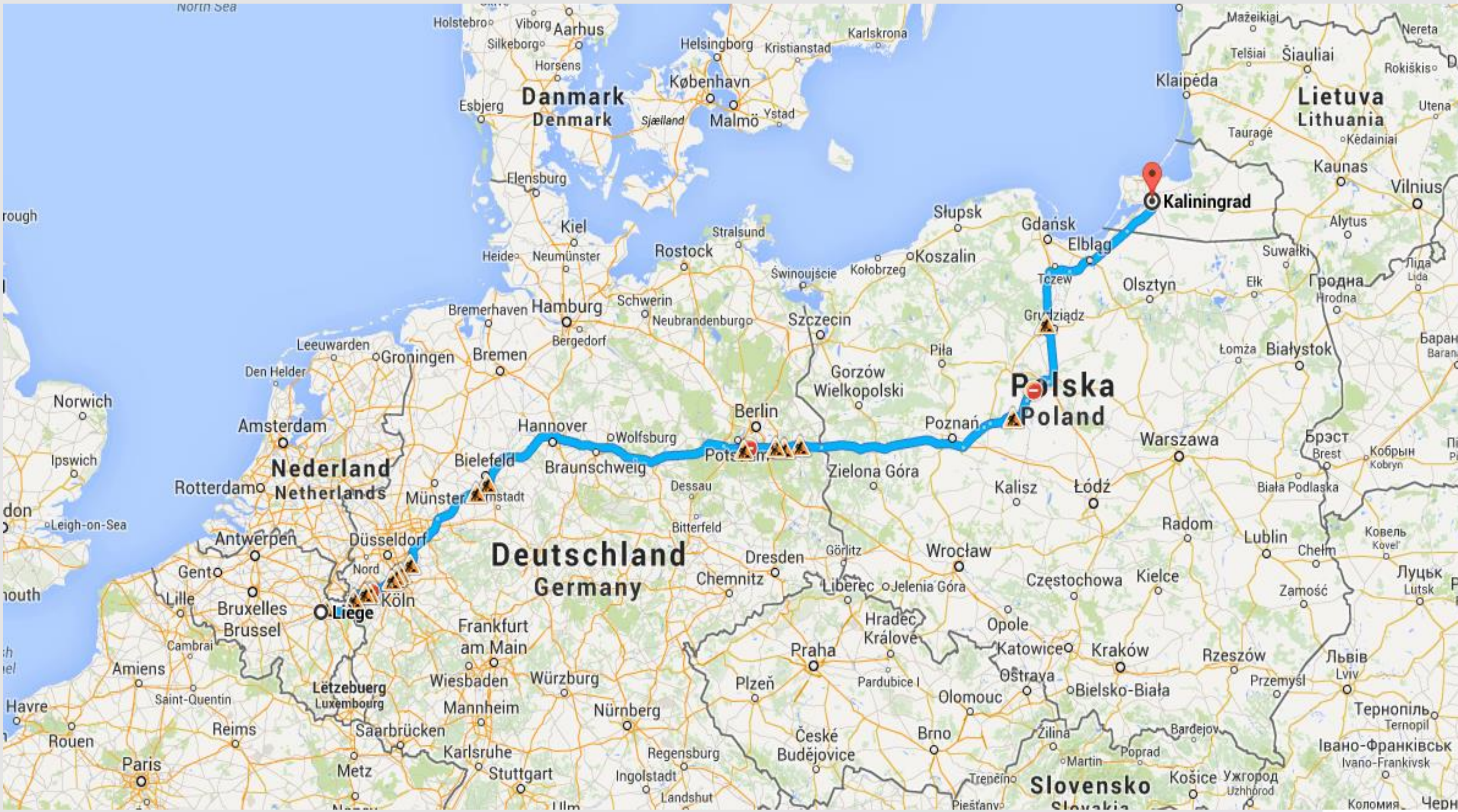


Problèmes d'itinéraires

A propos…

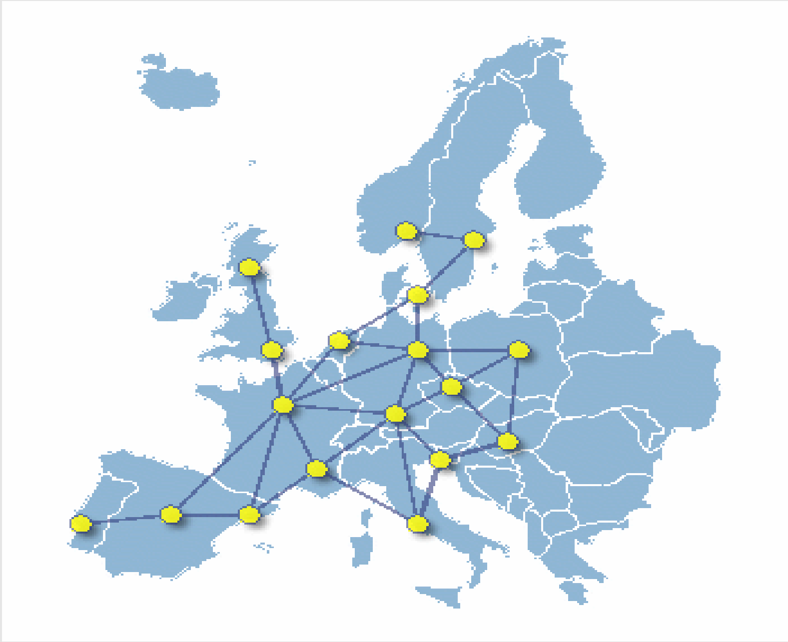
- Comment se rendre de Liège à Königsberg (Kaliningrad)?
- Google maps, Mappy, ViaMichelin, systèmes de navigation.

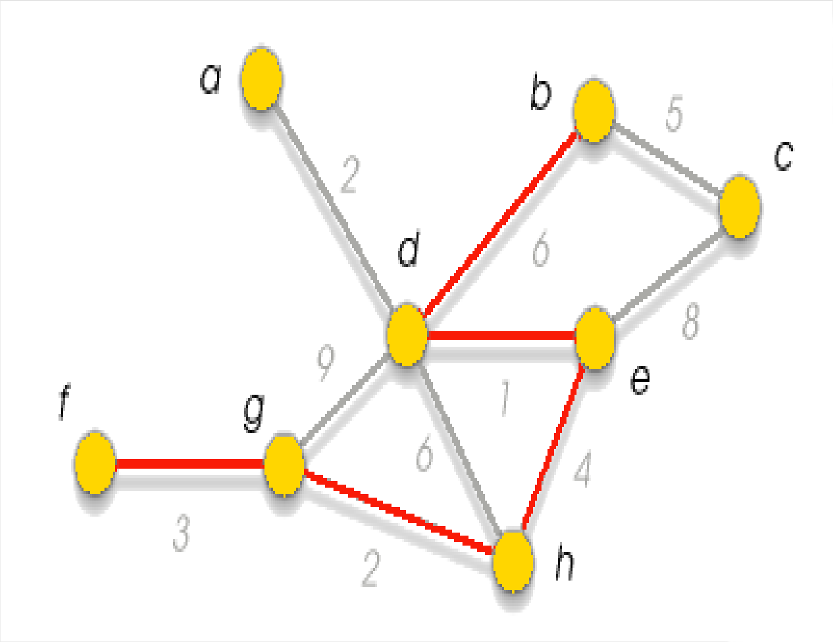
Problèmes d'itinéraires



Problèmes d'itinéraires

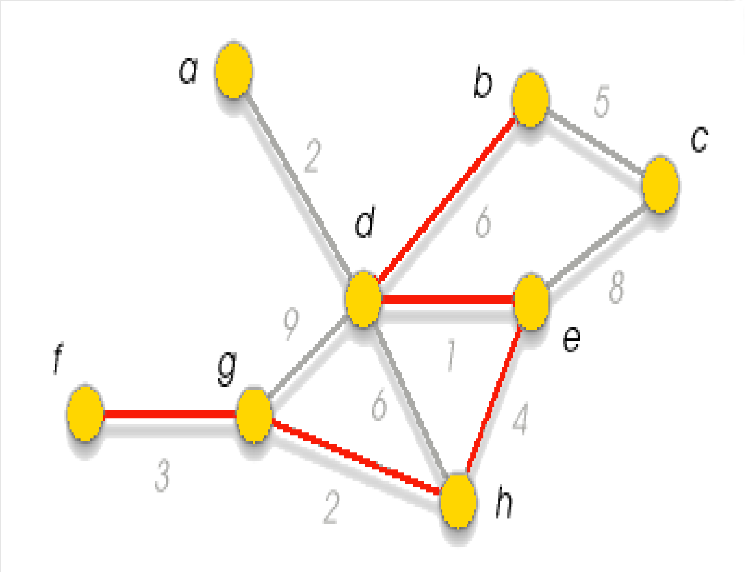
- Mais comment fait-elle??
- Modèle : **graphe**





Problèmes d’itinéraires

- **Problème mathématique**: sur un graphe, trouver le chemin le plus court entre deux points donnés.
- Bien résolu par l’algorithme de Dijkstra.



Problèmes d'itinéraires

Applications actuelles

- en temps réel,
- pour des réseaux énormes
- et dynamiques (conditions de trafic, accidents, travaux).

→ Demandent des algorithmes très rapides, sans cesse améliorés.

- Exemple typique d'interaction entre problèmes pratiques, recherche mathématique et développements informatiques.

Problèmes d’itinéraires

Extension:

- Optimisation des tournées de véhicules (par exemple, grande distribution).

Exemple:

- La chaîne DeVélau possède 50 supermarchés sur le territoire belge.
- Chaque matin elle approvisionne ses magasins.
- Flotte de 15 camions.

Problèmes d'itinéraires

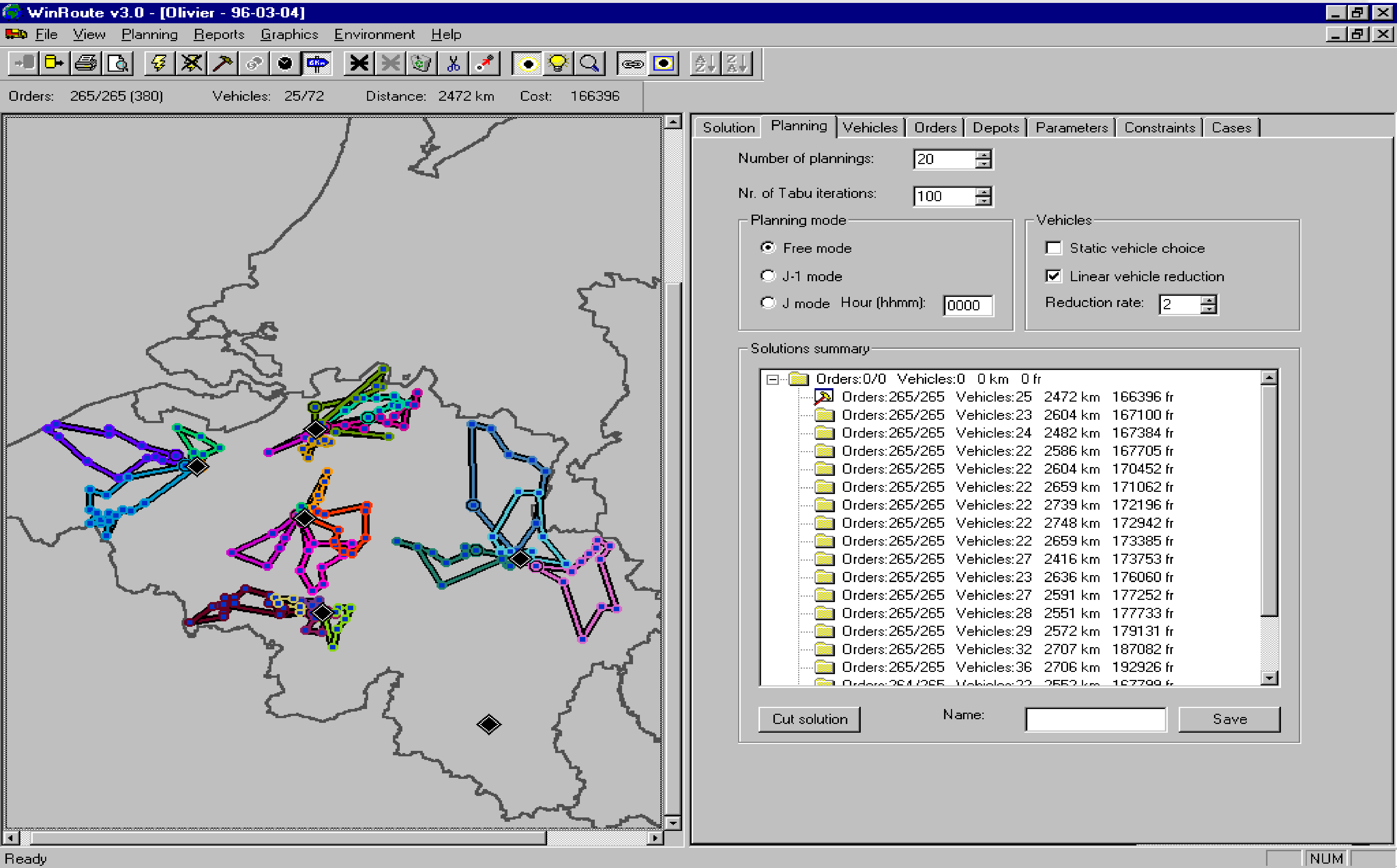
Décisions :

- Conception des tournées (affectation des camions, itinéraire de chaque camion, horaires,…).

Défis:

- Coût des transports (salaires, carburant, utilisation des camions,…)
- Fenêtres de temps pour les livraisons.
- Emissions de CO_2.
- Congestion des villes.
- Etc.

Problèmes d'itinéraires



Problèmes d'itinéraires

- Généralisation des modèles précédents… en beaucoup plus difficile!!
- Méthodes et logiciels commerciaux.
- Sujet de recherche scientifique très actuel.
- Problèmes similaires en transport fluvial, maritime, aérien.

(Voir par exemple les projets du groupe QuantOM de HEC-ULg:
http://www.quantom.hec.ulg.ac.be/projects.php)

Chargement de véhicules

- Bien charger son véhicule… pour éviter certains désagréments.

Chargement de véhicules

- Bien charger son véhicule… pour éviter certains désagréments.

- https://www.youtube.com/watch?v=cHhZwvdRR5c
- https://www.youtube.com/watch?v=Mxh8zBCVr64

Chargement de véhicules

- Bien charger son véhicule… pour éviter certains désagréments.

Chargement de véhicules

Le chargement de l'avion (cargo et passagers) détermine

- la stabilité au sol
- la stabilité en vol ☺
- la consommation de carburant
- la facilité de chargement/déchargement (par exemple, aux escales).

Questions similaires pour les navires.

Chargement de véhicules

Chargement équilibré d’avions

Etant données les caractéristiques de l’appareil et les palettes (ULD) à charger,

- déterminer l’emplacement de chaque ULD
- pour que le centre de gravité se trouve dans une zone admissible
- en minimisant le moment d’inertie
- et en respectant des contraintes diverses (entrée/sortie, produits dangereux, etc.)

Chargement équilibré d’avions

Pour une version de ce problème, cela donne:

Lurkin et Schyns, Automatic Aircraft Cargo Load Planning with Pick-up and Delivery, HEC-Ulg, 2013.

Voir aussi http://reflexions.ulg.ac.be/cms/c_42778/fr/optimiser-le-chargement-des-avions

$$\min \alpha \sum_{k\in\mathbb{K}} \epsilon_k + \beta \sum_{j\in\mathbb{P}} n_j$$

Subject to:

OF's

$$c_k - o_k - \epsilon_k \leq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{K}$$
$$c_k - o_k + \epsilon_k \geq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{K}$$
$$\textstyle\sum_{\forall i' \in \mathbb{U}_1} \sum_{\forall j' \in \mathbb{P}_{ds} | l_{j'} > l_j} x_{i'j'1} - n_j N_j - (1 - x_{ij1}) N_j \leq 0 \qquad \forall j \in \mathbb{P}_{ds}, \forall d \in \mathbb{D}, \forall s \in \mathbb{S}, \forall i \in \mathbb{U}_3$$

Lateral & longitudinal stability

$$min_k \leq c_k \leq max_k \qquad \forall k \in \mathbb{K}$$
$$-\bar{D} \leq \textstyle\sum_{i(\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3)} w_i (\sum_{j\in\mathbb{P}_R} x_{ij0} - \sum_{j\in\mathbb{P}_L} x_{ij0}) \leq \bar{D}$$
$$-\bar{D} \leq \textstyle\sum_{i(\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3)} w_i (\sum_{j\in\mathbb{P}_R} x_{ij1} - \sum_{j\in\mathbb{P}_L} x_{ij1}) \leq \bar{D}$$

Respect of routes

$$x_{ij0} = 0 \qquad \forall i \notin (\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3),\ \forall j \in \mathbb{P}$$
$$x_{ij1} = 0 \qquad \forall i \notin (\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3),\ \forall j \in \mathbb{P}$$

Full load

$$\textstyle\sum_{j\in\mathbb{P}} x_{ij0} = 1 \qquad \forall i \in (\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3)$$
$$\textstyle\sum_{j\in\mathbb{P}} x_{ij1} = 1 \qquad \forall i \in (\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3)$$

Allowable positions

$$x_{ijk} = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{U}, \forall j \in \mathbb{P},\ \forall k \in \mathbb{R}\ |U_i \ \textit{ does not fit in } \ P_j$$
$$\textstyle\sum_{i\in(\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3)} x_{ij0} \leq 1 \qquad \forall j \in \mathbb{P}$$
$$\textstyle\sum_{i\in(\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3)} x_{ij1} \leq 1 \qquad \forall j \in \mathbb{P}$$
$$x_{ij0} + x_{i'j'1} \leq 1 \qquad \forall i, i' \in (\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3),\ \forall j \in \mathbb{P},\ \forall j' \in \mathbb{O}_j$$
$$x_{ij1} + x_{i'j'2} \leq 1 \qquad \forall i, i' \in (\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3),\ \forall j \in \mathbb{P},\ \forall j' \in \mathbb{O}_j$$

Weight restrictions

$$w_i \times x_{ij0} \leq \bar{W}_j \qquad \forall i \in (\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3),\ \forall j \in \mathbb{P}$$
$$w_i \times x_{ij1} \leq \bar{W}_j \qquad \forall i \in (\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3),\ \forall j \in \mathbb{P}$$
$$\textstyle\sum_{i\in(\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3)} \sum_{j\in\mathbb{P} | P_j \cap O_a^d \neq \emptyset} x_{ij0} o_{ija}^d \leq \bar{O}_a^d \qquad \forall d \in \mathbb{D}^*, \forall a \in \mathbb{O}^d$$
$$\textstyle\sum_{i\in(\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3)} \sum_{j\in\mathbb{P} | P_j \cap O_a^d \neq \emptyset} x_{ij1} o_{ija}^d \leq \bar{O}_a^d \qquad \forall d \in \mathbb{D}^*, \forall a \in \mathbb{O}^d$$
$$\textstyle\sum_{i\in(\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3)} \sum_{j\in\mathbb{P} | P_j \cap \bigcup_{c=1}^{a} F_c \neq \emptyset} \sum_{l=1}^{a} x_{ij0} f_{ijl} \leq \bar{F}_a \qquad \forall a \in \mathbb{F}$$
$$\textstyle\sum_{i\in(\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3)} \sum_{j\in\mathbb{P} | P_j \cap \bigcup_{c=1}^{a} F_c \neq \emptyset} \sum_{l=1}^{a} x_{ij1} f_{ijl} \leq \bar{F}_a \qquad \forall a \in \mathbb{F}$$
$$\textstyle\sum_{i\in(\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3)} \sum_{j\in\mathbb{P} | P_j \cap \bigcup_{c=1}^{a} T_c \neq \emptyset} \sum_{l=1}^{a} x_{ij0} t_{ijl} \leq \bar{T}_a \qquad \forall a \in \mathbb{T}$$
$$\textstyle\sum_{i\in(\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3)} \sum_{j\in\mathbb{P} | P_j \cap \bigcup_{c=1}^{a} T_c \neq \emptyset} \sum_{l=1}^{a} x_{ij1} t_{ijl} \leq \bar{T}_a \qquad \forall a \in \mathbb{T}$$

Larger ULDS

$$x_{ij1} - \textstyle\sum_{j'\in\mathbb{P}_j^F} x_{f_i j'1} = 0 \qquad \forall i \in (\mathbb{U}^L \cap (\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3)),\ \forall j \in \mathbb{P}$$
$$x_{ij2} - \textstyle\sum_{j'\in\mathbb{P}_j^F} x_{f_i j'2} = 0 \qquad \forall i \in (\mathbb{U}^L \cap (\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3)),\ \forall j \in \mathbb{P}$$

Hazardous goods

$$x_{ij1} + x_{i'j'1} \leq 1 \qquad \forall i, i', j, j' \mid d_{jj'} \leq e_{ii'}; \forall i, i' \in (\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3),\ \textit{and}\ \forall j, j' \in \mathbb{P}$$
$$x_{ij2} + x_{i'j'2} \leq 1 \qquad \forall i, i', j, j' \mid d_{jj'} \leq e_{ii'}; \forall i, i' \in (\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3),\ \textit{and}\ \forall j, j' \in \mathbb{P}$$

Chargement équilibré d’avions

- Problème de **minimisation de fonction sous contraintes**.
- Cf systèmes d’(in)équations linéaires.
- Cf méthode de Lagrange en analyse classique.
- “Un peu” plus compliqué…

- Ici encore: interaction entre problèmes pratiques, recherche mathématique et développements informatiques.

Gestion des stocks

Un problème classique en logistique:

- A intervalles périodiques, une firme commande Q unités d'un certain produit.
- Si Q est grand, la firme possède un stock important qu'elle doit financer, entreposer, qui peut se déprécier, etc. → coût de possession élevé.
- Si Q est petit, la firme doit payer des coûts de livraison et de manutention fréquents → coût de commande élevé.

Gestion des stocks

Défi:

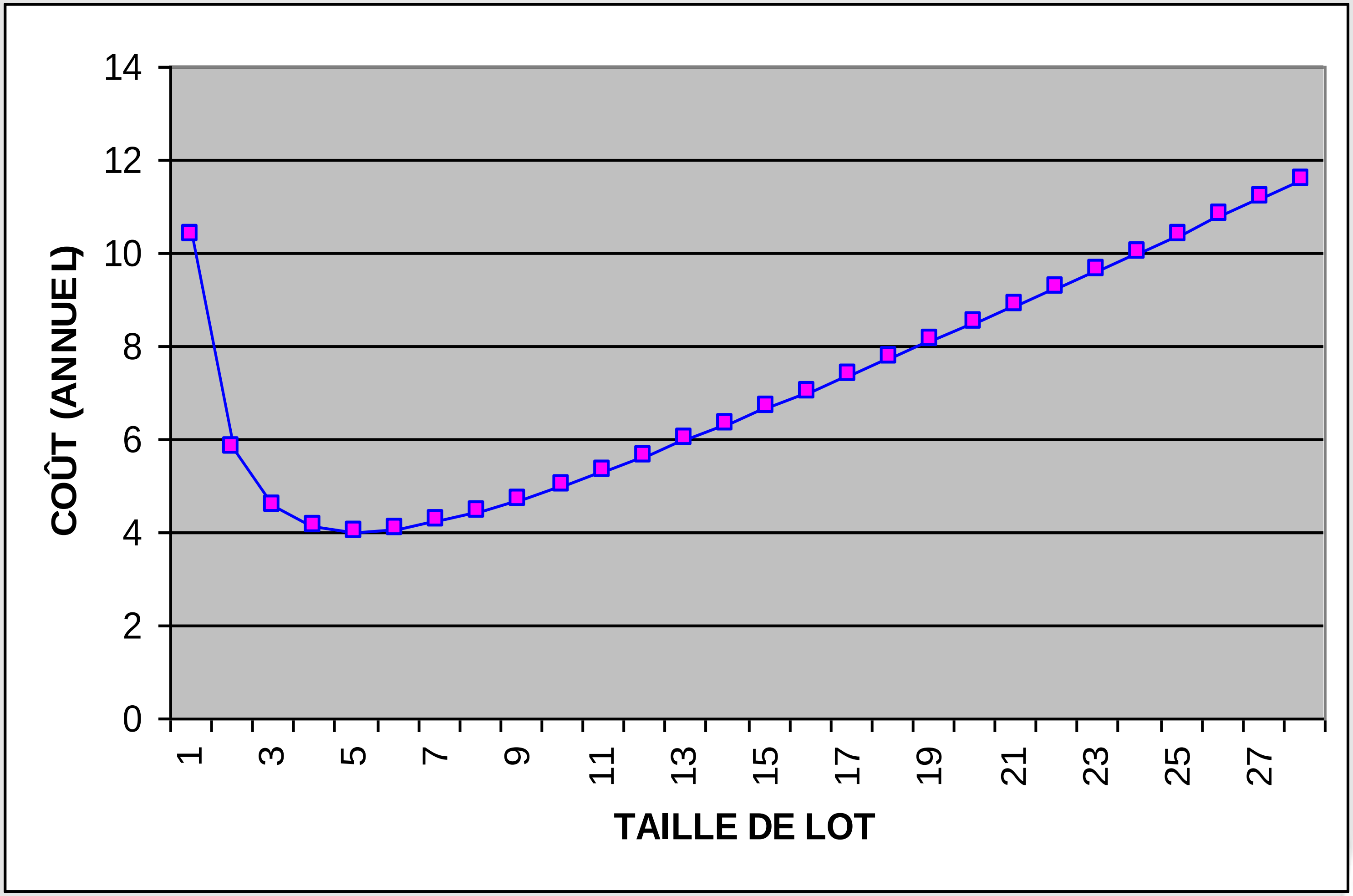
- Trouver le bon compromis entre le coût de possession et le coût de commande
- pour minimiser le coût total par unité de temps (disons, coût annuel).

Modèle :

Coût annuel = $CC \times D/Q + CP \times Q/2$

(CC : coût de commande; CP: coût de possession unitaire; D: demande annuelle)

Allure générale de la fonction de coût



Quantité économique de commande

- Devoir à domicile: dériver, annuler la dérivée première, vérifier les conditions du deuxième ordre…
- La quantité qui minimise le coût par unité de temps (taille de lot optimale) vaut (formule de Wilson):

$$\mathrm{EOQ} = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{CC} \times \mathrm{D}}{\mathrm{CP}}}$$

Extension: Stocks pharmaceutiques

Médicaments en phase d'essais cliniques

Défis:

- Produits extrêmement coûteux ☹
  → Éviter le sur-stockage
- Les conséquences d'une rupture de stock sont extrêmement coûteuses ☹
  → Éviter le sous-stockage
- Demande aléatoire, très mal connue. ☹
  → Évaluation des coûts et des risques par simulation informatique.

Extension: Stocks pharmaceutiques

En pratique:

- N-Side, société commerciale émanant de l’UCL et de HEC-ULg.
- Développe et commercialise un logiciel CT-FAST (Clinical Trial - Forecasting and Simulation Tool)

Extension: Stocks pharmaceutiques

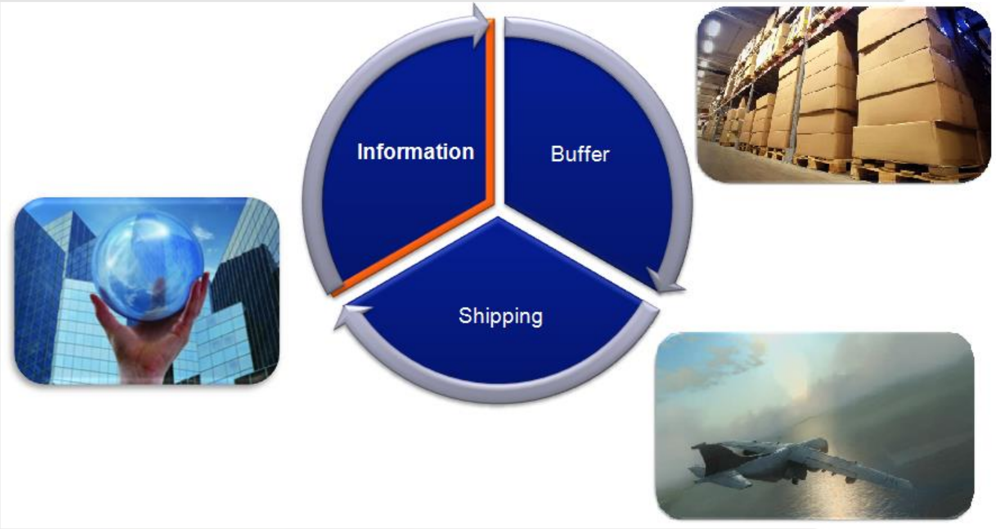
En pratique:

- Aide à la décision:
  - Quand faut-il produire et combien?
  - Quand faut-il expédier et combien?
  - Dans quelles usines, vers quels entrepôts?
  - Etc.
- Clients:
  - Les plus grands groupes pharmaceutiques
  - et leurs partenaires logistiques
  - dans le monde entier.

Extension: Stocks pharmaceutiques

- Un autre exemple typique d'interaction entre problèmes pratiques, recherche mathématique et développements informatiques.

Voir aussi http://www.n-side.com/



Tarification et réservation de transports

- Pourquoi le prix de vos billets sur RyanAir ou sur le Thalys varie-t-il de jour en jour?
- Optimisation du “stock” de places disponibles en fonction de la demande prévue et du taux de remplissage observé.
- Combinaison de modèles probabilistes et de méthodes d’optimisation des stocks (**revenue management, yield management**).
- Applications similaires dans le secteur hôtelier.

Conclusions

- Enormément d'**applications des mathématiques** dans le domaine du transport et plus généralement, de la **gestion des entreprises**.
- Domaines d'application privilégiés de la **recherche opérationnelle**.
- Combinaison de modèles et méthodes **d'analyse classique, d'algorithmes de graphes, de théorie probabiliste et statistique, d'optimisation, de simulation numérique**, etc.
- En lien constant avec l'**outil informatique**, mais pas réductible à ce seul outil.