UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN

FACULTE DES SCIENCES

DES OBJETS MENTAUX "AIRE" ET "VOLUME" AU CALCUL DES PRIMITIVES.

Dissertation présentée en vue de l'obtention
du grade de Docteur en Sciences par

Maggy SCHNEIDER-GILOT

Sous la direction du

Professeur Nicolas ROUCHE

LOUVAIN-LA-NEUVE

1988

UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN

FACULTE DES SCIENCES

DES OBJETS MENTAUX "AIRE" ET "VOLUME" AU CALCUL DES PRIMITIVES.

Dissertation présentée en vue de l'obtention
du grade de Docteur en Sciences par

Maggy SCHNEIDER-GILOT

Sous la direction du
Professeur Nicolas ROUCHE

LOUVAIN-LA-NEUVE

1988

C'est avec plaisir que j'exprime ici ma profonde gratitude au Professeur Nicolas Rouche. Tout d'abord pour avoir accepté, il y a 5 ans, d'être le promoteur de ce travail qui relève d'une discipline relativement nouvelle, la didactique des mathématiques; ensuite pour l'avoir fait avec discernement. J'ai pu apprécier sa vaste culture, ouverte aux lettres et aux sciences, sa rigueur, son réel intérêt pour toutes les questions qui touchent à l'enseignement, son profond respect pour ceux qui en sont les acteurs, élèves et professeurs notamment, sa faculté rare de percevoir la pensée d'autrui, même implicite, et de parvenir à l'affiner sans la déformer.

Je remercie les Professeurs J. De Lange (Université d'Utrecht), G. Fourez (F.N.D.P.), P. Habets, J. Mawhin, D. Wexler (F.N.D.P.) et M. Willem d'avoir accepté de siéger dans le jury chargé d'examiner mon travail. Je leur sais gré de leurs remarques pertinentes et constructives.

A un moment donné de cette recherche j'ai bénéficié d'échanges fructueux avec Christiane Hauchart, ce dont je lui suis très reconnaissante. Sa sollicitude et sa gentillesse à mon égard m'ont encouragée.

Mon projet exigeait que certaines hypothèses soient mises à l'épreuve dans des classes. Pour en tester le bien-fondé, deux de mes collègues du collège Saint-Michel, Marysa Grand'Henry et Pierre Bolly m'ont obligeamment prêté leur concours et leur savoir-faire. Je leur dois le temps qu'ils y ont investi, maintes observations judicieuses ainsi que des conversations très stimulantes.

Je désire exprimer ma reconnaissance aux Facultés Notre-Dame de la Paix de Namur, pour la part prise dans ma formation de chercheur. Le Père Gérard Fourez, par son acuité en épistémologie des sciences, y a beaucoup contribué. Je l'en remercie. Je suis également redevable à mes collègues du Séminaire de Pédagogie des Sciences : Evelyne Charlier, Georges Delande, Jean Donnay, Gérard Fourez, André Hardy, Jacques Keil, Pierre Pirson et Daniel Rousselet.

La bourse qui m'a été attribuée par cette même institution m'a permis de rédiger cette thèse dans de bonnes conditions. Je remercie également tous mes collègues de Namur qui, d'une manière ou d'une autre, m'ont manifesté intérêt ou sympathie.

Le collège Saint-Michel de Bruxelles a bien voulu que je partage mes activités entre l'enseignement secondaire et l'Université. Que ses Directeurs en soient remerciés : hier le Père Lambert qui m'a encouragée à conjuguer pratique et recherche en éducation et aujourd'hui le Père De Deckere qui accepte ce partage avec bienveillance, malgré les inconvénients que cela peut susciter.

Que Marie-Ange Debuisson sache que j'ai apprécié la compétence et la diligence avec laquelle elle a dactylographié mon manuscrit.

Une thèse ne va pas sans mobiliser nos familiers : je sais gré à Yves-Jacques de son appui et de ses leçons d'organisation, à nos enfants, Anne-Catherine et Marie-Charlotte, de leur patience et de leur faculté d'autonomie et à ma Mère de sa disponibilité.

Que de gens concernés par une thèse !

TABLE DES MATIERES

Première Partie : OBJET, METHODES, SOURCES

Chapitre I : D'un constat naïf à la formulation d'un objet de recherche

Deuxième Partie : RÉCIT DES EXPÉRIENCES RÉALISÉES EN CLASSE

Chapitre II : Des surfaces et des solides débités en lamelles, très, très fines

Chapitre III : Les aires sous une courbe.

Chapitre VI : Et si l'on inversait les questions ?

Troisième Partie : ANALYSE EPISTEMOLOGIQUE ET DIDACTIQUE DES PROBLEMES ET DES REACTIONS QU'ILS ONT SUSCITEES

Chapitre VII : Des surfaces et des solides à leurs mesures

Chapitre VIII : Des grandeurs et des objets géométriques définis par une limite

Chapitre IX : Des calculs d'aires et de volumes au calcul des primitives.

Quatrième Partie : CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Chapitre X : Des difficultés d'apprentissage qui font apparaître des dysfonctionnements dans l'enseignement de l'analyse

Première Partie

OBJET, METHODES, SOURCES.

Chapitre I.

D'un constat naïf à la formulation d'un objet de recherche.

1. Objet.

1.1. Le théorème fondamental ne "passe pas".

Ce travail trouve son origine dans un constat négatif que l'on peut formuler naïvement en disant : "Le théorème fondamental ne passe pas". Par théorème fondamental, nous entendons le théorème dont la thèse est, dans des notations que le lecteur reconnaîtra,

$$D \int_a^x f(u)\, du = f(x)$$

et sa conséquence :

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f.

Ce constat se base tout d'abord sur une impression diffuse mais ressentie à chaque fois qu'en quinze ans nous avons enseigné ce théorème à des élèves d'humanités. Il s'est confirmé lorsque nous avons interrogé, au début de cette recherche, plusieurs élèves en fin d'humanités et plusieurs étudiants de première année d'université en mathématiques sur leurs souvenirs relatifs à ce théorème qu'ils avaient appris, les uns quelques mois, les autres une année plus tôt : s'ils avaient encore en mémoire quelques techniques d'intégration et bien d'autres aspects du calcul intégral, tel l'encadrement, au moyen de rectangles, des surfaces délimitées par des courbes, ils ne savaient plus, pour la plupart, pourquoi le calcul d'aires et de volumes se ramenait, dans certains cas, à un calcul de primitives.

1.2. Tout constat se prête à des interprétations multiples.

Ainsi que tout fait didactique, celui-ci se prête à de multiples interprétations. Sans doute, des "behavioristes" incrimineraient-ils plus volontiers le manque de variété des "stimuli" (exemples, représentations graphiques) associés à la démonstration de ce théorème, ou bien la mémoire qui s'estompe à long terme, ou encore l'absence d'exercices de renforcement pour la résolution desquels il faut utiliser les idées-clés de ce théorème et non sa conséquence pratique exclusivement? Des disciples de Piaget formuleraient problablement l'hypothèse que le professeur n'a pas aménagé de "conflit cognitif" lors de l'apprentissage de ce théorème. Des psychosociologues iraient peut-être rechercher que le professeur intègre peu, dans son évaluation, la compréhension même de ce théorème... Bien sûr, ce serait caricaturer les positions respectives de ces groupes de spécialistes que de croire qu'ils réduisent le phénomène à l'une ou l'autre de ces explications. Et pourtant, la concurrence des "écoles" n'est pas un vain mot!

Toutes les raisons citées ci-dessus sont a priori dignes d'intérêt : ainsi, pour reprendre la dernière, il est vrai qu'un élève a plus avantage, s'il veut réussir à l'examen, à retenir par coeur le "truc" des primitives et à connaître les techniques d'intégration, qu'à approfondir le théorème fondamental et, vraisemblablement, est-ce en fonction de cela qu'il choisit ses priorités?

Ces raisons sont plus ou moins spécifiques à l'apprentissage du théorème fondamental. Il s'en ajoute d'autres qui ne sont plus propres du tout à cet apprentissage : la crise d'adolescence des élèves, la mauvaise relation professeur - élèves, les horaires surchargés ...

Mais aucune de toutes ces raisons, prise isolément, ne suffit à rendre compte de la totalité du phénomène. Il n'empêche que toute recherche présuppose le choix d'un regard particulier, forcément réducteur, mais qui permet de questionner efficacement la "réalité" complexe par la sélection de l'un ou l'autre de ses aspects. Dans les sciences dites classiques telles la physique ou la chimie cette sélection est déterminée par le *paradigme* en cours dans chacune de ces disciplines et qui, à une époque donnée, fait l'objet d'un consensus au sein d'une communauté scientifique reconnue comme telle : "Selon Kuhn (et d'ailleurs aussi selon Mach), la science commence toujours par l'apprentissage de la méthode et du travail scientifiques. Très tôt l'étudiant apprend de ses professeurs ce qu'est un travail scientifique. Il a rapidement l'intuition que certaines choses servent directement l'objet étudié alors que d'autres sont secondaires, sinon insignifiantes. S'il étudie la mécanique statique, on lui inculquera, d'une manière formelle ou informelle, que la couleur des objets étudiés est sans intérêt pour sa recherche. Il apprend peu à peu à discerner les éléments scientifiques et les éléments extra-scientifiques, et dès lors à rejeter la vision globale d'un objet. S'il essaie d'introduire dans son travail un élément de rêve, de poésie ou d'initiative intempestive, il lui est signifié que cela n'est pas intéressant. Il apprend ainsi que derrière la neutralité apparente de la science vis-à-vis de son "objet", se cache un *intérêt*, à savoir qu'on veut atteindre un but et que l'on ne peut rien apprendre dans le chaos : toute recherche suppose une mise en ordre, selon un point de vue et un projet.

Cet ordre se transmet petit à petit des professeurs aux disciples; mais lui-même se fonde sur la vision, une théorie, une manière de voir le monde que Kuhn appelle un *paradigme. Un paradigme est une structure mentale, consciente ou préconsciente, qui sert à classifier le réel avant de l'étudier plus à fond.* Sans cela la complexité des choses à envisager est telle qu'il n'en résulte qu'une totale confusion. Peu importe, au fond, que le paradigme soit "vrai" ou "faux" (quoi que l'on veuille dire par ces mots), il en faut un, car, comme le faisait déjà remarquer Bacon, "la vérité émerge plus facilement de l'erreur que de la confusion". En d'autres termes, il faut savoir poser le problème avant d'envisager de le résoudre. A la base des différentes sciences, et à chaque niveau de celles-ci, se trouve une méthode qui permet de sélectionner les questions intéressantes, d'évaluer les résultats et de critiquer le travail. Grâce à cette "théorie" implicite ou explicite, il devient possible d'établir entre les scientifiques une communication valable et relativement aisée".(G. Fourez, 1974).

Mais peut-on parler de paradigmes pour les sciences humaines? Il semble, à première vue, que ceux-ci soient, en général, moins bien identifiés. En particulier en ce qui concerne la didactique des mathématiques, l'objet de cette discipline se trouvant au carrefour de plusieurs autres disciplines et suscitant encore, à l'heure actuelle, de multiples débats. (Sur la complexité de la définition du champ de la didactique, cfr. e.a. A. Bouvier, 1986). C'est pourquoi la difficulté du chercheur en didactique nous paraît plus proche de celle de l'historien que de celle du physicien par exemple. P. Veyne (1979) décrit cette difficulté en évoquant la nécessité de découper une "intrigue" qui permet de rendre compte des événements, mais qui conditionne le choix des causes retenues pour interpréter ceux-ci : "Le choix de l'intrigue décide souverainement de ce qui sera causalement pertinent ou ne le sera pas; la science peut faire tous les progrès qu'elle voudra, l'histoire s'en tient à son option fondamentale, selon laquelle la cause n'existe que par l'intrigue. Car tel est le fin mot de la notion de causalité. Supposons, en effet, qu'il faille dire quelle a été la cause d'un accident d'automobile? Une voiture a dérapé à la suite d'un coup de frein sur une route mouillée et bombée; pour les gendarmes, la cause est la vitesse exagérée ou l'usure des pneus; pour les Ponts et Chaussées, le bombement exagéré; pour un directeur d'auto-école, la loi, méconnue des élèves, qui veut que l'intervalle de freinage croisse plus que proportionnellement avec la vitesse; pour la famille, c'est la fatalité, qui a voulu qu'il plût ce jour-là ou que cette route existât pour que le conducteur vienne s'y tuer.

Mais, dira-t-on, la vérité n'est-elle pas tout simplement que toutes les causes sont vraies, que la bonne explication est celle qui tient compte de toutes? Justement non, et c'est là le sophisme de l'empirisme : croire qu'on peut reconstituer le concret à coups d'abstractions scientifiques additionnées. Le nombre des causes découpables est infini, pour la simple raison que la compréhension causale sublunaire, autrement dit l'histoire, est description et que le nombre des descriptions possibles d'un même événement est indéfini. Dans telle intrigue, la cause sera l'absence de signal "Chaussée glissante" à cet endroit, dans telle autre, le fait que les voitures de tourisme n'ont pas de frein-parachute. De deux choses l'une; quand on souhaite une explication causale complète, ou bien on parle de causes sublunaires (il n'y avait pas de signal et le conducteur allait trop vite), ou bien de lois (les forces vives, le coefficient d'adhérence des pneus ...). Dans la première hypothèse, l'explication complète est un mythe comparable à celui du géométral d'événement qui intégrerait toutes les intrigues. Dans la seconde, l'explication complète est un idéal, une idée régulatrice apparentée à celle de déterminisme universel; on ne peut pas la mettre en pratique et, si on le pouvait, alors l'explication cesserait rapidement d'être maniable. (Un exemple : on ne peut même pas calculer les mouvements de la suspension de l'auto sur la route bombée; on peut bien écrire des intégrales doubles et triples à ce sujet, mais au prix de telles simplifications - la suspension sera supposée n'avoir pas de ressorts et les roues être complètement planes - que la théorie sera inutilisable). Ce qui met une barrière entre l'histoire et la science n'est pas l'attachement à l'individualité, ou le rapport aux valeurs, ou le fait que Jean sans Terre ne repassera pas par là : c'est le fait que la *doxa*, le vécu, le sublunaire sont une chose, que la science en est une autre et que l'histoire est du côté de la *doxa* .

Il existe donc deux solutions extrêmes, en présence d'un événement : ou bien l'expliquer comme un fait concret, le faire "comprendre", ou bien n'en expliquer que certains aspects choisis, mais les expliquer scientifiquement; bref, expliquer beaucoup, mais mal, ou expliquer peu de chose, mais les expliquer bien. On ne peut faire les deux à la fois, parce que la science ne rend compte que d'une infinie partie du concret. Elle part des lois qu'elle a découvertes et ne connaît, du concret, que les aspects de celui-ci qui correspondent à ces lois : la physique résout des problèmes de physique. L'histoire part au contraire de l'intrigue qu'elle a découpée et a pour tâche de la faire comprendre tout entière, au lieu de s'y tailler un problème sur mesure. Le savant calculera les aspects de jeu de coalition à somme non nulle du Front populaire, l'historien racontera la formation du Front populaire et ne recourra à des théorèmes que dans les cas très limités où ce serait nécessaire pour une compréhension plus complète".

Dans la section suivante nous décrivons selon quels critères nous avons choisi l'intrigue sur laquelle nous nous sommes basée dans le présent travail.

1.3. Une intrigue de nature épistémologique.

"Epistémologie" signifie littéralement discours (logos) sur la science (épistèmè). D'après E. Balibar et P. Macherey (1980), il s'agit là d'un "très vieux mot, ou au moins d'un mot composé de matériaux très anciens" dont l'usage est pourtant récent, "puisqu'on ne le rencontre qu'à partir du XIX^{e} siècle dans le vocabulaire spécialisé de la philosophie". Se référant à cette discipline, G. Fourez (1988) écrit : "Il s'agira ici de comprendre (c'est-à-dire de se risquer à un langage élaboré sur) la logique au sens le plus large. Dans cette perspective, le terme "logique" recouvre l'étude de la manière dont les savoirs humains se structurent; elle implique de rechercher dans quelles conditions ils peuvent être considérés comme valables. Ce domaine correspond à ce qu'on appelle parfois aussi la philosophie des sciences (la partie de la philosophie des sciences qui considère la manière dont les savoirs s'organisent s'appelle l'**épistémologie**, en grec : "la science du savoir").

Le mot "épistémologie" a fait peu à peu son entrée dans la didactique des mathématiques, e.a. sous l'impulsion de G. Brousseau qui "suggère de développer des travaux qui expliciteraient ce qu'il nomme *épistémologie scolaire*" (A. Bouvier, 1986). Cette expression se justifie par le fait (le souhait?) que la classe est une "micro-société scientifique" (G. Brousseau, 1986), à l'intérieur de laquelle les savoirs savants (c'est-à-dire jugés comme tels par la communauté des scientifiques) acquièrent pour les élèves un sens spécifique, fonction de la manière dont le professeur les aura fait intervenir et fonction aussi des référents culturels de ces mêmes élèves.

Nous pensons que notre travail illustre un des aspects de ce concept d'épistémologie scolaire. Le but de cette section est de préciser cet aspect au moyen des quelques concepts-clés qui nous ont permis de structurer notre observation.

Le premier de ces concepts est celui **d'objet mental**. H. Freudenthal (1983) propose d'appeler *objet mental* toute notion telle que *longueur, nombre, parallèles, récurrence*, etc. qui, tout en n'ayant pas atteint le stade de formalisation d'un concept mathématique et ne s'inscrivant donc pas dans une théorie axiomatique, est néanmoins dotée de propriétés qui en font un instrument d'organisation d'un ensemble de phénomènes. Par exemple les fractions associées dans le quotidien à des découpages ou des morceaux d'objets, à des comparaisons ou des rapports de grandeurs ou de mesures, à des transformations par changement d'échelle, etc., constituent des objets mentaux, instruments de pensée efficaces mais n'ayant pas atteint le stade d'organisation et de formalisation des fractions dans la théorie des nombres rationnels. Ces derniers, dans la terminologie de Freudenthal, sont des *concepts*, clairement différents, pour lui, des objets mentaux.

L'objet mental de H. Freudenthal, rejoint, nous semble-t-il, le **concept-image** de D. Tall et S. Vinner (1981), à ceci près que, contrairement à l'objet mental, le concept-image inclut le concept mathématique formalisé qui lui correspond : "[...] we use the term *concept image* to describe the total cognitive structure which is associated to the concept. This includes the mental pictures and the associated properties and processes. For instance the concept of subtraction is usually first met as a process involving whole numbers. Many children associate with the substraction process the fact that subtraction produces a smaller answer. This property will be considered as part of the concept image for the children concerned. It need not even be a consciously observed property to be part of the concept image. We need to include all the mental attributes associated with a concept for they may contain the seeds of cognitive conflict at a later date. For instance the property that subtraction leads to a smaller answer conflicts with the case of substraction of negative numbers if this is taught on a subsequent occasion.

Nor do we assume that the concept image is totally coherent. The brain does not work that way. Sensory input excites certain neuronal pathways and inhibits others. In this way different aspects of the concept image may be evoked at different times".

Ces deux concepts sont nés de la conviction que : "Quel que soit le mode d'apprentissage considéré - exposé déductif, résolution de problème, étude d'un thème, ... - les choses à apprendre tombent, comme dit S. Baruk, "dans du plein". On ne les verse pas dans un coin vide du cerveau de l'élève. Le quotidien (perceptions, notions, idées, imaginations, langage) et les connaissances mathématiques acquises entravent ou facilitent l'apprentissage. Tout cela, différent pour chaque élève, remonte loin dans son passé" (N. Rouche, à paraître).

Parmi les facettes d'un objet mental, il y en a qui créent obstacle à l'apprentissage. G. Brousseau (1983) répertorie trois types **d'obstacles didactiques** :

"- Les obstacles *d'origine ontogénique* sont ceux qui surviennent du fait des limitations (neurophysiologiques entre autres) du sujet à un

moment de son développement : il développe des connaissances appropriées à ses moyens et à ses buts à cet âge là [...].
- Les obstacles *d'origine didactique* sont ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif [...]
- Les obstacles *d'origine proprement épistémologique* sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes [...].

Nous retiendrons ici les deux derniers types d'obstacles.

La notion d'obstacle épistémologique doit son origine à G. Bachelard (rééd. 1980) qui l'a défini dans le contexte des sciences expérimentales : "[...] *c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique*. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes, comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain : c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons des obstacles épistémologiques."

La transposition de cette notion à la didactique des mathématiques fait, à l'heure actuelle, l'objet d'un débat (Sur les difficultés soulevées par cette transposition, cfr. e.a. G. Brousseau (1983) et A. Sierpinska (1985)).

On peut discuter à perte de vue sur le concept d'obstacle épistémologique au sein de la didactique des mathématiques. Il nous paraît plus opportun dans ce travail de discuter de ce concept à propos d'exemples précis (e.a. l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions) estimant, à l'instar de G. Brousseau (1983), que : "La notion d'obstacle elle-même est en train de se constituer et de se diversifier : il n'est pas facile de dire des généralités pertinentes sur ce sujet, il vaut mieux faire des études cas par cas".

A partir du moment où l'on accorde quelque importance aux objets mentaux, on se doit d'en accorder au <u>contexte</u> de l'apprentissage de telle notion ou telle propriété : les exemples, les problèmes (ou éventuellement leur absence) qui ont permis d'illustrer ou d'introduire cette notion ou cette propriété, les autres notions ou propriétés vues auparavant ...

Ces considérations nous amènent à adopter la distinction que fait N. Rouche entre le **sens étroit** d'une théorie et son **sens contextuel** : "Il [le sens étroit] s'agit du sens que le lecteur vérifie lorsqu'il déchiffre la théorie, contrôlant pas à pas la non-contradiction des définitions et les chaînons des démonstrations. Cette vérification se décompose en une succession de vérifications locales, puisque la conscience claire ne peut appréhender que peu de choses à la fois. Pour les besoins du présent exposé, convenons d'appeler *sens étroit* le sens ainsi associé au parcours de vérification détaillée que requiert tout discours mathématique. [...] il existe en mathématiques un sens riche et profond qui déborde le sens étroit. Et ceci dès le premier niveau : un mot ou un symbole évoque beaucoup plus que son sens minimal, celui qui suffit à assurer son rôle strict dans la construction logique. Il suffit, pour s'en convaincre, de penser à toutes les images qu'évoquent dans chaque esprit des mots comme *parallèles* ou *limite* ou des symboles comme π et ε. Mais à tous les niveaux, le même phénomène se reproduit : chaque unité du discours reçoit, par delà son sens étroit, un supplément de sens, du fait de son immersion dans des unités plus vastes et de toutes les adhérences qu'elle a établies dans chaque esprit avec les mots, les formes et les choses de la pensée commune. Nous appellerons ce sens *le sens contextuel*, pour rappeler que chaque unité du discours le puise principalement dans ce qui la déborde et l'entoure, en aval autant qu'en amont, dans le discours théorique et la pensée commune" (N. Rouche, à paraître).

Le sens contextuel d'une notion ou d'une propriété se nourrissant autant de son "environnement théorique" que de la pensée commune, il apparaît vain d'étudier l'apprentissage de cette notion ou de cette propriété prise isolément. Aussi nous inspirerons-nous de l'idée de **trame conceptuelle** que M. Develay (1983) utilise pour évoquer les relations entre les concepts qui, comme les fils d'un tissu, constituent une trame. D'autres parlent de **champ conceptuel**, à propos de l'enseignement de l'analyse : "Les concepts de base y sont nettement interdépendants, ils s'"accrochent" les uns aux autres, aussi faudrait-il chercher les obstacles relatifs non pas à chacun de ces concepts séparément mais bien à tous ces concepts ensemble, c'est-à-dire les obstacles relatifs au champ conceptuel des débuts d'analyse. De même, il serait insensé de séparer dans l'enseignement les notions de limite, de continuité, de dérivée ou d'intégrale" (A. Sierpinska, 1985) (B. Cornu, 1983, utilise la même expression).

Plusieurs des objets mentaux étudiés ici sont associés à des grandeurs ou des objets géométriques qui s'appréhendent e.a. par nos sens : les aires, les volumes, les vitesses, la tangente. Aussi serons nous amenée à parler de **perception** et, plus particulièrement, de **perception visuelle**, concepts difficiles à cerner, s'il en est.

"Le malaise que provoque tout exposé traitant de la perception comme d'un en-soi trouve son origine dans le fait qu'elle ne saurait être distinguée du sujet percevant. On a d'abord pensé résoudre le problème de cette indissociabilité en ramenant la perception à la sensation; [...]" (G. Thinès, 1980). Mais on sait depuis les travaux de psychologie de la forme que la perception visuelle n'est pas réductible à la sensation enregistrée par la rétine : une même image peut donner lieu à plus d'une perception. Ainsi un même dessin (très connu) peut-être perçu par certains comme le portrait d'une jeune fille, par d'autres comme celui d'une vieille femme; d'autres encore peuvent aller d'une perception à l'autre. Les enseignements actuels de la psychophysiologie de la vision vont dans ce sens : "La perception est le résultat de l'intégration intracérébrale des influx nerveux provenant des organes des sens, ce qui permet à l'organisme d'adapter son comportement en fonction des modifications survenant en lui ou en dehors de lui. Il s'ensuit, dès lors, que la perception n'est pas déterminée exclusivement par des influx sensoriels, mais dépend de la structure des activités centrales à ce moment là. Ainsi, des points noirs disposés de façon équidistante en face d'un sujet sont généralement vus par ce dernier comme s'ils étaient groupés deux par deux, le cerveau imposant donc la perception d'une structure différente du stimulus physique. Loin d'être un phénomène passif, la perception apparaît donc plutôt comme un acte de "décision" au niveau cérébral quant à la signification probable des informations sensorielles pour le sujet." (M. Meulders cité par C. P. Abeloos, 1983)

Tout ceci met en évidence le lien entre perception et structure: "[...] *percevoir quelque chose suppose que l'on dispose d'un certain nombre de structures* grâce auxquelles on distingue des situations probables des situations improbables : la connaissance de ces structures fournit un sens. (G. Fourez, 1974). (Cet auteur appelle *transformation* "l'opération par laquelle on relie un événement à un autre" et *structure* "un ensemble de transformations reliées entre elles". Il propose l'illustration suivante : "Regardons des traces de pas sur la neige. Que voyons-nous? Alors que partout la neige est uniforme, nous percevons, à un endroit donné, quelque chose de différent : une disposition de la neige nous paraît *a priori improbable*; nous ne nous y attendions pas. Mais cela ne suffit pas pour que nous percevions les traces. Il y a en effet de nombreuses dispositions improbables qui n'attirent pas notre attention. Pour que notre attention soit attirée par celles-ci, il faut que nous mettions ce que nous voyons en relation avec l'homme qui a laissé ces traces; autrement dit, nous relions les traces à d'autres événements. Pour que nous les percevions, il fallait que nous soyons capables d'intégrer la situation improbable devant laquelle nous nous trouvions dans une série de relations dont l'ensemble forme pour nous une signification : par exemple, un homme est passé par là."). G. Fourez explique, en substance, que les structures qui, pour un individu donné, déterminent le sens de sa perception sont développées par la société dans laquelle il vit et sont fonction de la place qu'il occupe dans cette société : un Amazonien n'a pas la même perception qu'un Européen, un ingénieur n'a pas celle d'un homme de la rue.

Ainsi donc, une perception est une interprétation, une structuration mentale. C'est particulièrement vrai dans de nombreux cas qui nous intéressent et à propos desquels nous parlons de perception visuelle. Quand nous disons que les élèves réduisent "à vue" des rectangles en segments ou qu'ils "voient" une sécante tourner autour d'un point jusqu'à devenir tangente à une courbe, c'est là pour nous une manière suggestive de peindre l'imagerie mentale des élèves, non ce qui s'imprime réellement sur leur rétine : le dessin animé est une institution imaginaire. De même nous parlerons d'influence de la perception des grandeurs pour expliquer la tendance des élèves à traduire par une somme de mesures la réunion de segments que constitue une surface, mais on a affaire, dans ce cas aussi, à une idéalisation mentale.

Y a-t-il un sens dès lors à distinguer les objets mentaux "aire" et "vitesse" en nous référant principalement aux sensations perçues, ainsi que nous le ferons plus loin, dans la mesure où la sensation pure est un concept qui n'est guère opérationnel? Oui, car, à ce moment, nous nous placerons dans l'univers mental des élèves pour qui, selon toute vraisemblance, ce qui est perçu par les sens serait une "réalité" incontournable, absolue, c'est-à-dire indépendante de tout contexte socio-culturel. Sans doute parce que cela ne fait l'objet d'aucune analyse de leur part. (Bien sûr, les élèves savent que lorsqu'ils perçoivent une surface par exemple, ils font abstraction de l'épaisseur du trait de crayon qui l'entoure, mais sont-ils conscients que cette vision est conditionnée par leur culture et imagineraient-ils aisément qu'un être humain baignant dans une autre culture verrait autre chose qu'eux?) Et sans doute la vitesse leur apparaît-elle, du point de vue de leur perception, comme quelque chose de plus fugitif que l'aire, ce qui peut avoir une incidence, ainsi que nous l'analyserons plus loin, sur leur apprentissage des concepts de vitesse instantanée et d'intégrale. C'est pourquoi nous serons amenée à distinguer, de ce point de vue, les aires et les vitesses.

Dans l'ensemble du texte, des guillemets placés autour du mot perception et autour d'autres expressions apparentées rappeleront çà et là que nous nous plaçons dans la perspective des élèves.

Notons que ces concepts qui ont orienté nos recherches ne s'appliquent pas sans correctifs à la réalité, même s'ils répondent à des définitions raisonnablement claires. Ils sont des types idéaux au sens du sociologue allemand M. Weber (cité par P. Bourdieu et al., (1983) : concepts aux contours tranchés, qui aident à situer des objets ou des phénomènes réels, mais ont souvent besoin d'un complément de sens quand on les utilise dans un contexte déterminé.

Le contexte d'application et d'illustration du théorème fondamental est essentiellement, dans le Secondaire, celui des calculs d'aires et de volumes. Mais, dans ce théorème, les aires et volumes sont des intégrales et le théorème a pour fonction de remplacer le calcul d'une intégrale définie par celui d'une primitive. Notre hypothèse de travail est que les aires et volumes sont des objets mentaux riches en facettes dont certaines font obstacle à leur définition en termes d'intégrales et à leur détermination par le biais des primitives.

Par ailleurs, d'autres concepts mathématiques sont mobilisés dans le théorème fondamental : ceux de fonction, de limite, de dérivée. Eux aussi renvoient à des objets mentaux, ne fût-ce que par l'usage en mathématique d'expressions de la langue usuelle : "variation", "à la limite", "taux de croissance"... Nous étudierons également ces autres objets mentaux dans la mesure où ils interagissent, au sein du théorème fondamental, avec les objets mentaux "aires et volumes" ou dans la mesure où les observations faites à leur sujet confirment des hypothèses relatives aux aires et volumes.

2. Méthodes.

2.1. Des problèmes qui constituent plus un matériau de recherche qu'un projet d'enseignement.

Notre. principal matériau de recherche est constitué d'une suite de problèmes proposés à des élèves :
- pour beaucoup, sans connaissance en analyse;
- travaillant le plus souvent par groupes;
- ayant choisi une option forte en mathématiques, ou une option moyenne.

Ces divers choix nous ont été dictés par les raisons suivantes.

1) On sait, depuis e.a. les travaux de I. Lakatos (1984), que les erreurs (ou ce que nous considérons aujourd'hui comme des erreurs), les hésitations et les contradictions sont autant d'indications sur la manière dont se sont développées les connaissances mathématiques dans l'histoire. Nous avons supposé qu'il en allait de même pour les élèves et que leurs errances et hésitations seraient pour nous révélatrices de leurs objets mentaux.

Mais il y a les "bonnes" erreurs et les "mauvaises" : les "erreurs utiles", les "erreurs communes et normales", pour reprendre les termes de G. Bachelard (1980), et les erreurs qui ne sont que "distraction de l'esprit fatigué". Et n'est-ce pas les "vrais problèmes" (ceux qui nécessitent une conceptualisation) qui sont susceptibles de susciter ces bonnes erreurs, celles qui seront éclairantes pour notre recherche (autant que constitutives des connaissances des élèves)?

2) Il y a un hiatus important entre l'opérationnalité du calcul infinitésimal, la facilité d'emploi de ses techniques et les difficultés soulevées par son sens profond (celui que lui attribuent les mathématiciens). Une fois les techniques apprises, beaucoup d'élèves se retranchent derrière elles sans les justifier autrement qu'en brandissant le mot "limite" comme une sorte de "laisser-passer" magique. On ne peut avoir accès à ce qui se passe dans la tête de l'élève sans le voir "sécher" sur un problème qui est, pour lui, un défi. C'est pourquoi nous avons d'une part proposé des problèmes d'analyse à des élèves qui n'avaient aucune connaissance en la matière et d'autre part proposé à des élèves qui avaient déjà reçu un enseignement d'analyse, des problèmes inhabituels pour eux. (N.B. les mêmes problèmes ont rempli les deux fonctions).

3) Le travail en groupes favorise les débats et, comme N. Balacheff (1980, 1981), nous voulions relever dans ces débats des traces tangibles (audibles) de ce qui se passe dans "la boîte noire" (la tête de l'élève).

4) Plusieurs apprentissages se situent en amont de l'apprentissage en analyse, e.a. la capacité à mathématiser des situations au moyen de symboles littéraux. Proposer nos problèmes à des élèves trop peu avancés c'était risquer de faire surgir de multiples difficultés "parasites" qui auraient masqué les difficultés spécifiques du calcul infinitésimal, voire empêché leur apparition. On peut supposer que si le calcul infinitésimal soulève des obstacles chez des élèves plus avancés, il le fasse a fortiori chez les autres.

Ces problèmes ont été proposés à nos propres élèves et à ceux de deux de nos collègues. Dans un premier temps, le professeur, quel qu'il soit, s'abstenait de tout commentaire, se contentant d'observer le comportement des élèves, à propos duquel il prenait des notes. Ensuite, il aidait les élèves en ayant bien soin de consigner ses propres apports. Quand nous étions dans une classe, en tant qu'expérimentateur, nous nous installions à côté d'un groupe et nous notions tout ce qui s'y déroulait. Tous les groupes d'élèves désignaient un rapporteur chargé de synthétiser par écrit les échanges. Par ailleurs, les élèves ont été invités à répondre individuellement et par écrit à certains problèmes. Nous avons donc disposé de multiples documents écrits : descriptions du travail d'un groupe, notes sur l'avancement de l'ensemble de la classe, réponses écrites des élèves à certaines questions.

Notre suite de problèmes se distingue d'un projet d'enseignement de l'analyse et ce, pour plusieurs raisons. D'abord, elle débouche seulement sur un embryon de théorie, non formalisé :

elle concerne en quelque sorte un pré-apprentissage de l'analyse. Ensuite, plusieurs aspects de cet enseignement y sont négligés (variations de fonctions, techniques d'analyse numérique, ...). Enfin, certains problèmes de cette suite (e.a. des paradoxes sur les indivisibles) comportent trop de difficultés techniques : s'ils ont constitué pour nous de bons "pièges" révélant les intuitions des élèves, ils feraient perdre trop de temps au professeur soucieux d'enseigner exclusivement; ils risqueraient aussi d'égarer les élèves dans des considérations parasites trop lourdes.

Il n'empêche que cette suite de problèmes a fait l'objet d'un enseignement effectif (du moins morceau par morceau). D'abord par obligation : nous ne pouvions interroger un public large d'élèves, sur une tranche d'apprentissage relativement ample, sans "exploiter" les heures de cours et les professeurs des classes interrogées ne pouvaient accepter de consacrer ces heures à des seules fins d'expérimentation. Ensuite, et ceci contredit en apparence ce que nous avons dit au début de ce paragraphe, par option pédagogique. L'idée fondamentale est que ces problèmes non seulement révèlent certains obstacles à l'expérimentateur mais sont, pour les élèves, une excellente occasion de les franchir, ne fût-ce que parce qu'ils leur en font prendre conscience. Cette idée prend sa source dans certaines théories de l'apprentissage telle celle de J. Piaget pour qui le "conflit cognitif" est une voie essentielle de l'apprentissage. Cette même conception est reprise par G. Brousseau (1983) et, pour lui, se trouve au coeur de la didactique des mathématiques : "L'obstacle est constitué comme une connaissance, avec des objets, des relations, des méthodes d'appréhension, des prévisions, avec des évidences, des conséquences oubliées, des ramifications imprévues ... Il va résister au rejet, il tentera comme il se doit, de s'adapter localement, de se modifier aux moindres frais, de s'optimiser sur un champ réduit, suivant un processus d'accomodation bien connu.

C'est pourquoi, il faut un flux suffisant de situations nouvelles, inassimilables par lui, qui vont le déstabiliser, le rendre inefficace, inutile, faux, qui vont en rendre nécessaire la reprise ou le rejet, l'oubli, la scotomisation - jusque dans ses ultimes manifestations.

Aussi, le franchissement d'un obstacle exige un travail de même nature que la mise en place d'une connaissance, c'est-à-dire des interactions répétées, dialectiques de l'élève avec l'objet de sa connaissance.

Cette remarque est fondamentale pour distinguer ce qu'est un vrai problème; c'est une situation qui permet cette dialectique et qui la motive".

J.L. Closset (1983) insiste, lui, sur le développement d'une métaconnaissance : "[...] nous pensons que les étudiants doivent prendre conscience de l'existence de leurs raisonnements naturels pour être en mesure de leur assigner des limites au-delà desquelles ils auront à s'en défier. On ne peut guère obtenir ce résultat si, sur des situations ad hoc, on ne met pas en échec le raisonnement naturel".

Mais nous ne saurions prétendre que nos problèmes sont les seuls qui permettent aux élèves de franchir les obstacles qu'ils révèlent. C'est pourquoi nous situons ailleurs la portée didactique de ces problèmes : ils constituent une "promenade" pour professeurs, leur permettant de prendre conscience, par contraste, d'apprentissages négligés ou d'insistances particulières dans l'enseignement de l'analyse tel qu'il est habituellement pratiqué. Ne voit-on pas mieux ce qui ne va pas dans ce qui va de soi quand on voit autre chose? Comme le dit F. Braudel (1969) : [...] la surprise, le dépaysement, l'éloignement - ces grands moyens de connaissance - ne sont pas moins nécessaires pour comprendre ce qui vous entoure, et de si près que vous ne le voyez même plus. Vivez à Londres une année, et vous connaîtrez fort mal l'Angleterre. Mais, par comparaison, à la lumière de vos étonnements, vous aurez brusquement compris quelques-uns des traits les plus profonds et les plus originaux de la France, ceux que vous ne connaissiez pas à force de les connaître".

Nous reviendrons, dans la conclusion, sur les aspects de l'enseignement mis en lumière par cette promenade.

Concluons cette section en situant notre recherche dans la taxonomie des pratiques de recherches - actions de J. Dubost : c'est une recherche - action par sa "stratégie de recherche dans le champ scientifique qui utilise l'action et/ou l'observation participante comme instrument de connaissance" (cité, en substance, par A. Bouvier, 1986).

2.2. Des problèmes qui s'inspirent de l'histoire ... jusqu'à un certain point; une grille de lecture historique.

Sans prétendre que l'ontogenèse se conforme en tout point à la phylogenèse en matière d'apprentissage, c'est-à-dire que l'évolution de chaque individu reproduit l'évolution historique, quelles que soient les connaissances concernées, nous pensons que, pour ce qui est de la tranche d'analyse concernée ici, le cheminement des élèves s'apparente dans les grandes lignes au cheminement historique. Nous rejoignons en cela de nombreux auteurs, dont ceux qui seront cités e.a. dans la section 3.3. de ce chapitre. De là l'idée de puiser dans l'histoire des problèmes susceptibles de révéler les intuitions premières des élèves et de faire mûrir chez eux les concepts qu'on souhaite leur enseigner. Il y a un risque cependant, du moins en ce qui concerne l'aspect "enseignement" : celui de les faire passer par tous les méandres de l'histoire, y compris les "fausses issues". Après tout, il s'agit pour eux, non d'une invention, mais d'une "réinvention" : le professeur sait d'avance où il veut les mener. Par conséquent : "Il y a un équilibre à trouver entre un enseignement "historique" qui restaurerait une forêt de distinctions et des points de vue périmés dans laquelle se perdrait l'enfant, et un enseignement direct de ce que l'on sait aujourd'hui être une structure unique et générale, sans se soucier d'unifier les conceptions de l'enfant, nécessairement et naturellement différentes. La recherche des conditions d'un tel équilibre est un des grands problèmes qui se pose actuellement à la didactique [...] Il ne s'agit pas de reproduire le processus historique mais de produire des effets similaires par d'autres moyens." (G. Brousseau, 1981). C'est pourquoi, si les problèmes proposés ici s'inspirent de l'histoire, c'est plus par leur enjeu pédagogique, c'est-à-dire par les concepts ou propriétés qu'ils mobilisent que par leur formulation. C'est surtout vrai en ce qui concerne les problèmes des chapitres V et VI: contrairement à la plupart de ceux des chapitres antérieurs, ce ne sont pas des problèmes historiques authentiques, mais ils sont néanmoins censés déboucher sur des éclaircissements conceptuels qu'on retrouve aussi dans l'histoire et que nous décrivons à chaque début de ces chapitres.

L'histoire a été pour nous une source d'inspiration à double titre : d'abord, elle nous a suggéré des problèmes, ensuite elle nous a fourni une grille de lecture pour interpréter les réactions des élèves et pour trier parmi toutes les erreurs, celles révélatrices d'obstacles épistémologiques. L'hypothèse sous-jacente à cet emploi de l'histoire est que des conceptions erronées rencontrées à la fois dans l'histoire et chez les jeunes d'aujourd'hui qui baignent dans une autre culture, et de même à la fois chez des mathématiciens et des élèves, sont de bonnes erreurs, au sens de Bachelard, c'est-à-dire des erreurs à la fois révélatrices d'obstacles épistémologiques et constitutives des connaissances et, de ce fait, incontournables.

2.3. Des interviews semi-structurées.

Les réactions des élèves à notre suite de problèmes ont été rapprochées des contenus d'interviews semi-structurées, comme les définit G. De Landsheere (1976) : "Un schéma définit les principaux thèmes à explorer et prévoit éventuellement certaines questions; mais la manière dont les thèmes seront amenés au cours de l'entretien, la façon dont les questions seront formulées et l'ordre dans lequel thèmes et questions apparaîtront ne sont pas fixés d'avance".

A des groupes de deux élèves, nous avons proposé d'échanger leurs souvenirs et leurs impressions à propos du calcul intégral (étudié au moins plusieurs mois auparavant). Néanmoins plusieurs questions précises avaient été prévues (cfr. chapitre VI) et ont été posées quand l'occasion s'en présentait : il s'agissait surtout de faits mathématiques qu'on faisait constater aux élèves et qu'on leur demandait d'interpréter.

Ces interviews ont été enregistrées.

2.4. Une introspection et des souvenirs personnels.

Nos propres erreurs ou interrogations ont été, pour cette recherche, une source importante. Comme celui qui se soumet à une psychanalyse nous avons tenté de les décortiquer pour en retrouver l'intuition première.

Sans pour autant négliger le danger d'une investigation plus subjective, G. De Landsheere (1976) souligne : "Le mouvement historique contemporain ambitionne "de revenir au vécu, de retrouver ainsi l'intégralité du réel" [J. Cardinet]. Il veut notamment recourir à l'intuition directe pour accéder à un autre ordre de connaissance, infiniment plus riche que celui de la construction scientifique. L'enrichissement que sont susceptibles d'apporter la réflexion philosophique [...] et l'étude clinique peut, en effet, être considérable". [Nous ne sommes pas entièrement d'accord avec cette citation, dans la mesure où nous pensons, ainsi que nous l'avons suggéré plus haut, que l'on ne peut cerner "l'intégralité du réel". Mais cette référence à l'intuition directe de la part d'un chercheur connu pour ses insistances en faveur du "mesurable" nous paraît significative et donc digne d'être relevée, d'autant que lui-même cite quelqu'un d'autre].

Nous avons ajouté à cela de multiples souvenirs glanés en quinze ans d'enseignement : des intuitions d'élèves qui nous ont frappée, sans doute parce qu'elles étaient parentes de nos propres intuitions et que nous éprouvions nous-même quelque peine à les dépasser.

Pourquoi nier que tout professeur, par sa pratique même, possède une sorte de connaissance empirique des difficultés rencontrées par ses élèves devant telle ou telle matière? J. De Lange (1987) n'insiste-t-il pas sur le fait que sa recherche s'appuie non seulement sur un matériel expérimental, mais encore "sur des réflexions relatives à des années d'expériences en classe, des discussions avec des élèves, des enseignants et des formateurs d'enseignants"? Il ajoute : "Ceci signifie une évaluation de l'intérieur (*from the inside*) : l'analyse est menée par l'un de ceux qui a développé le programme d'enseignement".

H. Freudenthal (1978) souligne l'intérêt du travail en équipe composite, dans la mesure où il rapproche, jusqu'à les entremêler quotidiennement, l'enseignement et la recherche, et où il permet le développement d'un langage efficace".

Bien sûr, ces connaissances empiriques ne peuvent être identifiées et caractérisées que si le professeur arrive, en se faisant chercheur, à prendre conscience de son expérience et à porter sur elle un regard critique. P. Bourdieu (1984) parle de "la difficulté d'instaurer cette relation de proximité rompue et restaurée qui, au prix d'un long travail sur l'objet mais aussi sur le sujet de la recherche, permet d'intégrer tout ce qu'on ne peut savoir que si l'on en est et tout ce qu'on ne peut ou ne veut savoir parce qu'on en est".

Ch. D'Halluin et D. Poisson (1988) insistent sur leur condition d'enseignants-chercheurs et donc de personnes impliquées dans l'enseignement, mais prenant par ailleurs le temps de la recherche. Ils expliquent aussi que ceux qui, dans leur nombreuse équipe de formation continue, avaient au départ reçu une mission d'enseignement, se sont finalement mêlés à la recherche. Ils concluent que la distinction entre action (c'est-à-dire enseignement) et recherche ne s'est plus faite au niveau des personnes (c'est-à-dire entre praticiens et chercheurs) mais au niveau des fonctions, chacun étant selon les moments praticien ou chercheur. Ils insistent aussi sur l'importance pour les enseignants et les chercheurs de se mettre souvent en situation d'apprenti.

Le Groupe d'Enseignement Mathématique, créé à Louvain-la-Neuve par N. Rouche tente d'intégrer, d'une part, la pratique sur le terrain, d'autre part, l'indispensable "pas de côté". Comme son nom l'indique, il s'est donné comme tâche principale de concevoir et réaliser des enseignements. Mais il le fait de façon critique, et la recherche qui se fait en son sein n'est, en quelque sorte, que "l'exacerbation" de cette critique.

2.5. Un choix non neutre de questions et de problèmes.

Le choix des problèmes proposés aux élèves s'est fait dans une sorte de dialectique avec la formulation des hypothèses relatives aux objets mentaux décrits ici. Au départ : certaines erreurs ou réflexions d'élèves (entendues lors de notre enseignement) ont attiré notre attention et nous ont permis de dégager quelques hypothèses préalables. Celles-ci nous ont amenée à formuler d'abord des questions pour les interviews, ensuite des problèmes pour les classes, susceptibles de les contrôler. En retour, les réactions suscitées chez les élèves par ces questions ou ces problèmes nous ont conduite à affiner ces hypothèses et à en formuler d'autres qui, à leur tour, ont suscité de nouveaux problèmes... et ainsi de suite. Tout ceci confirme que : "[...] l'*observation n'est pas purement passive* : il s'agit plutôt d'une certaine *organisation de la vision.* [...] Quand j'observe "quelque chose", il me faut toujours "le" décrire. Pour cela, j'utilise une série de notions que je possédais auparavant; celles- ci se réfèrent toujours à une représentation théorique, généralement implicite. Sans ces notions qui me permettent d'organiser mon observation, je ne sais que dire" (G. Fourez, 1988).

Le choix de nos problèmes s'est donc fait en fonction d'une "théorie", mais nous avons préféré expliciter celle-ci dans la conclusion (X.1., X.2., X.3.), à la laquelle nous renvoyons le lecteur (réservant à l'introduction la description des concepts qui ont structuré notre observation). En effet, nous ne voudrions pas donner l'impression, en le faisant dès à présent, que cette théorie était, au départ de notre recherche, aussi explicite qu'elle l'est devenue par après. Comme nous l'avons dit plus haut, elle ne s'est précisée que peu à peu, en interaction avec la formulation des problèmes et l'analyse des réactions recueillies.

Les problèmes retenus sont caractérisés au début de la deuxième partie.

2.6. Validation d'une telle recherche.

La validation des recherches en épistémologie semble particulièrement délicate. J. Piaget (1967) écrit : "[...] les problèmes épistémologiques recouvrent un mélange inextricable de questions de fait et de questions de validité, de telle sorte que toute vérification directe est impossible, qui puisse orienter notre choix [parmi plusieurs hypothèses] : ce n'est, en effet, pas sans raison que le nombre des tendances distinctes et des interprétations incompatibles entre elles est si élevé en épistémologie".

On ne peut discuter de la validation d'une recherche sans confronter, d'une part, les méthodes utilisées et leurs limites, d'autre part, les résultats qu'on peut en attendre.

Ainsi que nous l'avons dit plus haut, notre recherche est, par les méthodes utilisées, une recherche-action : la méthode est, en effet, "clinique sur des aspects globaux" comme dirait A. Bouvier (1986) et non "expérimentale sur des aspects pointus". On répertorie généralement (cfr. e.a. J. Cardinet et M. Schmutz (1975)) deux méthodes cliniques que nous avons exploitées toutes deux : l'observation sur le terrain (ici en classe) et l'entretien clinique (ici les interviews semi-structurées).

L'observation en classe a, en particulier, ses limites. De nombreux paramètres sont incontrôlables : les échanges entre élèves, les "coups de pouce" du professeur, surtout lorsque ce dernier est expérimentateur en même temps (il n'est pas aisé de séparer bien distinctement les moments d'observation des élèves et les moments d'aide à ceux-ci). De plus, la prise de notes a sans doute été tributaire de l'impression du moment, aucune grille d'observation n'ayant été mise au point a priori (notons que ce dernier aspect constitue peut-être une garantie de richesse, les différents professeurs étant a priori libres d'attribuer leurs priorités à tel ou tel aspect du comportement des élèves). Par contre, aucun tri n'a été fait dans les informations reçues (à ceci près que toute observation s'accompagne immanquablement d'un tri, fût-ce implicite) : tout ce que nous avons relevé nous-même ou tout ce que nous avons reçu des autres professeurs est repris dans la deuxième partie du travail, pour que chaque lecteur puisse se faire une idée de la totalité des informations, avant que nous leur accordions une importance hiérarchisée dans la partie "analyse épistémologique".

J. Cardinet et M. Schmutz (1975) estiment les méthodes clinique et statistique complémentaires au sens suivant : " Elle [la méthode clinique] veut approfondir l'observation de son objet jusqu'à y percevoir une structure d'ensemble qui organise les faits et en permet une interprétation cohérente. Elle s'intéresse par conséquent aux processus, c'est-à-dire à la façon dont ont été obtenus les résultats observés, alors que l'enquête statistique reste souvent plus superficielle, au niveau des résultats eux-mêmes [...]. Elle [la méthode statistique] cherche dans les faits moins des configurations uniques douées de cohérence interne que la manifestation des propriétés de certaines *classes* d'objets. Par là, elle se situe à un niveau assez faible de compréhension des phénomènes, qui ne permet pas de maîtriser le cas individuel".

Les faits relevés dans cette recherche n'ont pas valeur de statistique. On ne peut même pas prétendre qu'ils soient tous reproductibles dans les mêmes conditions : certaines erreurs n'ont été commises qu'une seule fois ou parfois par hasard. (Il n'empêche, ces erreurs ont laissé sur la touche les autres élèves et souvent même le professeur et ce fait, à lui seul, est significatif). Mais le point important pour nous est que de multiples erreurs isolées et récoltées dans des contextes divers puissent être prises en compte par une même interprétation : cela rend celle-ci "crédible" à nos yeux, c'est-à-dire utile pour interpréter ces erreurs. Nous nous sommes donc plus attachée à trouver une "structure d'ensemble qui organise les faits et en permet une interprétation cohérente" et nous la proposons à titre d'hypothèse.

Comme J. Piaget (1967), nous avons retenu deux critères pour juger d'une hypothèse épistémologique : l'accord de l'hypothèse avec les données historico-critiques et son accord avec les données génétiques (ici les réactions des élèves).

L'intérêt d'un travail comme le nôtre est de dégager des hypothèses, des questions dont certaines seront susceptibles de faire ultérieurement l'objet d'une mise à l'épreuve quantitative. Notre recherche en elle-même n'est pas quantitative, calquée sur un modèle causal : "telle cause, tel effet", ou un modèle probabiliste : "tel fait est corrélé à tel autre, avec une probabilité d'autant". Nous pensons que, pour ce qui est de l'apprentissage concerné ici, de telles recherches sont prématurées. Plus généralement, nous estimons que de multiples recherches en didactique s'accordent à ce que W. Koehler (trad. 1964) écrivait à propos de la psychologie qu'il opposait, en tant que jeune science, à la physique : "[...] la physique est une science déjà ancienne, et la psychologie n'est pas encore sortie de l'enfance. Les physiciens ont mis des siècles à remplacer graduellement des observations directes et surtout qualitatives par d'autres, indirectes, mais très précises. Leur réussite fut liée aux connaissances antérieurement acquises sur le monde physique. Méthodes et mesures indirectes supposent un vaste fond d'informations. La physique duţ recueillir ces informations, à une époque où ses observations étaient plus qualitatives et moins exactes. [...] Si nous voulons imiter les sciences physiques, nous ne devons pas les imiter telles qu'elles sont aujourd'hui, parvenues à un point élevé de leur développement. Nous devons plutôt les prendre pour modèles telles qu'elles furent en leur jeunesse historique, lorsque leur état de développement était comparable à ce qu'est l'état actuel de la psychologie. [...] La recherche quantitative [en psychologie], je le répète, présuppose l'analyse qualitative, suscitant la découverte de problèmes féconds". M. Wertheimer (1945) rejoint W. Koehler : "The most urgent need in the experimental investigation of the problems seems to be not so much to get the quantitative answer, "How many children achieve a solution, how many fail, at what age?" etc., but to get at an understanding of what happens in good and in bad processes".

Est-il même nécessaire que la didactique des mathématiques ressemble un jour à la physique d'aujourd'hui, comme semble le souhaiter Koehler pour la psychologie? On peut aussi penser que le "quantitatif" n'est pas nécessaire dans ce domaine et qu'il relève d'une sorte de "tyrannie du mathématisable". Nous réserverons notre avis sur ce sujet, estimant que, de ce point de vue, les études didactiques doivent être considérées cas par cas.

De toute façon, le quantitatif n'a pour effet que de rendre des hypothèses plus plausibles ou de préciser la fréquence de leurs manifestations, non pas de les "vérifier" : "Quand on pense *vérifier* les lois scientifiques, l'idée qui prévaut est que, partant d'une hypothèse ou d'un modèle, on fait des expériences pour voir si cette loi est vraie. La première difficulté de cette manière de voir est que, indépendamment du fait que le terme "vrai" est mal défini, on n'est jamais sûr qu'une expérience supplémentaire ne pourrait pas donner un autre résultat que la précédente. [...] Les modèles - comme la loi de Newton - sont toujours considérés comme hypothétiques et sont utilisés *aussi longtemps qu'ils "nous" satisfont*. [...] Dans cette optique, on ne se pose plus la question de savoir si les modèles sont "vrais", mais on s'intéresse simplement à leur *efficacité* dans un cadre donné [...]" (G. Fourez, 1988).

Nous pensons aussi qu'il est important de préciser par des exemples, au sein de chaque recherche en didactique, les concepts grâce auxquels on analyse les apprentissages, éventuellement de créer d'autres concepts analogues. Comme P. Veyne (1979) l'a dit pour l'histoire, on peut croire que le progrès des recherches sur les apprentissages se mesure surtout à l'amélioration qualitative et quantitative du lot des concepts (ce que Veyne appelle une **topique**) qui servent à interroger les apprentissages.

3. Sources.

Nos sources peuvent être classées en quatre catégories.

1) Des recherches qui s'inspirent de concepts analogues à ceux qui nous ont permis de structurer notre observation, mais qui étudient d'autres apprentissages. Parmi elles, citons e.a. les recherches sur les "raisonnements spontanés" en physique : (Viennot, 1979; J. L. Closset, 1983), ainsi qu'une analyse épistémologique et didactique des nombres décimaux (G. Brousseau, 1981).

2) Des recherches sur des apprentissages relatifs aux aires et aux volumes, mais n'impliquant pas de "processus infinis". Nous citerons ces recherches et décrirons partiellement leur contenu au moment où nous situerons la nôtre par rapport à elles, au chapitre VII.

3) Des recherches spécifiques à l'enseignement de l'analyse. Décrivons-les ici sommairement. Nous reviendrons plus longuement à certaines d'entres elles dans la troisième partie, pour faire des rapprochements avec nos propres résultats et interprétations.

- D.O. Tall et R.L.E. Schwartzenberger (1978) étudient les conflits cognitifs entre, d'une part, les notions de limite et de nombre réel et, d'autre part, les représentations de ces notions qui résultent du langage ou de la manière de les introduire.

- D.O. Tall et S. Vinner (1981) décrivent certains aspects des concepts-images "limite" et "continuité".

- A. Robert (1982) relève plusieurs types de "modèles exprimés" de la notion de convergence des suites numériques par des étudiants de première année d'études mathématiques à l'université. Elle étudie les corrélations statistiques entre ces modèles et certaines erreurs dans les exercices sur les suites.

- B. Cornu (1983) montre que l'apprentissage du concept numérique de limite peut être contaminé par le sens octroyé, dans le langage usuel, au mot "limite" et à d'autres expressions connexes. Il met en évidence que les élèves peuvent être en butte à certains obstacles observés dans l'histoire. A. Sierpinska (1981-82) propose les questionnaires de B. Cornu à des élèves polonais.

- J. Robinet (1983) se place du côté de l'ingénierie didactique [la production d'interventions didactiques, sur base de recherches fondamentales] en cherchant, à propos du concept de limite, à "construire des situations didactiques mettant en oeuvre des résultats généraux sur les processus d'apprentissage et les résultats propres à la didactique des mathématiques".

- A. Sierpinska (1985) dresse une liste d'obstacles épistémologiques potentiels, relatifs à la notion topologique de limite. Elle observe l'apparition de l'un ou l'autre de ces obstacles chez quatre élèves qui débattent de la notion de tangente.

- C. Hauchart et N. Rouche (1987) étudient la genèse des concepts de suite et de limite de suite lorsque ceux-ci mûrissent sur des "chantiers de problèmes". Ils montrent comment le contexte de ces derniers peut influencer le développement de ces connaissances.

- Ch. D'Halluin et D. Poisson (1988) font, dans le cadre d'une formation d'adultes, de l'ingénierie didactique en proposant "une stratégie d'enseignement des mathématiques : la mathématisation de situations intégrant l'informatique comme outil et mode de pensée". Ils proposent aussi une monographie de l'enseignement de l'analyse ne faisant plus de l'écriture algébrique le support dominant, mais intégrant trois supports : le tableau, le graphique, la formule. En particulier, ils aboutissent à une version "empiriste" du théorème fondamental : *la hauteur est la "surface" de la pente; la hauteur est la pente de la surface*, en partant de quatre activités à la fois graphiques et numériques :
- connaissant le profil d'une route (la hauteur), étudier la pente;
- connaissant le profil, étudier la surface (délimitée par le profil) pour évaluer les remblais;
- connaissant la pente, retrouver le profil;

- connaissant la surface, retrouver le profil.

Nous n'avons pas trouvé d'études dont l'objet était l'apprentissage des concepts de limite et de dérivée sur fond d'aires et de volumes. A notre meilleur jugement, c'est là l'originalité de notre travail dont l'apport est décrit dans la conclusion.

4) Des sources historiques. Mis à part les textes d'Archimède mentionnés dans ce travail, les oeuvres de B. Cavalieri et les Principia de Newton, nous n'avons pas eu recours aux sources historiques elles-mêmes mais bien à des historiens. Trois arguments justifient cette façon de faire. D'abord les travaux d'historiens existent : pourquoi ne pas s'en servir? Ensuite, tout le monde n'a pas toujours accès aux sources elles-mêmes, d'autant que la plupart de celles concernées ici datent d'avant le XVII^{e} siècle. Enfin, cette recherche n'est pas une recherche historique : c'est une recherche en didactique des mathématiques; son originalité se situe donc en dehors de l'histoire, ce qui justifie une certaine pratique "de seconde main" de celle-ci.

Néanmoins, certaines précautions ont été prises : nous avons lu la relation de chaque fait chez plusieurs historiens pour déceler les éventuelles divergences de l'un à l'autre et les éventuelles contradictions chez l'un ou l'autre, que nous avons mentionnées le cas échéant.

Parmi les principaux historiens cités : C. Boyer (1949), F. De Gandt (1982, 1983), M. Kline (1972); les autres seront mentionnés au fur et à mesure.

Deuxième Partie.

RECIT DES EXPERIENCES REALISEES EN CLASSE.

Cette deuxième partie contient une suite de problèmes relatifs aux intégrales et aux dérivées et débouchant sur le théorème fondamental du calcul intégral.

Ces problèmes sont groupés en sous-ensembles significatifs qui correspondent aux chapitres II à VI.
-Les problèmes du chapitre II font apparaître la limitation des procédures utilisées classiquement en géométrie pour déterminer des aires et des volumes et, ainsi, l'utilité de recourir à des "découpages infinis", en l'occurrence les principes de Cavalieri.
-Les problèmes du chapitre III mettent en évidence que les calculs d'"aires sous une courbe" standardisent les calculs d'aires et de volumes réductibles à l'intégrale d'une fonction d'une variable. Ils montrent aussi l'impossibilité de calculer toutes les "aires sous une courbe" à l'aide des principes de Cavalieri, d'où la nécessité de recourir au calcul des limites.
-Les problèmes du chapitre IV mettent en garde contre les erreurs auxquelles conduisent les découpages des surfaces en segments et des solides en surfaces, si l'on ne s'impose pas des règles précises de découpage.
-Les problèmes du chapitre V mobilisent des calculs de taux de variation instantanés divers.
-Les problèmes du chapitre VI débouchent sur la réciprocité des processus d'intégration et de dérivation.

Chaque chapitre est divisé en deux. D'abord **quelques référents mathématiques et/ou historiques** qui cadrent les problèmes, leurs solutions et leurs enjeux pédagogiques. Il s'agit d'un bref aperçu soit des théories mathématiques en jeu dans les problèmes proposés aux élèves, soit de quelques rappels historiques relatifs aux découvertes concernées par ces mêmes problèmes. Ensuite une rubrique intitulée **le travail en classe**, où sont repris, pour chaque problème, son énoncé (présenté dans un cadre), les interventions respectives du professeur et des élèves dans leur progression vers la solution. Nous complétons cette description avec des réactions d'élèves recueillies en dehors du cadre strict de ces problèmes chaque fois qu'un rapprochement avec les résultats de l'expérience proprement dite s'avère éclairant.

Cette deuxième partie est une mise à plat d'un ensemble de "faits" d'ordres divers dont nous ferons usage dans l'analyse épistémologique. Autant que faire se peut, nous nous sommes interdit toute interprétation dans cette partie. Ainsi, nous n'approfondissons pas ici les liens entre "les référents mathématiques et historiques" et le "travail en classe" sur lesquels nous reviendrons ultérieurement. Bien sûr; nous sommes consciente que le choix même des faits retenus suppose déjà une interprétation : "Une observation, c'est une *interprétation* : c'est intégrer une certaine vision dans la représentation théorique que l'on se fait de la réalité" (G. Fourez, 1988), ce qui remet en cause le concept même de "fait".

Etant donné certaines contraintes institutionnelles (contenu et agencement des programmes, temps accordé par chaque professeur à cette expérimentation...), nous n'avons pas pu proposer l'ensemble des problèmes à une même classe. Qui plus est, le travail s'est construit de manière progressive. Tous les énoncés n'étaient pas présents au départ et a fortiori certainement pas dans leur forme initiale. Il y a eu de nombreux ajustements en cours de route. Voici, dans les grandes lignes, comment les différents problèmes ont été répartis suivant les classes:
- les problèmes des chapitres II, III, IV et VI ont été travaillés par trois classes de "6ème Math. fortes" (dernière année de l'enseignement secondaire, ±17 ans, 7 heures de math. par semaine);
- les problèmes des chapitres II, III, IV et V, par une classe de "5ème Math. moyennes" (avant-dernière année du secondaire, ±16 ans, 5 heures de math. par semaine);
- les problèmes des chapitres II, III et V, par une autre classe de "5ème Math. moyennes";
- les problèmes des chapitres II et III, ainsi que certains problèmes du chapitre IV, par deux classes de "5ème Math. fortes"(avant-dernière année du secondaire, ±16 ans, 7 heures de math. par semaine);
- les problèmes du chapitre V, ainsi que le problème 2.7. du chapitre III, par deux autres classes de "5ème Math. fortes".

Pour les classes de 5ème concernées, ces problèmes constituaient une toute première approche des processus infinis. Les classes de 6ème avaient, elles, déjà bénéficié de l'enseignement d'analyse prévu pour la 5ème, dont voici les grandes lignes:
- inventaire des propriétés de **R**,
- suites, notamment suites arithmétiques et suites géométriques,
- continuité d'une fonction,
- limites d'une fonction, asymptotes,
- dérivées et calcul de dérivées,
- applications des dérivées aux graphes de fonctions,
- problèmes d'extrémés.

Par ailleurs, nous avons interrogé, à propos du théorème fondamental du calcul intégral et de questions connexes, une vingtaine d'élèves en fin de 6ème et une quinzaine d'étudiants de première année d'université en mathématiques. Quelques-unes des questions posées et les réactions recueillies sont reprises aux sections VI.2.11. et VI.2.12. Ces élèves et ces étudiants avaient reçu, outre le programme d'analyse enseigné en 5ème, celui de 6ème qui reprend:
- intégrale définie d'une fonction continue sur un intervalle [a, b],
- primitives et calcul de primitives,
- théorème fondamental du calcul intégral,
- applications de l'intégrale : aires planes, volumes et travail d'une force.

Ces publics hétérogènes ont réagi, grosso modo, de la même manière aux divers problèmes et questions. Mais, dans ce récit, nous préciserons de quel public émane telle ou telle réaction chaque fois que cela pourra être significatif.

Les citations des élèves sont en petit caractère italique. Nos propres incises à l'intérieur de ces citations sont en petit caractère droit et entre crochets.

Chapitre II

Des surfaces et des solides débités en lamelles, très, très fines.

1. Quelques référents mathématiques et historiques.

On opposera dans ce chapitre deux grandes méthodes de détermination des aires et des volumes : d'une part une méthode que nous appelerons **méthode du puzzle**, d'autre part la **méthode dite de Cavalieri.**

1.1. La méthode du puzzle.

Adoptons momentanément un point de vue quelque peu naïf, entre autres en supposant réglé le problème de la définition de l'aire. On trouvera des données plus théoriques à la section 1.3.

Les trois situations décrites ci-dessous illustrent ce que nous désignons par *méthode du puzzle*.

1) Le parallélogramme et le rectangle de la Fig.1 ont même aire, car ils sont composés de figures isométriques. En général, deux figures composées de pièces isométriques ont même aire.

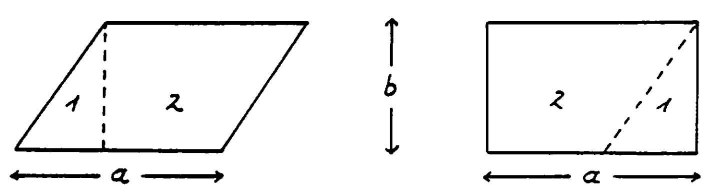


Fig.1

2) L'aire d'un triangle quelconque vaut la moitié de celle d'un parallélogramme de même base et de même hauteur (cfr. Fig.2). Plus généralement, si une figure est composée de n figures isométriques, l'aire de chaque figure composante vaut celle de la figure totale divisée par n.

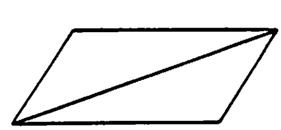


Fig. 2

3) Le théorème de Pythagore peut être démontré sur base des dessins de la Fig.3 grâce au principe suivant : si on peut compléter deux figures en figures isométriques par adjonction de pièces isométriques, les deux figures de départ ont même aire.

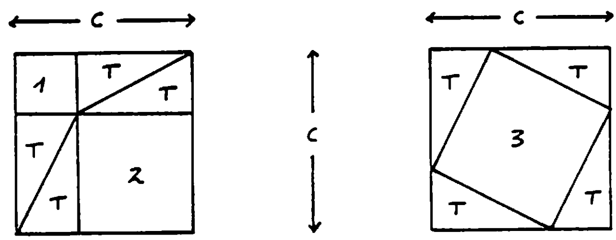


Fig. 3

Un point commun à chacun de ces trois cas : une ou plusieurs figures sont découpées en pièces de puzzle et c'est la manière de structurer ce(s) puzzle(s) qui donne la clé du problème.

Nous désignerons par la même locution *méthode du puzzle* toute procédure analogue appliquée aux volumes.

1.2. Les principes de Cavalieri.

Les principes de Cavalieri fournissent une autre façon de comparer soit des volumes, soit des aires. Le principe relatif aux volumes est résumé par J. Dhombres (1978) en ces termes : "Si les sections par des plans parallèles de deux solides sont toujours dans un même rapport, ainsi en est-il des volumes des solides". Et le principe relatif aux aires est énoncé par Cavalieri comme suit : "Les figures planes, placées entre deux parallèles dans lesquelles des lignes quelconques, parallèles aux premières découpent des segments égaux sont égales" (traduit par J. Dhombres, 1978). Ce deuxième principe s'étend aisément au cas de segments proportionnels. Cavalieri appelle indivisibles soit ces sections planes dans le cas des solides, soit ces segments dans le cas des surfaces.

Ces principes recourent, entre leurs prémisses et leur conclusion, à des grandeurs *hétérogènes* : d'une égalité ou d'une proportionnalité entre les *aires* des sections planes des solides, Cavalieri conclut à l'égalité ou à la proportionnalité de leurs *volumes;* de même, il transpose aux *aires* de deux surfaces une égalité ou une proportionnalité vérifiée par les *longueurs* de leurs indivisibles. En cela, ces principes se distinguent de la méthode du puzzle où les pièces qui composent un solide sont elles-mêmes des solides et où les surfaces sont décomposées en surfaces.

D'autres mathématiciens précurseurs et contemporains de Cavalieri ont fait un large usage de tels découpages des grandeurs : Archimède (trad. Ch. Mugler, 1971) y a recours dans *la méthode* pour conjecturer des volumes, mais non pour les démontrer; Democrite aurait découvert le premier le volume de la pyramide en se basant, selon C. H. Edwards (1979), sur une décomposition de celle-ci en sections planes parallèles à sa base. Cependant Cavalieri a eu le mérite de systématiser l'emploi des indivisibles au moyen des principes précités ce qui fait qu'on lui en attribue souvent la paternité.

1.3. Equidécomposabilité, équicomplémentabilité, des polygones et des polyèdres.

La méthode du puzzle transparaît en filigrane des axiomes qu'Euclide formule en vue de préciser le concept de grandeur. Ces axiomes fournissent deux critères pour reconnaître **l'équivalence de figures planes** c'est-à-dire l'égalité de leurs aires :
1) Deux figures formées de parties congruentes (isométriques) sont équivalentes.
2) Deux figures obtenues en ôtant des parties congruentes de figures congruentes sont équivalentes.

De ces deux critères, on peut ne retenir que le premier pour établir une théorie axiomatique des aires des polygones. [Des polygones simples au sens de Hilbert (rééd. 1971) : un polygone est simple si ses sommets sont tous distincts, si aucun d'eux n'appartient à un côté (les côtés étant définis comme des segments ouverts) et si deux côtés non adjacents n'ont aucun point commun]. Dans cette théorie, on entend par *équivalence des surfaces* une "*égalité par addition* de parties congruentes", on postule l'aire soit du triangle, soit du rectangle et on définit l'aire d'un polygone comme la somme des aires de triangles qui le partitionnent (cfr. F. Enriques, 1911).

Les axiomes de cette théorie sont les axiomes d'incidence, d'ordre et de congruence de la géométrie plane et les axiomes des parallèles, tous tels qu'énoncés par Hilbert (rééd. 1971). On doit leur adjoindre l'axiome d'Archimède pour la raison suivante. La définition de l'aire d'un polygone n'a de sens que si :
- un polygone peut toujours être partitionné en un nombre fini de triangles;
- le calcul de l'aire ne dépend pas de la triangulation choisie;

- deux polygones **équidécomposables**, c'est-à-dire décomposables en un nombre fini de triangles congruents deux par deux ont même aire; inversement deux polygones de même aire sont équidécomposables.
On ne peut démontrer cette dernière propriété - laquelle assure la cohérence entre la définition de l'aire d'un polygone et celle de l'équivalence des surfaces - sans faire appel à l'axiome d'Archimède. Le cas du parallélogramme est, à cet égard, éclairant. Les Fig.4 et 5 montrent comment établir l'équidécomposabilité de deux parallélogrammes de même base et de même hauteur. La seconde suppose l'existence d'un naturel n tel que na>b.

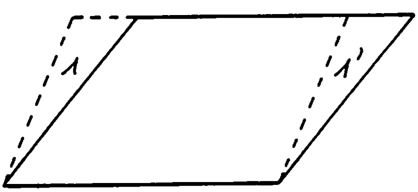


Fig. 4

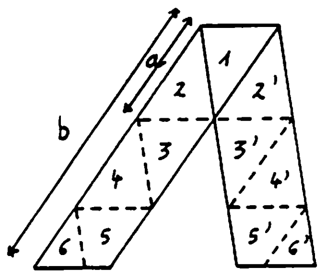


Fig. 5

D. Hilbert (Ib.) développe, lui, une théorie des aires des polygones sans se servir de l'axiome d'Archimède. A cette fin, il complète le concept d'équidécomposabilité par celui d'équicomplémentabilité sous-jacent à la Fig.3: deux polygones sont **équicomplémentables** lorsqu'on peut les compléter l'un et l'autre par un même nombre fini de polygones équidécomposables deux à deux pour former des polygones équidécomposables. Ainsi les deux parallélogrammes de la Fig.5 sont équicomplémentables. En effet le parallélogramme GCFA (Fig.6) est obtenu soit en adjoignant au

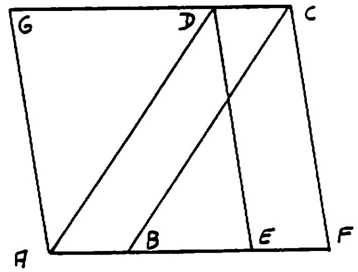


Fig. 6

parallélogramme DCBA les triangles GDA et BCF, soit en adjoignant au parallélogramme DCFE le même triangle GDA et le triangle ADE isométrique au triangle BCF. Hilbert démontre que deux polygones équicomplémentables ont même aire et que deux polygones de même aire sont équicomplémentables, ramenant ainsi l'équivalence des surfaces planes au critère 2) ci-dessus : deux figures obtenues en ôtant des parties congruentes de figures congruentes sont équivalentes.

Peut-on développer une théorie des volumes des polyèdres analogue à la théorie des aires des polygones mobilisant l'axiome d'Archimède ou analogue à celle de Hilbert ? La réponse est non dans les deux cas, et provient du fait que deux tétraèdes de même base et de même hauteur ne sont pas forcément ni équi-décomposables, ni équicomplémentables (c'est-à-dire qu'on peut trouver deux tétraèdres de même volume impossibles à décomposer en un nombre fini de solides congruents et impossibles à compléter en solides congruents en leur adjoignant des parties congruentes deux à deux.) Ce fait a été démontré par M. Dehn (1902). Hilbert signale aussi que ce fait avait été conjecturé par Gauss.

C'est pourquoi on ne peut déterminer - comme nous le détaillerons plus loin - le volume de la pyramide par la seule méthode du puzzle. Il faudra pour ce faire avoir recours soit aux principes de Cavalieri, soit, comme Euclide, à la méthode d'exhaustion, soit encore au calcul intégral. Nous décrirons la méthode d'exhaustion ultérieurement en même temps que nous étendrons notre étude aux aires **curvilignes** (par opposition à aires **rectilignes** : aires de surfaces planes délimitées, fût-ce partiellement, par des courbes) et aux aires et volumes des corps ronds.

2. Le travail en classe.

L'objet de la séquence didactique est décrit aux élèves en ces termes : *En abordant ici le problème des évaluations d'aires et de volumes, nous attaquons un des grands thèmes traditionnels de la géométrie. Mais il nous conduira rapidement à l'analyse, cette discipline qu'on peut appeler - en un sens encore un peu vague - le calcul de l'infini, et dont l'histoire remonte à Eudoxe au Ve siècle av. J.-C., passe par Archimède au IIIe siècle av. J.-C. et se constitue de siècle en siècle comme une branche importante des mathématiques.*

Dans un premier temps, nous nous contenterons de démontrer les formules donnant l'aire du parallélogramme et celle de l'ellipse, ainsi que les formules exprimant les volumes du parallélipipède quelconque, du prisme, de la pyramide, du cylindre, du cône, de la sphère et du paraboloïde. Certaines de ces formules vous sont familières depuis longtemps. Si nous les démontrons ou les redémontrons ici, c'est pour dégager des clés qui nous permettront d'aborder, par la suite, des aires et des volumes plus compliqués. Nous postulerons que l'aire d'un rectangle est le produit de ses côtés et que le volume d'un parallélipipéde rectangle vaut le produit de ses arêtes [Nous admettrons l'abus de langage qui consiste à dire côté pour longueur de côté, et d'autres semblables, qui n'entraînent aucune confusion].

2.1. Est-ce-que c'est pareil quand c'est penché?

a. On connaît la formule de l'aire du rectangle. Certains manuels démontrent la formule de l'aire du parallélogramme par une transformation de celui-ci en un rectangle (Fig.7) : on déplace un triangle approprié d'un côté à l'autre de la figure. Et si le parallélogramme se présente comme sur la Fig.8 ?

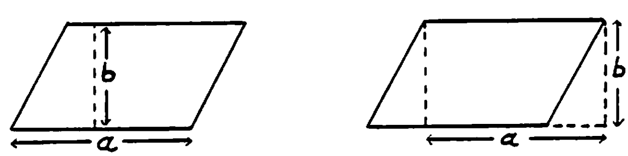


Fig.7

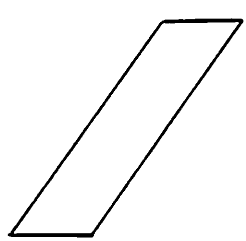


Fig.8

b. On connaît la formule du volume du parallélipipède rectangle. Trouvez celle qui donne le volume d'un parallélipipède oblique quelconque et justifiez-la.

c. Et que faire pour les prismes?

2.1.1. Une certaine peine à démontrer des résultats familiers.

Certains élèves des cours moyens de mathématique (5 heures/semaine) éprouvent des difficultés à entrer dans la problématique proposée par le professeur, à savoir : redémontrer des formules d'aires et de volumes connues pour dégager des clés qui permettront d'aborder, par la suite, des aires et des volumes plus compliqués. Ils ne parviennent pas à distinguer ce qui est considéré comme acquis de ce qui ne l'est pas. Cette difficulté se manifeste le plus souvent par des réactions telles que :

[1] Le parallélipipède oblique a même volume que le parallélipipède droit puisqu'ils ont la même base et la même hauteur et que le volume vaut base fois hauteur.

2.1.2. Un recours exclusif aux puzzles.

On peut comparer le parallélogramme de la Fig.8 à un rectangle de base à et de hauteur b (Fig.9) en les décomposant l'un et l'autre, à l'instar de Cavalieri, en segments parallèles à leurs bases. Aucun élève n'évoque spontanément cette procédure, pourtant si efficace.

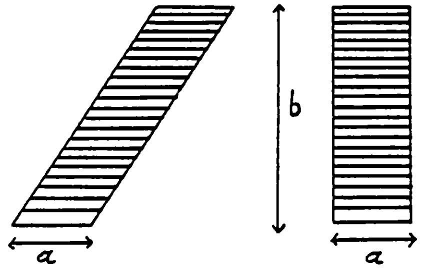


Fig.9

Dans un premier temps, la plupart des élèves proposent de regarder ce parallélogramme sous un autre angle, comme suggéré à la Fig.10, afin de se ramener au cas précédent. Nous leur précisons alors que ce point de vue impose de choisir a' comme base et que nous voulons démontrer que l'aire de ce parallélogramme est toujours donnée par le produit de sa base par sa hauteur, quel que soit le côté qu'on choisit pour base. Avertis de cette difficulté insoupçonnée, quelques élèves démontrent que ab = a'b' en exploitant la similitude des triangles ABC et ADE (Fig.11).

Les autres proposent des procédures qui relèvent tantôt de l'équidécomposabilité, tantôt de l'équicomplémentabilité:

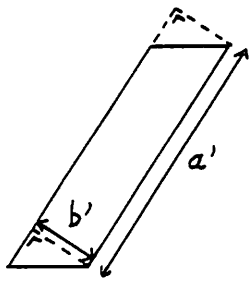


Fig.10

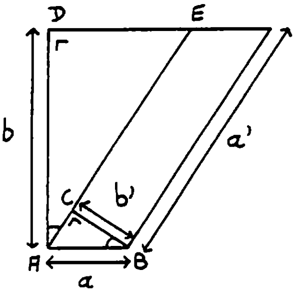


Fig.11

1) quelques-uns imaginent des puzzles complexes tel celui de la Fig.12;

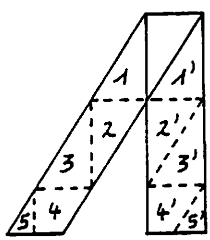


Fig.12

2) d'autres partagent le parallélogramme, comme indiqué à la Fig.13, en deux morceaux qu'ils juxtaposent comme sur la Fig.14 de manière à obtenir un parallélogramme plus large que haut. Ils trouvent par là une aire égale à 2a.b/2 ou ab. Au doute exprimé par le professeur sur la généralité d'un tel processus, ils rétorquent

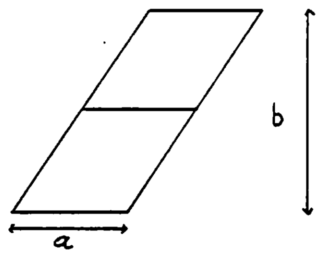


Fig.13

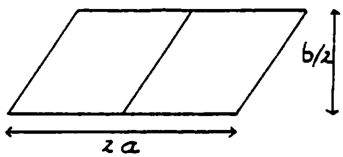


Fig.14

qu'on peut répéter l'opération aussi souvent que nécessaire, soit en coupant le parallélogramme en 3,4,5 ... morceaux de même hauteur, soit en dédoublant de la même manière le nouveau parallélogramme obtenu et ainsi de suite ...;

3) d'autres encore procèdent de proche en proche en considérant des parallélogrammes intermédiaires (Fig.15);

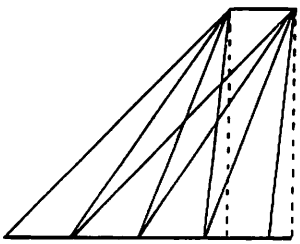


Fig.15

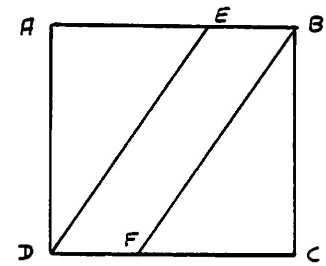


Fig.16

4) enfin, quelques rares élèves complètent le parallélogramme en un rectangle ABCD (Fig.16), à la manière de Hilbert et expriment, à leur façon, que le parallélogramme et le rectangle AEFD sont équicomplémentables.

2.1.3. Du parallélipipède droit au parallélipipède oblique en passant par deux parallélipipèdes intermédiaires.

Pour répondre à la question b de la fiche 2.1., la plupart des élèves n'envisagent a priori que le seul cas particulier d'un parallélipipède oblique possédant deux paires de faces opposées rectangulaires, auquel cas ils perçoivent aisément le prisme à déplacer pour obtenir un parallélipipède droit (Fig.17). Ils prennent ensuite conscience - soit en conversant entre eux, soit en étant informés par le professeur - qu'en comparant à un parallélipipède droit, un autre dont aucune face n'est nécessairement rectangulaire, on ne perçoit pas d'un seul coup d'oeil la forme de la partie du parallélipipède oblique qui déborde ce parallélipipède droit, et a fortiori le puzzle en lequel on peut décomposer l'un pour refaire l'autre. Voici quelques répliques qui révèlent cette difficulté :

[2] - *On remet un prisme d'un côté à l'autre.* [Il fait un dessin analogue à celui de la Fig.17]
- *Mais s'il y a quatre parallélogrammes et deux carrés* [comme faces]*en le faisant bouger dans la diagonale...*
- *On ôte une partie là et on la remet là.*
- *Oui mais c'est incliné des deux côtés à la fois.* [Il fait un dessin comme sur la Fig.18].
- *Il faut vachement charcuter.*
- *Ah mais il faut faire deux coupes alors.*
- *On dévie dans deux sens : d'abord comme ça, puis autrement.*
- *C'est la même chose avec une coupe en plus.*

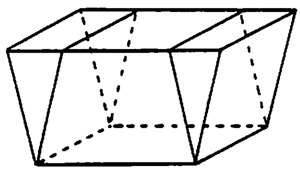


Fig.17

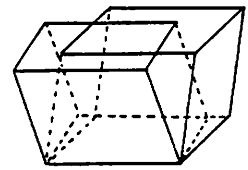


Fig.18

Progressivement, les élèves en arrivent à considérer deux parallélipipèdes intermédiaires : ils comparent d'abord le parallélipipède quelconque à un parallélipipède de même base et de même hauteur possédant une paire de faces opposées rectangulaires; puis ce dernier à un autre àyant deux paires de telles faces, et enfin cet autre au parallélipipède rectangle. Le passage d'un parallélipipède au suivant est essentiellement réductible au passage, dans le plan, d'un parallélogramme à un rectangle, ce que les élèves réalisent bien. Mais ils ne réévoquent pas spontanément les difficultés rencontrées à propos du parallélogramme de la Fig.8, qui se retrouvent immanquablement ici *mutatis mutandis*.

2.1.4. Un matériel à la fois suggestif et trompeur.

Certains élèves disposent de parallélipipèdes articulés, d'autres non. Les premiers en arrivent très vite à envisager les parallélipipèdes intermédiaires : ils redressent le parallélipipède quelconque articulé dans un sens, puis dans l'autre ... de façon à rendre rectangulaires deux faces opposées, puis deux autres ... jusqu'au moment où le parallélipipède articulé est rectangle. Ce faisant, ils ne sont pas toujours conscients de modifier le volume du solide articulé : certains ne s'en aperçoivent que lorsque le professeur attire leur attention sur le fait que chacune des transformations du solide change soit sa hauteur, soit l'aire de sa base et encore éprouvent-ils le besoin de se référer à la formule du volume pour s'en convaincre.

Les élèves qui ne disposent pas de parallélipipèdes articulés pensent aussi aux deux parallélipipèdes intermédiaires, un peu plus lentement peut-être, souvent pour avoir considéré d'emblée un cas particulier de parallélipipède oblique. Certains d'entre eux commentent le remplacement d'un parallélipipède par un autre par des gestes qui montrent qu'ils identifient spontanément ce remplacement à la manipulation d'un tel matériel articulé.

2.1.5. Le cas du prisme.

Le cas du prisme est réglé, selon les cas, avec ou sans l'aide du professeur. Voici deux faits desquels découle une manière de déduire le volume du prisme de celui du parallélipipède : un prisme droit ou oblique, est toujours composé d'un nombre fini de prismes à base triangulaire ; à tout prisme à base triangulaire on peut en accoler un autre isométrique au premier pour former un parallélipipède.

2.1.6. Des puzzles exclusivement tant pour les solides que pour les surfaces.

Aucun élève ne songe à comparer le parallélipipède oblique au parallélipipède droit ou le prisme oblique au prisme droit en les débitant en tranches parallèles à la manière de Cavalieri. Le professeur se garde d'évoquer un tel découpage avant de donner la fiche suivante.

2.2. Le prisme oblique en 1743.

Vous trouverez ci-après un extrait des "Eléments de géométrie" publiés en 1743 par Alexis-Claude Clairaut (1713-1765). Ce mathématicien français, connu du grand public surtout pour ses précisions relatives au retour de la comète de Halley en 1759, voulait enseigner la géométrie en s'appuyant le plus possible sur des évidences familières. Ci-après, il emprunte son argumentation au mathématicien italien Bonaventura Cavalieri (1598-1647).

Lisez ce texte et comparez la démarche de Clairaut à la vôtre.

"Formation des prismes obliques.

On connaît les prismes obliques formés par une base a b c k i, qui se meut parallèlement à elle-même, et de telle façon que ses angles suivent des lignes parallèles ag, bh, cd, etc., qui s'élèvent hors du plan de la base, et qui ne lui sont point perpendiculaires.

Les prismes obliques sont égaux aux prismes droits lorsqu'ils ont même base et même hauteur.

L'analogie qu'il y a entre cette formation et la formation des prismes droits, dont nous avons parlé, [...] donne facilement la mesure de la solidité [Le terme solidité signifie volume (d'un solide).(Note ajoutée au texte de Clairaut)] *des prismes obliques ; car si on imagine à côté d'un prisme oblique a b c d e j g h i k (Fig.19), un prisme droit ABCDEFGHIK (Fig.20), qui ait la même base, et que ces deux prismes soient renfermés entre deux plans parallèles, on verra que la solidité de ces deux corps sera absolument la même.*

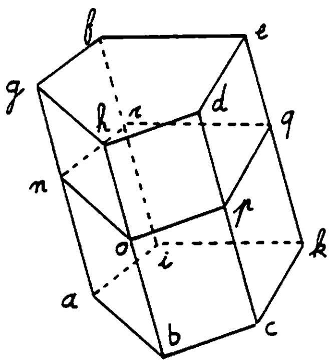


Fig.19

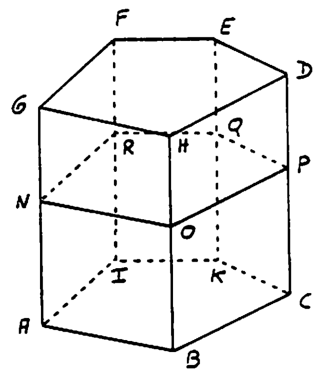


Fig.20

Car, si par un point quelconque P de la hauteur, on fait passer un plan parallèle à la base, les sections NOPQR, n o p q r, que ce plan formera dans chacun des deux prismes, pourront être regardées comme les bases ABCKI, abcki, arrivées en NOPQR, nopqr, par le mouvement qui forme ces deux prismes ; et ainsi ces deux sections seront des polygones égaux.

Or si toutes les tranches imaginables qu'on peut former dans ces deux prismes par de mêmes plans coupants sont égales, il faudra que les assemblages de ces tranches, c'est-à-dire, les prismes, soient égaux aussi. On énonce ordinairement ainsi cette proposition : les prismes obliques sont égaux aux prismes droits lorsqu'ils ont même base et même hauteur. On appelle la hauteur du prisme la perpendiculaire abaissée du plan supérieur sur l'intérieur, ou sur son prolongement".

Après lecture du texte de Clairaut, les élèves sont invités à le commenter en groupes ou à répondre individuellement aux questions suivantes :

- qu'entend Clairaut par le mot tranche ?
- en quoi son argumentation se distingue-t-elle des raisonnements avancés pour résoudre la fiche 2.1.
- comment appréciez-vous cette argumentation?

Les réponses des élèves ne sont pas reprises dans l'ordre des questions afin de mieux faire apparaître comment elles s'articulent entre elles.

2.2.1. Le choc du découpage "à la Cavalieri".

Ce premier contact avec un découpage de solides en indivisibles crée un choc, un débat riche et vivant, non exempt de contradictions comme nous allons le voir .

2.2.2. La procédure de Clairaut rejoint une intuition ancrée dans la tête des élèves.

La plupart des élèves estiment l'argumentation de Clairaut fort convainquante: elle rejoint, disent-ils, une intuition qui leur est propre:

> *[3] La démonstration est géniale, car elle est très facile à comprendre.*
> *[4] Génial !!! Parce que non rigoureux et pourtant si beau! Et si logique, si évident que l'on ne peut douter qu'elle soit vraie...*
> *[5] [...] La clarté et l'évidence de son raisonnement prouvent que c'est certain.*

Cette intuition se manifeste spontanément, en quelques rares occasions:

> *[6] [...] J'avais pensé au départ à cette méthode lorsque le professeur nous expliquait la méthode du puzzle. Je trouve la méthode évidente et très facile à comprendre.*
> *[7] Avant de lire ces démonstrations, je me suis demandé de quelle manière je pourrais le démontrer et j'en étais arrivé à la même démonstration.*

La méthode de Clairaut justifie, aux yeux de certains élèves, l'expression du volume du prisme comme produit de sa base par sa hauteur, expression qu'elle évoque quasi instantanément :

> *[8] Je crois que c'est la méthode la plus intuitive que l'on puisse imaginer, car j'ai toujours* [terme souligné par l'élève] *imaginé un volume comme une superposition de surfaces. Par l'étude des deux premières dimensions, on peut trouver la troisième ou un volume est une surface multipliée par une hauteur.*
> *[9]* [Clairaut fait] *un découpage horizontal du prisme pour pouvoir ~~ajouter~~* [terme biffé par l'élève] *multiplier des surfaces par une hauteur.* [Nous avons fait] *un découpage vertical du prisme* [en prismes triangulaires] *pour pouvoir ajouter des volumes.*

[10] Je me suis toujours imaginé le volume d'un solide par une succession de parties d'un plan : quand on dit base fois hauteur, c'est ce qu'on veut dire.

L'un des élèves suggére que l'intuition d'un solide composé de surfaces - intuition qu'il partage avec Clairaut - a été induite par l'instituteur qui lui a appris la formule du volume du prisme :

[11] Ce genre de démonstration est abordable par tous, "matheux" ou non, puisqu'en primaire, où tout le monde avait le même cours, on nous expliquait le volume comme une superposition de tranches (notamment avec des petites lattes, des petits cubes en bois et de différentes couleurs) et c'est sans doute pour cette raison que cette méthode de démonstration m'est venue directement à l'esprit...

Quelques élèves d'une classe expriment toutefois des réticences quant à la lisibilité du texte de Clairaut :

[12] Je trouve que la démonstration que nous avons faite au cours [les solutions du problème 2.1.] *est plus simple, car elle est plus courte et l'on n'a pas besoin de lettres et donc on a moins de chances de se tromper ou de s'embrouiller.*
[13] Je pense que le raisonnement de Clairaut, quoiqu'enoncé en termes compliqués, est en fait assez simple et assez logique. Il y avait peut-être moyen de l'exprimer plus simplement mais il faut se rappeler qu'il date de 1743 et qu'en ce temps là, plus qu'aujourd'hui même si c'est souvent encore le cas, les lettrés et les savants étaient tenus d'écrire dans un certain style qui peut paraître quelque peu compliqué à Monsieur-tout-le-monde.

2.2.3. La procédure de Clairaut perçue comme non rigoureuse.

Si le pouvoir évocateur de la procédure de Clairaut est apprécié par les élèves, son statut de démonstration et sa valeur démonstrative ne sont pas reconnus, et sont même parfois niés, tantôt parce que sa démarche est exprimée dans le langage courant, tantôt parce qu'elle repose trop sur la perception des objets géométriques :

[14] La démonstration de Clairaut est plus simple mais aussi plus subjective.
[15] L'intuition, c'est beau, mais de là à tout faire reposer dessus !
[16] On a l'impression que c'est une démonstration sans en être une.
[17] Il ne démontre [terme souligné par l'élève] *pas réellement ce qu'on demande.*
[18] La démonstration est intéressante, mais pas tellement rigoureuse, peut être parce qu'il s'agit d'un texte français continu, et non de courtes phrases mathématiques.

[19] C'est une méthode très visuelle qui se base plus sur une certaine intuition logique que sur des formules.

Quelques élèves relativisent ce jugement en se référant aux normes de démonstration propres aux différentes époques de l'histoire des mathématiques :

[20] La méthode de Clairaut est plausible mais elle paraît un peu simple. Cela est purement géométrique. Mais sa méthode reste applicable à n'importe quel prisme. En tenant compte de son époque, cela fut certainement une bonne méthode.
[21] [...] cette méthode de démonstration m'est venue directement à l'esprit. Mais je n'aurais pas osé la mettre par écrit car elle ne me semble pas rigoureuse ou du moins pas conforme aux méthodes habituelles.

2.2.4. La signification du mot "tranche" est sujette à caution.

Les élèves ne perçoivent pas tous de la même manière - loin s'en faut - la signification attribuée par Clairaut au mot *tranche* ;
- certains y voient une surface :

[22] Chaque découpe n'a en fait que l'épaisseur d'un point .
[23] Une tranche signifie un plan : sans épaisseur.

- d'autres y voient un volume :

[24] Tranche = portion du prisme comprise entre deux plans parallèles distincts.
[25] Le mot tranche signifie chez Clairaut un volume de base identique à celle du prisme et d'une hauteur égale à l'unité de mesure de la hauteur (1cm si on mesure en cm) [L'élève rajoute cependant en bas de page: *une tranche peut signifier également une section d'un plan parallèle à la base avec le prisme*].

- d'autres encore oscillent entre ces deux conceptions ou nuancent prudemment l'une d'elles :

[26] Une tranche est une surface ou un volume avec une hauteur minimum [Paroles prononcées par un élève qui avait, par ailleurs, correctement décrit la spécificité de la procédure de Clairaut : l'appel à des grandeurs hétérogènes].
[27] C'est un plan, une surface. Nuance : c'est un volume de si petite hauteur qu'on la néglige.
[28] Dans son raisonnement, la tranche est d'une épaisseur indéfinissable, incalculable, on peut juste dire qu'elle est "fine" [Guillemets mis par l'élève] *puisqu'elle est section entre le prisme et un plan. On pourrait presque dire que la tranche représente la surface de la base.*

2.2.5. Une alternative sans issue.

Ces deux conceptions du mot tranche sont liées à l'opinion qu'ont les élèves de la valeur démonstrative de la procédure de Clairaut : soit qu'elles déterminent cette opinion, soit qu'elles soient conditionnées par cette dernière. Ces conceptions constituent les termes contradictoires d'une alternative décrite ci-dessous.
- D'un côté, si les tranches respectives des prismes droit et oblique sont des volumes, alors elles sont elles-mêmes, les unes des prismes droits, les autres des prismes obliques. On ne peut donc supposer leurs volumes égaux sans admettre vraie a priori la thèse qu'on veut démontrer, c'est-à-dire sans violer les règles de la logique:

> *[29] Mais si on fait des fines tranches, elles sont quand même obliques.*

Donc, on ne peut accepter cette méthode comme démonstration qu'en considérant les tranches comme des surfaces :

> *[30] Mais il y a une différence entre des crêpes et des tranches : les tranches ne peuvent pas avoir d'épaisseur sinon elles sont obliques d'un côté.*
> *[31] Dans ce cas-ci, la tranche doit forcément être de deux dimensions. Si on prend le mot tranche comme on parle d'une tranche de pain, on a trois dimensions, et la méthode de Clairaut ne fonctionnera plus* [L'interprétation que nous donnons aux propos [29], [30] et [31] a été corroborée par quelques précisions ultérieures fournies par les élèves qui ont proféré ces propos].

- De l'autre, on voit mal comment former des solides en superposant des surfaces :

> *[32] Cette démonstration est plutôt intuitive, mais pas prouvée* [terme souligné par l'élève]*réellement. En effet, Clairaut, pour calculer ses volumes, additionne uniquement des surfaces.*
> *[33] Oui, mais avec des surfaces, en les empilant, tu ne trouves rien du tout.*
> *[34] Il faut prouver que ça monte.*
> *[35] Et tu vas calculer le volume d'une aire ?*

De là la nécessité de concevoir les tranches comme des volumes, si l'on veut valider la procédure de Clairaut :

> *[36] [...] pourtant la hauteur* [de la tranche] *existe puisqu'en additionnant, elle forme un volume.*
> *[37] Pour Clairaut, une tranche est un prisme d'une hauteur infiniment petite (qui tend vers 0). Cette hauteur tend vers 0, de sorte qu'on arrive à un plan, mais il empile ces tranches pour former un*

prisme de hauteur H. Ces tranches ont donc une hauteur très petite mais non nulle.

Certains élèves pensent cependant qu'il est possible de construire un solide en superposant des surfaces :

[38] Par la superposition de tranches, correspondant à des sections de plans parallèles à la base et dont la superposition atteind la hauteur du solide.

Pour se convaincre de cette possibilité, deux élèves font référence à la droite, objet constructible et cependant composé d'une infinité de points :

[39] Oui mais alors, c'est comme les points. Alors [si en empilant des surfaces, tu ne trouves rien du tout], *tu ne pourrais jamais tracer de droites. Car une droite est un empilage de points qui n'ont pas non plus d'épaisseur.*
[40] C'est comme les points sur une droite : on les met les uns à côté des autres et on trouve une droite.

2.2.6. Un débat inéluctable.

L'alternative esquissée par touches dans les réponses individuelles des élèves apparaît explicitement et complètement dès que quelques élèves débattent entre eux de l'argumentation avancée par Clairaut. Voici un exemple d'un tel échange duquel nous avons déjà retranscrit l'un ou l'autre propos :

[41] Ici, il coupe le prisme [oblique] *en tranches toutes fines qu'il remet perpendiculairement* [pour former le prisme droit].
- Tu construis ceci [le prisme oblique] *avec le même nombre de tranches.*
- Mais si on fait des fines tranches, elles sont quand même obliques.
- Oui, mais on les prend les plus fines qu'on veut.
- Mais alors ça n'a pas d'épaisseur. Donc ça ne prouve rien.
- Mais si tu prends un millimètre, pourquoi est-ce que ça ne serait pas la même chose ?
- Mais tu ne dois pas démontrer qu'elles [les tranches] *ont la même forme, mais la même aire.*
- Je me demande si les tranches sont des volumes ou des surfaces.
- Tu ne sais pas si tu peux mettre le même nombre de tranches de part et d'autre.
- Même s'il fait une infinité de tranches, il y aura toujours la même infinité, car il les prend entre deux plans parallèles.
- On démontre pas grand 'chose comme cela.
- Je prends une tranche de l'épaisseur d'un point.
- Je voudrais savoir si les tranches prouvent quelque chose.
- On additionne toutes les surfaces, le long de la hauteur entre deux plans parallèles, alors c'est le même volume.
- Et tu vas calculer le volume d'une aire?

- Si tu considères des tranches comme des surfaces, tu n'as pas de volume, mais tu en prends une infinité pour compenser la hauteur.
- Oui mais avec des surfaces, en les empilant, tu ne trouves rien du tout.
- Oui mais alors c'est comme les points. Alors tu ne pourrais jamais tracer de droites. Car une droite est un empilage de points qui n'ont pas non plus d'épaisseur.
- Il n'y a rien de bon là-dedans. De savoir que les tranches ont même surface, cela ne prouve rien.
- Mais une pile de crêpes, on peut la mettre droite ou oblique. Les points , quand tu les décales bien, ça ne donne pas un escalier mais une droite.
- Avec ce prisme-là [le droit] *il y a moyen de refaire l'autre, mais pas avec un cube souple* [formé de baguettes et d'articulations]; *quand on le plie, on n'obtient pas le même volume.*
- Fais l'expérience avec des feuilles de papier.

2.2.7. La référence aux notions de limite et d'infini sauve la mise.

Pour échapper à cette impasse à laquelle les mènent soit leur propre évolution, soit leurs condisciples, certains élèves évoquent l'infini (ou bien le concept de limite quand ils l'ont déjà vu en 5ème) comme si cette seule évocation suffisait à tout expliquer :

[42] Clairaut, pour nous convaincre, nous ramène au concept de tranches égales, se perpetuant jusqu'à l'infini ou jusqu'au sommet, je pense alors y retrouver une sorte de limite vers l'infini ou la limite vers un point.
[43] Contrairement à nous qui nous basons sur des parties bien définies du volume, Clairaut , lui, recourt à l'infini.

L'infini présent dans les propos des élèves représente la plupart du temps une sorte de *qualité* que posséde le découpage de Clairaut et qui lui garantit son efficacité en compensant l'absence d'épaisseur des tranches :

[44] Cette méthode fait intervenir la notion d'infini dans la découpe et l'empilage (ceci afin d'avoir une précision suffisante).
[45] Il se base sur une infinité de surfaces au lieu de volumes.
[46] Si tu considères des tranches comme des surfaces, tu n'as pas de volume mais tu en prends une infinité pour compenser la hauteur.

Un éléve se pose la question d'une éventuelle disparité d'infinis d'un prisme à l'autre :

[47] Il coupe les prismes en tranches et veut les totaliser. Mais entre deux points, il y a une infinité de points et il faudrait prouver que les infinités de chaque prisme sont égales : $\infty = \infty$ *?*

Quant à la limite évoquée, elle s'apparente plus souvent à un processus intuitif assez vague qu'à l'opération mathématique du même nom :

> *[48] La méthode mathématique est donc plus intuitive, basée sur des observations; il fait une observation en la généralisant, une sorte de passage à la limite.*

Et quand la limite est utilisée dans un sens plus précis c'est pour traduire la transformation de tranches-volumes en tranches-surfaces, grâce à laquelle on peut obtenir une précision arbitrairement grande :

> *[49] Tranche = limite (prisme oblique a b c k i n o p q r) quand n o p q r tend vers a b c k i ; on obtient un prisme dont la hauteur par rapport à la base est tellement fine qu'on sent que les erreurs éventuelles, c'est-à-dire la différence entre un prisme droit et un prisme oblique est négligeable.* [Interrogé oralement à la suite de cette réflexion, l'élève précise que la tranche ainsi définie a bien le même sens que celui que, à son estime, lui octroye Clairaut, c'est-à-dire celui d'une surface].
> *[50] En coupant les deux prismes en une infinité de parties parallèles à la base, les deux sortes de tranches finissent par se ressembler.* [Dessine la Fig.21]. *Au plus elles sont petites, au plus les parties se confondent et se ressemblent.*

Fig.21

2.2.8.Les images provoquées par le texte de Clairaut.

Le texte de Clairaut suscite chez les élèves de nombreuses images mentales plus ou moins appropriées et plus ou moins compatibles.
1) L'image de la pile de feuilles chère à Cavalieri est la plus fréquente :

> *[51] On peut prouver que c'est vrai en prenant l'exemple du jeu de cartes* [Fig.22]. *Vous imaginez un tas de cartes, posées les unes sur les autres, bien droit. Vous faites glisser les cartes, la forme du prisme sera différente, mais la base, une carte, toujours la même, et le volume aussi, vu que chaque carte (volume constant) est toujours là.*

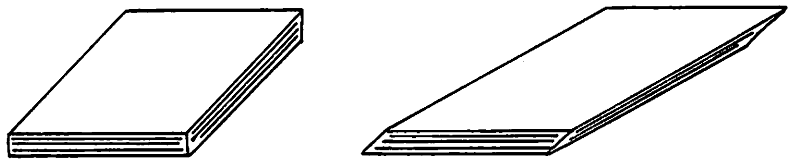


Fig. 22

[52] Clairaut compare un prisme oblique à une pile de livres que l'on peut redresser.

2) Dans le but de différencier la procédure de Clairaut de leur résolution du problème 2.1., certains élèves font allusion au parallélipipède formé de baguettes articulées qu'ils ont utilisé à l'occasion de ce dernier problème :

[53] Nous avons transformé petit à petit le parallélipipède oblique en un parallélipipède droit et ce, en rendant rectangulaires deux faces opposées du parallélipipède oblique.
[54] La méthode de Clairaut compare tandis que la nôtre transforme.

En fait, ils oublient que ce matériel ne leur a servi que pour y voir plus clair et s'imaginent qu'il fournit la clé du problème 2.1. parce qu'il permettrait de transformer un parallélipipède oblique en un parallélipipède droit de même base, de même hauteur et de même volume, ce qui est inexact. D'autres élèves évoquent ce matériel spontanément, sans l'avoir utilisé au préalable, pour parler de la procédure de Clairaut. Il arrive que l'image de ce parallélipipède articulé interfère avec celle de la pile de cartes, ce qui donne :

[55] Tout ce qu'il fait, c'est comparer les deux volumes en les comparant (j'ai compris cela comme ça) à des blocs de feuilles (tranches) qui forment chacun un volume (tel un classeur) et qu'il fait glisser pour obtenir un prisme oblique. Avec cette méthode là, je ne comprends pas comment la hauteur du "bloc de feuilles" oblique ne soit pas plus petit que celle du "bloc de feuilles"droit. [Il accompagne ce propos d'une manipulation du parallélipipède articulé].

3) Enfin un élève se réfère au modelage et un autre aux effets de perspective:

[56] C'est comme si on prenait un bloc de plasticine : on peut en faire un prisme droit ou un prisme oblique et ça reste le même poids donc le même volume.
[57] Le parallélipipède oblique est un parallélipipède rectangle mal visualisé dans l'espace. La formule reste = base x hauteur.

L'idée de mouvement de la base, de *balayage* du prisme par celle-ci est apparue à l'occasion de cette fiche. Comme cette idée est présente dans le texte même de Clairaut - que les élèves ont lu -, nous ne nous y attarderons pas ici. Nous reviendrons plus loin sur des circonstances où elle est apparue spontanément.

2.2.9. Le volume d'un prisme oblique ne vaut-il pas le produit de sa base par son arête ?

Des élèves pensent, fût-ce fugitivement, à remplacer la hauteur par la longueur d'une arête oblique dans la formule du volume d'un prisme penché, ou par la longueur d'un côté incliné dans la formule de l'aire du parallélogramme. En voici trois exemples :

[58] Le prisme oblique devrait avoir un volume plus grand que le prisme droit car il y a plus de points dans l'arête oblique que dans la hauteur.

[59] Je ne comprends pas : si le parallélogramme et le rectangle ont même aire, il faudrait que a = b [dessine la Fig. 23].

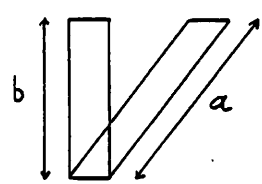


Fig. 23

[60] Je crois que la solidité d'un prisme oblique est la même que celle d'un prisme rectangle (évident), et pour calculer la solidité de ces deux prismes, il faut multiplier la surface de la base par la hauteur, (ça c'est juste) mais la hauteur n'est pas toujours perpendiculaire à la base. La hauteur sera perpendiculaire à la base dans les prismes rectangles mais ne sera pas toujours perpendiculaire à la base dans les prismes obliques si on prend la hauteur d'une face qui est un parallélogramme dans un prisme oblique.

2.2.10. Des volumes des prismes à leurs aires latérales.

Commentant la procédure de Clairaut, un élève écrit :

[61] De plus, on a exactement la même surface latérale pour le prisme droit et le prisme oblique.

2.2.11. La méthode de Clairaut pour les solides fort, très fort penchés.

Extrapolant la méthode de Clairaut au cas du cylindre un élève dessine la Fig. 24 et la commente ainsi :

[62] On glisse les cercles et on obtient une courbe. Si on glisse très loin vers l'infini, la courbe sera de longueur infinie, donc le volume ne peut pas rester le même.

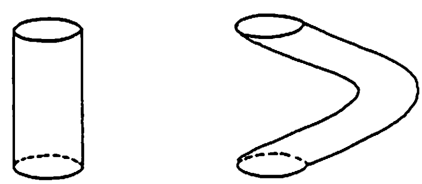


Fig.24

Une réaction tout à fait analogue est celle d'un élève qui décompose un parallélogramme en segments parallèles et les glisse les uns sur les autres pour obtenir un parallélogramme plus penché, comme ci-dessous (Fig.25). Ce faisant il dit :

[63] Si on glisse les segments très loin, la longueur de l'arête tend vers l'infini et l'on a alors une surface plus grande.

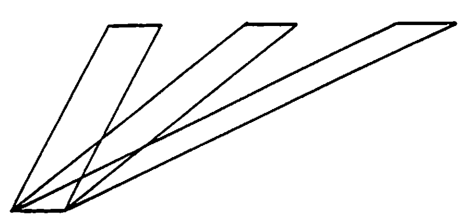


Fig.25

Un élève rapproche la méthode de Clairaut du puzzle de la Fig.12 en dessinant un parallélogramme fort penché (Fig.26) :

[64] On a une multitude de triangles fort aplatis et à la limite on ne voit plus que des segments.

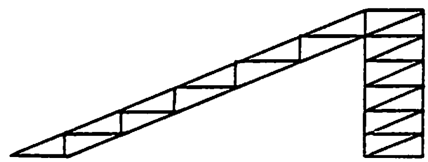


Fig. 26

2.2.12. Une variante des fiches 2.1. et 2.2. sollicitant davantage l'intuition.

Dans deux classes (10 et 15 élèves qui ont 7 heures de math. par semaine) nous proposons la fiche suivante, en lieu et place des problèmes 2.1. et 2.2.

> *Un parallélipipède quelconque a le même volume qu'un parallélipipède rectangle qui possède une même hauteur et une base équivalente.*
>
> *Pourriez-vous justifier ce théorème de la manière qui vous paraît la plus intuitive.*

Dans l'ensemble, ces élèves réagissent différemment de ceux qui travaillent les problèmes 2.1. et 2.2. : plusieurs d'entre eux n'hésitent pas à se référer aux sections planes des parallélipipèdes en utilisant, pour se justifier, des images diverses.
1) Les uns voient les deux solides comme des assemblages de surfaces :

> *[65] Si je prends une partie de plan, parallèle à la base et plus ou moins au milieu de la hauteur, on garde la même surface, simplement la forme est différente. Donc assemblage de plans, d'où même volume.*
>
> *[66] Un volume d'un parallélipipède est x fois le plan de base, c'est-à-dire que si on entrepose un grand nombre de plans en faisant aligner leurs côtés, on obtient un volume.*
>
> *[67] Un parallélipipède rectangle est l'addition d'une multitude de parties de plans, parallèles à A B C D. C'est l'addition de rectangles A B C D.*

2) Les autres évoquent, à l'instar de Clairaut, l'engendrement des solides par déplacement de leurs bases respectives :

> *[68] Explication non scientifique : pour V1 on multiplie la surface de base par la hauteur, autrement dit la surface de base s'empile x fois dans la hauteur (cette surface coulisse bien dans son bloc). Pour V2, si*

h2 = h1, alors V2 = V1. On peut aussi s'imaginer que la base de V2 coulisse bien dans son bloc, en fait cette base s'empile un même nombre de fois pour une même hauteur, mais elle le fait de biais.
[69] Il y a la même translation qui envoie a b c d sur a'b'c'd' et sur a"b"c" d" [il dessine la Fig.27].

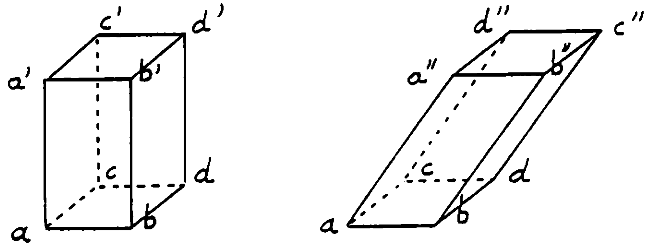


Fig.27

3) Pour d'autres encore, c'est l'image du glissement latéral des couches les unes sur les autres qui leur semble la plus appropriée :

[70] Si on déplace la face supérieure du parallélipipède quelconque en translation jusqu'à celle du parallélipipède rectangle on obtient, en reliant les points de chacune des faces, le même parallélipipède rectangle.

4) Ici aussi la formule : volume = base x hauteur paraît associée à l'idée d'un tel découpage des solides en surfaces, au point que la hauteur s'identifie, dans le chef de certains élèves, au nombre de couches superposées :

[71] Donc le volume est le nombre de couches successives ajoutées sur A B C D dans les deux cas fois la surface; donc je dois trouver la hauteur et ainsi, apparaît la formule : surface x hauteur.
[72] Le volume du parallélipipède rectangle est constitué d'un certain nombre de fois la base d'aire (L x l). Le nombre est h. D'où on peut trouver la formule de V= L x l x h. Le volume du parallélipipède est constitué d'autant de fois la base d'aire L x l mais seule la façon de les empiler diffère.

5) Enfin, quelques élèves proposent, en guise de justification intuitive, l'une ou l'autre expérience utilisant de la matière :

[73] Je construis les deux volumes en matière imperméable (verre par exemple). Je remplis un des deux volumes d'eau et je vide son contenu dans le second volume. Si l'eau remplit tout-à-fait ce dernier et que rien ne déborde, alors V1 = V2 .
[74] A mon avis, si le parallélipipède quelconque a la même hauteur et la même base qu'un parallélipipède rectangle, il aura le même volume étant donné que tout ce qui les différencie est leur forme respective, due à la façon dont les hauteurs du parallélipipède quelconque penchent sur le côté au lieu d'être perpendiculaires à la

base et donc seule sa forme change, d'où pas son volume car si on prend une certaine quantité d'une matière malléable et qu'on lui donne la forme d'un cube puis d'une sphère, son volume sera toujours le même, donc seule sa forme aura changé.

Comme à la suite de la fiche 2.2., certains élèves s'interrogent sur la validité d'un tel découpage de solides en surfaces. Ainsi l'un d'eux justifie son hésitation à recourir aux sections planes des parallélipipèdes en formulant l'alternative décrite plus haut (section 2.2.5.) à propos des prismes. A un de ses compagnons qui propose de couper les parallélipipèdes en tranches de plus en plus fines, il rétorque :

[75] Si les petites tranches qu'on fait sont des surfaces, on ne peut obtenir un volume en superposant des surfaces et si elles ne sont pas des surfaces, alors ce sont des parallélipipèdes quelconques très minces et on n'a rien démontré.

ce à quoi l'autre répond :

[76] Il faudra alors resubdiviser encore et encore.

<u>2.2.13. La symétrie affine conserve-t-elle l'aire ?</u>

Le problème repris ci-dessous a été proposé lors d'une pré-expérimentation. Nous avons ôté ce dernier de la suite définitive de problèmes en raison de son caractère artificiel. Il n'empêche qu'il a suscité - du moins sa première partie - des réactions dignes d'intérêt.

Une symétrie affine se définit au moyen d'une droite D et d'une direction D' non parallèle à D. L'image d'un point a par une telle symétrie est le point a' tel que le segment a a' soit parallèle à D' et coupé par D en son milieu (Fig.28).

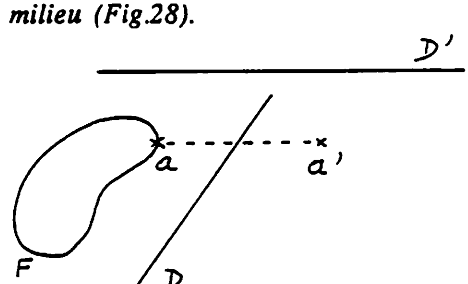


Fig.28

Dessinez l'image F' de la figure plane F représentée ci-dessus *par la symétrie affine d'axe D et de direction D'. Comparez les aires des figures F et F'. Trouvez deux figures connues, délimitées par des segments de droite, qui soient images l'une de l'autre par une telle symétrie. Déduisez l'aire de l'une de ces deux figures de celle de l'autre.*

Ce problème a été posé dans deux classes. (5ème Math. 5h/sem. et 6ème Math. 7h/sem.).

Dans la première, il suivait la lecture de l'extrait où Clairaut détermine le volume d'un parallélipipède quelconque en le comparant, tranche par tranche, à un parallélipipède droit de même base et de même hauteur. L'influence des idées de Clairaut a été décisive : tous les élèves ont découpé les deux surfaces en segments parallèles à D' et ont correctement prouvé qu'ils étaient de même longueur dans l'une et l'autre. Ils en ont déduit l'invariance de l'aire, transposant ainsi spontanément la méthode de Clairaut au cas des aires :

> *[77] Il suffit de découper la forme en un ensemble de segments parallèles à D'. Lors de cette symétrie, les distances sont conservées. Soit le point a -> a' et le point p, le point sur D du segment a a' et le point b situé sur le segment a a' et l'image b':*
>
> *d (b, p) = d (p, b')*
>
> *d (a, p) = d (a', p) d'où d (b, b') = d (a, a').*
>
> *Si je sépare ma forme en un ensemble de segments tels celui que je viens de décrire j'aurai deux formes comprenant le même nombre de segments égaux, j'aurai donc deux formes de surface égale.*

Dans la seconde classe, ce problème inaugurait la suite des problèmes relatifs aux aires et volumes, en lieu et place du problème 2.1. Nous l'avions choisi pensant qu'il était plus susceptible que ce dernier de provoquer chez les élèves un découpage à la Cavalieri et ceci pour deux raisons. D'abord, du fait qu'il portait sur une surface à frontière courbe, il ne pouvait être résolu par une procédure d'équidécomposabilité. Ensuite le mode de construction de la figure F' pouvait induire l'idée d'un découpage laminaire de direction D'. Il n'en fut rien, la quasi-totalité des élèves préférant à ce découpage, approximer les surfaces F et F' de l'extérieur ou de l'intérieur, par des polygones (Fig.29 à 31), ou plus rarement par des quadrillages (Fig.32 à 34).

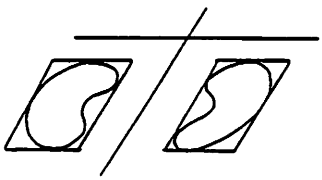


Fig.29

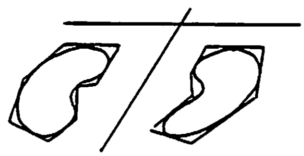


Fig.30

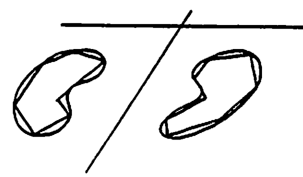


Fig.31

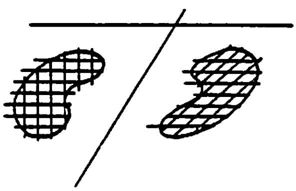


Fig.32

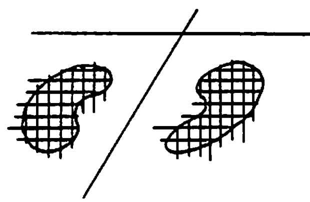


Fig.33

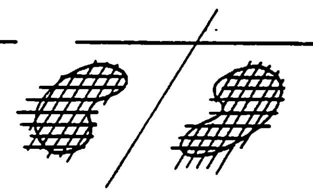


Fig.34

Notons encore l'étonnement de quelques élèves, rares mais répartis dans les deux classes concernées, devant la possibilité (découverte sur un dessin où l'axe D de la symétrie affine est fort penché) que des surfaces, composées de segments de même longueur, puissent avoir des formes différentes.

2.3. D'une pyramide à toutes les autres.

Venons-en maintenant aux pyramides.

a. On peut loger six pyramides identiques dans un cube. Comment? Exploitez cette situation pour trouver le volume d'une pyramide quelconque.

b. Et que vaut celui du cône?

2.3.1. Une solution parmi d'autres.

En joignant le centre o d'un cube de côté c à chacun de ses sommets, on détermine six pyramides de même sommet o et dont les bases respectives sont les six faces du cube (Fig.35.). Partant de là, on trouve aisément le volume V de chacune d'elles en fonction de leur base B et de leur hauteur h :

$$V = c^3/6 = (c^2)(c/2)/3 = Bh/3.$$

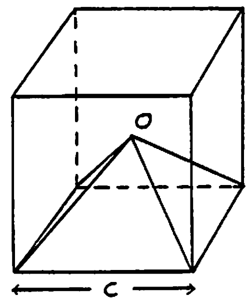


Fig.35

On peut ensuite comparer utilement une pyramide quelconque de base B et de hauteur h à une des six pyramides extraites d'un cube de côté c = 2h (Fig.36). En effet elles sont découpées l'une et l'autre, à même distance de leurs sommets respectifs et parallèlement à leurs bases respectives, en sections homothétiques à ces bases et donc proportionnelles à celles-ci. En extrapolant, à l'instar de Cavalieri, ce rapport d'aires aux volumes respectifs V et V' de la pyramide quelconque et de la pyramide régulière, on trouve :

$$V = V'. B/c^2 = Bh/3.$$

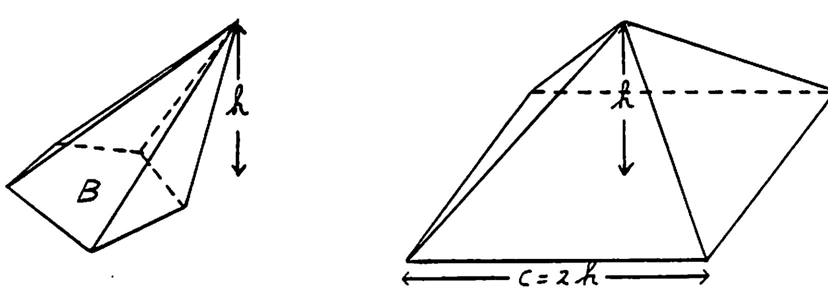


Fig.36

2.3.2. Les élèves contournent les principes de Cavalieri.

Tous les élèves arrivent à morceler convenablement le cube en six pyramides isométriques. Mais alors qu'ils ont tous, par la lecture du texte de Clairaut, une première expérience du découpage des solides en surfaces, rares sont ceux qui songent à comparer, tranche par tranche, la pyramide quelconque à une pyramide de même hauteur susceptible d'occuper le sixième d'un cube. Et encore, ne sont-ils pas convaincus a priori de la fécondité de cette comparaison :

> *[78] A même hauteur, ces pyramides n'ont plus les mêmes tranches.*
> *[79] On peut faire comme Clairaut mais c'est plus difficile... on ne peut plus faire coulisser.*

De nombreux élèves essayent un découpage analogue à celui du cube en six pyramides c'est-à-dire qu'ils tentent de loger n pyramides quelconques de même volume dans un solide de volume connu tel un parallélipipède ou un prisme. Pour en avoir discuté entre eux, ou bien pour avoir consulté l'un ou l'autre ouvrage de référence, certains proposent alors de loger trois pyramides triangulaires SABC, SADC et CDSE dans un prisme (Fig.37). Ils concluent que le volume de chacune d'elles vaut le tiers de celui du prisme et calculent ensuite le volume d'une pyramide quelconque en envisageant cette dernière comme l'assemblage d'un nombre fini de pyramides triangulaires. Le professeur explique qu'il n'est pas prouvé que les pyramides SABC, SADC et CDSE ont le même volume : elles ont même hauteur et même base deux à deux mais ne sont pas nécessairement isométriques; il propose de démontrer que deux telles pyramides ont le même volume et fait lui-même référence à la procédure de Clairaut au cas où les élèves n'y pensent

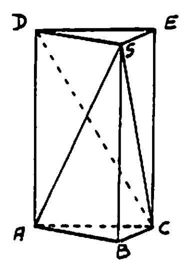


Fig.37

pas, ce qui arrive. Ces derniers parlent alors de tranches égales dans l'une et l'autre pyramide et avancent des arguments forts semblables à ceux qu'ils ont donné dans le cas des prismes:

> *[80] En considérant qu'un volume est un empilement de surfaces parallèles entre elles, on peut démontrer que ces deux pyramides ont même volume.*

Dans leur tentative à démontrer que les tranches homologues des deux pyramides ont même aire, les élèves évoquent assez facilement le concept d'homothétie et terminent ainsi une solution du problème 2.3., autre que celle à laquelle nous avions d'abord songé.

2.3.3. Quelques réactions qui révèlent la difficulté qu'éprouvent la plupart des élèves à concevoir la solution initialement prévue.

Nous avons cherché à savoir quels "coups de pouce" le professeur devrait donner à ses élèves pour les amener peu à peu à la solution initialement proposée à ce problème.

Décrivons tout d'abord une tentative spontanée et heureuse de l'un de ces élèves. Il commence par caractériser les pyramides inscriptibles dans un cube :

> *[81] Une pyramide est caractérisée par une base et un point; la hauteur se caractérise par la distance entre le point et le plan de la base. Dans le cas où :*
> *1° le point est à la verticale du centre de la base;*
> *2° la base est carrée;*
> *3° sa hauteur vaut la moitié du côté,*
> *alors V = B.H/3.*

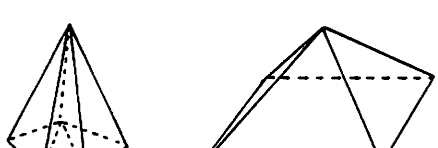
Il montre alors qu'on n'altère pas cette formule en levant chacune des "obligations" 1°, 2° et 3°. Il supprime la première en faisant glisser les unes sur les autres les tranches de la pyramide parallèles à sa base ce qui, dit-il, ne change pas le volume; la deuxième en remplaçant les tranches carrées par des tranches parallélogrammes lesquelles ont des aires proportionnelles à celles des carrés; il divise ensuite ces parallélogrammes, en triangles et compose des triangles pour obtenir des tranches polygonales quelconques ; enfin il lève l'obligation 3° en multipliant par un même coefficient les aires des tranches ce qui a pour effet, selon lui, de changer la forme de la pyramide en l'affinant ou en l'épatant. Malgré les redondances et les implicites de cette argumentation, cet élève montre une grande habilité à passer d'une classe de pyramides à une autre. Cette même habilité nous l'avons souvent retrouvée chez les élèves qui spontanément ont procédé comme Clairaut pour comparer deux pyramides de même base et de même hauteur ou bien chez les rares élèves qui ont résolu le problème 2.3. comme nous :

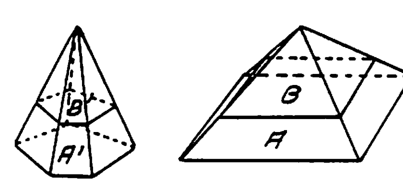
> *[82] Si deux pyramides ont la même base et la même hauteur, leurs volumes sont les mêmes où que soit situé le sommet. Vérification triviale par la théorie de Clairaut - les tranches.*
> *[83] Volume de la pyramide dans un cube = B.H/3. Cette formule est bonne que la pyramide soit penchée ou pas (par Clairaut); du moment que sa hauteur reste la même.*

[84] Si la hauteur ne varie pas, le volume ne variera qu'en fonction de la surface de base.
[85] Par Clairaut, on peut donner à une base triangulaire ou quadrilatère n'importe quelle forme triangulaire ou quadrilatère. Ainsi n'importe quelle pyramide avec ces bases peut être commuée à une pyramide régulière.

A l'ensemble des élèves, le professeur explique que la décomposition du cube en six morceaux isométriques a fourni le volume non pas d'une seule pyramide aux dimensions bien précises mais celui de toute une classe de pyramides aux proportions déterminées. Il serait donc aisé de choisir dans cette classe, une pyramide qui ait, en commun avec la pyramide quelconque qu'on s'est donnée a priori, soit la base, soit la hauteur : les élèves choisissent ce dernier cas. Sur ce, le professeur les invite à poursuivre en s'inspirant de ce que Clairaut a réalisé pour les prismes. Plusieurs types de réactions s'ensuivent que nous avons répertoriés comme suit :
1) quelques rares élèves retournent à une procédure d'équidécomposabilité comme celle suggérée par un de leurs croquis (Fig.38);
2) certains utilisent correctement le concept d'homothétie pour déduire une proportionnalité entre les tranches homologues des deux pyramides mais n'en tirent rien quant aux volumes (Fig.39);
3) inversément l'un d'eux devine, semble-t-il, que le rapport des volumes est celui des bases sans oser aller jusqu'au bout de sa conjecture et a fortiori sans la démontrer :

[86] Divisons le volume de cette pyramide [inscriptible dans un cube] *par x de manière à obtenir une pyramide de même hauteur et de base égale à celle de la pyramide quelconque :*
V = (base . hauteur/ 3).(1/x) = h.(base/x)/3.
[Notez l'emplacement du x dans la première formulation et dans la seconde; notez aussi l'absence d'une lettre représentant la base de la pyramide quelconque].





$B' = A'\left(\frac{1}{x}\right)^2$ $B = A\left(\frac{1}{x}\right)^2$

Fig.38 Fig.39

4) certains évoquent en un sens qualificatif une dépendance entre le rapport des volumes et celui des bases :

> *[87] La hauteur est donc commune aux deux pyramides, il n'y a que l'aire de base qui est différente. Donc on peut, en comparant ces deux aires de base, déduire si la pyramide oblique a un volume plus important ou moins important que la pyramide droite dont on connaît le volume. Si la pyramide oblique a une aire de base plus petite que la pyramide droite, son volume sera plus petit; et en regardant dans quelles proportions les aires de base différent, il sera possible d'établir une proportion entre les deux volumes [...]. Il suffit donc de mesurer l'aire de base de la pyramide quelconqiue, de la comparer à l'aire de base de la pyramide droite ayant même hauteur et d'adapter leur volume en conséquence.*

5) d'autres utilisent une relation quantitative mais erronée pour passer du rapport des bases (sous-entendant celui des tranches) à celui des volumes:

> *[88] Il faut toutefois tenir compte que les unités de volumes sont les cm^3 et que si l'on réduit la surface de moitié (par exemple) on ne réduit pas le volume de moitié, mais dans une proportion beaucoup plus importante (si la surface de base est réduite de moitié, la hauteur étant toujours constante, le volume sera quatre fois plus petit* [Ce propos est extrait du précédent [87] auquel il s'intègre à la place de [...]].
> *[89] Le rapport entre l'aire de la base de A* [=la pyramide quelconque] *et l'aire de la base de B* [= la pyramide régulière] *est x; d'où aire de B = aire de A. x; d'où volume de B = volume de A. x^2, car la hauteur est égale pour les deux. Or volume de A = $h(2h)^2/3$ = $4\ h^3/3$ (préliminaire). Le volume de B égale donc $4\ h^3.x^2/3$* [Remarquez que l'élève ne songe pas à remplacer x par le rapport: aire de B/aire de A].

6) d'autres encore concluent correctement que le rapport des volumes est celui des bases, mais n'expriment pas le volume de la pyramide en fonction de ses propres base et hauteur. L'un d'eux dit même :

> *[90] Cela ne sert à rien* [de savoir que les volumes sont entre eux comme les bases] *puisque de toute façon, on ne connaît pas la base de la pyramide quelconque.*

7) l'un ou l'autre termine correctement.

2.3.4. Une procédure via les aires latérales.

Un élève espère déterminer le volume de la pyramide quelconque à partir de celui d'une pyramide régulière en comparant les aires de leurs faces respectives.

2.3.5. Le volume du cône, sans difficulté.

Pour déterminer le volume du cône, il suffit de le comparer, tranche par tranche, à une pyramide de même base et même hauteur (Fig.40). Si ce rapprochement va de soi pour une bonne partie des élèves, il doit être suggéré par le professeur pour les autres qui l'exploitent alors convenablement. Une hésitation cependant, relative à un cône fort penché :

> *[91] Plus le sommet s'éloignera, plus le volume du cône diminuera car la hauteur est un sinus et donc dépend de l'angle et plus le sommet s'éloigne, plus l'angle diminue* [Il ébauche un cône dont le sommet sort du cadre de sa feuille].

De même qu'une référence aux sections radiales :

> *[92] Deux cônes de même base et de même hauteur ont le même volume car ils sont engendrés par la rotation d'un triangle qui, s'il change de forme en tournant, ne change pas de surface* [Il dessine la Fig.41].

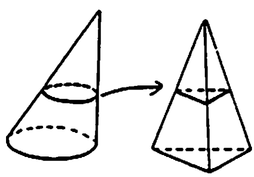


Fig.40

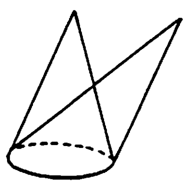


Fig.41

2.4. Du cylindre et du cône à la sphère.

Nous venons d'établir le volume du cône en comparant celui-ci à une pyramide de même base et de même hauteur. De même, nous pouvons trouver le volume du cylindre en l'identifiant à celui d'un parallélipipède de même base et de même hauteur.

Déduisez le volume d'une sphère de rayon r de ceux du cône et de la pyramide, en vous inspirant de la Fig.42.

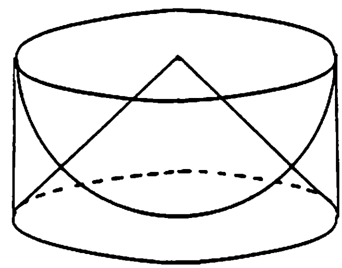


Fig.42

2.4.1. Une conjecture spontanée à propos des volumes des solides et des aires de leurs sections planes.

Ce problème donne lieu à une conjecture dans toutes les classes : les élèves connaissent le volume du cylindre, celui du cône et parfois même celui de la sphère dont ils s'enquièrent spontanément dans le cas contraire. Ils découvrent vite que le volume V_3 de l'hémisphère de rayon r s'obtient en soustrayant le volume du cône ($V_2 = \pi r^3/3$) de celui du cylindre ($V_1 = \pi r^3$). Partant de là, ils tentent de décomposer les trois solides en sections planes dont les aires respectives S_3, S_2 et S_1 obéiraient à une même loi :

$$S_3 = S_1 - S_2.$$

Parmi les conjectures erronées, notons celle d'un élève qui suggère que l'hémisphère et le cône ont le même volume car, dit-il,:

> *[93] Ils sont composés de mêmes rayons* [rayons joignant le centre de l'hémisphère à chacun des points de sa surface latérale, rayons allant du sommet du cône à chaque point de sa base].

Il se rétracte ensuite invoquant que :

> *[94] Les rayons sont les mêmes pour l'hémisphère mais non pour le cône.*

2.4.2. Plusieurs essais de décomposition radiale.

Beaucoup d'élèves proposent de découper les solides par des plans contenant l'axe du cône. Les sections radiales ainsi obtenues ont la forme d'un rectangle pour le cylindre, d'un triangle pour le cône et d'un demi-disque en ce qui concerne l'hémisphère (Fig.43).

Mais ils constatent qu'ils font fausse route : la différence entre l'aire du rectangle ($2r^2$) et celle du triangle (r^2) ne donne pas celle du de-

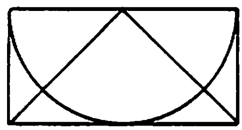


Fig.43

mi-disque ($\pi r^2/2$) ce qui, souvent, les étonne.

2.4.3. Mise à l'épreuve d'une décomposition laminaire : référence aux cas extrêmes, arguments qualitatifs, prégnance des rayons.

La décomposition des solides en disques parallèles aux bases du cylindre semble plus prometteuse : elle est rapidement évoquée par les élèves, soit d'emblée, soit en remplacement de la décomposition radiale. Soient r_1, r_2 et r_3 les rayons des disques découpés respectivement dans le cylindre, le cône et l'hémisphère par un plan quelconque parallèle aux bases du cylindre. La plupart des élèves soulignent la constance de r_1 et la diminution régulière de r_2 au fur et à mesure que le plan de coupe se rapproche du sommet du cône. Beaucoup observent dans la foulée les sections déterminées aux extrémités des solides :

> *[95] Au sommet du cylindre : la surface de la base de la demi-sphère + la surface du sommet du cône (qui égale à 0) = la surface du sommet du cylindre. A la base du cylindre aussi.*
> *[96] Aux extrémités, aucun problème, la base du cône et de la demi-sphère (de même aire que celle du cylindre) + un point (point extrême du cône ou de la demi-sphère) donne bien la base du cône.*

Généralement suit l'hypothèse que ce qui a été observé aux extrémités doit pouvoir l'être entre les deux :

> *[97] On peut essayer de démontrer que c'est pareil à n'importe quel "étage" de la pyramide* [sic].

Cette hypothèse est souvent étayée d'arguments qualitatifs tels que:

> *[98] Il en va de même pour toutes les tranches prises parallèlement à la base, car les tranches du cône qui se rétrécissent en allant vers son sommet sont " compensées" par les tranches de la demi-sphère car leur aire est de plus en plus grande à mesure que l'on s'approche du sommet du cône.*

Certains élèves sont momentanément en deça de telles observations, qui soit remettent l'hémisphère "à l'endroit" avant de le comparer, par couches parallèles, aux deux autres solides (Fig.44),

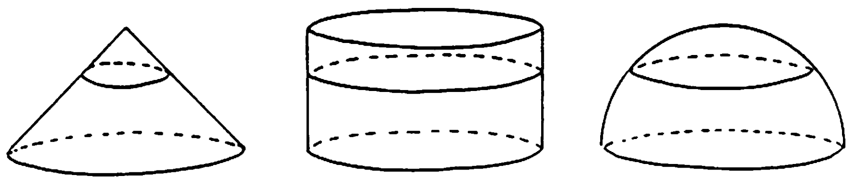


Fig.44

soit imbriquent un cône, un cylindre et une sphère entière (Fig.45). Invités à se corriger, ils recourent eux aussi à des arguments qualitatifs en avançant, par exemple dans le premier cas, que les

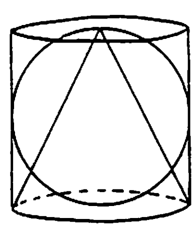


Fig.45

sections du cône et de l'hémisphère diminuent quand on va vers le haut alors que celles du cylindre restent inchangées, ce qui leur paraît incompatible avec la conjecture formulée sur les sections : $S_3 = S_1 - S_2$.

Quelques élèves refusent la relation $S_3 = S_1 - S_2$ pour les aires des disques car, disent-ils, r_3 n'augmente pas avec la même régularité ("en suivant une droite") que diminue r_2. L'un d'entre eux exprime que, pour lui, les volumes sont entre eux ce que sont les rayons, sans se soucier davantage du fait que les rayons sont variables:

[99] $r_2/r_3 = r_3/r_1$ *-> cône/sphère = sphère/cylindre.*

2.4.4. D'une dépendance qualitative à une dépendance fonctionnelle.

S'apercevoir que les sections de l'hémisphère grandissent quand celles du cône diminuent n'est pas encore démontrer que leurs aires ont une somme constante : ce qui requiert qu'on exprime r_1, r_2 et r_3 comme fonctions d'un paramètre commun. Quelques rares élèves pensent à chercher "suivant quelle formule varie r'" (Fig.46) mais n'y parviennent pas le plus souvent, faute de choisir une variable indépendante convenable :

[100] r'/r = x; x ? [Fig.46].

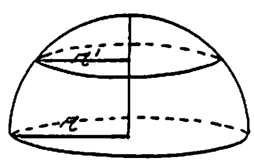


Fig.46

Le professeur donne un coup de pouce : il propose comme variable la distance du sommet du cône au plan de section, soit m, et engage les élèves à exprimer r_1, r_2 et r_3 en fonction de m. Dès ce moment, il ne reste à ceux-ci que quelques difficultés techniques pour terminer la résolution du problème, avec l'aide du professeur, de la manière suivante. Dans le triangle rectangle o a c (Fig.47), on a

$$r_1^2 = r_3^2 + m^2$$

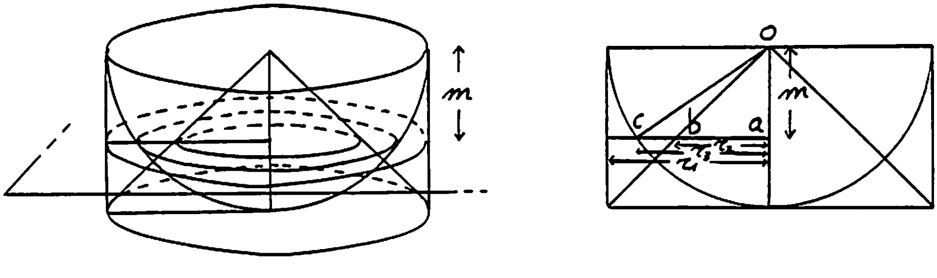


Fig.47

Mais $m = r_2$, car le triangle o a b est semblable au triangle isocèle o d e. Donc

$$r_1^2 = r_2^2 + r_3^2.$$

En multipliant les deux membres de cette dernière égalité par π, on obtient l'égalité

$$S_1 = S_2 + S_3,$$

de laquelle on tire, à l'instar de Clairaut,

$$V_1 = V_2 + V_3.$$

2.4.5. Une hémisphère et une écuelle.

Quelques élèves préfèrent ne considérer que deux solides : d'un côté le cône, de l'autre le solide en forme d'écuelle obtenue en ôtant l'hémisphère du cylindre. Ils décomposent le premier en disques - hachurés sur la Fig.48 et le second en couronnes circulaires, hachurées elles aussi - et montrent que chaque couronne a la même aire que le disque qui lui est coplanaire. Galilée (trad. H. Crew et al., 1914) attribue une telle procédure à Luca Valerio, mathématicien du XVII^e^ siècle; il l'exploite à son tour et la commente en des termes que nous décrirons ultérieurement.

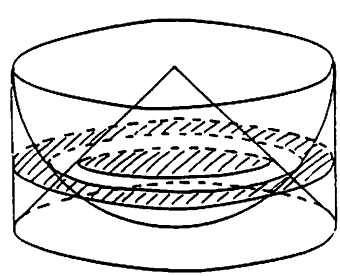


Fig.48

2.5. Une première synthèse : le principe de Cavalieri relatif aux volumes.

Voici un principe formulé par B. Cavalieri : "Si deux solides sont compris entre des mêmes plans parallèles et si les sections *déterminées dans l'un et l'autre parallèlement à ces plans sont soit égales, soit toujours dans un même rapport, alors les volumes de ces solides sont soit égaux, soit dans ce même rapport".*

Avons-nous jusqu'ici appliqué strictement le règle donnée par Cavalieri? Sinon, en quoi nous en sommes-nous écartés? Est-ce que ces écarts vous paraissent justifiés?

2.5.1. De la proportionnalité d'invisibles aux combinaisons linéaires.

Pas mal d'élèves disent reconnaître des applications du principe énoncé, non seulement dans les problèmes 2.2. et 2.3. - ce qui est légitime - mais aussi dans la première procédure de résolution du problème de Valerio (2.4.). Pourtant on compare, dans ce dernier cas, trois solides et non deux; de plus, ce n'est pas une égalité ou proportionnalité d'indivisibles qui y est en jeu, mais une addition : si les indivisibles découpés par chaque plan dans les solides 1, 2 et 3 sont tels que le premier est la somme des deux autres, le volume du solide 1 vaut la somme des deux autres. C'est que, pour les élèves, le transfert de cette dernière propriété des indivisibles aux volumes est tout aussi naturel et évident que le transfert de l'égalité ou de la proportionnalité.

Le professeur explique que l'on peut combiner les relations de proportionnalité et d'addition afin de considérer des combinaisons linéaires d'indivisibles : ce que tous les élèves conçoivent aisément.

2.5.2. Quelques réticences à prendre le principe de Cavalieri comme présupposé.

Quelques élèves expriment leur réticence à exploiter le principe de Cavalieri relatif aux volumes "tant qu'on ne l'a pas démontré". De ce fait ils estiment que les formules de volumes déduites de ce principe ne sont pas prouvées.

2.6. Du rectangle au parallélogramme, du cercle à l'ellipse... à la manière de Cavalieri.

Cavalieri a formulé un principe qui peut servir au calcul de certains volumes. Y aurait-il un principe analogue pour les aires?

a. Déduisez l'aire du parallélogramme de celle du rectangle, en imitant Cavalieri.

b. Déduisez l'aire de l'ellipse de celle du cercle sachant que toute section droite d'un cylindre droit est un cercle; on appelle *ellipse toute autre section plane du cylindre, non parallèle à son axe (Fig.49). Formulez un principe qui généralise ceux que vous aurez utilisés en a. et b.*

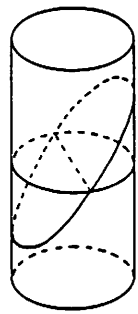


Fig.49

2.6.1. Les élèves transposent facilement aux surfaces le principe de Cavalieri relatif aux volumes.

Tous les élèves imaginent sans peine comment étendre aux surfaces le principe de Cavalieri relatif aux volumes. L'un d'eux dit :

[101] Les segments sont aux surfaces ce que les surfaces sont aux solides.

2.6.2. Le cas du parallélogramme.

Passer du rectangle au parallélogramme "à la manière de Cavalieri" pose peu de problème aux élèves. Certains disent :

[102] J'y avais pensé bien avant.
[103] C'est bête comme chou.

Presque tous trouvent aisément le découpage approprié. Toutefois, une réponse suggère et une autre manifeste un découpage inadéquat :

[104] Tranche 1 = h -> S_{hb} = S [Fig.50].

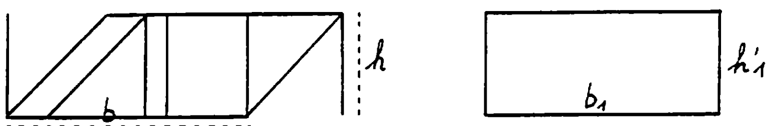


Fig.50

[105] Si on redresse tout droit les lattes du parallélogramme, on obtient un rectangle de même largeur mais plus haut [Fig.51].

Fig.51

2.6.3. Le cas de l'ellipse.

Si beaucoup d'élèves songent à utiliser des segments indivisibles proportionnels, pour comparer l'ellipse au cercle, certains ne trouvent pas lesquels; d'autres ne parviennent pas à démontrer cette proportionnalité. Voici la réponse succincte mais suggestive de l'un d'eux :

[106]

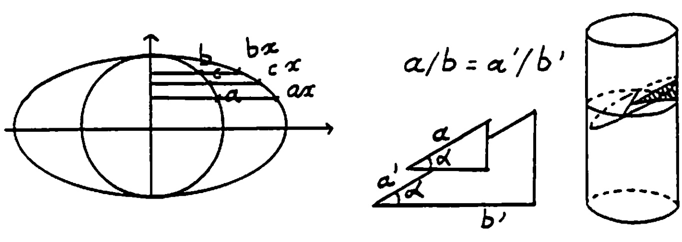


Fig.52

Parmi les essais infructueux, mentionnons la décomposition de l'ellipse et du cercle en diamètres (Fig.53).

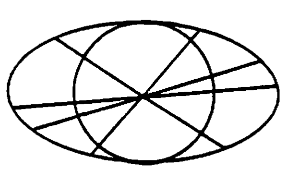


Fig.53

2.6.4. Des réflexions qui en rappellent d'autres.

Les élèves commentent le principe de Cavalieri relatif aux aires, tout comme ils l'ont fait pour le principe relatif aux volumes, en des termes proches :

[107] Si on divise cette feuille de papier en indivisibles qu'on met les uns à la suite des autres, on obtient une droite, or une droite n'a pas de surface, alors que la feuille bien.
[108] A la limite, je peux dire qu'une infinité de segments parallèles est une surface.

2.7. L'aire sous une arche de cycloïde par Roberval.

Une cycloïde est une courbe décrite par un point o d'un cercle qui roule, sans glisser, sur une droite appelée base.

Dans son "Traité des indivisibles" (1634), Gilles Personne de Roberval (1602-1675) détermine l'aire délimitée par une arche de cycloïde et la base associée. A cette fin, il construit une courbe μ comme suit : à partir de chaque point g de la cycloïde, il reporte, parallélement à o a, un segment g h égal à e f (Fig.54). La courbe μ est composée des points h ainsi obtenus.

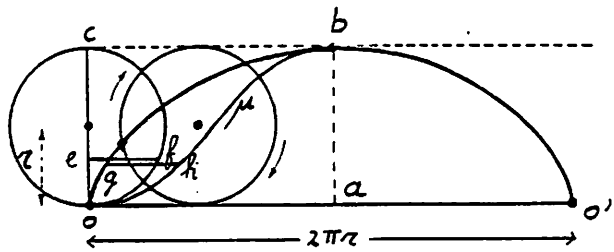


Fig.54

Quel rôle Roberval fait-il jouer à cette courbe μ? Comment procède-t-il pour déterminer l'aire délimitée par une arche de cycloïde et sa base?

2.7.1. Une résolution sommaire.

Du mode de construction de la courbe μ, on déduit que l'aire délimitée par la cycloïde et cette même courbe égale celle du demi-disque o f c (Fig.54). Or, la courbe μ, dont on démontre qu'elle est invariante par symétrie centrale autour du centre du rectangle o a b c, partage ce rectangle de longueur πr et de hauteur 2r en deux parties isométriques. Donc l'aire comprise sous une arche de cycloïde vaut

$$2(\pi r^2/2 + \pi r.2r/2) = 3\pi r^2,$$

c'est-à-dire trois fois celle du disque roulant.

2.7.2 Une difficulté imprévue.

Ce problème n'a été proposé qu'à quelques élèves des sections qui ont 7 heures de mathématiques par semaine. Alors que ceux-ci conjecturent assez facilement, au vu de la figure, que μ partage le rectangle en deux, tous ne perçoivent pas qu'il y a deux surfaces auxquelles peut s'appliquer le principe de Cavalieri, et ce, malgré la description de la courbe μ et la question relative à son rôle. L'un d'eux confie après coup:

[109] Je n'aurais jamais pensé qu'une surface aussi biscornue puisse être égale à un demi-cercle.

2.8. La quadrature de la Parabole par Archimède.

Une partie de l'oeuvre d'Archimède (287 - 212 avant Jésus-Christ) porte sur les quadratures et cubatures. [Ces termes désignent respectivement les calculs d'aires et les calculs de volumes et ce, dans l'Antiquité, époque à laquelle on associait à la recherche d'une aire ou d'un volume la construction, à la règle et au compas, soit d'un carré d'aire égale, soit d'un cube de volume égal]. *L'une de ces quadratures, célèbre, est celle de la parabole. Il s'agit de la détermination de l'aire d'un segment de parabole, c'est-à-dire de la surface délimitée par un arc de parabole a b c et la corde a c qui le sous-tend (Fig.55). Archimède arrive à la conclusion que "tout segment de parabole est équivalent aux quatre-tiers du triangle ayant même base et même hauteur", c'est-à-dire du triangle a b c dont le sommet b est celui de la parabole.*

Vous trouverez ci-dessous un extrait de "la Méthode" [Archimède, trad., 1971] *où Archimède décrit sa recherche. Lisez-le attentivement et résumez le noeud de son argumentation. Expliquez en quoi sa procédure se rapproche ou s'éloigne des principes de Cavalieri.*

"Soit le segment a b c compris entre la droite a c et la parabole a b c; divisions a c en deux parties égales par le point d, menons la parallèle d b e au diamètre et les droites a b et b c joignant b à a et à c.

Je dis que le segment a b c est équivalent aux quatre tiers du triangle a b c .

Menons des points a et c la droite a z parallèle à d b e et la droite c z tangente au segment et prolongeons c b jusqu'au point k; soit c k égal à k u. Imaginons que c u soit un levier de centre k, et *choisissons une parallèle m x à e d.*

Dès lors, comme c b a est une parabole, que c z est une tangente et que c d est mené d'une manière ordonnée, e b est égal à b d, comme cela a été démontré dans les Eléments [d'Euclide];

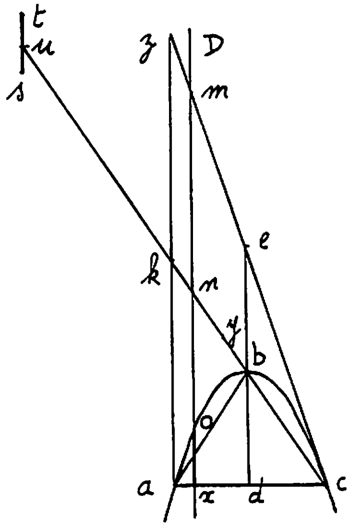


Fig.55

pour cette raison, et parce que z a et m x sont parallèles à e d, m n est égal à n x et z k égal à k a. Et comme c a est à a x comme m x est à x o, comme cela est démontré dans une lemme, que c a est à a x comme c k est à k n, et que, enfin c k est égal à k u, le rapport de u k à k n est égal au rapport de m x à x o. Et puisque le point n est le centre de gravité du segment de droite m x, parce que m n est égal à n x, si nous plaçons le segment de droite t s, égal à x o, de manière que son centre de gravité soit le point u et que t u soit égal à u s, le segment de droite t u s fera équilibre au segment de droite m x restant en place, parce que u n est coupé en raison inverse des poids t s et m x et que u k est à k n comme m x est à t s; il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux poids est le point k; de la même manière aussi toutes les parallèles à e d menées dans le triangle z a c feront équilibre, en restant en place, aux segments, découpés d'eux par la parabole et transportés au point u de manière que le centre de gravité de la grandeur composée des uns et des autres soit le point k. Et du moment que le triangle c z a est constitué par les segments de droites menés dans le triangle c z a, et le segment a b c constitué par les segments de droite pris dans le segment [sg. de parabole] de la manière que x o , le triangle z a c fera équilibre, en restant en place, *au segment de parabole placé autour du centre de gravité u, l'équilibre se faisant par rapport au point k, de façon que le centre de gravité de la somme des deux grandeurs soit le point k. Divisons dès lors c k par le point y de manière que c k soit triple de k y; le point y sera donc le centre de gravité du triangle a z c, comme cela a été démontré dans le livre ."Des équilibres" . Du moment donc que le triangle z a c, restant en place, fait équilibre, par rapport au point k , au segment b a c placé autour du centre de gravité u, et que le centre de gravité du triangle z a c est le point y, le rapport du triangle a z c au segment a b c placé autour du centre u est égal au rapport de u k à y k. Or u k est triple de k y; il s'ensuit que le triangle a z c est à son tour triple du segment a b c. Mais le triangle z a c est aussi quadruple du triangle a b c, parce que z k est égal à k a, et a d égal à d c; par conséquent, le segment a b c est équivalent aux quatre tiers du triangle a b c.*

2.8.1. Une procédure difficile à comprendre mais jugée astucieuse.

La lecture du texte d'Archimède était facultative. Les quelques élèves qui ont lu cette démonstration l'ont trouvée fort difficile à comprendre, mais une fois les détails maîtrisés, ils n'ont pas tari d'éloges.

2.8.2. Plusieurs tangentes en un point d'une courbe.

Un élève évoque la possibilité de tracer plusieurs tangentes cz à la parabole.

2.8.3. Des segments ne se pèsent pas.

Les seules réticences exprimées à l'encontre de la procédure d'Archimède concernent la matérialité des segments qu'il propose de peser :

[110] Mais un segment n'a pas de poids.
[111] C'est bien, mais il fait tout reposer sur une expérience irréaliste.

2.8.4. Des indivisibles non proportionnels.

La méthode d'Archimède fait implicitement appel au concept d'indivisible au sens où l'entendra plus tard Cavalieri, puisqu'il déduit une relation entre les aires de deux figures d'une relation entre les segments qu'y découpent des droites. Mais là s'arrête l'analogie : deux indivisibles homologues ne sont plus ici dans un rapport constant, mais bien dans un rapport dépendant de la position de l'un des deux.

Chapitre III

Les aires sous une courbe.

1. Quelques référents mathématiques et historiques.

1.1. Des calculs d'aires et de volumes divers standardisés au moyen d'une même intégrale.

Le volume de la pyramide, l'aire du segment de parabole, le centre de gravité d'un triangle, l'aire de la spirale d'Archimède dépendent tous, ainsi que le précise Bourbaki (1960), de l'intégrale $\int k\, x^2\, dx$, c'est-à-dire qu'ils se ramènent tous à des sommes de Riemman de la forme $\sum an^2$. Le premier de ces problèmes a été résolu par Eudoxe, les trois autres par Archimède. Sans remettre en cause ni la rigueur des méthodes d'Archimède, ni leur fécondité et en ignorant jusqu'à quel point ce dernier a perçu les liens de parenté entre ces différents problèmes, Bourbaki est loin de considérer l'oeuvre d'Archimède comme le premier traité de calcul intégral en ceci, précisément, qu'elle échoue à dégager une certaine uniformité algébrique, par delà les particularités géométriques de chaque problème : "Mais pour qu'on ait le droit de voir là un "calcul intégral", il faudrait y mettre en évidence, à travers la multiplicité des apparences géométriques, quelque ébauche de classification des problèmes suivant la nature de l'"intégrale" sous-jacente. Au XVII^e^ siècle, nous allons le voir, la recherche d'une telle classification devient peu à peu l'un des principaux soucis des géomètres; si l'on n'en trouve pas trace chez Archimède, n'est-ce pas un signe que de telles spéculations lui seraient apparues comme exagérément "abstraites" et qu'il s'est volontairement, au contraire, en chaque occasion, tenu le plus près possible des propriétés spécifiques de la figure dont il poursuivait l'étude? Et ne devons-nous pas conclure que cette oeuvre admirable, d'où le calcul intégral, de l'aveu de ses créateurs, est tout entier sorti, est en quelque façon à l'opposé au calcul intégral ?" (Bourbaki, 1960).

L'objectif de ce chapitre est de faire prendre conscience aux élèves que des calculs d'aires et de volumes a priori différents peuvent être standardisés par le biais d'une même fonction.

1.2. Des volumes du cône et de la sphère à l'aire sous une parabole, au moyen des indivisibles.

Le volume d'un cône de base B et de hauteur H s'obtient au moyen de l'intégrale $\int_0^H B.(x^2/H^2)\,dx = B.H/3$; celui de la sphère, dans un système de coordonnées sphériques (ρ, θ, ϕ) (Fig.1), au moyen de l'intégrale $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$ laquelle se ramène à $\int_0^R 4\pi\rho^2 d\rho = 4\pi R^3/3$. Le calcul de l'aire sous une parabole $y = k\,x^2$, entre les bornes a et b, revient à intéger $\int_a^b k\,x^2\,dx = k(b^3-a^3)/3$. L'intégrand est, à chaque fois, une fonction du second degré du type $f(x) = kx^2$. Les trois calculs peuvent donc être standardisés au moyen d'un seul d'entre eux : par exemple, l'aire sous la parabole.

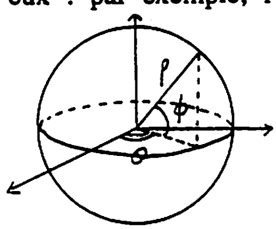


Fig.1

Comment prendre conscience de cette unité, au moyen des indivisibles? Décomposons le cône et le cylindre qui lui est circonscrit en sections perpendiculaires à leur axe commun (Fig.2). Associons, à chaque section du cône, depuis le sommet de celui-ci jusqu'à sa base, un segment dont la longueur s'exprime au moyen du même réel que l'aire de cette section. Disposons les segments ainsi obtenus perpendiculairement à un segment de longueur égale à la hauteur H du cône, en alignant leurs extrémités inférieures sur ce même segment : nous obtenons la surface S striée de la Fig.3. On fait de même pour les sections planes du cylindre et on obtient le rectangle circonscrit à S comme sur la Fig.3. L'aire de S est à celle de ce rectangle ce que le volume du cône est à celui du cylindre. En effet, les segments indivisibles homologues des deux surfaces, à distance h du sommet o du rectangle, sont entre eux comme les sections indivisibles homologues du cône et du cylindre, à distance h du sommet du cône et ce, quelle que soit la valeur de h comprise entre 0 et H. Or, si l'on choisit un axe ox de direction oa et un axe oy de direction ob (Fig.3), on peut regarder la courbe délimitant d'un côté la surface S comme la courbe représentative de la fonction $y = B.x^2/H^2$. Donc, le volume du cône vaut l'aire sous la parabole, à supposer que l'on ait pris des unités de volume et d'aire correspondantes (des m^2 pour des m^3, ...).

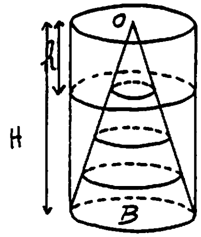


Fig.2

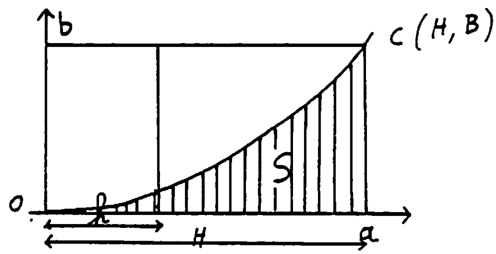


Fig.3

On peut voir mentalement une sphère de rayon R se déformer en un cône, en la regardant comme l'assemblage de surfaces sphériques concentriques emboîtées dont les rayons x s'échelonnent de 0 à R. On déforme ensuite chacune de ces surfaces pour l' "aplatir" en un disque. On empile enfin les disques ainsi obtenus les uns sur les autres du plus grand au plus petit : ils forment un cône (Fig.4), puisque l'aire d'une surface sphérique est proportionnelle au carré de son rayon. On aura compris que le volume de la sphère peut être figuré par une surface semblable à S où l'on aura choisi H = R, chaque indivisible de S, perpendiculaire à sa frontière inférieure, représentant une des surfaces sphériques qui composent la sphère. Ainsi, en décomposant cette dernière en indivisibles courbes, on ramène le calcul de son volume soit à celui du volume d'un cône, soit à celui de l'aire sous une parabole.

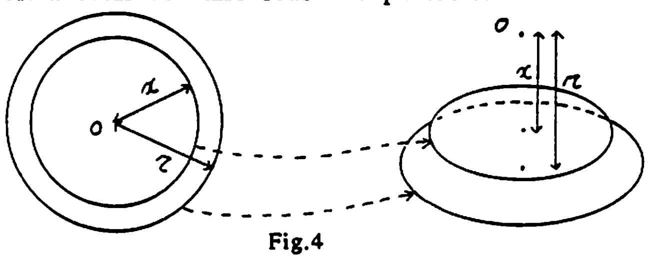


Fig.4

Les indivisibles, interprétés librement, permettent donc de "se convaincre" qu'on peut réduire un calcul d'aire ou de volume en un autre calcul mobilisant le même intégrand : rechercher le volume du cône (celui de la pyramide), celui de la sphère, revient à déterminer l'aire sous une parabole. Mais encore faut-il pouvoir résoudre ce dernier problème sans quoi on risque de tourner en rond : l'aire sous une parabole se ramenant au volume du cône!

L'emploi des indivisibles devient ici fort ardu et délicat : d'autres méthodes heureusement le complètent. Pour illustrer ce fait, nous montrons comment Euclide détermine le volume de la pyramide (section 1.3.), comment Cavalieri calcule $\int_0^1 x^2\, dx$ (section 1.4.) et comment on calcule cette dernière intégrale par la méthode des limites (section 1.5.). Le lecteur se référera aussi utilement à la quadrature de la Parabole par Archimède (section II.2.8.).

1.3. Le volume de la pyramide par la méthode d'exhaustion.

A la proposition 5 du livre XII des "Eléments", Euclide démontre que : "Les pyramides triangulaires qui ont la même hauteur sont entre elles comme leurs bases", propriété dont il se sert pour démontrer que le volume d'une pyramide vaut le tiers de celui d'un prisme de même base et de même hauteur. Son argumentation illustre parfaitement ce que l'on entend par **méthode d'exhaustion.** Mais avant d'y venir, Euclide prépare le terrain, d'un point de vue technique, au moyen des propositions 3 et 4 reprises ci-après.

Proposition 3 : "Toute pyramide triangulaire peut se diviser en deux pyramides triangulaires égales et semblables entre elles et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux; et ces deux prismes sont plus grands [à eux deux] que la moitié de la pyramide entière". Commentons cette proposition. Soit la pyramide de sommet D et de base ABC (notée D(ABC) conformément aux notations contenues dans Euclide, trad. T.L. Heath, 1956) (Fig.5). Soit E, F, G, H, K, L, les milieux respectifs des segments AB, CB, AC, AD, DB, CD. Les pyramides H(AEG) et D(HKL) sont les pyramides égales et semblables à la pyramide D(ABC). Les prismes égaux, plus grands que la moitié de la pyramide entière, sont les prismes (GCF, HLK) et (HGE, KFB).

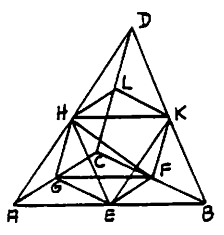


Fig.5

Proposition 4 : "Si deux pyramides triangulaires de même hauteur sont divisées l'une et l'autre en deux pyramides égales entre elles et semblables à la pyramide entière et en deux prismes égaux, si chacune des pyramides engendrées est divisée de la même manière, et si l'on fait toujours la même chose, la base de l'une de ces pyramides sera à la base de l'autre pyramide comme tous les prismes contenus dans l'une de ces pyramides sont à tous les prismes contenus dans l'autre, ces prismes étant égaux en nombre".

Le terrain étant ainsi déblayé, Euclide est en mesure de démontrer la proposition 5 au moyen de la méthode d'exhaustion que T.L. Heath (Ib.) décrit à peu près dans les termes suivants. Appelons P et P' les volumes des pyramides G(ABC) et H(DEF) de la Fig.6 et B, B' leurs bases respectives. Si $P/P' \neq B/B'$, alors $B/B' = P/W$ avec $W \neq P'$.

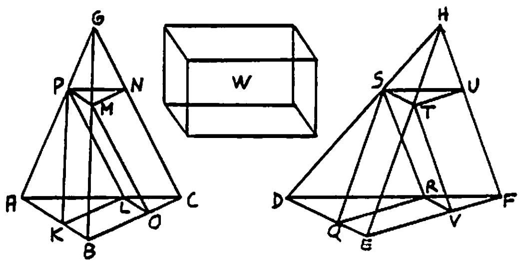


Fig.6

1) Supposons $W < P'$

On divise P' en deux prismes et deux pyramides, on divise ces dernières de manière similaire et ainsi de suite, jusqu'à ce que les pyramides restantes soient plus petites que la différence entre P' et W. On a :

$$P' > (\text{prismes dans } P') > W$$

On divise P de manière analogue, le même nombre de fois. Alors, en vertu de la proposition 4,

$$(\text{prismes dans } P)/(\text{prismes dans } P') = B/B' = P/W$$

et,

$$(\text{prismes dans } P)/P = (\text{prismes dans } P')/W.$$

Mais

$$(\text{prismes dans } P) < P \ ;$$

donc

$$(\text{prismes dans } P') < W.$$

Ce qui contredit que, par construction,

$$(\text{prismes dans } P') > W.$$

De là on tire que W ne peut pas être plus petit que P'.
2) Supposons, à présent, que $W > P'$.
Alors, inversément,

$$B'/B = W/P = P'/V$$

où V est un solide plus petit que P. Mais on peut prouver que cela est impossible, exactement comme dans la première partie. Par conséquent, W ne peut être ni plus petit, ni plus grand que P' et

$$B/B' = P/P'.$$

L'essentiel de cette démonstration réside dans la possibilité d'obtenir des pyramides restantes inférieures à P'-W, lorsqu'on divise P' en deux pyramides et deux prismes, comme indiqué à la proposition 3, les nouvelles pyramides de la même manière, et ainsi de suite. C'est une des conséquences de l'axiome d'Archimède, formulée par Euclide, à la proposition 1 du livre X : "Soient deux grandeurs inégales [$P'-W < P'$]. Si l'on soustrait de la plus grande [P'] une grandeur supérieure à sa moitié [les prismes] et de ce qui reste une grandeur supérieure à la moitié de ce reste, et si l'on répète continuellement le procédé, alors il restera une grandeur [les pyramides restantes] inférieure à la plus petite grandeur envisagée [P'-W]. Autrement dit, on peut obtenir une grandeur aussi petite que l'on veut en enlevant successivement d'une grandeur arbitraire, plus de la moitié de ce qu'il en reste. Toute la méthode d'exhaustion tient dans ce principe que l'on utilise pour prouver, par un double raisonnement par l'absurde, que deux grandeurs sont égales.

1.4. Le calcul de $\int_0^1 x^2dx$ par Cavalieri.

Sur base de considérations géométriques, Cavalieri obtient un résultat que nous avons l'habitude d'écrire :

$$\int_0^1 x^n dx = 1/(n+1),\ 1 \leq n \leq 9.$$

Voici sa procédure, pour n = 2, telle que décrite, à peu de choses près, en notations et terminologie modernes, par D. J. Struik, (1969). Dans le carré AFDC (Fig.7), on trace NE et BG tels que

$$NE \; // \; BG // \; AF,$$

$$HE = BM, NH = MG$$

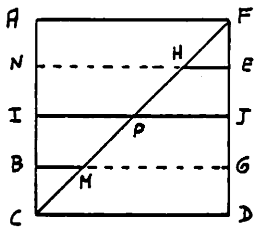


Fig.7

Posons HE = x ; NH = y ; AF = a ; $\Sigma\, x^2$, l'ensemble des carrés de tous les indivisibles du triangle CDF, parallèles à AF; $\Sigma\, y^2$, l'ensemble des carrés de tous les indivisibles du triangle AFC, parallèles à AF ; $\Sigma\, a^2$, l'ensemble des carrés de tous les indivisibles du carré AFDC et $\Sigma\, xy$ l'ensemble des produits des indivisibles x et y homologues des deux triangles. Cavalieri assimile $\Sigma\, x^2$ au volume de la pyramide de sommet F et dont la base est le carré de CD. On a

$$\Sigma\, a^2 = \Sigma\, (x+y)^2 = \Sigma\, x^2 + 2\,\Sigma\, xy + \Sigma\, y^2$$

ou, par égalité des triangles AFC et CDF,

$$\Sigma\, a^2 = 2\,\Sigma\, x^2 + 2\,\Sigma\, xy$$

ou, en écrivant $x = (a/2) + z$ et $y = (a/2) - z$,

$$\Sigma\, a^2 = 2\,\Sigma\, x^2 + 2\,\Sigma\, (a/2 + z)\,(\,a/2 - z)$$

$$= 2\,\Sigma\, x^2 + 2\,\Sigma\, a^2/4 - 2\,\Sigma\, z^2$$

De là, on tire :

$$\Sigma\, a^2 = 4\,\Sigma\, x^2 - 4\,\Sigma\, z^2.$$

Mais Σz^2 est la somme des carrés des indivisibles des triangles PFJ et IPC réunis. Or Σz^2 "égale", pour un de ces triangles, le volume d'une pyramide semblable à la pyramide dont le volume est représenté par Σx^2, le rapport de similitude étant 1/2. Donc, pour les deux triangles PJF et IPC réunis :

$$\Sigma z^2 = 2 (1/8) \Sigma x^2.$$

Dès lors :

$$\Sigma a^2 = 3 \Sigma x^2.$$

Mais, Σa^2 équivaut au volume d'un cube de côté a, soit a^3. Par conséquent :

$$\Sigma x^2 = a^3/3.$$

1.5. L'aire sous $y = x^2$ par la méthode des limites.

Dans la méthode d'exhaustion, les aires curvilignes sont approchées par des aires rectilignes de formes diverses, choisies en fonction de la forme des premières. Une nouvelle procédure naît au XVII^e^ siècle lorsque les mathématiciens approchent systématiquement une aire curviligne - quelle qu'elle soit - au moyen de rectangles. M. Kline (1972) commente cette procédure à propos de l'aire sous $y = x^2$. Les rectangles représentés à la Fig.8 ont tous la même largeur d. La somme de leurs aires s'écrit

$$d.d^2 + d(2d)^2 + \ldots d(nd)^2,$$

ou encore,

$$d^3 (1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = (OB)^3 (1/3 + 1/2n + 1/6n^2).$$

La nouvelle méthode consiste alors à négliger les termes $1/2n$ et $1/6n^2$ en invoquant le fait que l'approximation sera d'autant meilleure que l'on prendra plus de rectangles. Cet argument remplace le double raisonnement par l'absurde exigé par la méthode d'exhaustion. Il y a donc ici, un "passage à la limite" effectivement réalisé, mais non justifié, du fait qu'au XVII^e^ siècle, on ne disposait pas du concept de limite.

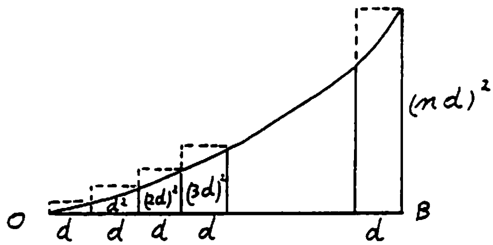


Fig.8

2. Le travail en classe.

2.1. Du cylindre au cône, tout de go.

Le volume d'un cône - droit, par exemple - égale le tiers de celui du cylindre qui lui est circonscrit. Peut-on pressentir ce résultat - fût-ce approximativement - en comparant directement ces deux solides l'un à l'autre, ou leurs indivisibles? Serait-ce éclairant de les décomposer tous deux en sections radiales contenant leur axe commun (Fig.9). Pourquoi?

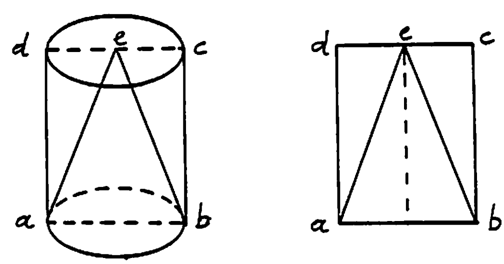


Fig.9

<u>2.1.1. Le leurre des sections radiales.</u>

Bien des élèves commencent en suivant la suggestion finale de la fiche. La décomposition du cône et du cylindre en sections radiales ébranle la plupart d'entre eux : si ces deux solides sont engendrés par la rotation de deux surfaces dont les aires respectives sont dans le rapport de 1 à 2, comment se fait-il que leurs volumes soient, eux, dans le rapport de 1 à 3? Certains vont jusqu'à remettre en cause la manière dont on avait déterminé le volume du cône au chapitre II :

[112] C'est que l'on s'est trompé puisqu'on avait trouvé que le cône valait le tiers du cylindre et qu'on voit bien qu'ici il en vaut la moitié.

2.1.2. Les sections radiales en cause.

Pour éclaircir l'énigme, les élèves empruntent des voies diverses.
1) Certains s'en tiennent à la décomposition radiale et expliquent pourquoi elle conduit à un résultat faux. Voici leurs arguments:

[113] On prend x loin de l'axe de rotation et y tout près : x décrit une plus grande circonférence que y [Fig.10]. *Or le triangle qui engendre le cône contient, globalement, plus de points situés près de l'axe de rotation que l'autre* [Le triangle complémentaire du premier dans le rectangle].
[114] Tous les plans contiennent l'axe, donc on compte l'axe à chaque fois, donc on compte trop.
[115] C'est faux car on ne respecte pas le principe de Cavalieri. Donc il reste toujours un angle entre deux indivisibles.

Cette idée de l'angle est davantage exploitée par d'autres élèves :

[116] Les sections radiales du cône ne conduisent à rien, car, entre deux plans radiaux, il y a plus d'espace loin de l'axe et c'est là que le cône prend le moins de place.
[117] Par le fait que les points du centre sont plus concentrés que ceux du bord du cône et que le centre est occupé par le cône, les points du cône prennent "moins" de place que les points constituant le cylindre. Espace entre deux rayons [Désigne l'accolade de la Fig.11]*, il y a de plus en plus de points constituant le reste du cylindre que de points constituant le cône et, au plus on se rapproche du centre, au moins il y a de points entre chaque rayon. Il y a un rapport de 1/3 du centre vers l'extérieur.*

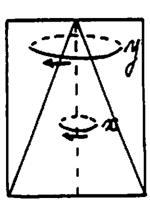


Fig.10

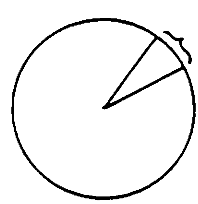


Fig.11

Un élève propose de déformer la section radiale :

[118] Le point a représente plus de volume que le point b [Montre la Fig.12], *donc il faut déformer la coupe en fonction du volume qu'il représente. C'est pourquoi, j'ai surévalué le volume du cône* [Propose la Fig.14 en lieu et place de la Fig.13].

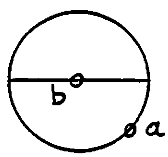


Fig.12

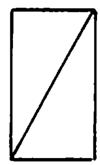


Fig.13

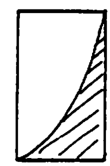


Fig.14

2) Trois groupes d'élèves jouent sur deux décompositions distinctes : ils considèrent l'espace compris entre deux plans radiaux et divisent celui-ci en lamelles perpendiculaires à l'axe des solides (Fig.15). Ils

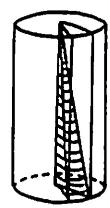


Fig.15

additionnent alors, deux par deux, les aires des sections du cône équidistantes, l'une du sommet du cône, l'autre de sa base et trouvent un résultat plus petit ou égal à l'aire de la section découpée dans le cylindre : cfr. exemples à la Fig.16. Ils en concluent que le volume du cône vaut certainement moins de la moitié de celui du cylindre.

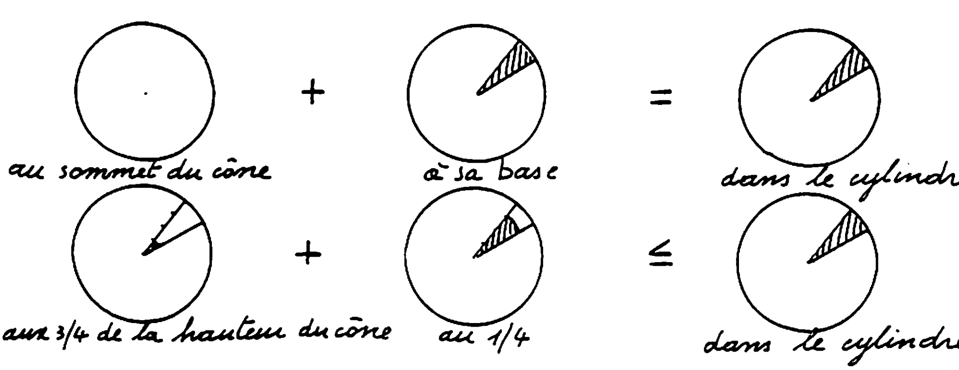


Fig.16

3) D'autres élèves envisagent d'emblée une décomposition par plans parallèles aux axes des solides :

[119] Lors de coupes plus avancées dans le cylindre, on observe que le rectangle diminue et que le triangle diminue, mais dans des proportions beaucoup plus grandes (sans que la hauteur du rectangle diminue) [Fig. 17 où les élèves ont complété ultérieurement les triangles des tracés d'hyperboles].

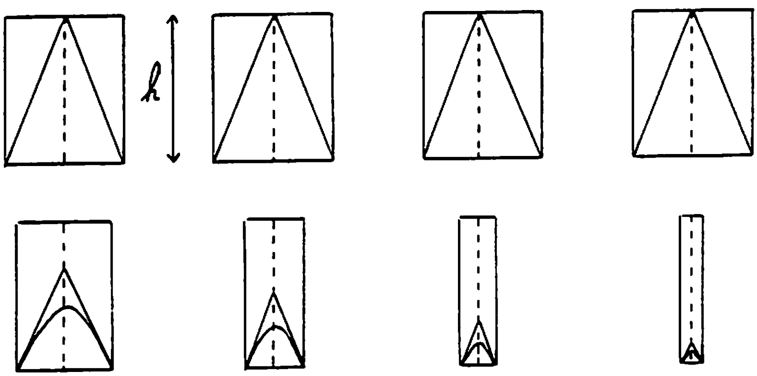


Fig.17

4) D'autres encore prennent, dès le départ, des plans perpendiculaires à l'axe. Parmi les élèves qui font ce dernier choix, tous pratiquement poursuivent de la même manière : ils tentent d'exprimer la variation de l'aire S découpée dans le cône en fonction de la position x du plan de coupe (par exemple le x de la Fig.18). Avec ou sans l'aide du professeur, ils obtiennent $S = k\ x^2$, avec $k = \pi R^2/h^2$. Et le seul tracé du graphe de cette fonction les convainc que le volume du cône ne peut pas valoir la moitié de celui du cylindre :

[120] Si c'était la moitié, les surfaces auraient dû évoluer de façon rectiligne [Montre la Fig.19].

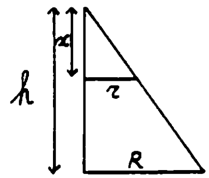


Fig.18

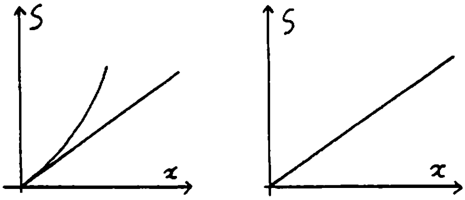


Fig.19

Quelques élèves, parmi ceux qui avaient lu le texte d'Archimède, pensent à réinvestir la quadrature de la parabole :

> *[121] L'aire hachurée* [Fig.20], *qui correspond au volume du cône vaut le tiers du rectangle qui correspond au cylindre.*

5) Enfin, un élève imagine d'insérer deux cônes dans le cylindre, comme sur la Fig.21, et de couper les trois solides par des plans parallèles à leurs bases. Il montre alors que les disques déterminés dans les cônes par un de ces plans ne remplissent pas le disque déterminé dans le cylindre et en conclut que chacun des deux cônes vaut moins de la moitié du cylindre.

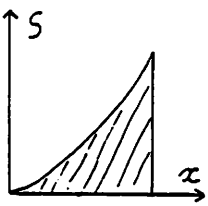


Fig.20

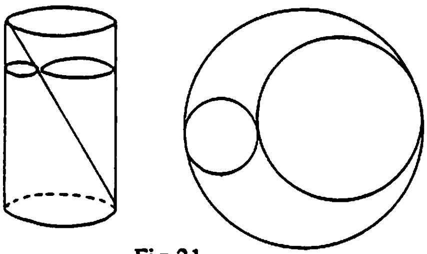


Fig.21

Aucune synthèse collective n'est faite à ce stade.

2.2. Le paraboloïde de révolution.

Considérons la surface délimitée par la demi-parabole d'équation $y = \sqrt{x}$, l'axe ox et la droite d'équation $x = 3$. Faisons tourner cette surface autour de l'axe ox : le solide engendré ainsi s'appelle ***paraboloïde de révolution*** *.*

Déterminez le volume de ce solide en le comparant au cylindre qui lui est circonscrit.

2.2.1. Un retour aux sections radiales.

Après avoir fait le dessin (Fig.22), l'un ou l'autre élève propose de comparer les sections radiales des deux solides. Deux d'entre eux ont lu la quadrature de la parabole par Archimède : la surface hachurée sur la Fig.22 vaut les 2/3 du rectangle circonscrit, le paraboloïde vaut donc les 2/3 du cylindre. Les autres se contentent d'estimer le paraboloïde à:

> *[122] Certainement plus de la moitié du cylindre.*

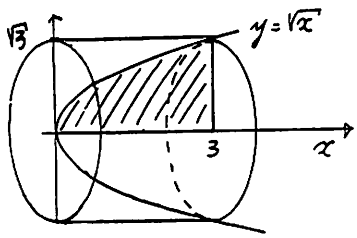


Fig.22

Le souvenir du problème précédent les fait cependant douter.

<u>2.2.2. Les indivisibles perpendiculaires à l'axe ox varient de manière très régulière!</u>

La grande majorité des élèves entreprend de calculer l'aire des sections circulaires du paraboloïde, perpendiculaires à son axe, à la moitié de sa hauteur, au tiers, aux deux-tiers...:

> *[123] $x = 1,5$ -> $S = 1,5\ \pi$,*
> *$x = 2$ -> $S = 2\ \pi$,*
> *$x = 1$ -> $S = \pi$.*

Les résultats obtenus frappent leur imagination :

> *[124] La variation est très régulière.*
> *[125] Ca varie suivant une droite.*

Il n'en faut pas plus pour qu'une bonne partie d'entre eux réalise que le paraboloïde vaut la moitié du cylindre :

> *[126] A mi-hauteur, le paraboloïde* [sa section bien entendu] *vaut la moitié du cylindre, au tiers, il vaut le tiers, donc au total, il en vaut la moitié .*

Parmi eux, certains dessinent la droite d'équation $y = \pi x$, d'autres non.

Ceux qui n'ont encore rien conclu sont invités à représenter cette droite qui exprime la variation des indivisibles du paraboloïde, et même, en l'absence de réaction, ils sont invités à représenter celle qui représente les aires des indivisibles du cylindre (Fig.23). La conclusion s'impose à ce moment de façon inéluctable : le paraboloïde est au cylindre ce que le triangle (hachuré sur la Fig.23) est au rectangle circonscrit, c'est-à-dire qu'il en vaut la moitié.

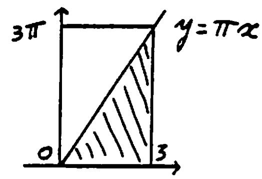


Fig.23

Trois élèves hésitent cependant. Les deux premiers parce qu'ils se réfèrent à nouveau aux sections radiales :

[127] C'est normal que ça donne la moitié ? On dirait que c'est plus grand quand on voit une coupe.

Le troisième propose le rapport suivant :

[128] Volume paraboloïde / Volume cylindre = xπ / 3π.

Le professeur passe de suite au problème que voici.

2.3. Le calcul de l'aire sous une parabole se ramène à celui du volume d'un cône.

Soit la surface délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$, l'axe o x et la droite d'équation $x = 2$. Déduisez l'aire de cette surface du volume du cône.

2.3.1. Une consigne féconde : représenter les indivisibles des solides par des segments.

Ce problème n'en est plus un pour les élèves qui, à l'occasion de la fiche 2.1., avaient représenté au moyen d'une parabole la variation des aires des sections droites du cône. Mais il semble fort difficile pour tous les autres qui restent bloqués. Le professeur les engage alors à dessiner *"deux surfaces planes dont les segments indivisibles homologues sont entre eux comme les sections indivisibles d'un cône de rayon 2 et de hauteur 3 et du cylindre qui* *lui est circonscrit".* Cette consigne décoince la plupart des élèves, qui envisagent la fonction y = 4π $x^2/9$ et représentent correctement les deux surfaces en question (Fig.24). Certains s'en tiennent cependant à une idée plus vague de "fonction-carré":

[129] Le rapport entre les sections est un "carré", donc on prend la parabole y = x^2, car là on a aussi un rapport de "carré".

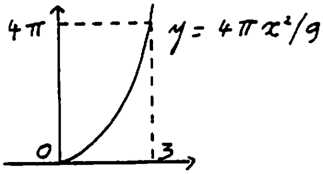


Fig.24

Ils concluent tous que l'aire délimitée par la parabole et les droites y = o et x = 3 est à celle du rectangle, ce que le volume du cône est à celui du cylindre, c'est-à-dire ce que 1 est à 3. Ils n'éprouvent aucune peine à imaginer qu'il en sera de même de toutes les paraboles et en particulier de la parabole y = x^2. Toutefois ils ne déterminent pas systématiquement le rayon ni la hauteur du cône dont les indivisibles varient suivant la loi y = x^2.

2.3.2. Les calculs d'aires et de volumes s'entremêlent...

Le professeur résume les solutions proposées aux problèmes 2.1. à 2.3., en insistant sur le fait suivant. Dans le cas du cône comme dans celui du paraboloïde, on a représenté la fonction qui exprime l'aire d'un disque indivisible par rapport à sa position : celle-ci, notée x, représentait la distance de ce disque au sommet du solide [Quelques élèves avaient choisi pour variable x la distance du disque à la base du solide; le professeur le signale]. On a ensuite comparé, d'une part, l'aire de la surface délimitée par le graphe de cette fonction, l'axe ox entre des bornes appropriées, à l'aire du rectangle qui lui est circonscrit et, d'autre part, le volume du cône ou du paraboloïde à celui du cylindre circonscrit : le rapport était le même dans les deux cas. Les élèves se déclarent spontanément convaincus de ce fait qu'ils justifient eux-mêmes : les indivisibles homologues des deux surfaces sont entre eux comme sont ceux des deux solides. Cette constatation a permis de déduire tantôt un volume d'une aire, tantôt le contraire. Le professeur termine en définissant "l'aire sous la courbe représentative d'une fonction y = f(x) entre les bornes a et b" qu'il note $\int_a^b$ f(x).

Cette notation, reprise ultérieurement par les élèves, désigne une aire au sens géométrique du terme; elle ne signifie donc nullement la différence des valeurs qu'une primitive de f prend aux bornes a et b, comme c'est le cas dans la théorie de l'intégration.

Les deux énoncés suivants ont été soumis, ensemble, aux élèves.

2.4. Du triangle au disque.

L'aire d'un disque de rayon r vaut celle du triangle délimité par les droites d'équation $y = 2\pi x$, $y = o$ et $x = r$, c'est-à-dire $2\pi r.\ r/2 = \pi r^2$ (Fig.25). A quoi est-ce dû?

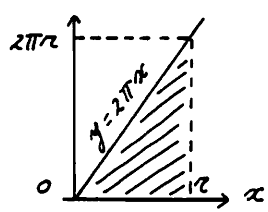


Fig.25

2.5. La sphère sous un éclairage nouveau.

Dans la méthode (trad., 1971), *Archimède écrit : "Je supposais, [...] que, du moment que tout cercle est équivalent à un triangle ayant pour base la circonférence du cercle et pour hauteur le rayon du cercle, toute sphère est équivalente à un cône ayant pour base la surface et pour hauteur le rayon de la sphère". Expliquez ce propos.*

<u>2.5.1. La transformation du disque en triangle fait l'objet d'un"insight"</u> [Terme emprunté à la littérature de pédagogie anglo-saxonne et qui signifie : découverte soudaine; G. De Landsheere, 1979].

Pour interpréter l'égalité des aires du disque et du triangle (fiche 2.4.), il faut considérer le disque comme un assemblage de cercles concentriques dont les rayons s'échelonnent de 0 à r (Fig.26). En effet, déroulons chacun de ces cercles en un segment de droite et disposons ceux-ci perpendiculairement à l'axe ox comme illustré à la Fig.26 Ils forment un triangle dont la base et la hauteur égalent, l'une le rayon du disque, l'autre son périmètre. Ces deux surfaces, composées d'indivisibles égaux deux à deux, ont donc même aire.

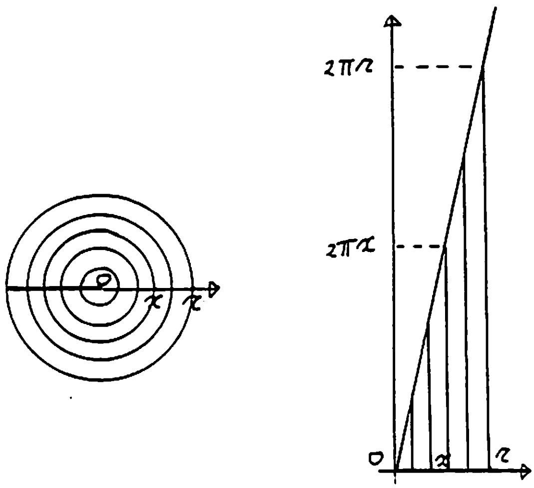


Fig.26

Quelques rares élèves imaginent spontanément un tel découpage. Il suffit cependant de demander aux autres avec quoi on pourrait comparer la base et la hauteur du triangle pour provoquer chez beaucoup d'entre eux un *insight* : une fois qu'ils ont vu mentalement la hauteur s'enrouler pour former le périmètre du disque (ou bien qu'ils ont vu celui-ci se dérouler), ils imaginent les deux découpages et le passage de l'un à l'autre.

Le professeur questionne alors les élèves sur le fait que les extrémités supérieures des indivisibles du triangle décrivent une droite et non une courbe, ce qui leur semble une évidence :

> *[130] Mais puisque le périmètre d'un cercle est proportionnel à son rayon!*

D'autres élèves qui n'avaient jamais entendu parler ni de Cavalieri ni des indivisibles ont été invités à travailler la fiche 2.4. Un seul a proposé de découper le disque en lamelles et de dérouler celles-ci, comme sur la Fig.27. Plusieurs autres ont critiqué cette façon de faire en avançant :

[131] On n'obtient pas tout-à-fait un triangle aux côtés rectilignes, si ce n'est en faisant des lamelles réduites à des cercles, ce qui n'est pas pensable étant donné qu'il faut évaluer une surface.

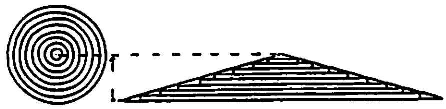


Fig.27

2.5.2. Une sphère qui devient un cône.

Les élèves imaginent avec peine comment "transformer" la sphère en cône, ainsi que nous l'avons fait à la section III.1.2., même lorsque cela leur est suggéré. Ils en expriment eux-mêmes les raisons, une fois l'explication entendue :

[132] Les surfaces sphériques vont se casser en s'aplatissant.
[133] Je ne connaissais pas l'aire de la sphère.
[134] Je ne vois pas ce que cela vient faire que l'aire est proportionnelle à r^2.

2.5.3. Le calcul de l'aire sous une courbe : un problème standard.

Le professeur propose de s'intéresser aux aires sous les courbes représentatives de certaines fonctions (e.a. les fonctions polynomiales). Il rappelle les raisons pour lesquelles cette étude paraît prometteuse. Des calculs d'aires et de volumes fort éloignés les uns des autres a priori ont pu être "standardisés" au moyen du calcul de l'aire sous une courbe du même type : une courbe du premier degré (une droite) en ce qui concerne le volume du paraboloïde et l'aire du cercle; une courbe du second degré pour ce qui est de la quadrature de la parabole, du volume du cône, de celui de la pyramide et de celui de la sphère.

2.6. D'une classe de fonctions à une autre.

Que vaut l'aire délimitée par le graphe de la fonction $y = 5x^2 + 6x + 2$, l'axe ox et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$?

Certains élèves entreprennent d'inscrire cette portion de parabole dans un rectangle ABCD (Fig.28). Ils calculent alors l'aire demandée en divisant par trois l'aire de ce rectangle à laquelle ils ajoutent celle du rectangle ABFE, ce qui donne un faux résultat de 34.

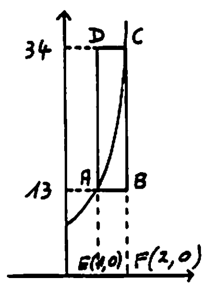


Fig.28

D'autres remarquent que la fonction donnée est une somme de trois termes : $5x^2$, $6x$ et 2. Ils dessinent la fonction $y = 5x^2$, la fonction $y = 6x$ mais non la fonction constante $y = 2$. Très vite ils en arrivent à dire que l'aire sous $y = 5x^2$ vaut 5 fois plus que celle sous $y = x^2$ entre les mêmes bornes et proposent spontanément : $\int_1^2(5x^2 + 6x + 2) = 5\int_1^2 x^2 + 6\int_1^2 x + 2 = 68/3$. Mais ils ne justifient pas cette conclusion alors qu'il s'agit là, pour l'essentiel, d'une application des principes de Cavalieri.

Le professeur propose ensuite de calculer l'aire sous la même courbe, mais cette fois entre les bornes 0 et 2. La réponse la plus fréquemment récoltée est $5\int_0^2 x^2 + 6\int_0^2 x + 2$, ce qui montre que beaucoup d'élèves ne pensent pas le dernier terme 2 comme une fonction (constante).

2.7. L'aire sous $y = x^3$.

Soit l'aire délimitée par le graphe de la fonction $y = x^3$, l'axe ox et les droites d'équation

1° $x = o$ et $x = 1$

2° $x = a$ et $x = b$.

Pouvez-vous évaluer cette aire avec une précision arbitraire? Comment?

Ce problème a été proposé:
-à des classes pour lesquelles c'était le tout premier contact avec un processus infini (groupe A);
-à d'autres qui avaient pour seule expérience de l'analyse les problèmes des chapitres II et III ci-dessus (groupe B);
-à d'autres enfin qui avaient travaillé, eux aussi, ces problèmes mais qui, en outre, avaient reçu l'année précédente un enseignement classique sur les limites, la continuité et les dérivées (groupe C).
Dans le compte-rendu qui suit, nous distinguerons ces trois catégories chaque fois que cela sera significatif.

2.7.1. De procédures variées à une suite de sommes de rectangles ou de trapèzes.

Voici, dans les grandes lignes, la progression d'un groupe de quatre élèves pour qui ce calcul représente un tout premier contact avec l'analyse (groupe A) :

> *[135] On peut déjà trouver le triangle : on a la base et la hauteur, ça donne 1/2 unité de surface* [Fig.29].
> *-Il faudrait retrancher ça* [la lunule hachurée].
> *-Est-ce-que c'est symétrique?*
> *-Non, c'est pas un cercle et puis de toute façon, ça n'aurait rien arrangé.*
> *-Peut être qu'en dessinant plein de tangentes à la courbe?* [Fig.30].
> *-Ca pourrait quand même être un arc de cercle sur un tout petit intervalle.*
> *-Non, c'est comme pour une parabole, tu n'as pas d'arcs de cercle.*
> *-Même tout, tout petit ?*
> *-Si on coupe en petits intervalles comme ça* [Fig.31].
> *-Non, il faut une méthode générale, tu ne vas quand même pas calculer tous les points.*
> *-Oui, mais est-ce que le bout de courbe ne ferait pas partie d'une ellipse ou d'une parabole?*
> *-Et en calculant la proportion entre ces petits segments, on connaîtrait la proportion entre chacune des parties et le triangle* [Fig.32].

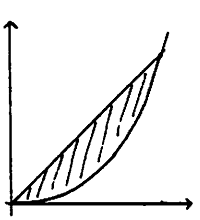


Fig.29

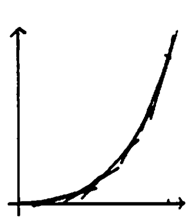


Fig.30

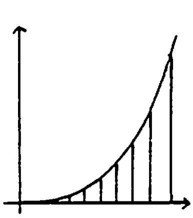


Fig.31

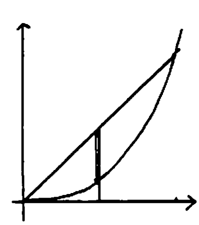


Fig.32

-Si on avait la tangente parallèle à y = x, on pourrait coincer cette partie-là [la lunule de la Fig.33. Ils font un dessin plus grand et plus précis sur du papier quadrillé].
-Ca vaut à peu près 1/4 car c'est la moitié du triangle [Le triangle OAB de la Fig.34, qui vaut le double du triangle CAB, lequel a une aire jugée plus ou moins égale à l'aire cherchée; les autres contrôlent cette affirmation en évaluant les parties 1 et 2 de la Fig.34 au moyen des carrés de la feuille].
-On peut directement longer la courbe avec des carrés et compter ceux qui sont en dessous [Fig.35]. Après un long silence, le professeur demande si on ne peut pas grouper les carrés de manière à pouvoir exprimer leur nombre par un calcul littéral et généralisable. Après un certain temps, l'un des élève suggère, peu convaincu:]
-Peut être en dessinant ça? [Le segment AB de la Fig.36.Ils en restent là cinq minutes avant qu'il ne sonne].

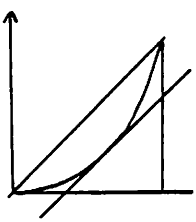


Fig.33

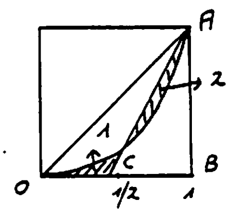


Fig.34

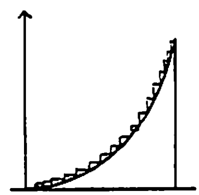


Fig.35

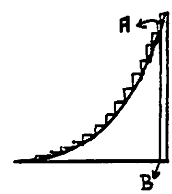


Fig.36

Cet échange contient plusieurs idées que l'on retrouve chez les autres élèves, plus ou moins acceptées ou développées suivant le groupe dont ils font partie.

En général, les élèves du groupe A partent volontiers d'une surface connue, tel un triangle, qui circonscrit la surface sous $y = x^3$ ou qui lui est inscrite (Fig.37). Après quoi, ils tentent de cerner au plus près le morceau excédentaire ou manquant. Ainsi quelques-uns inscrivent dans la lunule des polygones de base AB (premier dessin de la Fig.38) au nombre de côtés de plus en plus grand [l'un ou l'autre d'entre eux se réfère à la quadrature du cercle par Archimède que leur professeur de l'année précédente avait expliqué, hors programme]; mais certains, soucieux d'obtenir des côtés (autres que AB) égaux, éprouvent quelque difficulté à en déterminer les sommets. D'autres comblent les trous de la surface courbe avec des triangles "tangents" à la courbe (deuxième dessin de la Fig.38), mais ceux-ci sont souvent déterminés approximativement et au coup par coup, ce qui rend le processus peu "algorithmisable" : en fait, ces élèves tentent d'ajuster la direction des côtés tangents de manière à ce que les triangles remplissent au mieux l'espace manquant ; ils ne choisissent pas les points de tangence en des lieux aisément localisables, par exemple, en des abcisses formant une progression arithmétique.

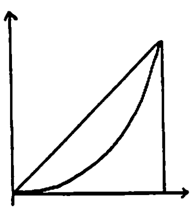


Fig.37

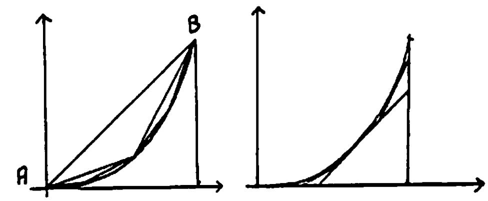


Fig.38

Quelques élèves pensent à linéariser par morceaux la courbe en la remplaçant par une multitude de segments tangents mais n'exploitent pas cette idée jusqu'à en tirer un calcul.

On observe aussi des procédures plus inhabituelles comme celle suggérée par la Fig.39. Mais elles en restent, la plupart du temps, au stade du croquis, faute d'avoir été formulées de manière précise.

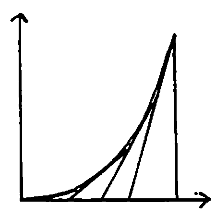


Fig.39

Des procédures plus susceptibles de conduire à un algorithme de calcul côtoyent les précédentes. Elles consistent à calculer la somme des aires de n rectangles ou de n trapèzes de même largeur pour approximer l'aire cherchée par excès ou par défaut (Fig.40, 41 et 42). On trouve de telles procédures davantage dans les classes qui ont vu soit les principes de Cavalieri (groupe B), soit les limites

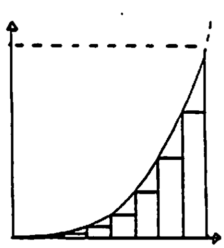


Fig.40

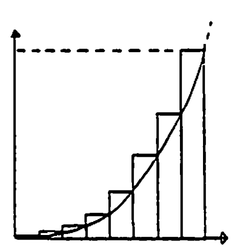


Fig.41

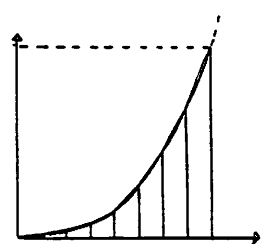


Fig.42

de suites, (groupe C), mais aussi dans les autres quoique moins fréquemment. Elles se répandent vite dans les classes car elles sont jugées efficaces par tous les élèves ; surtout celle des trapèzes qu'on estime à priori plus "rapide" ou plus "précise":

> *[136] On pourra programmer la formule et remplacer n par 100, par 1000, par ce qu'on veut.*

Ces procédures ne sont cependant pas acceptées sans réserve :

> *[137] Mais je ne vois pas où tu veux en venir avec les trapèzes, car il y aura toujours de trop.*

Avec l'aide du professeur, les élèves obtiennent:

- $(1+2^3 +...(n-1)^3)/n^4$ pour les n rectangles de la Fig.40,
- $(1+2^3 +...n^3)/n^4$ pour les n rectangles de la Fig.41,
- $(1+2^3 +...(n-1)^3 + n^3/2)/n^4$ pour les n trapèzes de la Fig.42.

Le professeur invite ensuite les élèves à conjecturer et à démontrer la formule.

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = n(n+1)^2/4,$$

grâce à laquelle il peut écrire les trois sommes reprises ci-dessus sous les formes respectives :

$$(1 - 2/n + 1/n^2)/4, \qquad (1)$$

$$(1 + 2/n + 1/n^2)/4, \qquad (2)$$

$$(1 + 1/n^2)/4. \qquad (3)$$

Si les élèves conjecturent aisément que $1 + 2^3 + ... n^3 = (1 + 2 + ... n)^2$, ils éprouvent plus de peine à écrire la somme des n premiers nombres entiers sous forme polynomiale. Quant au principe de récurrence auquel ils devraient recourir pour la démonstration, il est connu de peu d'entre eux.

2.7.2. Une aire dont l'existence ne fait nul doute mais qu'il n'est pas forcément possible de déterminer.

Aucun élève n'exprime de doute quant à l'existence d'un nombre qui mesure l'aire sous $y = x^3$ entre 0 et 1. Il leur arrive même d'affirmer cette existence explicitement. Ce dont ils ne sont pas tous convaincus, c'est de la possibilité de déterminer exactement ce nombre :

> *[138] On n'aura donc jamais la surface totale exacte, bien qu'elle existe.*

<u>2.7.3. Certains élèves pensent que 1/4 est la valeur exacte de l'aire cherchée.</u>

Après avoir écrit les suites (1), (2) et (3) (section 2.7.1.), sans autres commentaires, le professeur invite ses élèves à répondre individuellement à la question : *"Que vaut, en définitive, l'aire sous $y = x^3$ entre les bornes 0 et 1?"*. Certains répondent que cette aire vaut 1/4 exactement sur base d'arguments variés.
1) L'aire courbe vaut 1/4 exactement car les termes de la forme a/n et b/n^2 tendent vers zéro lorsque n tend vers l'infini :

> *[139] Comme $1/4n^2$ et $1/2n$ deviennent négligeables, on peut en conclure que la surface égale 1/4.*
> *[140] Au plus n est grand, au plus $1/4n^2$ se rapproche de 0, donc l'aire se rapproche de 1/4. Et comme il faut une infinité de n pour être précis, on peut affirmer que cette aire égale 1/4 (car $1/4n^2 = 0$ quand n est infiniment grand).*

2) L'aire sous la courbe vaut 1/4 exactement car elle a été encadrée par les suites (1), (2) et (3) :

> *[141] [...] Donc $1/4 - 1/2n + 1/4\,n^2 < S < 1/4 + 1/4\,n^2$*
> *$\Rightarrow$ 1/4 en plus petit $< S <$ 1/4 en plus grand.*
> *Les deux surfaces se rapprochent chacune de 1/4 mais de chaque côté. D'où la surface sera un quart* [Notons toutefois que cet élève avait écrit auparavant *: A l'infini la surface sera égale à 1/4 de la surface du carré car les trapèzes deviendront de plus en plus fins et tendront vers 0,* propos qui peut avoir pesé dans sa conclusion].
> *[142] 1) $S < 1/4 + 1/4\,n^2$. La surface va tendre légèrement au dessus de 0,25 (1/4) car $\forall$ n appartenant à N : $1/4n^2$ devient <u>insignifiant</u>* [Terme souligné par l'élève] *pour l'équation $1/4 + 1/4\,n^2$.*
> *2) $S > 1/4 - 1/2n + 1/4n^2$. Idem, ceci, cette partie d'équation* [$-1/2\,n + 1/4\,n^2$] *reste insignifiante pour l'équation. Donc S va tendre vers 0,25 (cette fois-ci un peu en dessous) Conclusion : donc $\Leftarrow 0{,}25 \Leftarrow S \Rightarrow 0{,}25 \Rightarrow$. Donc S va valoir 0,25 car* [illisible]*dans des deux côtés* [Sic].

3) L'aire sous la courbe vaut 1/4 exactement car les rectangles et les trapèzes se réduisent, à la limite, en segments qui comblent l'aire courbe :

[143] Je pense que ce sera exactement 1/4, car si on prend les rectangles les plus petits possible, c'est-à-dire des segments, on aura exactement le pourcentage de l'aire sous la courbe par rapport à celle du rectangle. Il faut donc prendre un nombre infini de rectangles.
[144] On arrive exactement à 1/4, car à la limite les rectangles deviennent des segments et alors on fait comme Cavalieri.
[145] n est infini suppose que l'on décompose l'aire en segments parallèles à l'axe y d'où la somme des "aires" [Guillemets mis par l'élève] *de ces segments égale 1/4 de l'aire du rectangle circonscrit.*
[146] Les trapèzes, si n est infini, deviennent des segments de droite, n'ont plus d'épaisseur et leur point d'intersection avec la courbe $f(x) = x^3$ sera un point et épousera alors parfaitement cette courbe. Il est alors normal que la surface totale soit connue exactement.
[147] La possibilité de faire un maximum de rectangles fait que ceux-ci deviennent comme des droites et que les surfaces des triangles deviennent à leur tour négligeables.

4) Une certaine concordance dans les résultats donne à croire en l'existence de lois plus générales et en l'exactitude du résultat obtenu :

[148] Je pense que tant de coïncidences dans le raisonnement serait impossible, d'où je penche pour la solution des 1/4 de l'unité de surface [L'unité représente ici le parallélogramme construit à partir des unités des axes].
[149] Si l'aire sous $y = x^2$ entre 0 et 1 vaut 1/3, pourquoi pas 1/4 pour x^3 ?

2.7.4. D'autres élèves prétendent que 1/4 est une valeur approximative seulement de l'aire cherchée.

D'autres élèves, tout aussi nombreux, refusent d'admettre que l'aire sous $y = x^3$, entre 0 et 1, vaut 1/4 exactement, en retournant souvent les arguments avancés par les autres.
1) Certains d'entre eux invoquent le fait que les termes de la forme a/n et b/n^2 ne sont jamais nuls ou que n n'atteint pas l'infini :

[150] Plus n est grand, plus $1/4n^2$ se rapproche de 0. $S < 1/4 + 1/4n^2$, or $1/4n^2$ aura une tendance vers 0 pour n illimité. Donc pour être vraiment précis, en disant, que la surface tend à 1/4. Nous avons $S > 1/4 - 1/2n + 1/4n^2$, or $- 1/2n + 1/4n^2$ aura une tendance vers 0 pour n illimité. Nous aurons donc la même conclusion : la surface tend à 1/4 [Le mot tend couvre à chaque fois un mot effacé].
[151] Plus n augmente, et plus $4 n^2$ augmente; donc $1/4 n^2$ devient de plus en plus petit et se rapproche de 0 sans jamais l'atteindre.

[152] Si n tend vers l'infini, 1/2n et 1/4n² tendent vers 0; donc 1/4 < S < 1/4, d'où S = plus ou moins 1/4; n tend vers l'infini mais n'atteint pas l'infini.
[153] Pour trouver une solution approximative plus précise, il nous suffit de prendre n comme le plus grand nombre positif...
[154] Quand n sera égal à l'infini, alors l'aire sera correcte (⇒ solution impossible ? ? !).
[155] Il faudrait prendre n = infini dont on ne connaît pas la valeur.

2) Le fait que les rectangles ou trapèzes se réduisent en segments ne garantit pas, pour certains, que l'on obtienne une valeur exacte de l'aire :

[156] On ne peut obtenir exactement l'aire sous la courbe, sauf si les rectangles se réduisent à des segments, mais il faut pour cela que les intervalles de subdivision se réduisent à un point, ce qui n'arrivera jamais.
[157] Quand les rectangles sont réduits à des segments, ils ont une aire nulle et en sommant des zéros, on obtient jamais que zéro.
[158] D'ailleurs, si vous pouvez supprimer les fractions 1/4n² et 1/2n à la fin, vous auriez pû le faire là et ça vous aurait effectivement donné 0 + 0 + ... + 0 [L'élève fait référence à une des premières lignes du calcul menant aux expressions (1), (2) et (3) et qui donne, de façon brute, la somme des aires des rectangles par défaut : $(1/n)(1/n)^3 + (1/n)(2/n)^3 + ... + (1/n)((n-1)/n)^3$].

2.7.5. Les autres élèves hésitent.

Un nombre non négligeable d'élèves se taisent ou s'en tiennent à des considérations prudentes sur la précision du calcul, en disant par exemple :

[159] Si n tend vers l'infini : S ≡ 1/4; S = ±1/4, car -1/2n + 1/4n² tend vers 0 ce qui ne veut pas dire qu'il vaut 0 et 1/4n² tend vers 0, ce qui ne veut pas dire qu'il vaut 0 mais la différence entre 1/4n² et 1/4 n² - 1/2 n est si petite qu'on ne peut pas en tenir compte : S = 1/4.
[160] Plus le nombre de divisions augmente, plus les imprécisions sont atténuées.

Certains oscillent entre les deux alternatives, usant et abusant du tippex, ou les laissant subsister toutes deux:

[161] L'aire vaut 1/4 exactement [...]. Elle vaut à peu près 1/4.

D'autres se réfugient derrière les limites des machines à calculer :

[162] L'aire sous la courbe est égale à 1/4 plus une infinie partie incalculable si n > 10.000.
[163] Il y a toujours une incertitude qui fait que nous n'obtenons pas les 1/4 précis (la machine à tendance à arrondir).

2.7.6. Le fait que l'aire sous la courbe ait été encadrée ne suffit pas à convaincre tous les élèves.

Certains élèves conçoivent que les approximations par défaut et par excès pourraient s'approcher indéfiniment de 1/4 sans que l'aire sous la courbe vaille 1/4 exactement ou, en tout cas, ne déduisent pas le deuxième fait du premier:

*[164] *Si n tend vers l'infini, alors 1/4 n^2 tend vers 0, d'où la surface tend vers 1/4 = 0,25 (cm^2).*
*** Si n tend vers l'infini, alors - 1/n + 1/4 n^2 tend vers 0, d'où la surface tend vers 1/4 = 0,25 (cm^2).*
*Par * et ** la surface est comprise entre : ⇒ 0,25 < S < 0,25 ⇐, d'où S ⇒ 0,25 ⇐ S, d'où S ≅ 0,25 (cm^2) (± égal).*
[165] S est compris entre (1/4 + 1/n^2) et (1/4 + 4/n^2) - 1/2n. Lorsque n est très grand, 4/n^2 devient très petit et donc 1/4 < S < 1/4 - 1/2 n, or 1/2 n devient très petit aussi , donc 1/4 < S < 1/4 + un tout petit peu.
[166] Donc, au plus il y a de divisions (au plus le n est grand), et au mieux on peut évaluer S car l'excès est de plus en plus petit; 1/4 - presque 0 < S < 1/4 + presque 0 ; presque 0 = excès.

D'autres encore s'aperçoivent que la moyenne arithmétique de $(1 - 2/n + 1/n^2)/4$ et de $(1 + 2/n + 1/n^2)/4$ donne $(1 + 1/n^2)/4$, c'est-à-dire la somme des aires des trapèzes. Ils en concluent généralement que l'aire sous la courbe doit être inférieure à 1/4 :

[167] Mais la moyenne forme un trapèze comme ceci [Fig.43]; *or, le trapèze est comme ceci* [Fig.44]. *Pour avoir une mesure plus précise, il faut que n soit le plus grand possible. Je dirais que c'est un tout petit peu plus petit que 1/4.*

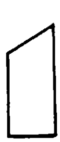


Fig.43

Fig.44

[168] En faisant la moyenne entre les chiffres par défaut et par excès, on obtient une droite entre les deux rectangles qui est un peu supérieure à la courbe. Cette moyenne est un peu supérieure à 1/4

(0,250001). On peut donc supposer que la courbe égale 1/4 ou est plus petite à 1/4.

Quelques-uns retranchent l'approximation par défaut de l'approximation par excès obtenue à l'aide des trapèzes, ce qui donne 1/2 n, et déduisent :

[169] Oui, on peut trouver la surface avec une précision arbitraire, car l'intervalle dans lequel il se trouve est de 1/2n. La valeur exacte de la surface est trouvée pour 1/2n = 0, mais 1/2 n n'est jamais égale à 0, mais s'approche de zéro.
[170] Maintenant pour la surface, le minimum et le maximum ne se distinguent que par - 1/2 n. Les possibilités sont déjà fort limitées et de nouveau, tout dépend de n. Plus celui-ci tend vers l'infini, plus on se rapproche de : 1/4 - 1/2 n + 1/4 n^2 ≤ S ≤1/4 + 1/4 n^2. Mais on ne peut trouver ça avec une précision arbitraire.

Enfin, un élève s'imagine que les segments respectifs en lesquels se réduisent les rectangles par excès et ceux par défaut ne déterminent pas la même courbe :

[171] Si on prend ici une infinité de rectangles, on n'obtiendra pas la courbe, mais une courbe parallèle un peu au-dessus [en pointillé sur la Fig.45], *contrairement à ce choix-ci* [les rectangles par défaut].

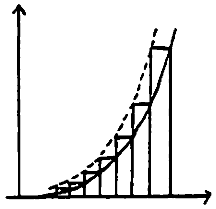


Fig.45

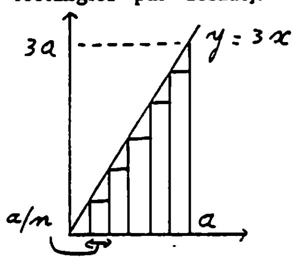


Fig.46

2.7.7. Un élève se met à douter de la formule de l'aire du triangle.

Après avoir inscrit n rectangles de même largeur dans le triangle de la Fig.46 et après avoir calculé la somme de leurs aires, $3a^2/2 - 3a^2/2n$, un élève dit :

[172] Plus n augmente, plus 1/2n devient petit et se rapproche de zéro : il tend vers zéro. Si 1/2n touchait zéro : alors aire = $3a^2/2$. Comme il ne touche pas, il y a toujours une faute de calcul.

2.7.8. Des débats qui conduisent tous à la même impasse.

La question de savoir si 1/4 représente ou non la valeur exacte de l'aire sous $y = x^3$ provoque un débat au sein de tous les groupes. Alimentée par les positions de chacun, la réflexion commune est acculée à chaque fois dans la même impasse :

[173] - Le professeur : *A-t-on la valeur exacte de l'aire ?*
- *Non.*
- *En prenant des n de plus en plus grands .*
- *Mais on n'arrivera jamais à la vraie valeur.*
- *A partir de n = 10^6, ça s'arrête* [la machine] *à 0,25* .
- Le professeur : *Est-ce que ça veut dire qu'on a 0,25 comme valeur exacte de l'aire.?*
- *Non.*
- *Si n est infini, on n'aura plus que des droites.*
- *Mais quelle est l'épaisseur d'une droite?*
- *Si on prend n de plus en plus grand, 1/n et $1/n^2$ ont tendance à devenir négligeables.*
- *Si n est très grand, on a quand même toujours des rectangles et pas une courbe.*
- *Ce sera tellement près de 1/4.*
- *Un nombre qui se trouve juste à côté de 1/4.*

Ce débat débouche, comme tous les autres, sur une alternative que nous avons entendu formuler par les élèves, à plusieurs reprises, dans le cadre d'un enseignement "classique" du calcul intégral. On peut la résumer ainsi :
- tant que les rectangles (ou les trapèzes) ont une certaine épaisseur, ils ne remplissent pas tout-à-fait la surface considérée ou bien ils la dépassent : il reste des petits "triangles" à combler ou à enlever.
- et lorsqu'ils se réduisent à des segments, ils ont une aire nulle et on voit mal comment obtenir une aire non nulle en sommant des zéros.

2.7.9. Une preuve par l'absurde.

Le professeur propose de démontrer par l'absurde que l'aire sous $y = x^3$ entre les abcisses 0 et 1 vaut 1/4, ni plus, ou moins.

Dans certaines classes, il esquisse lui-même le raisonnement sur base d'exemples numériques : "*Supposons l'aire en question légèrement supérieure à 1/4 : par exemple, égale à 0,25001. Alors en choisissant une valeur de n suffisamment grande (ici n = 159) on obtient pour la somme $1/4(1 + 1/n^2)$ un résultat inférieur à*

0,25001 ($1/4(1 + 1/159^2) = 0,2500098$), ce qui est en contradiction avec le fait que cette somme représente une approximation par excès de l'aire sous $y = x^3$. Si l'on avait supposé cette dernière plus proche de 1/4 encore, mais néanmoins toujours supérieure à 1/4 (p.ex. 0,25000001), il aurait suffi pour aboutir à cette même contradiction, de calculer la somme susdite pour une plus grande valeur de n (n = 5001), et ceci peut être reproduit pour toute valeur supposée de l'aire, supérieure à 1/4, si proche en soit-elle. Supposons à présent que cette même aire soit inférieure à 1/4, par exemple égale à 0,249999. On peut alors jouer sur la somme $1/4(1 - 2/n + 1/n^2)$ et la rendre, pour une certaine valeur de n, supérieure à 0,249999 (pour $n = 10^6$ on a 0,2499995), ce qui va à l'encontre du fait que cette somme est une approximation par défaut. De même on peut aboutir à une contradiction semblable pour toute valeur supposée de l'aire sous $y = x^3$, inférieure à 1/4, si proche soit-elle de 1/4. En effet, on peut rendre $1/4(1 - 2/n + 1/n^2)$ supérieure à tout réel inférieur à 1/4, si proche de 1/4 soit-il : il suffit de choisir une valeur de n suffisamment grande pour que le facteur $1 - 2/n + 1/n^2$, inférieur à 1 si $n > 1$, soit suffisamment proche de 1. L'aire sous la courbe $y = x^3$, entre les abcisses 0 et 1, ne pouvant être ni supérieure à 1/4, ni inférieure à 1/4, est donc égale à 1/4".

Pour les élèves qui écrivent :

> *[174] On a $S < 1/4 + 1/4\, n^2$. Vu que n est toujours un naturel, on peut toujours dire que $S < 0,5$;*

ce jeu sur les inégalités est assez difficile à suivre. Il n'empêche qu'après s'être familiarisés avec ce type de raisonnement par le biais d'exemples numériques, la plupart des élèves se déclarent convaincus : l'aire sous $y = x^3$ entre 0 et 1 vaut donc 1/4 exactement ! Certains d'entre eux anticipent même les propos du professeur en prévoyant que l'on pourra toujours trouver une valeur de n appropriée, si près de 1/4 que l'on ait supposé l'aire sous la courbe, ou bien pour démontrer que cette aire ne peut être inférieure à 1/4, une fois que le professeur a prouvé qu'elle ne pouvait lui être supérieure. Dans l'une ou l'autre classe, le professeur a noté $1/4 - \varepsilon$ ou $1/4 + \varepsilon$ la valeur supposée de l'aire. Ayant considéré l'inégalité $1/4 - \varepsilon < 1/4\,(1 - 2/n + 1/n^2)$, un élève propose de déterminer empiriquement une valeur de n (en fonction de ε) qui satisfasse à cette inégalité, plutôt que de résoudre cette dernière, puisque de toute façon :

[175] Il suffit de trouver une seule valeur de n qui vérifie la condition pour avoir la contradiction.

2.7.10. Le concept de limite tel qu'il est réinvesti ici par des élèves qui ont déjà reçu, en 5ème, un enseignement de l'analyse.

A quelques élèves relativement forts et ayant reçu un enseignement des limites l'année précédente, nous proposons de faire par eux-mêmes cette démonstration par l'absurde.

Aucun n'y parvient. Certains se contentent de calculer les limites, pour n tendant vers l'infini, des expressions $1/4(1 + 1/n^2)$ et $1/4(1 - 2/n + 1/n^2)$, en rappelant les règles de calcul de limites utilisées, mais sans prendre en considération le fait qu'il faut démontrer que ces limites représentent effectivement l'aire sous la courbe. D'autres formulent des hypothèses par l'absurde fantaisistes telles que :

[176] Supposons que $(1 - 2/n + 1/n^2)/4 \geq 1/4$ et $(1 + 2/n + 1/n^2)/4 \leq 1/4$.

[177] Supposons que l'aire sous $y = x^3$ soit plus grande que l'aire orange [celle représentée par la somme $(1 + 2/n + 1/n^2)/4$].

Un autre part d'une hypothèse efficace :

[178] Si $A > 1/4$,

mais poursuit ainsi :

[179] On a $(1 + 2/n + 1/n^2)/4 > 1/4$, $(n^2 + 2n + 1)/n^2 > 1$; or n^2positif, donc $n^2 + 2n + 1 > n^2$. Or n est infini $\Rightarrow$ infini > infini $\Rightarrow$ pas de sens .

D'autres élèves invoquent l'encadrement par excès et par défaut :

[180] Pour prouver que le calcul des aires (qu'il soit calculé par excès ou par défaut) aboutit au même résultat, alors il faut qu'à l'infini leurs limites soient égales : $\lim_{n \to \infty}[1/4 + 2/n + 1/n^2] = 1/4$ [...] et $\lim_{n \to \infty} [(1 - 2/n + 1/n^2)/4] = 1/4 \Rightarrow$ surfaces identiques ("compensées")

D'autres encore invoquent le fait que les rectangles se réduisent en segments :

[181] Quand on passe à la limite, n tendant vers l'infini, ce qui revient à obtenir des segments parallèles entre eux et parallèles à l'axe des y... [La phrase est incomplète].

Enfin, les élèves qui se penchent sur la signification du concept de limite la caractérisent en ces termes :

> *[182] [...] Plus on met de rectangles et plus les valeurs approximatives se rapprocheront de la valeur exacte, soit V. Continuons à augmenter n, faisons le tendre vers l'infini. Dès lors $\Sigma R = \lim (1 + 2/n + 1/n^2)/4 = 1/4 \geq V$. Je dis $\geq$ et non $>$, c'est une propriété des limites (paradigme; tous les 1/n sont >0 mais lim 1/n = 0). Dès lors aussi $\Sigma r = \lim [(1 - 2/n + 1/n^2)/4] = 1/4 \leq V$. D'où on a $1/4 \leq V \leq 1/4 \Rightarrow V = 1/4$* [R désigne les rectangles par excès et r, ceux par défaut].
> *[183] Mais au plus on a de rectangles, au plus on se rapproche de la surface réelle (car l'espace délaissé au dessus de chaque rectangle devient de plus en plus petit) $\Rightarrow$ au plus n est grand, au plus on se rapproche de la surface. Alors, si n tend vers $+ \infty \Rightarrow$ on doit obtenir la surface réelle $\Rightarrow$ si on fait $\lim [(1 - 2/n + 1/n^2)/4]$, on doit obtenir la surface réelle. Or, il se trouve que cette limite vaut 1/4. On peut faire le même raisonnement pour les rectangles pris par excès. On obtiendra alors une autre limite (lim $[(1 + 2/n + 1/n^2)/4]$ qui tendra* [Sic] *vers + 1/4 par excès $\Rightarrow$ la surface vaut 1/4.*

2.7.11. Et si le repère n'est pas orthonormé?

Nous représentons le graphe de la fonction $y = x^3$ dans deux repères distincts (cfr. Fig.47). Nous attirons l'attention de quelques élèves sur le fait que si les axes du second repère ne sont plus perpendiculaires, on a néanmoins conservé les mêmes unités que pour le premier et nous leur demandons de comparer les aires sous ces deux courbes entre les abcisses 0 et 1.

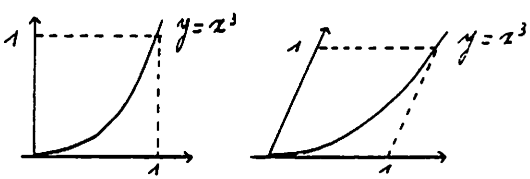


Fig.47

Parmi les quelques élèves à qui nous avons posé cette question, deux ont répondu que les deux aires étaient égales car :

> *[184] Composées de mêmes segments, qu'on a seulement mis en oblique pour la seconde.*

Une étudiante de première candidature en mathématique s'y trompe aussi. Elle dessine la Fig.48 et évoque le fait que :

[185] Les rectangles élémentaires sont de même longueur de part et d'autre .

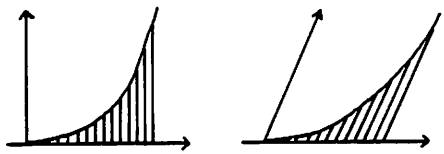


Fig.48

2.7.12. Quand les rectangles tournent, l'erreur s'amplifie.

Un élève se demande si l'on peut obtenir le volume du paraboloïde mentionné au problème 2.2. en faisant tourner les rectangles inscrits sous la courbe $y = \sqrt{x}$ (Fig.49). Il se répond :

[186] Non, parce que le manque [Il veut dire les triangles résiduels] *va s'amplifier en tournant.*

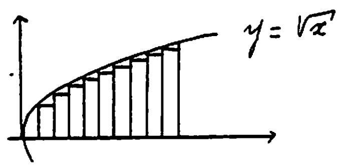


Fig.49

2.8 Une conjecture utile : l'aire sous $y = x^n$ ($n \in N$).

Vous avez trouvé l'aire sous $y = x^2$ et $y = x^3$. Et après?

Quelques élèves n'attendent pas cette fiche pour remarquer une certaine régularité : 1/3 pour l'aire sous $y = x^2$ entre 0 et 1, 1/4 pour $y = x^3$... Ils conjecturent spontanément que l'aire sous $y = x^n$ entre les mêmes bornes vaut $1/(n+1)$. Les autres les rejoignent sans difficulté.

Peu d'élèves éprouvent le besoin de démontrer un tel résultat. Les cas particuliers: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ les convainquent suffisamment. L'examen des cas: $y = x^{1/2}$, $y = x^{1/3}$ (proposé par le professeur) les confortent dans cette conviction. Quelques-uns pressentent la difficulté d'une telle démonstration qu'ils situent dans l'écriture des sommes des puissances $n^{ièmes}$ des k premiers nombres entiers.

2.9 Quelques embûches et difficultés du calcul d'aires et de volumes.

Mentionnons encore quelques erreurs commises par les élèves et quelques difficultés éprouvées par ceux-ci à l'occasion de calculs d'aires ou de volumes. Ces erreurs et difficultés ont été observées tantôt dans le cadre des problèmes précédents, tantôt dans celui d'un enseignement plus classique du calcul intégral.

1) Pour calculer l'aire sous $y = x^3$, entre 0 et 1, un élève propose d'exploiter des résultats connus, à savoir l'aire sous $y = x^2$ et celle sous $y = x$ entre les mêmes bornes, soit respectivement 1/3 et 1/2. Il compare les indivisibles des deux surfaces représentées sur la Fig. 50 ci-dessous :

$$L_1(x) = x$$
$$L_2(x) = x^3$$

Leur rapport vaut $L_2(x)/L_1/(x) = x^2$. Il en conclut que l'aire cherchée S divisée par 1/2 vaut 1/3, ce qui donne $S = (1/2).(1/3) = 1/6$.

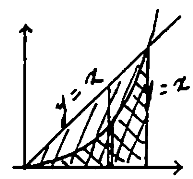


Fig.50

2) Soit le solide engendré par la rotation, autour de l'axe ox, de la surface délimitée par $y = x^2$, $y = 0$ et $x = 2$. Pour calculer le volume de ce solide, un élève l'inscrit dans un cône et compare ensuite les aires des disques découpés dans les deux solides par un plan perpendiculaire à ox (Fig.51) : $\pi x^4/\pi 4x^2 = x^2/4$.

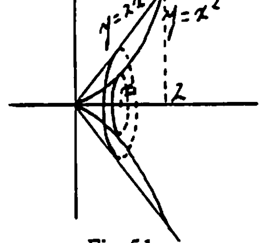


Fig.51

Il calcule ensuite l'aire sous $y = x^2/4$ entre 0 et 2, soit 2/3, par laquelle il multiplie le volume du cône pour obtenir le volume cherché V et dessine la Fig.52:

$$V = (2/3).V_{\text{cône}} = (2/3)(1/3).32\ \pi = 64\pi/9.$$

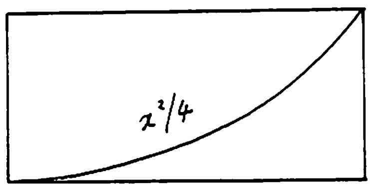


Fig. 52

Une fois son erreur réalisée, il la justifie ainsi :

[187] Quand on compare l'aire sous $y = x^2/4$ au rectangle circonscrit, on voit qu'à l'extrémité gauche on doit comparer un point à un segment, tandis que le chapeau chinois et le cône commencent tous deux par un point.

3) La base d'un solide est une ellipse dont les axes ont des longueurs égales à 10 et 8. Toute section de ce solide perpendiculaire au grand axe est un triangle isocèle rectangle (Fig. 53). Trouvez le volume de ce solide.

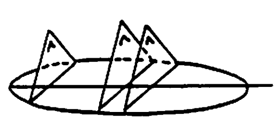


Fig.53

Voici la réponse d'un élève à ce problème:

[188] Surface d'un indivisible = base . hauteur/2.
Base = x (varie entre 0 et 2) pour une moitié
Hauteur = x/2
Surface = $x^2/4$ = S(x). $\int_0^4 x^2/4\, dx = (\int_0^4 x^2\, dx)/4 = (4^3/3)/4 = 16/3$.
[Représente les Fig.54 et 55].

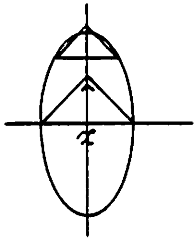


Fig.54

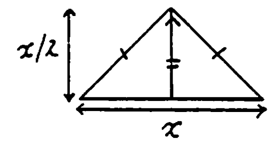


Fig.55

4) Un groupe d'élèves propose de déterminer le volume d'une sphère de rayon R au moyen de l'intégrale $2\int_0^R \pi r^2 dx$ en précisant :

> *[189] On remplit l'hémisphère de cylindres d'épaisseur dx et dont les rayons r varient entre 0 et R. Ils calculent ensuite :*
> $$\int_0^R \pi r^2 dx = \pi\,[r^3/3]_0^R = \pi R^3/3.$$

5) Quelques élèves montrent une réelle souplesse à voir dans le calcul d'un volume celui d'une aire. Ainsi celui qui trouve rapidement le volume d'un solide de base circulaire et dont les sections perpendiculaires à un diamètre fixe sont des triangles isocèles de hauteur 3 (Fig.56) :

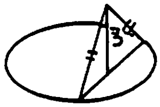


Fig.56

> *[190] Ca se ramène à un multiple près à l'aire du cercle, car c'est comme si chaque indivisible du cercle était multiplié par 3 et divisé par 2.*

Par contre, d'autres élèves éprouvent des difficultés à ramener un calcul de volume à un calcul d'aire, en particulier lorsqu'il s'agit de solides de révolution : par exemple, celui engendré par la rotation, autour de l'axe ox, de la surface délimitée par $y = x^2$, $y=0$ et $x=1$. Le volume de ce solide se ramène au calcul de l'aire sous $y = \pi x^4$ entre 0 et 1. Que deux surfaces distinctes, celle sous $y = x^2$ et celle sous $y = \pi x^4$, soient mêlées au sein du même exercice et voilà quelques élèves perdus : mais de quelle surface s'agit-il? Un rappel des problèmes 2.2. et 2.3. ("Le paraboloïde de révolution" et "Le calcul de l'aire sous une parabole se ramène à celui du volume d'un cône") s'avère en ces occasions nécessaire et fructueux : ces exemples sont assez évocateurs pour remettre les idées des élèves en place.

6) Soit la surface limitée par $y^2 = 8x$, par $x = 2$ et par $y = 0$. Calculer le volume du solide engendré par la rotation de cette surface autour de la droite $x = 2$ (Fig.57).

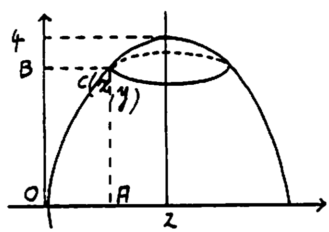


Fig.57

Parmi les élèves qui songent à diviser ce solide en disques indivisibles perpendiculaires à l'axe de rotation et à exprimer leur aire en fonction de y, bien peu y arrivent correctement. Leur plus grande difficulté semble être de reconnaître en x la distance entre les points B et C et donc d'exprimer le rayon de ces disques comme $2 - x$ ou $2 - y^2/8$.

Chapitre IV

Du bon et du mauvais usage des indivisibles.

1. Quelques référents mathématiques et historiques.

1.1. Les contraintes des principes de Cavalieri.

Ainsi que nous l'avons vu précédemment, les indivisibles définis par Cavalieri possèdent une dimension de moins que la grandeur de laquelle ils sont extraits. Mais ce seul trait ne suffit pas à les caractériser : leur mode de découpage participe tout autant à leur définition. Ce dernier obéit à des règles strictes : les indivisibles de solides doivent être parallèles à un plan fixe, ceux de surfaces à une droite fixe (appelée "régula"). Ce plan ou cette droite fixes sont choisis de manière à ce que, mesurées perpendiculairement à eux, les hauteurs des deux grandeurs à comparer soient égales. L'énoncé des principes implique cette dernière clause et exige même davantage : les grandeurs seront placées côte à côte de sorte qu'elles puissent faire l'objet d'un découpage commun, c'est-à-dire que leurs indivisibles homologues soient déterminés par une même droite ou un même plan.

De tels canons garantissent la validité des principes de Cavalieri, mais limitent par contre leur champ d'application. A certains problèmes sont davantage appropriés d'autres découpages de solides en surfaces ou de surfaces en lignes : soit par exemple que ces surfaces (ou lignes) ne soient pas parallèles à un même plan ou une même droite, soit encore qu'elles soient courbes. [Nous continuerons ici à les appeler indivisibles, empruntant ainsi à Cavalieri un mot qu'il n'utilise souvent que dans des conditions plus restrictives].

Peut-on encore, si l'on transgresse les règles imposées par Cavalieri, déduire quoi que ce soit sur les mesures de deux grandeurs en comparant celles de leur indivisibles respectifs? Oui, à certaines conditions et nous parlerons dans ce cas d'usage licite des indivisibles. Non, en l'absence de celles-ci. Le découpage des grandeurs en indivisibles débouche alors sur des paradoxes : il y a usage abusif des indivisibles.

1.2. Quelques paradoxes discutés au XVII^e^ siècle.

S'interrogeant sur l'usage abusif des indivisibles, Torricelli et Cavalieri ont mis en évidence un certain nombre de paradoxes flagrants auxquels celui-ci peut conduire. Ces paradoxes ont alimenté la réflexion critique des mathématiciens à l'égard du concept d'indivisible. En voici deux, dûs, le premier à Torricelli et le second à Cavalieri.

1) "Dans le parallélogramme ABC [Fig.1], où le côté AB est plus grand que le côté BC, on trace le diamètre [Le mot diamètre signifie ici diagonale] BD et à partir d'un point quelconque E de ce diamètre, on mène EF et EG parallèles à AB et BC; alors EF est plus grand que EG, et il en est de même pour toutes les parallèles de la même sorte, prises une à une; par conséquent toutes les EF prises ensemble dans le triangle ABD sont plus grandes que toutes les EG prises ensemble dans le triangle CDB, et le triangle ABD est plus grand que le triangle CDB; ce qui est faux. En effet, le diamètre découpe le parallélogramme par le milieu; par conséquent on raisonne faussement en procédant de cette manière" (cité par F. De Gandt, 1983, duquel nous nous sommes largement inspirée pour la partie historique de cette section).

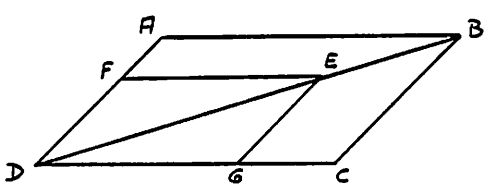


Fig.1

2) "Voilà en quoi consiste la difficulté. Soit HD perpendiculaire à AG [Fig.2] et AD est plus petit, et DG plus grand que DH. On joint HG et HA, et HD sert de règle. Et parmi toutes les lignes du triangle HAD, on en prend autant que l'on veut comme KB et IC, et par K et I on tire KM et IL parallèles à AG, puis on trace LE et MF parallèles à HD. Il est donc manifeste que KB est égal à MF, et IC à LE; et par conséquent, aux lignes aussi nombreuses que l'on voudra prendre de cette manière dans le triangle HAD, ou encore (dira mon objecteur) à toutes les lignes du triangle HAD, nous trouverons que sont égales toutes les lignes du triangle HDG; aussi ces triangles

sont-ils égaux; et pourtant ils sont inégaux. Donc, etc...". (cité par F. De Gandt, 1983).

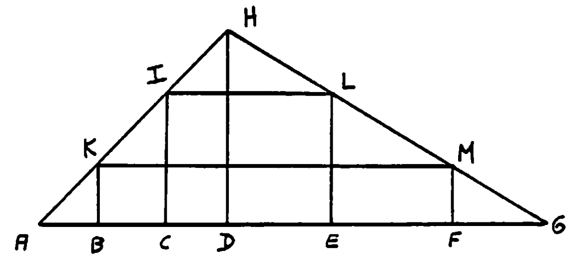


Fig.2

Voici, à quelques modifications de terminologie près, en quels termes Torricelli résout le paradoxe du parallélogramme partagé par sa diagonale en deux triangles inégaux : "Dans le parallélogramme précédent ABCD, si nous prenons sur la diagonale BD un point quelconque E, le trapèze EBCF sera égal au trapèze EBAG [Fig.3]. Mais si nous divisons EB en son milieu, au point I, le trapèze divisé ou aminci IBCJ sera égal au trapèze aminci IBAK; et si cette division est faite, ou supposée faite, une infinité de fois, nous en viendrons à avoir, au lieu des trapèzes, une ligne BC égale à la ligne BA. Je dis égale en aire, et non en longueur, parce que, bien qu'elles soient indivisibles toutes les deux, BC sera, par rapport à BA, d'autant plus large que cette dernière est plus longue." (cité par F. De Gandt, 1983). Comme on le voit, Torricelli réduit le paradoxe en adoptant une conception de l'indivisible distincte de celle de Cavalieri. Pour ce dernier, un indivisible de surface est un segment au sens géométrique du terme, c'est-à-dire, comme dirait Euclide, une "longueur sans largeur" (de même, un indivisible de volume est, à ses yeux, une surface). Torricelli n'hésite pas, lui, à attribuer deux dimensions aux indivisibles de surface tout comme aux surfaces elles-mêmes. Ces indivisibles sont, dans ses propos, considérés comme les vestiges des trapèzes : leur longueur est ce vers quoi tendent les deux bases de ces trapèzes lorsque ceux-ci s'amincissent; leur épaisseur est la trace de la hauteur de ces mêmes trapèzes. Tout comme les trapèzes dont ils sont les résidus, les indivisibles du triangle DBC seront plus épais que ceux du triangle ABD et ce, en raison inverse de leur longueur : ils sont ainsi égaux en "grandeur" (en aire) comme dit Torricelli. Et c'est ce qui explique, d'après lui, que les deux triangles aient même aire.

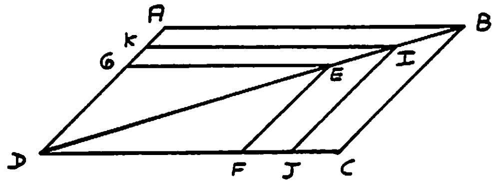


Fig.3

La position de Cavalieri est différente et variable. Alors que Torricelli parlera d'un même nombre d'indivisibles d'une surface à l'autre dès que leurs indivisibles respectifs peuvent être mis en bijection, Cavalieri distingue, dans ce cas, plusieurs ordres d'infinis, du moins dans certaines des explications du paradoxe qu'il propose. Ainsi, utilisant une comparaison suggestive avec le tissage des étoffes, il souligne le fait qu'il y a une plus "grande infinité" de lignes MF dans le triangle HDG que de lignes KB dans le triangle HDA, DG étant supérieur à DA (Fig.4) : "Il me semble que cela peut se faire comprendre par une certaine analogie avec le tissu. Puisqu'en supposant que HAG est fait de tissu, AG est la règle de la chaîne et HD la règle de la trame, s'il y a dans le triangle HAD cent fils de trame, il y aura de même cent points marqués [segnati] sur HA, à partir desquels s'étendent cent fils de chaîne qui désigneront cent points sur HG, et cent parallèles à HD dans la trame du triangle HDG. Mais la trame de HDG porte beaucoup plus de fils, c'est-à-dire, s'il y en a trois cents, DG étant triple de DA, on ne prend donc que cent de ces trois cents fils, et il en va de même dans les infinis, selon leur mode." (cité par F. De Gandt, 1983). A d'autres moments, évoquant le même paradoxe, Cavalieri insiste plutôt sur le fait qu'à nombre égal d'indivisibles, ceux du triangle HDG forment un réseau moins serré, moins dense que ceux du triangle HDA, cette différence de densité des indivisibles se mesurant à leur espacement relatif : "[...] les lignes KB et IC n'ont pas entre elles une distance égale à celle qui sépare les deux lignes MF et LE qui leur correspondent [...]" (Fig.4), (cité par F. De Gandt, 1983). Or, pour pouvoir comparer deux surfaces, il importe de : "prendre les agrégats de tous les indivisibles des figures à comparer selon une proportion uniforme, c'est-à-dire selon un degré d'épaisseur ou de condensation déterminé" (cité par F. De Gandt, 1983). Invoquant cette idée d'espacement relatif entre indivisibles, là où Torricelli aurait parlé d'indivisibles plus ou moins épais, Cavalieri peut ainsi expliquer le paradoxe des deux triangles en maintenant tout à la fois l'intuition d'un même nombre d'indivisibles d'un triangle à l'autre et sa conception de l'indivible de surface comme segment.

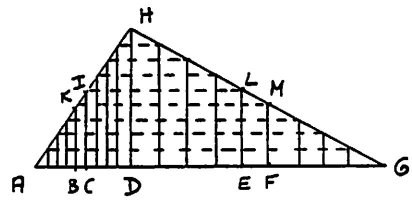


Fig.4

1.3. Les paradoxes à la lumière des théories modernes.

Le calcul intégral résout ce genre de paradoxes. Illustrons comment. Le découpage des triangles ABO et COB (Fig.5), évoqué par Torricelli, nous incite à intégrer les segments EG par rapport à la variable x = OG, et les segments EF par rapport à la variable y = OF. Or les axes ox et oy doivent être choisis, conformément à la théorie du calcul intégral, perpendiculaires aux segments intégrés. Changeons donc de variables en prenant $X = x \cos \sigma$ et $Y = y \cos \sigma$. Les aires respectives des triangles ABO et COB sont déterminées au moyen des intégrales

$$\int_0^{b \cos \sigma} ax/b \cos \sigma \, dx \quad \text{et} \quad \int_0^{a \cos \sigma} by/a \cos \sigma \, dy,$$

lesquelles donnent bien une même valeur.

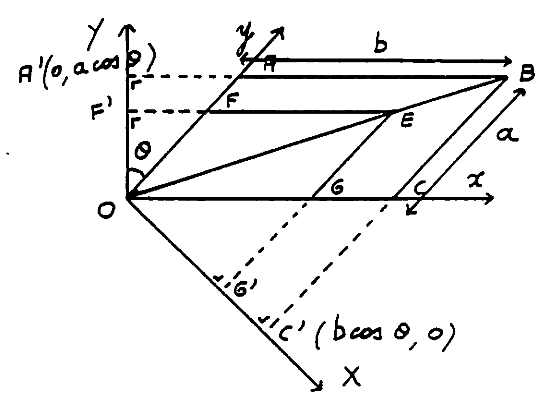


Fig.5

La plupart des paradoxes liés à un usage abusif des indivisibles s'évanouissent par un changement de variable approprié dans la formulation d'une intégrale. Les exemples les plus significatifs sont ceux où l'on considère des indivisibles "irrégulièrement espacés". Nous en rencontrerons plus loin.

Ces paradoxes soulèvent par ailleurs la question des bijections entre ensembles infinis, qui ne sera éclaircie que vers la fin du XIX^e siècle. Par exemple, on peut s'étonner que deux segments de longueur inégale puissent être "composés d'un même nombre de points-indivibles" : ainsi les segments AB et CD de la Fig.6 entre les points desquels on peut établir une bijection en traçant des segments tels que EE'. Une mise au clair de ces questions viendra de ce que Cantor et Dedekind caractériseront un ensemble infini précisément par le fait qu'il peut être mis en bijection avec un de ses sous-ensembles propres.

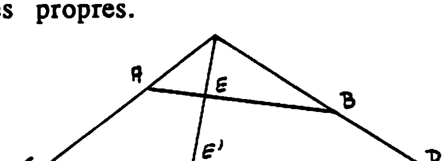


Fig.6

2. Le travail en classe.

2.1. Comparons l'aire latérale d'un cône à celle de sa base.

Considérons la surface d'un cône droit comme l'assemblage des cercles qu'y découpent des plans parallèles à sa base (Fig.7). Associons à chacun de ces cercles sa projection sur la base du cône (Fig.8). Les cercles ainsi projetés composent le disque de base.

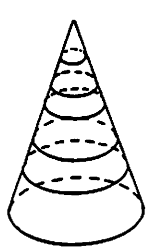


Fig.7

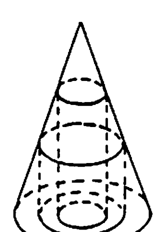


Fig.8

Quelle relation y a-t-il entre l'aire latérale du cône et celle de sa base?

<u>2.1.1. Autant de cercles sur la base que sur la surface latérale!</u>

L'énoncé de ce problème est suggéré par un élève lors d'une préexpérimentation. Celui-ci - très fort au demeurant - pense à décomposer de la sorte la surface de base du cône et sa surface latérale, inspiré, dit-il, par la méthode des indivisibles. Il montre aussitôt sa découverte au professeur, s'étonnant qu'elle conduise à un résultat qu'il sait incorrect :

> *[191] L'aire latérale ne peut cependant pas égaler l'aire de la base, puisqu'elle varie avec la génératrice.*

Tous les élèves auxquels cette question est posée sont interloqués - fût-ce pour un temps assez bref - par la mise en correspondance des cercles des deux surfaces. Ils vont jusqu'à prêter à l'auteur du problème l'intention de conclure à l'égalité de leurs aires, intention nulle part exprimée. Ainsi certains portent un jugement de valeur sur ce découpage en cercles, supposant implicite une telle conclusion :

> *[192] Le développement de la fiche est mauvais, car il supposerait une formule : aire latérale = $2\pi b^2$ qui ne tient pas compte de la hauteur du cône...*
> *[193] Faux parce qu'on ne respecte pas le principe de Cavalieri (par des plans parallèles) d'où, il reste toujours un angle entre deux indivisibles* [Sic].

Quelques-uns concluent eux-mêmes que l'aire latérale vaut l'aire de la base :

> *[194] Fig.7 : intuitivement : la surface latérale du cône = la somme des périmètres des cercles; Fig.8 : aire latérale = aire de la base. Justification : en projetant les périmètres des cercles parallèlement* [Il veut dire perpendiculairement] *à la base sur la base, on obtient la base entière. Comme par la Fig.7, la somme des périmètres des cercles = l'aire latérale du cône $\Rightarrow$ la base du cône = son aire latérale.*

Les élèves qui savent cette intuition fausse ne parviennent pas néanmoins à l'éclaircir, du moins dans un premier temps :

[195] Comment alors expliquer cette erreur que je qualifierais de visuelle? Ou plutôt dans laquelle je suis tombé bêtement avant de pousser plus loin le raisonnement? Elle doit être du genre de celle étudiée en fiche 2.1. : "tout de go " disait le titre !!! [Fait référence au problème 2.1 du chap. III].
[196] Si l'on met ces circonférences l'une dans l'autre dans un même plan, on devrait obtenir la même valeur que si on empilait ces cercles l'un sur l'autre pour former la surface latérale du cône?

Il se trouve quelques élèves qui éprouvent le besoin d'évoquer des cas extrêmes :

[197] Si on a un cône de 500 km de haut...
[198] Si tu as un cône très haut et un autre très aplati... [Il accompagne ces propos de gestes éloquents].

Malgré l'évocation de tels cas, quelques autres maintiennent malgré tout que l'aire latérale du cône égale celle de sa base, en disant :

[199] Quand tu développes la surface latérale d'un cône fort allongé, tu obtiens une languette fort étroite.

2.1.2. Développer le cône.

Ne parvenant pas à concilier leurs intuitions contradictoires, beaucoup d'élèves cherchent à vérifier ou à déterminer la formule de l'aire latérale du cône par un autre biais que celui proposé dans l'énoncé du problème, ce qui peut se faire en développant la surface latérale pour l'aplanir en une portion de disque (Fig.9).

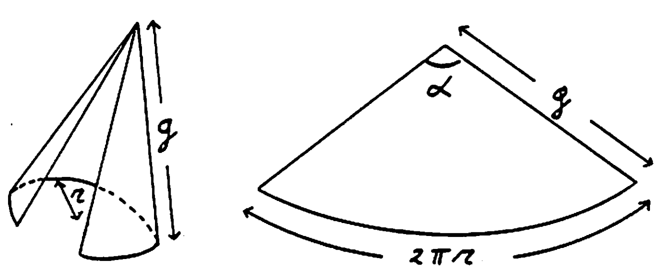


Fig.9

Deux d'entre eux réinvestissent alors, indépendamment l'un de l'autre, la décomposition du disque en cercles indivisibles : ils regardent ce secteur circulaire comme l'assemblage d'arcs de cercles concentriques, arcs qui, une fois déroulés, forment un triangle de base $2\pi r$ et de hauteur g (Fig.10) et trouvent par là une aire correcte égale à $\pi r g$.

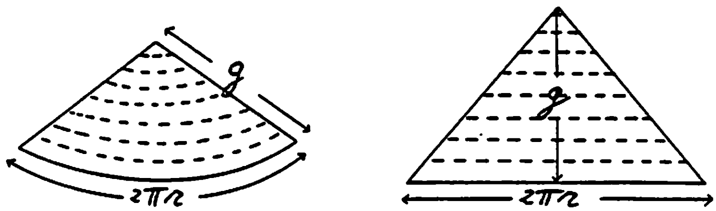


Fig.10

D'autres poursuivent d'une manière plus classique, avec l'aide du professeur :

$$A = \pi g^2\alpha/2\pi = \alpha g^2/2,$$

où A représente l'aire latérale et α la mesure en radians de l'angle au centre de la portion de disque. Or,

$$\alpha/2\pi = 2\pi r/2\pi g = r/g.$$

Donc,

$$A = (g^2/2)\ (2\pi r/g) = \pi r g.$$

2.1.3. Intégrer les longueurs des cercles.

Deux élèves calculent l'aire latérale du cône, en "intégrant, le long de la hauteur, les cercles qui la composent" :

[200] Surface latérale = superposition de circonférences dont la position varie de 0 à h et dont le rayon varie de 0 à r [Fig.11]. *Pour h' : $r/r' = h/h' \Rightarrow r' = h'r/h$. Pour h' : circonférence $= 2\ \pi\ r' = 2\pi h'r/h$; aire latérale $= \int_0^h 2\pi r h'/h$.*

[201] $r = bx/h$ [Fig.12]. *Surface latérale $= \int_0^h 2\pi b x/h = (2\pi b/h).(h^2/2) = \pi b h$.*

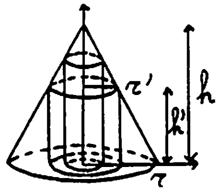


Fig.11

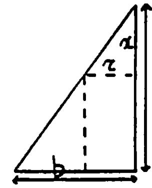


Fig.12

Nous avons relevé plusieurs procédures qui conduisent à ce même résultat faux; elles trahissent, comme nous le verrons, une conception erronée des aires latérales que nous rencontrerons en d'autres circonstances.

2.1.4. Des cercles plus nombreux, plus espacés, plus épais d'un côté que de l'autre.

Après un certain temps de réflexion, une bonne partie des élèves mûrissent de nouvelles intuitions qui, sans renier la première, la modulent et la rendent par là cohérente avec le résultat trouvé. La surface latérale est bien composée de cercles, tout comme l'est la base, mais ceux-ci sont, aux yeux de certains élèves, plus nombreux d'un côté que de l'autre :

> *[202] Il y a plus de points sur l'arête que sur le rayon et donc plus de cercles sur la surface latérale.*
> *[203] Faux, car les projections parallèles ne conservent pas les distances. Projection arête = rayon. Or, arête ≠ rayon → pas le même nombre de points.*

D'autres estiment que les cercles sont inégalement espacés selon qu'on les considère sur la surface latérale ou sur la base :

> *[204] Mais l'espacement des cercles sur la base diffère de l'espacement des cercles sur le cône.*
> *[205] Deux cercles de l'aire latérale enserrent une bande plus large sur le cône que leurs correspondants dans la base.*

Certains parlent d'indivisibles d'épaisseurs différentes .

> *[206] Ce raisonnement ne tient pas compte d'une certaine notion d'"épaisseur" des indivisibles circulaires.*

Quelques-uns enfin évoquent une certaine idée de densité :

> *[207] Mais est-ce que le nombre de circonférences obtenues couvre de la même manière la surface latérale que la base?*
> *[208] La surface du cercle est beaucoup plus compacte que la surface latérale du cône. Au plus la hauteur du cône est grande, au plus la surface du cône est éparpillée et au plus la surface du cercle est compacte.*

2.1.5. De la différence de nombre, d'espacement ou d'épaisseur des cercles au rapport des aires.

Les élèves qui ont évoqué ces cercles plus ou moins nombreux, plus ou moins espacés ou plus ou moins épais sur la surface latérale et la base tentent, soit spontanément, soit à l'invite du professeur, de quantifier cette disparité afin d'établir une relation entre les deux aires. Tantôt avec succès, comme cet élève dont la question nous avait inspiré ce problème :

> [209] *L'espacement des cercles sur le cône est $(h^2 + r^2)^{1/2}/r$ fois plus large que l'espacement sur la base... Chaque cercle sur le cône correspond donc à une surface $(h^2 + r^2)^{1/2}/r$ fois plus grande que celle qui correspond au cercle de la base. La somme de ces surfaces sur le cône vaut donc $(h^2 + r^2)^{1/2}/r$ fois celle des surfaces sur la base. La surface du cône vaut donc $(h^2 + r^2)^{1/2}/r$ celle de la base, donc vaut $\pi r^2(h^2 + r^2)^{1/2}/r = \pi r\,(h^2 + r^2)^{1/2}$* [Fig.13].

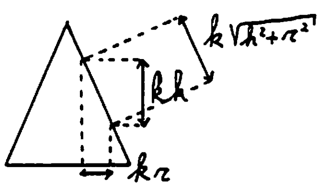


Fig.13

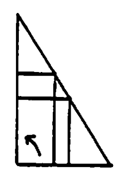


Fig.14

Tantôt les élèves estiment indûment que le rapport entre la hauteur du cône et son rayon est celui de l'aire latérale à celui de la base :

> [210] *[...] horizontalement il faut r circonférences pour obtenir la base et verticalement il faut h circonférences pour la surface latérale.*

Quelques élèves veulent absolument retrouver une aire latérale de πrh, résultat qu'ils avaient calculé par intégrale. Ainsi cet élève, poursuivant le calcul que nous avons retranscrit plus haut (Propos 201) :

> [211] *S lat = S Base. rapport (hauteur/rayon de base). Le rayon de la base est "envoyé"* [Fig.14] *sur la hauteur, si la hauteur vaut le rayon de la base $\Rightarrow$ surface latérale = surface de la base. Si le rapport est x $\Rightarrow$ chaque indivisible de la base est envoyé sur x indivisibles de la surface latérale.*

Et cet autre qui se ravise, alors qu'il était bien parti :

[212] $\Delta h = \alpha$ (h/r). Or h/r est une constante. On voit que $\beta > \alpha$ [Fig.15]. *Il y aura donc plus d'indivisibles pour un même Δr de circonférences sur l'aire latérale que sur la base !!! Combien plus? $\beta^2 = \alpha^2 + h^2 \alpha^2/r^2$ [...] $\rightarrow \beta/\alpha = (1 + h^2/r^2)^{1/2}$. Conjecture : aire latérale = $(1 + h^2/r^2)^{1/2}$ Base?[...] $\pi rh = (r^2 + h^2)^{1/2} \pi r$? Non ! [...]. Il y a en fait un indivisible par point de γ et non de β ! $\gamma = h\ \alpha/r \rightarrow \gamma/\alpha = h/r \rightarrow$ aire latérale = Base . h/r; $\pi rh = \pi r^2 h/r$? Oui !*

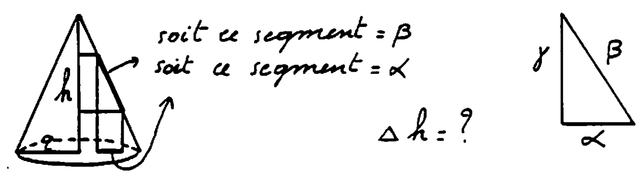


Fig.15

2.1.6. Un cône aplati en un disque.

Un élève considère toutes les génératrices du cône comme suggéré à la Fig.16. Il dit :

[213] Je pousse sur le sommet et mes génératrices s'aplatissent en un cercle : j'ai alors un cercle de rayon $(r^2 + h^2)^{1/2}$ [Fig.16]; *l'aire latérale du cône vaut donc $\pi((r^2 + h^2)^{1/2})^2$.*

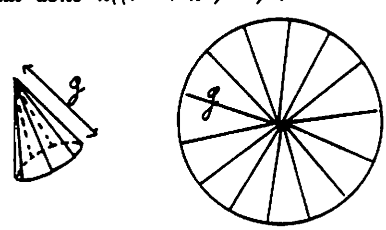


Fig.16

2.1.7. Une aide sur le tas, provisoirement pas de synthèse.

Si le professeur aide chacun des élèves (ou des groupes d'élèves) à aller jusqu'au bout de leurs intuitions, il ne fait aucune synthèse des diverses solutions devant l'ensemble de la classe. Il reporte celle-ci et passe de suite au problème suivant.

2.2. Un drôle de découpage de la sphère.

Inscrivons dans une sphère un cylindre dont le diamètre égale la hauteur et partageons la sphère en deux solides, le premier *constitué du cylindre et des deux calottes sphériques qui coiffent ses bases (Fig.17) et le second obtenu en ôtant le premier solide de la sphère (Fig.18).*

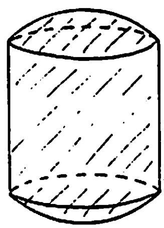


Fig.17

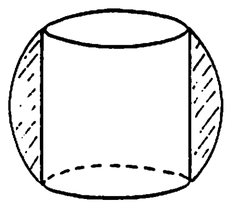


Fig.18

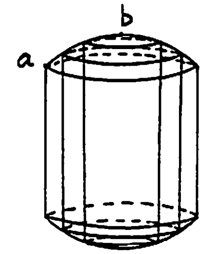


Fig.19

Ces deux solides ont le même volume, car ils sont composés d'un même nombre de surfaces cylindriques emboîtées les unes dans les autres et égales deux par deux. En effet, d'une part, on peut décomposer le premier solide en autant de surfaces cylindriques qu'il y a de points sur l'arc de cercle ab et le second en autant de surfaces qu'il y a de points sur l'arc de cercles ah (Fig.19 et 19 bis). Or, étant donné les proportions du cylindre inscrit dans la sphère, ces deux arcs de cercle valent tous les deux le huitième du cercle et sont dès lors composés d'un même nombre de points (Fig.20). D'autre part, les surfaces cylindriques qui constituent les deux solides, égales en nombre, sont aussi égales, deux par deux, en aire. Les surfaces prises respectivement dans chacun de ces solides en des points i et j équidistants de a ont effectivement une même aire égale à $2\pi xy$ $(= 2\pi.2x.y/2)$ *(Fig.21).*

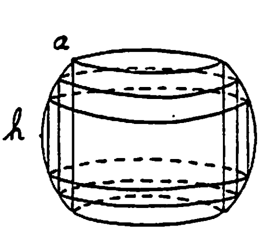


Fig.19 bis

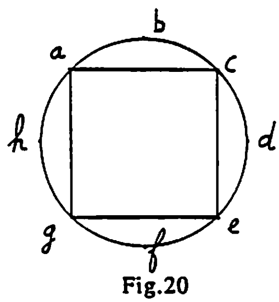


Fig.20

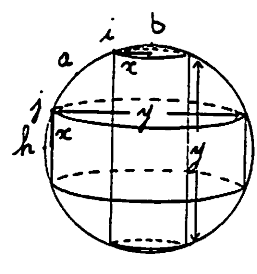


Fig.21

Ce raisonnement a été décrit et analysé par Torricelli, au XVII[e] *siècle [Dans un texte intitulé "Campo di tartufi" (champ de truffes) et mentionné par F. De Gandt, 1983]. Et vous, qu'en pensez-vous?*

Ici aussi, le professeur se contente de soutenir la recherche individuelle de chaque élève, mais il s'abstient de tout exposé magistral tant que les élèves n'ont pas reçu le problème 2.3.

2.2.1. Les solides ont l'air inégaux, pourtant la preuve de leur égalité a l'air sérieuse.

Aucun élève ne pense a priori que les deux solides considérés dans ce problème pourraient avoir même volume : celui de la Fig. 17 paraît tellement plus gros! Pourtant tous remettent en cause leur intuition première une fois qu'il ont lu et compris le raisonnement de Torricelli :

> *[214] Moi, personnellement, je n'arrive pas à trouver d'erreurs (s'il y en a) dans cette démonstration.*

Ils se cherchent alors de bonnes raisons de s'être laissés duper. Comme celle-ci, entendue à plusieurs reprises :

> *[215] Les solides creux sont trompeurs : en faisant tourner une petite surface assez loin d'un axe, tu engendres un solide plus gros que tu ne le crois.*

Le raisonnement tenu par Torricelli est propre à tromper non seulement les élèves du Secondaire, qu'ils aient ou non reçu un enseignement préalable sur l'intégration, mais aussi des étudiants de 4ème année d'université en mathématique. En effet, nous avons proposé à brûle-pourpoint ce seul paradoxe à une promotion de tels étudiants : beaucoup ont été convaincus de l'égalité des volumes.

2.2.2. Une vérification à portée de main.

Les élèves peuvent aisément contrôler les dires de Torricelli en faisant abstraction de la décomposition des deux solides en surfaces cylindriques. Quelques-uns, peu nombreux, le font spontanément. L'un d'eux règle très élégamment cette question :

> *[216] Cela revient à dire que les deux solides valent la moitié de la sphère [...]. Or le volume du cylindre vaut $\sqrt{2}\,\pi/2$* [Le rayon de la sphère est supposé égal à 1], *celui de la sphère $4\pi/3$. Il faudra donc que $\sqrt{2}/2 + x = (1/2)\,(4/3)$ ou encore que $1{,}41 + x = 1{,}33$.* [ou plus exactement $\sqrt{2}\,\pi/2 + x = (1/2)\,(4\pi/3)$ où x représente le volume des deux calottes, ce qui équivaut à $1{,}41 + 2x/\pi = 1{,}33...$], *ce qui est impossible.*

Quelques autres entreprennent de calculer le volume des calottes sphériques. Le professeur les engage à considérer celles-ci comme des assemblages de disques indivisibles perpendiculaires à l'axe du cylindre (Fig.22). Un tel disque, à distance x du centre o de la sphère, a, en vertu du théorème de Pythagore, une aire S égale à

$$S(x) = \pi\,(r^2 - x^2).$$

On sait, depuis la section III.2.3.2., que le calcul du volume d'une calotte se ramène à celui de l'aire sous la courbe $y = \pi\,(r^2 - x^2)$ entre des bornes appropriées, lesquelles sont ici $\sqrt{2}\,r/2$ et r, ce qui donne :

$$\int_{\sqrt{2}r/2}^{r} \pi\,(r^2 - x^2) = \pi r^3(8 - 5\sqrt{2})/12.$$

Le volume du solide constitué du cylindre et des deux calottes sphériques vaut, dès lors,

$$\sqrt{2}\,\pi r^3/2 + \pi r^3(8-5\sqrt{2})/6 = \pi r^3(8-2\sqrt{2})/6,$$

c'est-à-dire effectivement plus de la moitié de celui de la sphère.

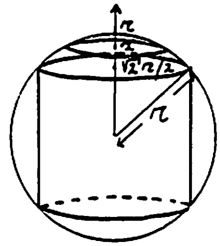


Fig.22

<u>2.2.3. Un infini n'est pas l'autre: évocation des indivisibles extrêmes: retour aux indivisibles inégalement espacés.</u>

Les élèves perçoivent très difficilement les causes du paradoxe. Même ceux qui avaient vu clair dans le problème précédent sont ici un peu perdus, a fortiori les autres. L'un ou l'autre soupçonne bien que l'idée d'un même nombre d'indivisibles est fallacieuse dès que ceux-ci sont en nombre infini :

[217] Ca doit être dans l'idée du même nombre qu'il y a quelque chose qui ne va pas .

Mais cela ne va guère plus loin. Au contraire, tous les autres, une fois convaincus et rassurés par le professeur que deux surfaces cylindriques homologues ont bien la même aire, se raccrochent désespérément au fait qu'il y a le même nombre d'indivisibles de part et d'autre :

[218] Mais pourtant il y en a le même nombre...!

Un étudiant de seconde licence en mathématique a évoqué, pour expliquer l'erreur, les "lignes" en lesquelles dégénèrent les surfaces cylindriques extrêmes :

[219] Dans le cylindre coiffé des deux calottes, la dernière surface cylindrique est un segment, un diamètre; dans l'autre, la dernière surface est un cercle de même diamètre, plus long que le diamètre lui-même.

Aux élèves qui avaient parlé d'espacement ou d'épaisseur d'indivisibles ou d'infinité relative à l'occasion du problème 2.1., le professeur demande comment mesurer ici un tel espacement ou une telle épaisseur. Cette suggestion débloque les élèves qui répondent, après un temps de réflexion, qu'il faut, pour ce faire, "traverser perpendiculairement les surfaces cylindriques" et donc évaluer les inclinaisons respectives des arcs de cercle ab et ah (Fig.19) vis-à-vis de cette direction :

[220] Les cylindres de la Fig.17 se déplacent de b vers c et ceux de la Fig.18 de d vers c [Fig.23] *(en principe pour des surfaces égales). Or, les arcs de cercles bc et dc n'ont pas la même inclinaison ⇒ pour varier de mêmes Δy et Δx, les cylindres de la Fig.17 doivent passer par plus de points que ceux de la Fig.18 ⇒ il y a moins de cylindres dans la Fig.17 qu'il ne devrait y en avoir ⇒ c'est normal qu'on arrive à une valeur trop petite (on considère qu'on sait que Volume Fig.17> Volume Fig.18).*

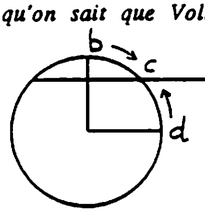


Fig.23

Aux élèves qui sont restés cois devant les contradictions soulevées par les problèmes 2.1. et 2.2., le professeur donne assez vite l'énoncé du problème 2.3. repris ci-après.

2.2.4. Un espacement différent d'un solide à l'autre, considéré de prime abord comme constant au sein de chacun.

Pour juger de la disparité d'espacement ou d'épaisseur ou de nombre d'indivisibles entre les deux solides, la majorité des élèves comparent les projections orthogonales des arcs ab et ah sur une droite perpendiculaire aux surfaces cylindriques. Ensuite, certains affirment que les solides sont entre eux comme ces projections :

> *[221] On peut constater que l'espace entre les indivisibles est plus grand en x qu'en y* [Fig.24] *⇒ il y en a le même nombre mais pas le même espace ⇒ Fig.17 > Fig.18 ⇒ Volume Fig.17 / Volume Fig.18 = x/y.*

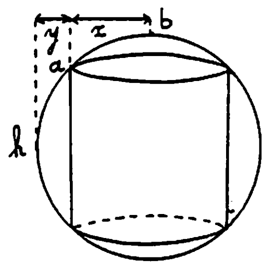


Fig.24

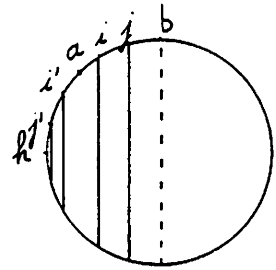


Fig.25

C'est là négliger que la "densité" des indivisibles est non seulement différente d'un solide à l'autre, mais encore variable au sein de chacun d'eux. Prenons en effet, sur les arcs de cercle ab et ah, deux couples de points équidistants de a, à savoir (i, i') et (j, j') (Fig.25). Les surfaces cylindriques qui correspondent aux points i' et j' et qui se trouvent dans le solide en forme d'anneau sont plus rapprochées l'une de l'autre que celles correspondant aux points i et j et qui sont situées dans l'autre solide : il y a donc des espacements différents d'un solide à l'autre. Mais en plus, cet écart s'accentue au fur et à mesure que l'on prend sur ces arcs, des points éloignés de a: les surfaces qui meublent l'anneau sont de plus en plus serrées les unes contre les autres quand on s'éloigne de l'axe du cylindre et les autres de plus en plus écartées quand on se rapproche de celui-ci. Ceci explique non seulement la différence entre les volumes des deux solides, mais aussi le fait qu'on ne puisse déterminer leur rapport en se basant sur une quelconque disparité d'espacement entre les indivisibles. Mais au lieu de considérer de tels couples d'indivisibles homologues, les élèves prennent tous les indivisibles en bloc dans chacun des deux solides. Seul l'un d'eux écrit :

> *[222] Même nombre de surfaces? A ≠ B. Non!* [Fig.26]. *On a* $(2 - \sqrt{2})/2 \neq 1/2 \Rightarrow$ *plus dense ici* [Il désigne l'accolade 1 de la Fig.26] *et* $\sqrt{2}/2 \neq 1/2 \Rightarrow$ *moins dense là* [Il designe l'accolade 2 de la Fig.26].

Ce qui n'empêchera pas d'ailleurs cet élève de revenir ensuite au rapport formé par les projections des arcs ab et ah:

> *[223]* $V_1/V_2 = e/e'$, *or,* $e = R\sqrt{2}/2$ *et* $e' = R - R\sqrt{2}/2$ [Fig.27] $\Rightarrow V_2/V_1 = \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}$.

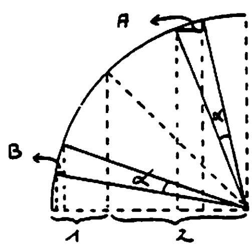


Fig.26

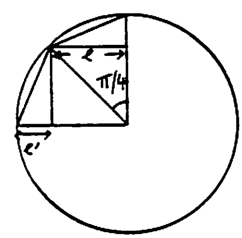


Fig.27

Par contre tous les élèves ayant entendu l'explication ci-dessus s'en sont déclarés entièrement convaincus.

2.3 Quelques paradoxes célèbres.

S'interrogeant sur l'usage abusif des indivisibles, Torricelli et Cavalieri ont mis en évidence un certain nombre de paradoxes flagrants auxquels celui-ci peut conduire. Ces paradoxes ont alimenté la réflexion critique des mathématiciens à l'égard du concept d'indivisible. En voici deux, dûs, le premier à Torricelli, le second à Cavalieri.

1) Dans le parallélogramme ABC, [Fig.28] *où le côté AB est plus grand que le côté BC, on trace le diamètre* [Le mot diamètre signifie ici diagonale] *BD et à partir d'un point quelconque E de ce diamètre, on mène EF et EG parallèles à AB et BC; alors EF est plus grand que EG, et il en est de même pour toutes les parallèles de la même sorte, prises une à une; par conséquent toutes les EF prises ensemble dans le triangle ABD sont plus grandes que toutes les EG prises ensemble dans le triangle CDB, et le triangle ABD est plus grand que le triangle*

CDB; ce qui est faux. En effet, le diamètre découpe le parallélogramme par le milieu; par conséquent on raisonne faussement en procédant de cette manière" (cité par F. De Gandt, 1983).

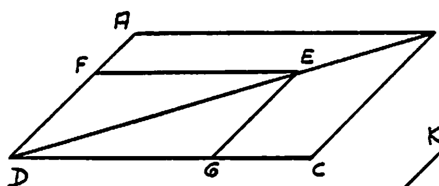


Fig.28

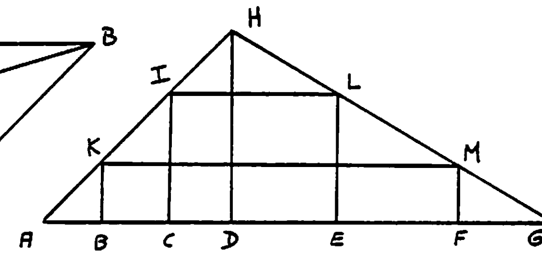


Fig.29

2) Voilà en quoi consiste la difficulté. Soit HD perpendiculaire à AG, [Fig.29] *et AD est plus petit, et DG plus grand que DH. On joint HG et HA, et HD sert de règle. Et parmi toutes les lignes du triangle HAD on en prend autant que l'on veut comme KB et IC, et par K et I l'on tire KM et IL parallèles à AG, puis on trace LE et MF parallèles à HD. Il est donc manifeste que KB est égal à MF, et IC à LE; et par conséquent, aux lignes aussi nombreuses que l'on voudra prendre de cette manière dans le triangle HAD, ou encore (dira mon objecteur) à toutes les lignes du triangle HAD, nous trouverons que sont égales toutes les lignes du triangle HDG; aussi ces triangles sont-ils égaux; et pourtant ils sont inégaux. Donc, etc...(cité par F. De Gandt, 1983).*

Torricelli et Cavalieri eux-mêmes ont expliqué intuitivement pourquoi leur raisonnement conduit à une aberration. Comment le feriez-vous vous-même en vous référant d'aussi près que possible aux propos cités plus haut? Revènez éventuellement aux fiches précédentes.

2.3.1. Les principes de Cavalieri ne sont pas respectés!

Dans le chapitre II, nous nous étions contentés de donner aux élèves l'énoncé des principes de Cavalieri sans expliciter les règles de découpage implicitement contenues dans ceux-ci : la présence d'une *régula*, un découpage commun pour les deux grandeurs... En lisant les paradoxes de la fiche 2.3., beaucoup d'élèves perçoivent la nécessité de ces règles et les dégagent spontanément.

1) Certains suggèrent de découper autrement les deux triangles composant le parallélogramme, afin d'observer une même direction de découpage :

> *[224] Il est parti du principe que, parce que FE ≠ EG et que FE > EG, dès lors il en a déduit que ABD est plus grand que BDC. Mais il coupe les deux triangles par des sections différentes; ici* [Fig.30] *parallèlement à la base, ici* [Fig.31] *parallélement à BC. Il aurait dû comparer des sections qui soient parallèles entre elles* [Fig.32], *quitte à après étudier les sections dans l'autre sens* [Fig.33].

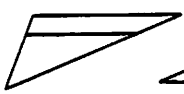


Fig.30

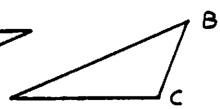


Fig.31

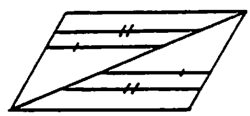


Fig.32

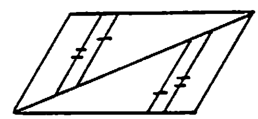


Fig.33

> *[225] Une confusion est faite: on confond les indivisibles. Pour que ça marche, il faudrait une même base* [une même direction] *et une même hauteur.* [C'est-à-dire qu'il faut associer dans l'un et l'autre triangle les indivisibles équidistants de leurs bases respectives (Fig. 34)]. Notons que cette manière de décomposer les triangles en indivisibles - qui a été celle de Cavalieri échappe aux principes dans le sens où il y a deux découpages distincts quoique liés au lieu d'un seul].

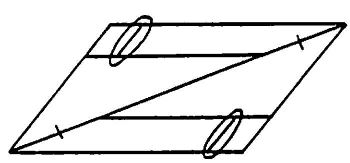


Fig.34

2) D'autres incriminent le fait que les deux grandeurs qu'on compare n'ont pas la même hauteur :

> *[226] La théorie développée ci-dessous est fausse; en effet, si nous comparons cela avec le principe de Cavalieri, nous remarquons que dans le second cas* [Le principe de Cavalieri relatif aux surfaces], *les infinités des segments se comparaient toujours sur des hauteurs égales, ce qui n'est pas le cas ici.*

3) D'autres encore invoquent le fait qu'il n'y a pas qu'un seul découpage commun pour les deux grandeurs. Ainsi à propos du paradoxe décrit par Cavalieri :

[227] Il ne coupe pas les triangles à la même hauteur [parallèlement à la base du grand triangle AHG].

4) Quelques-uns vont plus loin : ils exigent deux découpages de directions distinctes :

[228] Ici il ne démontre l'égalité des coupes que dans le sens vertical, mais il devrait aussi le démontrer dans le sens horizontal, c'est-à-dire parallèlement à la base AG. Les deux triangles sont égaux si et seulement si les lignes verticales et les lignes horizontales sont égales entre elles lors des coupes.
[229] [...] Il aurait dû comparer les indivisibles horizontaux entre eux et aussi [adverbe souligné par l'élève] *les verticaux car DG/DA>1.*

2.3.2. Retour à l'espacement, à l'épaisseur, à la densité des indivisibles.

Ces deux paradoxes suscitent chez quasiment tous les élèves des réflexions fort proches des interprétations données par Torricelli et Cavalieri. Nous pouvons résumer ces réflexions par quelques expressions-clés : indivisibles plus ou moins espacés, plus ou moins épais, plus ou moins nombreux ou formant un réseau plus ou moins dense. Mais voyons en quels termes précis les élèves expriment ces intuitions.
1) A propos de l'espacement entre indivisibles :

[230] Les deux aires [les aires 1 et 2 de la Fig.35] *seraient égales si les indivisibles étaient aussi "serrés"* [Guillemets mis par l'élève] *dans les deux triangles. Or, dans le triangle n°2, les indivisibles sont plus espacés pour une même longueur que dans le triangle n°1, donc les aires sont différentes; //y - x// ≠ //y' - x'//.*

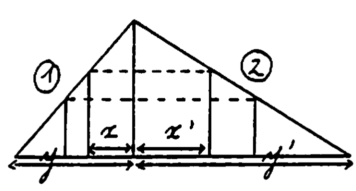


Fig. 35

[231] [...] Les sections vont déterminer de part et d'autre un même nombre d'indivisibles, seulement les tranches seront plus rapprochées dans le triangle du haut que dans le triangle du bas [...].

2) A propos de l'épaisseur des indivisibles :

[232] Pour noircir les deux triangles [du parallélogramme] *de la même façon on doit dessiner les indivisibles verticaux plus gros.*
[233] Il faut bien que les segments soient plus épais, plus larges d'un côté que de l'autre, car il faut une toute petite surface (et pas un segment) pour faire une surface.

3) A propos de leur nombre:

[234] [...] /FF'/ > /GG'/ [On peut supposer que l'élève, distrait, aurait du écrire */FF'/ < /GG'/* (Fig.36)] *⇒ de la base /FF'/ pourront partir plus d'indivisibles que de /GG'/, partant, plus issus de /AD/ que de /DC/.*
[235] C'est aberrant, car, on peut dire que les indivisibles EF sont entassés sur une hauteur AD et que les indivisibles EG sont entassés sur une hauteur DC. Or, AD < DC ⇒ il y a moins d'EF que de EG ⇒ c'est logique que CDB soit plus grand qu'on ne le dit.

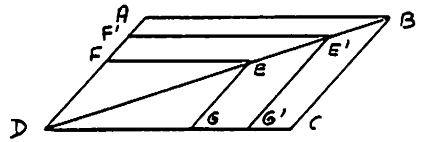


Fig.36

4) A propos de la densité des indivisibles:

[236] [...] Donc théoriquement comme il y a un même nombre de segments mais que les segments parallèles à AB sont plus grands alors leur surface est plus grande. Mais les segments parallèles à AB sont répartis sur un segment AD plus petit que DC, la surface des segments parallèles à AB est donc plus concentrée que la surface des segments parallèles à DC. Pas de n'importe quelle manière : en effet le rapport entre la longueur des segments parallèles à AB et la longueur des segments parallèles à BC, c'est-à-dire AB/BC, est égale au rapport entre la concentration de la surface déterminée par les segments parallèles à BC et la concentration de la surface déterminée par les segments parallèles à AB, c'est-à-dire DC/AD ⇒ les deux surfaces sont donc égales.
[237] De plus, cela se caractérise par une différence de densité entre segments verticaux.
[238] Tu accroches les segments aux côtés DC et DA puis tu imagines que ce [ces côtés] *sont des élastiques et tu tires plus d'un côté que de l'autre : un des triangles sera plus clairsemé.*

5) Quelques propos mêlent la densité des indivisibles tantôt à leur espacement, tantôt à leur nombre :

[239] La raison de l'erreur est la même : DB garantit un même nombre d'indivisibles. Il reste à comparer l'espace les séparant. Il y a une question de "densité" : les indivisibles sont plus "serrés" sur AB que sur DC ⇒ AD/DC = GE/ EF [Guillemets mis par l'élève].

[240] Mais il y aura <u>moins de EF</u> [termes soulignés par l'élève] *que de EG car AD > DC* [Sans doute l'élève a-t-il voulu écrire AD < DC], *disons qu'il y a moyen de mettre plus de segments dans le triangle DBC; c'est une question de densité.*

6) Enfin, un propos contient le germe d'une des intuitions précédentes, sans qu'on sache déterminer de laquelle il procède le plus :

[241] Ici les segments verticaux délimitent des portions de grandeurs différentes (même hauteur, largeurs différentes) [Fig.37].

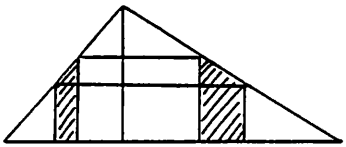


Fig.37

Les notions d'espacement, d'épaisseur ou de densité des indivisibles apparaissent généralement dès que l'élève a opté pour l'hypothèse d'un même nombre d'indivisibles dans l'une et l'autre grandeur; sinon la différence du nombre d'indivisibles de part et d'autre suffit à expliquer le paradoxe :

[242] Si on prend le même nombre de tranches pour le triangle AHD que pour le triangle HDG, les distances entre les tranches ne seront pas égales, mais si on prend une distance égale entre les tranches, on notera un nombre plus grand de tranches pour le triangle HDG que pour le triangle HDA, ce qui prouve, même si quelques tranches sont égales, que le triangle HDG est plus grand que le triangle HDA.
[243] On prend le même nombre de tranches pour des hauteurs différentes <u>donc</u> [C'est nous qui soulignons] *la distance entre les tranches est différente. On prend le même nombre de tranches,* <u>mais</u> [C'est nous qui soulignons] *ce nombre de tranches ne recouvre pas la même surface.*

<u>2.3.3. Construire une surface avec des segments?</u>

Un élève commente le paradoxe de Torricelli en évoquant les dimensions des grandeurs :

[244] Est-ce qu'il n'y a pas un problème de définition? Parce que dire qu'une surface est une somme de segments, ce n'est pas tout-à-fait juste... euh... physiquement par exemple. Et est-ce qu'il ne faudrait pas plutôt dire que la surface est le produit de deux grandeurs physiques donc qui sont des longueurs... ça nous donnerait des mètres pour la surface et ça n'est pas juste.

2.3.4. Retour pour certains élèves aux problèmes 2.1. et 2.2.

Les quelques élèves qui sont restés impuissants face aux problèmes 2.1. et 2.2. sont invités par le professeur à y revenir, une fois terminé le problème 2.3. Forts des intuitions développées à l'occasion de ce dernier problème, ils parviennent à résoudre ces deux premiers, avec ni plus ni moins de difficultés que les élèves qui en étaient sortis sans l'aide de ces deux derniers paradoxes.

Le professeur fait conjointement la synthèse des trois problèmes à partir des productions des élèves.

2.4. Le paradoxe de l'écuelle.

1) Inscrivons un hémisphère de rayon r dans un cylindre (Fig. 38) et montrons que le volume de l'écuelle obtenue en ôtant l'hémisphère du cylindre égale celui de l'hémisphère.

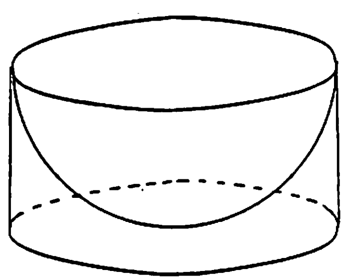


Fig. 38

Inclinons l'hémisphère de 90° par rapport à l'écuelle. Décomposons l'hémisphère en disques parallèles à sa base. Décomposons l'écuelle en couronnes circulaires parallèles aux bases du cylindre (Fig.39). Chacun de ces disques égale en aire la couronne circulaire qu'il rencontre en un point d du quart de cercle o'f. En effet, par similitude des triangles ged et def (Fig.40), on a

$$(de)^2 = g\,e.\,e\,f.$$

L'aire de la couronne vaut dès lors

$$\pi(of)^2 - \pi(oe)^2 =$$
$$\pi\,(oe + ef)^2 - \pi(oe)^2 =$$

$$\pi\ ((oe)^2 + (ef)^2 + 2\ oe\ .\ ef) - \pi\ (oe)^2 =$$
$$\pi\ ef\ (ef + 2\ oe) =$$
$$\pi\ ef\ .\ ge = \pi\ (de)^2,$$

c'est-à-dire l'aire du disque de rayon de. Or il y a autant de disques dans l'hémisphère et autant de couronnes circulaires dans l'écuelle qu'il y a de points sur le quart de cercle o'f. Par conséquent les deux solides étant composés d'un même nombre d'indivisibles (= les disques et les couronnes) égaux deux à deux ont le même volume.

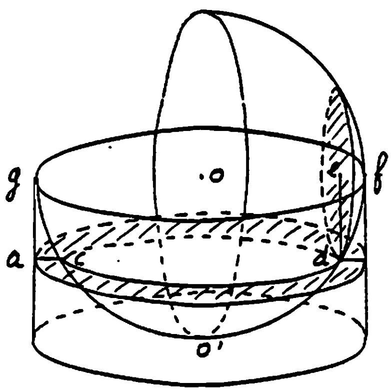


Fig.39

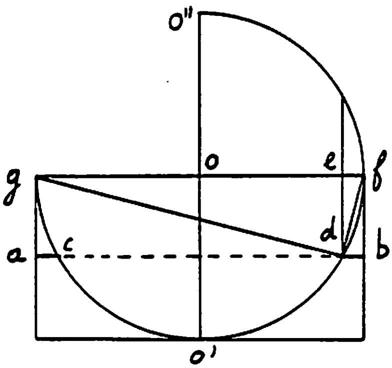


Fig.40

2) Montrons maintenant que le volume de l'écuelle est plus petit que celui de l'hémisphère.

Nous avons vu précédemment que le volume de l'hémisphère vaut $2\pi r^3/3$, celui du cylindre vaut πr^3; celui de l'écuelle vaut donc $\pi r^3/3$, c'est-à-dire la moitié de celui de l'hémisphère!

3) Nous tombons sur une contradiction. Elucidez-la.

2.4.1. Une explication du paradoxe via l'espacement des indivisibles.

Ce problème montre à nouveau le danger qu'il y a à considérer des indivisibles irrégulièrement "espacés". Les empilements de disques et de couronnes ont une même épaisseur égale au rayon de l'hémisphère. Cependant, leur disposition irrégulière dans chacun des deux solides fait qu'on ne peut pas conclure à l'égalité des volumes. En effet, considérons à la Fig.41 cinq positions équidistantes du point d sur le quart de cercle o'f, ainsi que les segments qui figurent les disques et les couronnes correspondant à ces positions. On voit que les disques composant l'hémisphère sont plus petits là où ils sont plus proches les uns des autres et plus grands lorsqu'ils sont moins serrés, alors que c'est le contraire pour les couronnes. On a donc surestimé le volume de l'écuelle par rapport à celui de l'hémisphère pour l'avoir rempli de manière plus dense avec les indivisibles les plus grands.

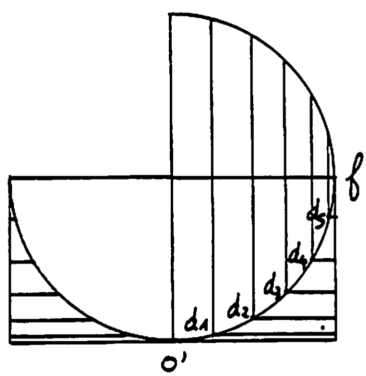


Fig.41

2.4.2. La difficulté d'une observation locale.

Ce problème a été proposé, faute de temps, à quelques élèves seulement : ceux qui avaient particulièrement bien décélé les causes des paradoxes précédents.

Bien qu'avertis - et par leurs trouvailles propres et par la synthèse qui a suivi les problèmes 2.1. à 2.3. - du rôle tenu par l'espacement des indivisibles, ils éprouvent cependant beaucoup de peine à déjoüer ce paradoxe. La plupart d'entre eux en restent à l'argument :

> [245] *Les cercles couvrent la même hauteur que les couronnes : le rayon de l'hémisphère.*

Ils ne songent pas à observer comment évoluent d'une part la mesure des indivisibles, d'autre part leur espacement en fonction de leur localisation dans les solides. Les seuls éléments dont ils tiennent compte, à savoir l'épaisseur totale des indivisibles et l'égalité d'aire des indivisibles homologues, ne leur permettent pas de voir comment interfèrent localement la mesure des indivisibles et leur espacement relatif.

2.5. "Avoir même nombre d'indivisibles".

Considérons deux cercles concentriques (Fig.42). Lequel possède le plus de points?

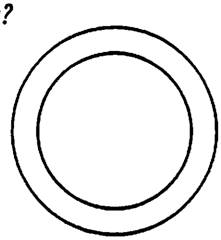


Fig.42

2.5.1. Une bijection simple et choquante entre deux ensembles infinis.

Cette question a été débattue par groupes. Presque tous évoquent l'homothétie qui envoie un cercle sur l'autre, ce qui pousse certains à dire dans un premier temps :

> *[246] Oui, les deux cercles ont le même nombre de points puisqu'il suffit d'associer un point a et son image homothétique a' qui appartiennent au même rayon* [Fig.43].

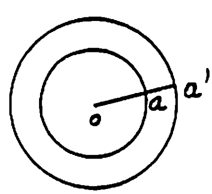


Fig.43

Quelques-uns objectent alors que les deux cercles, composés d'un même nombre de points, devraient avoir même longueur, ce qui a pour effet de diviser les élèves en plusieurs clans :
- ceux qui maintiennent que les deux cercles ont même nombre de points, tout en précisant que les points du cercle extérieur se

doivent alors d'être soit plus "gros", soit plus "espacés", soit séparés par des "trous";
- ceux qui pensent que le plus grand cercle est composé d'un nombre plus grand de points;
- ceux qui trahissent leur perplexité par le silence ou par des réflexions telles que :

> *[247] Quand on va du petit cercle au grand, on a le même nombre de points mais quand on revient en sens inverse cela ne marche plus : on va repasser deux fois sur le même point.*

En guise de synthèse, le professeur explique que la spécificité d'un ensemble infini est d'être équipotent à un de ses sous-ensembles propres : il illustre ce fait, entre autres par la bijection entre l'ensemble des naturels et l'ensemble des nombres pairs. Il met en évidence la vanité de l'expression "avoir le même nombre d'indivisibles", si flagrante dans le cas des indivisibles-points. Il montre aussi que tous les raisonnements conduisant aux paradoxes s'appuient sur une telle mise en correspondance bijective des indivisibles respectifs de deux grandeurs.

2.6. Des volumes des solides à leurs aires latérales.

Considérons deux solides auxquels s'applique le principe de Cavalieri. Tout plan, parallèle à un plan fixe, les sectionne l'un et l'autre en des indivisibles de même aire. Ils ont donc même volume.

Peut-on considérer les périmètres des sections ainsi déterminées comme les indivisibles respectifs de leurs surfaces latérales? Justifiez et illustrez votre réponse.

2.6.1. Des indivisibles d'un volume à ceux d'une aire latérale : un glissement fréquent.

Cette fois, les élèves ne sont plus dupes : si on pose une telle question, c'est que la réponse est non et ils ont tôt fait d'exhiber un contre-exemple flagrant à savoir deux parallélipipèdes de même base carrée et de même hauteur, l'un droit et l'autre oblique.

Nous pouvons cependant affirmer que ce problème manifeste un écueil patent du calcul d'aires latérales, écueil dont nous avons pu observer l'attirance en maintes circonstances.

1) Un élève dont nous avons déjà parlé (section II.2.2.10.) égalise de fait les aires latérales de deux prismes de même base et de même hauteur, sans toutefois expliquer pourquoi.
2) Soit le solide engendré par la rotation, autour de l'axe ox, de la surface située sous le graphe d'une fonction f entre les abcisses a et b (Fig.44). Il arrive fréquemment que des élèves [qui ont ou non reçu un enseignement classique de l'analyse], sachant que le volume de ce solide s'écrit $\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$, proposent de déterminer son aire latérale au moyen de l'intégrale $\int_a^b 2\pi[f(x)]\,dx$ en justifiant ainsi leur proposition :

[248] On prend cette fois les périmètres des disques au lieu de prendre leur aire.

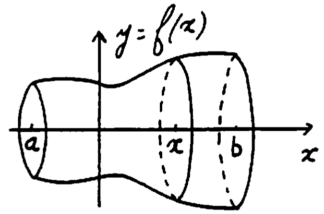


Fig.44

Une proposition analogue ressurgit souvent à l'occasion des exercices.
3) Lors de la synthèse du problème 2.6., le professeur explique que l'espacement des indivisibles doit se mesurer sur une parallèle à la hauteur, lorsqu'il s'agit de comparer les volumes de deux parallélipipèdes, l'un droit et l'autre oblique, mais sur une parallèle à leurs arêtes latérales lorsqu'il s'agit de comparer leurs aires latérales. Quelques élèves ne comprennent pas pourquoi il faut faire cette distinction et pourquoi on ne peut pas, dans les deux cas, mesurer l'espacement le long de la hauteur.
4) Soit le solide engendré par la rotation, autour de l'axe ox, de la surface délimitée par $y = x^2$, $y = 0$ et $x = 1$. Pour déterminer l'aire latérale de ce solide, un élève s'inspire du calcul effectué à l'occasion du problème III.2.7. (Le calcul de l'aire sous $y = x^3$) et procède comme suit. Il inscrit n cylindres d'épaisseur 1/n dans ce solide et somme leurs aires latérales (Fig.45) :

$$(1/n)\ 2\pi\ (1/n)^2 + (1/n)\ 2\pi\ (2/n)^2 + \ldots + (1/n)\ 2\pi\ ((n-1)/n)^2 = 2\pi\ (2n^3 - 3n^2 + n)/n^3.$$

Il calcule la limite de cette dernière expression, pour n tendant vers l'infini, et trouve $4\pi/6$.

Aux doutes du professeur, il oppose le contrôle suivant : on approche le solide par excès au moyen des cylindres représentés à la Fig.46, ce qui donne cette fois une somme égale à $2\pi\ (2n^3 + 3n^2 + n)/n^3$ mais toujours une limite égale à $4\pi/6$!

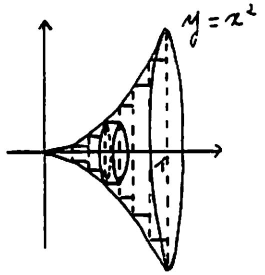
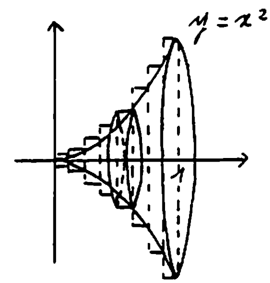


Fig.45



Fîg.46

2.7. De l'aire latérale du cylindre à celle de la sphère.

Considérons une sphère et le cylindre qui lui est circonscrit (Fig.47). Tout plan parallèle aux bases du cylindre sectionne ces deux solides en deux disques C et C'. Regardons les surfaces latérales du cylindre et de la sphère comme l'assemblage des cercles correspondants. Il y a autant de cercles C que de cercles C' vu qu'on peut associer deux par deux les cercles coplanaires. Or, chaque cercle C est plus petit (ou égal en ce qui concerne la section médiane) que le cercle C' qui lui correspond. L'aire latérale de la sphère serait donc inférieure à celle du cylindre circonscrit. Or, elle ne l'est pas.

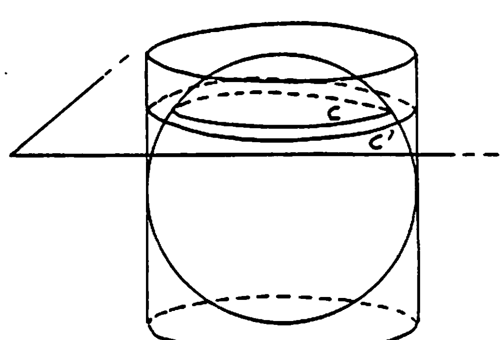


Fig.47

Corrigez ce raisonnement en le serrant d'aussi près que possible.

Précisons que les énoncés des problèmes 2.6. et 2.7. ont été proposés en même temps et que, par conséquent, le deuxième a été travaillé avant que le premier ne soit résolu par le professeur.

2.7.1. Du constat d'un écartement variable entre indivisibles au calcul de cet écartement.

La solution suivante s'inspire de la réponse d'un élève. Sectionnons la sphère et le cylindre par n plans régulièrement écartés les uns des autres et parallèles aux bases du cylindre. Les cercles ainsi déterminés sur la surface cylindrique sont régulièrement espacés de e unités (Fig.48). Ceux découpés dans la surface sphérique ne le sont pas : leur écart e', proche de e à la section médiane, augmente au fur et à mesure que l'on se rapproche du plan tangent à la sphère. Mais, en même temps, la longueur de ces cercles diminue et, qui plus est, varie en raison inverse de cet écart. Ce fait peut être argumenté sommairement de la façon suivante. Sur le cercle qui représente la surface sphérique, nous choisissons un point a quelconque (Fig.49). Soit δ l'angle formé par le rayon oa de ce cercle et la droite uu' représentant l'intersection

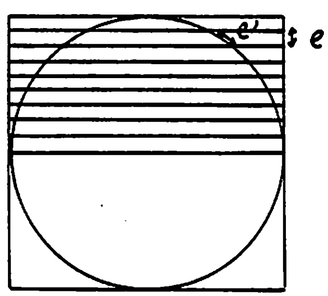


Fig.48

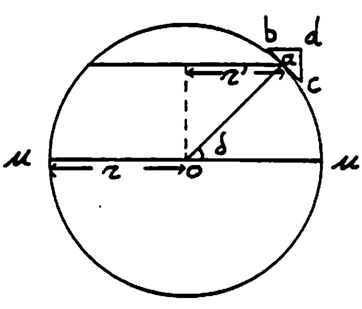


Fig.49

de la sphère avec celui des n plans qui contient son centre. A hauteur du point a, on représente un petit triangle rectangle bdc dont l'hypothénuse est perpendiculaire au rayon oa et dont le côté bd est parallèle à la droite uu'. L'angle bcd de ce triangle égale l'angle δ car ce sont des angles à côtés perpendiculaires. Les côtés dc et bc de ce même triangle représentent approximativement les écarts e et e' correspondant à un angle de δ. Leur rapport vaut dès lors cos δ. On a donc :

$$e/e' = \cos \delta.$$

Or, cos δ représente aussi le rapport entre le rayon r' du cercle découpé sur la surface sphérique à hauteur de a et le rayon r de n'importe quel cercle de la surface cylindrique. De là on déduit

$$2\pi r'/2\pi r = e/e' \text{ ou } 2\pi r'.e' = c^{te}.$$

Par conséquent, si les indivisibles de la surface sphérique deviennent de plus en plus petits par rapport à ceux de la surface cylindrique, ils deviennent aussi proportionnellement plus espacés. L'un compensant l'autre, on est tenté de conclure que l'aire de la sphère égale l'aire latérale du cylindre, à savoir $2\pi r.\ 2r = 4\pi r^2$: ce qui est correct.

<u>2.7.2. L'inégalité d'espacement ou de nombre d'indivisibles suffit à mettre en garde.</u>

Sans aller aussi loin que cet élève, les autres se méfient de la conclusion proposée en arguant du fait que les cercles qui composent la surface du cylindre sont équidistants et que ceux qui forment la surface de la sphère ne le sont pas ou encore que les premiers sont moins nombreux que les seconds :

> *[249] Peut-être pourrions-nous calculer, en fonction de la hauteur, la somme des cercles des disques parallèles, puis la multiplier par le rapport $\pi r/2r$. (mais j'en doute! Car les indivisibles sont irrégulièrement espacés!)*
> *[250] A chaque cercle c' du cylindre correspond un cercle c de la sphère. Mais, si dans le cylindre, il y a x cercles, ils sont étalés sur une distance de 2R tandis que dans le cercle ils sont étalés sur $\pi R \Rightarrow$ on sait en mettre $\pi/2$ fois plus dans la sphère.*

<u>2.7.3. Un leurre encore pour certains élèves.</u>

Quelques élèves, assez rares il est vrai, sont leurrés par ce problème et croient que l'aire du cylindre est plus grande que celle de la sphère.

2.7.4. Une décomposition radiale.

Deux élèves décomposent la surface de la sphère en cercles sectionnés par des plans radiaux :

[251] Et si on sommait des circonférences obtenues par sections de la sphère par un plan contenant un diamètre de la sphère, en la multipliant par le nombre πr (une demi-circonférence) qui serait le nombre d'indivisibles? Mais non, on obtient $2\pi^2 r^2$!
[252] La surface correspondrait au phénomène suivant : on ferait pivoter un cercle de centre c et de rayon r autour d'un axe x [Fig.50] *et on obtiendrait une surface sphérique, de "centre de définition"* [Les guillemets sont mis par l'élève] *c et de rayon r. Effectivement, les points appartenant aux différents cercles constituent une surface de forme sphérique.*

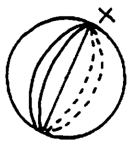


Fig.50

2.7.5. En se souvenant du problème 2.7. un élève corrige une erreur de calcul d'aire latérale.

Dans la foulée des exercices qui clôturent cette section, un élève propose de calculer l'intégrale $\int_{-r}^{r} 2\pi(r^2-x^2)^{1/2}\,dx$ pour déterminer l'aire de la sphère, se retranchant derrière les périmètres des disques indivisibles composant celle-ci. De lui-même il se rend compte de son erreur, simplement en évoquant cette fiche 2.7. pourtant vue plusieurs semaines auparavant.

2.7.6. Un segment de plus ou de moins dans une surface peut affecter le calcul de son aire .

Un élève se demande si l'on peut déduire l'aire latérale de la sphère de son volume. Il assimile ce dernier à l'aire sous une courbe, entre 0 et x, et cherche à savoir si seule une courbe d'équation $y = 4\pi x^2$ peut déterminer une aire de $4\pi x^3/3$. Il prétend qu'il ne peut y avoir deux courbes distinctes qui donnent lieu à la même aire car si l'une d'eux a une image en une abcisse, plus petite ou plus grande que l'autre, il faudra retrancher ou ajouter la longueur d'un segment dans le calcul de l'aire :

[253] Partons à présent de la sphère dont le volume connu est décomposé en indivisibles qui sont des aires latérales concentriques régulièrement espacées sur le rayon de la sphère. Les indivisibles iront de 1 à r (abcisses) et on sait que, quelque soit r, leur somme $=4\pi r^3/3$. *Donc, pour tout x (ou r),* $\int_0^x f(x) = 4\pi x^3/3$ [Fig.51]. *Cette aire hachurée, on l'a vu au cours, vaut* $4\pi x^3/3$. *Comment justifier que l'on peut prendre cette courbe seulement? Soit* $f(x) = 4\pi x^2$, *alors il existe au moins un point a où* $f(x) \neq 4\pi a^2$, *l'aire* $\int_0^a f(x)$ *sera différente de* $4\pi a^3/3$. *Vous me direz qu'on peut compenser f(a) par f(b) et que l'aire sera bien* $4\pi a^3/3$. *Prenons le premier point p en nous éloignant de 0 où* $f(p) \neq 4\pi p^2$. *Et bien là l'aire sera différente de* $4\pi p^3/3$. *Elle sera égale à* $4\pi p^3/3 + (f(p) - 4\pi p^2)$. *Soit donc cette courbe* $= y = 4\pi x^2$; $\int_0^r 4\pi x^2 = 4\pi r^3/3$, *c'est bien le volume de la sphère. L'aire latérale de la sphère sera la grandeur de l'indivisible d'abcisse r, c'est-à-dire* $f(r) = 4\pi r^2 \rightarrow$ *aire latérale de la sphère.*

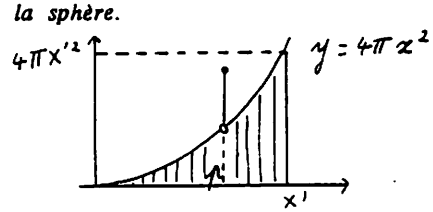


Fig.51

2.8. Plusieurs façons de "saucissonner" les solides de révolution.

Considérez le solide engendré par la rotation, autour de l'axe ox, de la surface comprise entre le graphe de la fonction $y = 1/x$, *l'axe ox et les droites d'équation* $x = 0$ *et* $y = 1$. *Décomposez ce solide - appelé hyperboloïde de révolution - en indivisibles de deux manières différentes. Déduisez son volume d'une de ces deux décompositions.*

2.8.1. La méthode du disque et celle du tube.

La plupart des élèves décomposent ce solide en disques perpendiculaires à l'axe ox (Fig.52). Les disques disposés entre l'abcisse 0 et l'abcisse 1 forment un cylindre de volume π. Tout autre disque, placé en une abcisse x a une aire égale à πx^{-2}. Le volume du paraboloïde se ramène donc, grâce à cette décomposition, à

$$\pi + \int_1^\infty \pi\, x^{-2} = \pi\ (1 + \int_1^\infty x^{-2}).$$

Certains élèves soulignent qu'ils ne savent pas encore déterminer l'aire sous une courbe du type x^{-k} ($k \in \mathbf{N}$). D'autres tentent des conjectures :

$$\int_a^b x^{-k} = b^{-k+1}/(-k+1) - a^{-k+1}/(-k+1),$$

ou encore :

$$\int_a^b x^{-k} = b^{-k-1}/(-k-1) - a^{-k-1}/(-k-1).$$

Mais la borne infinie les gêne tous... Ils abandonnent cette procédure.

Quelques élèves pensent alors à décomposer l'hyperboloïde en surfaces cylindriques d'axe ox, emboîtées les unes dans les autres (Fig.53) pour s'être souvenu que les deux solides envisagés au problème 2.2. avaient été décomposés de manière semblable. Ils réalisent que chacune d'elles, déroulée, devient un rectangle d'aire 2π puisque son rayon vaut y, sa hauteur x, son aire $2\pi y.x$ et que $xy = 1$.

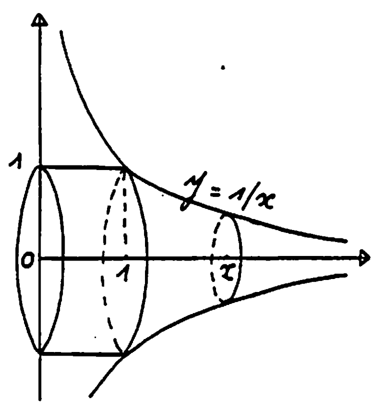


Fig.52

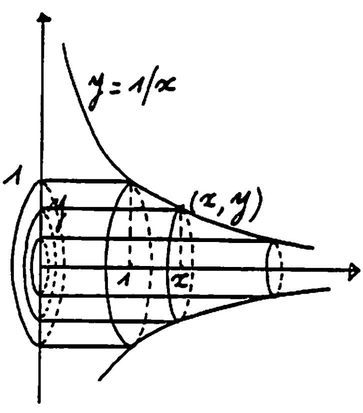


Fig.53

Devant leur hésitation à poursuivre, le professeur dessine la Fig.54, où le solide de droite est obtenu en empilant toutes ces surfaces cylindriques déroulées; ce dessin convainc tous les élèves que l'hyperboloïde a le même volume qu'un cylindre de base 2π et de hauteur 1. Quelques-uns d'entre eux signalent que les indivisibles sont également espacés dans les deux solides, pour autant que les surfaces cylindriques qui composent l'hyperboloïde correspondent à des ordonnées équidistantes.

Le professeur termine ce problème en résumant les deux méthodes de détermination du volume des solides de révolution qu'il appelle la **méthode du disque** et la **méthode du tube.** La première correspond au découpage "à la Cavalieri", c'est-à-dire, dans ce cas, par des plans perpendiculaires à l'axe de révolution. Les sections obtenues alors sont soit des disques, soit des couronnes si le solide est troué le long de son axe. Il se peut aussi que les sections soient des réunions de couronnes si la surface qui engendre n'est pas connexe. La seconde méthode consiste à découper le solide en surfaces cylindriques co-axiales. Ce découpage transgresse les règles strictes imposées par Cavalieri, c'est pourquoi il exige une certaine prudence notamment en ce qui concerne l'épaisseur ou l'espacement des indivisibles. Il peut cependant requérir, dans certains cas, moins de calculs que le découpage en disques.

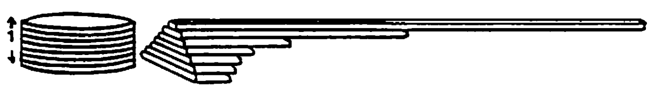


Fig.54

2.8.2. Une surface infinie engendre un volume fini!

Tous les élèves s'étonnent que cet hyperboloïde, non borné d'un côté, ait un volume fini. Leur étonnement devient stupéfaction, lorsque le professeur explique que ce volume est engendré par la rotation d'une aire infinie (en montrant que cette aire est supérieure à 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) +..., c'est-à-dire supérieure à 1 + 1/2 + (1/4 + 1/4) + (1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8) +... = + 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 +..., expression elle-même supérieure à tout nombre réel). Beaucoup d'entre eux voient, dans ce fait, un nouveau paradoxe à élucider.

2.8.3. Un cas où la méthode du tube dérape.

Pour déterminer le volume du solide engendré par la rotation, autour de $y = 0$, de la surface délimitée par $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ et $x = 4$, un élève procède comme suit : il calcule, en fonction de x, l'aire d'une surface cylindrique disposée comme sur la Fig.55, soit $2\pi\sqrt{x}\,(4 - x)$, et se ramène ainsi au calcul de l'aire sous la courbe répésentative de $y = 2\pi\sqrt{x}\,(4 - x)$ entre les bornes 0 et 4. Il déduit que l'aire sous

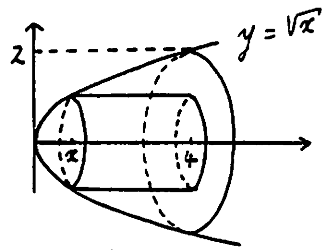


Fig.55

la courbe $y = \sqrt{x}$ vaut les 2/3 de celle du rectangle circonscrit du fait que l'aire sous une parabole $x = y^2$ vaut le 1/3 de cette dernière; il conjecture que $\int_a^b x^{3/2} = 2(b^{5/2} - a^{5/2})/5$, et trouve ainsi :

$$\int_0^4 2\pi\sqrt{x}\,(4 - x) \cong 17\pi.$$

Les autres élèves procèdent par disques perpendiculaires à ox, ce qui conduit à un autre résultat :

$$\int_0^4 \pi(\sqrt{x})^2\,dx \cong 8\pi.$$

Perplexité générale dans la classe, pendant un temps assez long, utilisé à chercher la faute de calcul responsable de cette incohérence. Jusqu'au moment où le professeur, lui aussi interloqué, découvre qu'à des abcisses équidistantes correspondent des surfaces cylindriques inégalement espacées les unes des autres (Fig. 56); découverte qui amena tous les élèves sans exception à refuter le résultat 17π en se référant aux paradoxes sur les indivisibles.

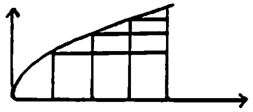


Fig.56

2.9. Les sections radiales : un miroir aux alouettes.

2.9.1. On voudrait faire jouer aux sections radiales le rôle d'indivisible.

Les sections radiales d'un solide de révolution ne peuvent jouer le rôle d'indivisibles, c'est-à-dire que l'on ne peut extrapoler aux volumes de deux solides de cette sorte une loi de proportionnalité vérifiée par les aires de leurs sections radiales respectives. De même, des segments concourants ne font pas fonction d'indivisibles pour les surfaces dont ils font partie.

Cependant les élèves ne sont pas toujours conscients de ce fait, tentés qu'ils sont presque tous d'étendre aux mesures des solides ce qu'ils savent de celles des sections radiales. Nous avons pu le constater à maintes reprises : d'abord, à l'occasion des problèmes 2.4. et 2.6. Ensuite, lors des calculs de volumes de solides de révolution, tels celui engendré par la rotation, autour de $y = 0$, de la surface délimitée par $y = x^2$, $y = 0$ et $x = 1$, on entend souvent des réactions analogues à celles-ci :

> *[254] L'aire de la surface tournant vaut le tiers de celle du rectangle circonscrit, donc le volume cherché vaut le tiers de celui du cylindre engendré par la rotation du rectangle, c'est-à-dire $\pi/3$.*
> *[255] On multiplie par 2π l'aire de la surface qui engendre le volume, ce qui donne $2\pi/3$ puisque cette surface fait un tour.*

L'une ou l'autre réaction témoigne de l'étonnement des élèves :

> *[256] Comment se fait-il que le cône ne soit pas la moitié du cylindre de même base et de même hauteur puisque l'un est engendré par un triangle rectangle et l'autre par un rectangle, double du triangle?* [Réflexion qui nous a suggéré l'énoncé du problème III.2.1.].
> *[257] Si on prend deux disques dont l'un a un rayon double, on sait que leurs aires sont dans le rapport 1 à 4; or, ils sont composés de segments (= rayons) dans le rapport 1 à 2?*

2.9.2. Le cône ou le paraboloïde dans le cylindre : des images évocatrices.

Le problème intitulé : "Du cylindre au cône tout de go" a été résolu antérieurement par les élèves sur la base d'intuitions décrites à la section III.2.1. La recherche suscitée par ce problème ne suffira pas à éviter que, par la suite, plusieurs élèves recourent indûment aux décompositions radiales. Il n'empêche que la moindre allusion à cet exemple les pousse à se rétracter : "Ah oui, c'est comme le cône". Certains d'ailleurs évoqueront d'eux-mêmes un tel contre-exemple pour se convaincre qu'ils font fausse route. A d'autres moments, c'est le problème du paraboloïde de révolution (III.2.2.) qui joue ce rôle.

2.10. Autres usages particuliers des indivisibles.

Quelques procédures d'élèves, faisant appel aux indivisibles, ont été récoltées un peu en marge des problèmes précédents. De ce fait, elles ne se rattachent à aucune autre section. Nous les avons regroupées ici, au risque de conférer à cette section un caractère quelque peu sporadique. La première de ces procédures est correcte, les autres non.

1) Deux cylindres de même rayon et d'axes sécants se coupent perpendiculairement (Fig.57). Quel est le volume de leur intersection?

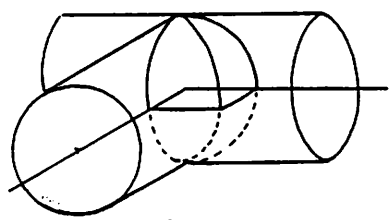


Fig.57

A cette question, un élève répond:

> *[258] Le solide considéré sera tel qu'il contiendra toujours une sphère de rayon r, mais dont les sections prises dans le plan qui contient les axes des cylindres* [Il veut vraisemblablement dire : qui est parallèle à ces axes...] *sont des carrés. En fait, si on compare ces sections du solide considéré avec les sections correspondantes d'une sphère de rayon r, les sections du premier solide seront toujours des carrés contenant juste le disque de section de la sphère. On peut en conclure que section carré / section disque = $4/\pi$ = $V_{solide}/V_{sphère}$ et vu que $V_{sphère} = 4\pi r^3/3$, $V_{solide} = (4/\pi).(4\pi r^3/3) = 16r^3/3$.*

2) Un élève assimile l'aire sous une arche de sinusoïde à celle d'un demi-disque:

> *[259] L'aire sous $y = \sin x$ entre 0 et $\pi/2$ vaut celle d'un quart de disque de rayon 1, soit $\pi/4$. En effet, on prend tous les sinus des angles de 0 à $\pi/2$* [Fig.58] *et on les replace sur le cercle trigonométrique* [Fig.59].

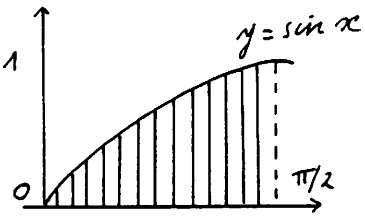


Fig.58

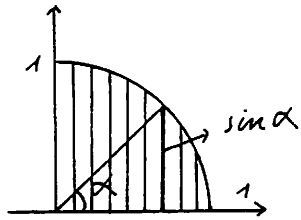


Fig.59

3) Pour obtenir le volume d'une sphère, un élève la scinde en deux hémisphères dans lesquels il accouple les disques parallèles à leur base commune et dont les aires additionnées l'une à l'autre donnent l'aire de cette base (Fig.60). Cette association justifie à ses yeux de multiplier l'aire de cette base, soit πr^2, par le rayon r, pour déterminer le volume de la sphère.

Dans une autre classe, un élève imagine une procédure analogue pour l'aire du cercle :

> *[260] cd + c'd' = ab* [Fig.61] *⇒ aire cercle = ab.rayon.*

4) Un élève imagine le paradoxe suivant:

> *[261] L'aire de la sphère vaut $4\pi r^2$ et pourtant si l'on considère les cercles coupés sur la surface sphérique par une infinité de plans parallèles* [Fig.62] *et si on les "aplatit" sur celui de ces plans qui contient le centre de la sphère, on obtient deux fois l'aire du plus grand cercle ce qui donne un résultat de $2\pi r^2$ et non $4\pi r^2$.*

Un autre lui rétorque:

> *[262] Mais c'est parce que tu dois compter le grand cercle deux fois.*

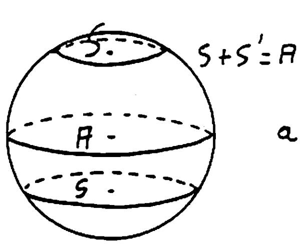


Fig.60

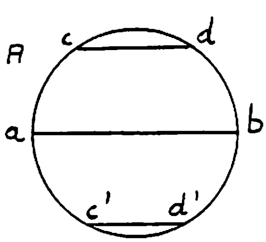


Fig.61

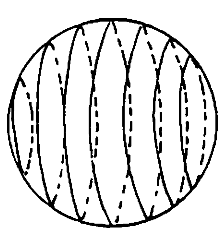


Fig.62

Chapitre V

Des débits, des vitesses et autres taux de variations instantanés.

1. Quelques référents mathématiques et historiques.

1.1. Les problèmes qui sont à l'origine du calcul infinitésimal sont multiples.

Plusieurs catégories de problèmes ont constitué une source de motivation du calcul infinitésimal. La plupart des historiens, tels M. Kline (1972), en relèvent quatre principaux :
1) déterminer la vitesse et l'accélération d'un mobile quand on connaît l'espace qu'il parcourt. Inversément, trouver la vitesse d'un mobile et la distance parcourue par celui-ci, à partir de son accélération;
2) trouver la tangente à une courbe en un point. Ce problème, déjà envisagé dès l'Antiquité à propos des coniques, réapparaît au XVII^{e} siècle, à propos d'autres courbes, dans différents contextes : celui de l'optique où l'on cherche, pour appliquer la loi de réfraction d'un rayon lumineux à travers une lentille, l'angle formé par ce rayon et la normale à la courbe qui délimite la lentille; également dans l'étude des mouvements non rectilignes où la direction du mouvement d'un mobile en chaque point de sa trajectoire est donnée par celle de la tangente à celle-ci;
3) optimaliser : maximiser la portée d'un canon, déterminer les meilleures proportions d'un tonneau, les distances extrêmes d'une planète au soleil...,
4) calculer la longueur d'une courbe, les aires délimitées par des courbes, les volumes délimités par des surfaces courbes, déterminer le centre de gravité de solides curvilignes. Ces problèmes, déjà abordés par les Grecs, sont remis au goût du jour, e.a. par le biais de l'astronomie où l'on souhaite calculer la distance parcourue par une planète en un temps donné, l'attraction exercée par un corps non ponctuel sur un autre.

P. Raymond (1976) signale encore deux domaines où l'infini semble engagé :

1) l'arithmétique et la combinatoire : "De Roberval à Pascal et Leibniz, les savants prennent l'habitude d'utiliser le triangle arithmétique pour opérer des calculs d'aires par sommations d'infinitésimaux";
2) la géométrie : "La liste des domaines où apparaît le thème infinitiste au XVII[e] siècle ne serait pas complète si l'on n'y faisait pas mention des réflexions de Desargues sur l'infini en géométrie projective".

1.2. Des problèmes de dérivée résolus par le concept ambigu d'infinitésimal.

Les procédures utilisées avant Newton pour résoudre ces divers problèmes se caractérisent par l'emploi du concept d'infinitésimal. Laissons momentanément de côté ceux relevant de l'intégration et illustrons le concept d'infinitésimal par l'usage qu'en fait Fermat dans un problème d'extremum. Il s'agit de déterminer le point qui partage un segment de droite en deux autres segments de telle sorte que le rectangle ayant ces deux autres segments pour côtés soit d'aire maximale (Fig.1). Voici comment procède Fermat :
- soit B la longueur du segment initial et A celle d'une de ses composantes. L'aire du rectangle vaut donc $AB - A^2$;
- il augmente A d'une quantité E et calcule l'aire du rectangle de côtés $A + E$ et $B - (A + E)$, soit $AB + EB - A^2 - 2AE - E^2$;
- il "adégalise" ["Fermat used the word *adaequo*" précise K.M. Pedersen, 1980], cette dernière expression à $AB - A^2$, c'est-à-dire qu'il les rend "as nearly equal as possible" [Ib.], arguant du fait que "at a maximum the two fonction values - that is, the two areas - should be equal" (M. Kline, 1972) :

$$AB + EB - A^2 - 2AE - E^2 \cong AB - A^2;$$

- il supprime tous les termes communs aux deux membres de cette "adégalité" et divise par E les termes restants :

$$B \cong 2A + E;$$

- il néglige le terme E, convertit son adégalité en égalité, ce qui lui donne :

$$B = 2A.$$

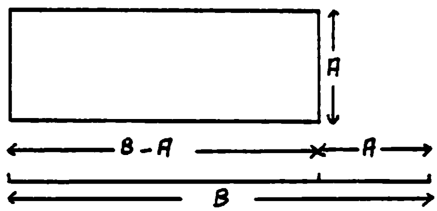


Fig.1

Le reproche fait à cette procédure et à d'autres du même genre réside dans ce que P. Raymond (1976) appelle le "double statut de la différence, tantôt assignable même infime, tantôt nulle", faisant allusion au fait que l'incrément E est considéré, au sein du même calcul, d'abord comme une quantité minime mais non nulle, ensuite comme une quantité nulle. Nous verrons plus loin comment Fermat utilise une procédure analogue pour déterminer des tangentes à une courbe.

Cette ambiguïté du concept d'infinitésimal en fait un concept difficile à définir, en dépit de son efficacité dans le calcul.

Le concept d'inifinitésimal mobilisé dans les procédures d'intégration est tout aussi ambigu : tantôt indivisible au sens de Cavalieri, tantôt grandeur infime, mais de même espèce que la grandeur dans le calcul de laquelle il intervient (par exemple, un rectangle infime dans le calcul d'une aire). Mais, son intervention dans le calcul est plus implicite.

1.3. Le calcul des dérivées naît en même temps que celui des primitives.

On sait qu'il a fallu attendre Newton et Leibniz pour que soit mis en évidence le lien de réciprocité des processus d'intégration et de dérivation. On pourrait penser que les connections entre les différents problèmes relevant du seul processus de différentiation ont été entrevues beaucoup plus tôt. En fait, M. Kline (1972) estime que Newton est le premier à avoir pensé en termes généraux, tant les calculs de vitesse relevant de la différentiation que ceux d'espace relevant de l'intégration : "The problem of calculating the instantaneous velocity from a knowledge of the distance traveled as a function of the time, and its converse, were soon seen to be special cases of calculating the instantaneous rate of change of one variable with respect to another and its converse. The first significant treatment of general rate problems is due to Newton".

C'est qu'une chose est de percevoir intuitivement une parenté entre les différents problèmes mobilisant le processus de différentiation, autre chose est de voir dans cette parenté la présence d'un calcul nouveau : celui des dérivées et précisément, la présence de ce calcul n'est pas apparue clairement avant celle du calcul inverse : "The four problems were regarded as distinct, yet relationships among them had been noted and even utilized. For example, Fermat had used the very same method for finding tangents as for finding the maximum value of a function. Also, the problem of the rate of change of a function with respect to the independent variable and the tangent problem were readily seen to be the same. In fact, Fermat's and Barrow's method of finding tangents is merely the geometrical counterpart of finding the rate of change. But the major feature of the calculus, next to the very concepts of the derivative and of the integral as a limit of a sum, is the fact that the integral can be found by reversing the differentiation process or, as we say, by finding the antiderivative. Much evidence of this relationship had been encountered, but its significance was not appreciated". (M. Kline, 1972).

1.4. Du concept d'infinitésimal à celui de limite d'une fonction.

Dans le rôle de concept premier du calcul infinitésimal, la notion d'infinitésimal cède peu à peu le pas à celle de rapports d'infinitésimaux. Cette dernière prend, dans l'oeuvre de Newton, la forme de l'**ultimate ratio** : "For those ultimate ratios with which quantities vanish are not truly the ratios of ultimate quantities, but limits towards which the ratios of quantities decreasing without limit do always converge; and to which they approach nearer than by any given difference, but never go beyond, nor in effect attain to, till the quantities are diminished in infinitum" (Newton, trad. 1947).

Il faut attendre Euler au XVIII[e] siècle pour voir le concept de fonction passer à l'avant-plan du calcul infinitésimal. Ce mathématicien a conscience de travailler sur des fonctions, qu'il conçoit comme des expressions analytiques, et non sur des grandeurs et, partant, nettoie le calcul infinitésimal de ses connotations géométriques. La démarche analytique d'Euler est accentuée par Lagrange.

C'est Cauchy qui au XIXe siècle subordonne la dérivée au concept de limite. En effet, il donne à ce dernier la place que nous lui connaissons aujourd'hui en réorganisant, à partir de lui, les principaux concepts de l'analyse : dérivée, continuité, intégrale... Toutefois, le langage de Cauchy est encore teinté de connotations cinématiques et contient ça et là des références implicites ou explicites à une notion parente de l'infinitésimal, la "limite d'une variable" : "Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En Géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces de polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus" (Cauchy, rééd. 1882-1932, tome III).

Enfin, Weierstrass, peu après, donne au concept de limite la formulation en "ε, δ" qui est celle que l'on trouve dans tout ouvrage actuel d'analyse classique.

Nous reviendrons ultérieurement sur cette progression.

2. Le travail en classe.

2.1. Remplir un vase conique.

Une pompe alimente un vase conique (Fig.2). Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1cm/min. L'angle au sommet du cône vaut 90°. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera t-il inférieur à 100 cm³/min?

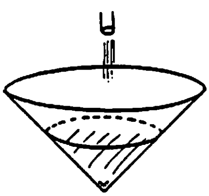


Fig.2

2.1.1. Un problème soluble, sans nul doute.

Ce problème est, a priori, chargé de sens pour les élèves. Tous imaginent sans peine une telle expérience, même s'il est matériellement difficile de régler une pompe de la sorte, ce qu'aucun d'entre eux ne fait remarquer. De plus, ils sont convaincus que le débit de la pompe passe par 100 à un moment précis. [Implicitement, ils supposent que le vase est assez profond pour que l'eau n'en déborde pas avant que le débit ait atteint la valeur 100]. Ils s'appuyent, pour justifier ce fait, sur la croissance de ce débit - évidente pour eux - et sur une hypothèse implicite de continuité :

> *[263] Le débit est faible au départ et de plus en plus fort après. Donc il passera bien par 100 à un moment donné.*

Certains ponctuent leurs échanges de tracés de graphes :

> *[264] - Le débit va augmenter : ça va de 0 à l'infini puisqu'on ne donne pas la hauteur.*
> *- Je dirais même que ça va de 1 à l'infini parce qu'on ne dit pas qu'on allume le robinet.*
> *- A la fin il faudra de plus en plus d'eau pour augmenter la hauteur.*
> *- Il faudra le graphe de l'augmentation du volume par rapport à la hauteur.*
> *- Le tout est de voir si cette augmentation est constante; si on va avoir une droite ou une courbe, la tranche a peut être deux fois plus de volume en haut qu'en bas* [Il dessine la Fig.3].
> *- C'est un graphe comme ça* [Fig.4].
> *- Après il faudra plus d'eau pour monter la hauteur de 1 cm.*
> *- Plus on monte, plus le débit va être fort, donc à un moment, il va dépasser 100.*
> *- On aura un volume d'eau de plus en plus grand* [Il dessine la Fig.5].

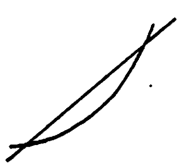


Fig.3

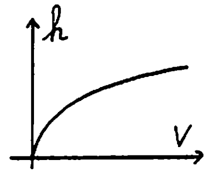


Fig.4

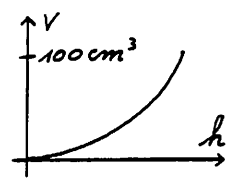


Fig.5

Non seulement les élèves sont persuadés que ce problème possède une solution, mais la plupart d'entre eux croient même a priori qu'il est possible d'en déterminer la valeur exacte. Le doute ne viendra que plus tard, dans certains groupes.

2.1.2. Une approche numérique.

Quelques groupes commencent par des estimations numériques. Voici comment les membres de l'un d'eux procède : ils expriment le volume V d'un cône d'eau en fonction de sa hauteur h après avoir justifié, par considération d'angles appropriés, que le rayon et la hauteur sont égaux,

$$V = \pi h^3/3.$$

Ils calculent ensuite le débit moyen de la pompe, durant chaque minute, depuis l'instant où l'on commence à verser l'eau (soit $t = 0$), et s'arrètent à la $7^{\text{ème}}$ minute :

> entre $t = 5$ et $t = 6$, le débit vaut $\pi 6^3/3 - \pi 5^3/3 \cong 95{,}294$.
> entre $t = 6$ et $t = 7$, il vaut $\pi 7^3/3 - \pi 6^3/3 \cong 132{,}994$.

Ils concluent :

> *[265] En moyenne, le débit est inférieur à 100 durant la 6ème minute. Or, comme il croît tout le temps, le débit exact ne peut pas valoir 100 déjà au début de cette minute; de plus, le débit valant plus de 100, en moyenne, durant la 7ème minute, il a déjà dépassé 100 à la fin de cette minute. Donc, le débit passe par 100 entre t = 5 et t = 7.*

Plusieurs échanges - que nous ne reprenons pas ici - précèdent la formulation collective de cette conclusion et montrent que celle-ci n'est pas aisée. En fait, les élèves sont conscients qu'ils ont trouvé des valeurs moyennes du débit alors que la valeur 100 est atteinte "à un moment précis"; de plus, ils pressentent qu'il leur faut exploiter la croissance continue du débit, mais ils perdent facilement le fil de leurs idées lorsqu'ils cherchent à savoir si les calculs faits leur permettent de dire quelque chose du débit, et quoi, en $t = 5$, en $t = 6$ ou $t = 7$.

Pour préciser davantage leur réponse, ils explorent alors les intervalles d'un dizième de minute entre $t = 5$ et $t = 7$ et trouvent de la même manière que le débit passe par 100 entre $t = 5{,}5$ et $t = 5{,}7$. De cette investigation numérique naît peu à peu l'impression que :

> *[266] Sauf hasard, les calculs ne tomberont jamais juste et on ne pourra jamais qu'approximer la solution.*

2.1.3. Une équation à deux variables.

Les autres groupes, plus nombreux, misent d'emblée sur la résolution d'une équation. Plusieurs équations, dont nous avons uniformisé les notations en les retranscrivant, sont envisagées, les unes après les autres.

1) Certains élèves commencent par écrire :

> *[267] $V = \pi h^3/3 = 100$; $h = (300/\pi)^{1/3} = 4{,}57$; $\Rightarrow$ débit $= 100/4{,}57 =$ moyenne.*

Ils réalisent ensuite que, pendant ces 4,57 minutes, :

> *[268] Le débit augmente, car il change constamment.*

et proposent d'exprimer l'équation à partir de débits calculés sur de plus petites "tranches" (= troncs de cône).

2) D'autres, plus nombreux, les ont précédés et déterminent le tronc de cône de 1 cm d'épaisseur qui possède un volume de 100 cm^3 :

> *[269] $\pi h^3/3 - \pi(h-1)^3/3 = 100$; [...] $3h^2 - 3h - 94{,}5 = 0$; $h = (3 \pm 33{,}8)/6$ $\rightarrow h = 6{,}1347$ ou $-5{,}1347$; $h > o \rightarrow h = 6{,}1347$.*

Ils s'interrogent alors sur la signification de ce résultat :

> *[270] -En fait ça signifie que la tranche... oui mais est-ce que ça* [La tranche] *a déjà été rempli ou non [...]. Ah merde, c'est quand l'eau est au -dessus que ça va dépasser 100.*
> *- Et pourquoi pas au début de la tranche?*
> *- Peut-être bien au milieu parce que c'est comme si on avait fait la moyenne arithmétique entre le débit du bas de la tranche et le débit du haut.*

Des questions analogues surgissent dans tous les groupes et les réponses sont semblables :

> *[271] - Si c'est 100 au début, c'est pas possible, sinon on remplit en 1 minute une tranche* [Il montre la Fig.6] *et pas une tranche* [Il montre la Fig.7].
> *- Oui, ça doit être au milieu, oui si tu as un cylindre* [Il dessine la Fig.8].
> *- On a l'intuition que le débit est en M.R.U.A.* [Mouvement Rectiligne Uniformément Accéléré], *donc il augmente suivant une telle courbe* [Il dessine la Fig.9] *et il ne passera pas par 100 au milieu de la tranche.*

Fig.6

Fig.7

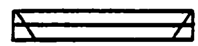


Fig.8

Fig.9

3) D'échanges en échanges, les élèves en arrivent généralement à conclure que le débit passe par 100 entre 5,13 et 6,13. Ils proposent de resserrer l'encadrement en poursuivant l'investigation sur des tranches plus fines. Quelques-uns suggèrent alors de désigner l'épaisseur de ces dernières par une lettre; les autres s'y opposent, arguant du fait:

[272] Qu'on aura alors deux variables et qu'on ne pourra plus résoudre l'équation.

Encouragés par le professeur, ils se rallient cependant à la proposition des premiers en se disant que :

[273] De toute façon, on pourra remplacer plus tard cette lettre par un nombre et on ne perd rien à avoir une formule générale.

Soit Δh l'épaisseur d'un tronc de cône [Cette épaisseur est désignée par des symboles différents selon les groupes : x,n,1/n...] . Supposons que la hauteur de l'eau passe de h à h + Δh quand le temps passe de t à t + Δt. Le débit moyen calculé de t à t + Δt s'écrit :

$$\Delta V/\Delta t = [\pi\ (h + \Delta h)^3/3 - \pi h^3/3]/\Delta t =$$
$$(\pi/3).[3h^2\Delta h + 3h(\Delta h)^2 + (\Delta h)^3]/\Delta t =$$
$$\pi h^2 + \pi h\Delta h + \pi(\Delta h)^2/3.$$

Les élèves arrivent à cette expression sans trop de difficultés, hormis le fait que certains oublient le dénominateur Δt dans l'expression du débit et que d'autres ne voient pas (ou même ne comprennent pas) qu'on puisse simplifier $\Delta h = \Delta t$, présents respectivement au numérateur et au dénominateur de la fraction :

[274] Mais tu divises par x pour avoir le débit et x c'est une hauteur, pas un temps.

Dans le même ordre d'idées:

[275] On ne peut pas écrire V(t+n) - V(t) car n n'est pas une longueur.

2.1.4. Supprimer de l'équation $\pi h^2 + \pi h\Delta h + \pi(\Delta h)^2/3$, les termes en Δh et $(\Delta h)^2$?

Au vu de l'équation $\pi h^2 + \pi h\Delta h + \pi(\Delta h)^2/3 = 100$, les élèves se rendent vite compte qu'à chaque valeur attribuée à Δh, correspond une solution différente pour h. Comme ils pressentent que la précision de la réponse dépend de la proximité de Δh et de 0, beaucoup se demandent s'il n'y a pas lieu d'annuler les termes contenant Δh et $(\Delta h)^2$. Certains écrivent prudemment :

[276] πh^2 + πh. presque 0 + $(\pi/3)$.presque 0.

Quelques-uns franchissent le pas en se basant sur des arguments variés.
1) Quatre élèves en groupe avaient au préalable effectué plusieurs approximations numériques. Ils contrôlent les résultats précédemment obtenus en remplaçant directement Δh par des valeurs numériques dans l'équation $\pi h^2 + \pi h\Delta h + \pi(\Delta h)^2/3 = 100$:

[277] Si $\Delta h = 1$, on obtient $\pi h^2 + \pi h + \pi/3 = 100$, ce qui donne $h =$ 5,1345. Le débit passe donc par 100 entre 5,13 et 6,13; si $\Delta h = 0{,}1$, on a $\pi h^2 + 0{,}1\pi h + 0{,}01\pi/3 + 100$, ce qui donne $h = 5{,}5918$; si $\Delta h = 0{,}01$ ...

Ils s'aperçoivent alors que les diverses équations obtenues en remplaçant Δh par une valeur de plus en plus proche de 0 se rapprochent de l'équation $\pi h^2 = 100$. Ils résolvent cette dernière qui donne, d'après eux, le résultat exact :

$$\pi h^2 = 100 \rightarrow h = 10\ \sqrt{\pi}.$$

2) Un groupe désigne par 1/n l'épaisseur d'un tronc de cône en se référant aux notations adoptées pour le calcul de l'aire sous $y = x^3$. Il écrit:

$$[V(h + 1/n) - V(h)](1/n) = 100; [...]$$
$$\pi h^2 + \pi h(1/n) + \pi/3(1/n^2) = 100;$$
$$\pi h^2 = 100;\ h = 10/\sqrt{\pi},$$

en justifiant :

[278] C'est comme pour les rectangles, il suffit de supprimer les termes en $1/n$ et $1/n^2$.

3) Un élève écrit :

$$\pi h^2 + \pi h\Delta h + \pi(\Delta h)^2/3 \leq 100,$$

puis $$\pi h^2 \leq 100$$

et commente :

> *[279] On ne peut pas remplacer h et Δh par des valeurs numériques quelconques. En effet, les trois termes sont positifs et leur somme est plus petite que 100, donc plus Δh sera grand, plus on sera obligé de remplacer h par une valeur petite. La plus grande valeur de h possible est celle qu'on obtient en remplaçant Δh par 0 : alors il ne reste plus que le seul terme qui ne contenait pas Δh et on a une équation à une seule inconnue.*

4) D'autres élèves procèdent, ensemble, de la manière suivante. Soit $h + \varepsilon$ et $h - \varepsilon$ deux hauteurs définissant deux surfaces [Fig.10]. Ils calculent ensuite le débit équivalent à la tranche délimitée par ces deux surfaces :

$$((h+\varepsilon)^3 - (h-\varepsilon)^3)\ \pi\ /\ 6\varepsilon =$$

$$[...] = h^2\pi + \varepsilon^2/3.$$

Ils suppriment alors le terme $\pi\varepsilon^2/3$ et résolvent l'équation : $\pi h^2 = 100$, en justifiant, l'un que :

> *[280] Là où le débit vaut 100, c'est entre les deux surfaces qu'on rapproche de plus en plus.*

Un autre, que :

> *[281] ε tend à diminuer ⇒ $h^2\pi$ reste important = 100.*

5) Les élèves d'un autre groupe arrivent à l'équation $\pi h^2 = 100$ par un tout autre biais. Après avoir résolu l'équation $\pi h^3/3 - \pi(h-1)^3/3 = 100$ et discuté de la signification du résultat $h = 6{,}13$, ils poursuivent par cet échange :

> *[282] - Ah mais oui, tu peux mettre un parallélipipède autour du cône.* [Il dessine la Fig.11] *Quel est le volume qu'on remplit en 1 cm?*

- *Oui mais l'autre débit* [celui du parallélipipède] *n'a rien a voir avec celui du cône.* [Le professeur suggère de choisir un solide qui enveloppe le cône de plus près que le parallélipipède. Les élèves poursuivent] :

-*On prend un cylindre. Son volume vaut* $\pi\ (6{,}13)^2.\ 6{,}13 = 724$. *On a 1 cm par minute; on divise par 6,13 min et on a un débit de 118* cm^3/min. *Au dessus pour le cône, il y a un débit de 118, car il y a la même surface, on a un point ici* [Il montre le point a de la Fig.12; un autre fait le même calcul avec un cylindre qui enveloppe le cône depuis son sommet jusqu'à la hauteur 5,13]: $(5{,}13)^2.\pi.\ 5{,}13$. [Ils passent ensuite à une écriture littérale] *Débit* $= \pi R^2 H/H = 100 \Rightarrow R = 10/\sqrt{\pi}$. [Le professeur leur demande de faire le joint avec l'équation $\pi h^2 + \pi h \Delta h + \pi(\Delta h)^2/3 = 100$]:

- *Oui, mais on a h et* Δh, *il faudrait un lien entre les deux pour n'avoir plus qu'une seule inconnue et alors on pourrait résoudre l'équation.*

- *Oui, mais nous on avait trouvé* $h = 10/\sqrt{\pi}$ *il faudrait que* $\pi h(\Delta h) + \pi(\Delta h)^2/3$ *soit égal à zéro.*

- *Ah mais oui, il suffit de supprimer* Δh. *C'est logique, car si on arrive à* $\Delta h = 0$, *on n'arrive plus qu'à une ligne, on arrive à un niveau. Si* Δh *vaut quelque chose, on a une tranche et on sait que la ligne est dans cette tranche.*

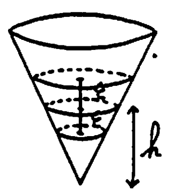


Fig.10

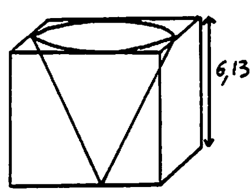


Fig.11

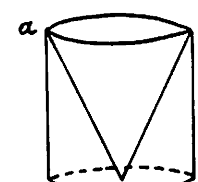


Fig.12

2.1.5. Un débit qui devient une surface.

Quelques élèves règlent le problème d'une manière intuitive et très rapide : ils déterminent à quelle hauteur h le cône a une section d'aire égale à 100 cm². Ils s'en justifient ainsi :

[283] *On prend des tranches de plus en plus petites et finalement on n'a plus que des surfaces.*

[284] *Il faut trouver le débit instantané : il faut trouver de très petits espaces* $\Rightarrow$ *indivisibles ! Surfaces !* $\Rightarrow$ *trouver surface* $= 100$ cm^3/min... [Un autre élève écrira "$\pi h^4 = 100\ cm^3/min$" en réponse à la même question posée à propos du vase de la Fig.13].

[285] *Si on met le débit en fonction de la vitesse de la montée, on retrouve la surface en question.*

[286] *On compare les km/h au débit/montée* $= (100cm^3/min)/(1\,cm/min) = 100\,cm^2$. *On sait que 100* cm^2 *est l'aire de la section du cône* $= \pi r^2$...

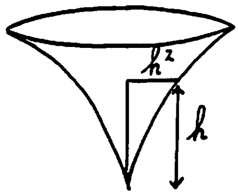


Fig.13

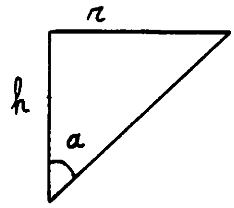


Fig.14

D'autres élèves objectent qu'un débit ne peut être une surface car:

[287] Pour avoir un débit il faut qu'il reste un petit volume.

mais certains d'entre eux reconnaissent que cette vue fournit cependant un résultat correct :

[288] Pour une base de 100 cm^2, le débit est à l'instant même de 100 cm^3, néanmoins, c'est une notion abstraite car une surface n'a pas de volume.

Un élève résout d'une manière tout aussi brève un problème analogue, qui consiste à déterminer la vitesse de montée du liquide du même vase conique lorsqu'on y déverse un liquide avec un débit constant de 1dm^3/min. Il propose :

[289] Vitesse instantanée = débit/surface; V_i = (1dm^3/min) (1/πr^2) $\Rightarrow$ r = h, car a = 45°, voir énoncé, [Fig.14] $\Rightarrow$ *deux côtés d'un triangle isocèle sont égaux; $V_i = 1/\pi h^2$ et comme temps = volume; si temps = t $\Rightarrow$ volume = t (on sait que 1V = 1t, voir débit, $V = \pi h^3/3 \Rightarrow h = (3V/\pi)^{1/3}$) $\Rightarrow h = (3t/\pi)^{1/3} \Rightarrow V_i = 1/\pi\ ((3t/\pi)^{1/3})^2$.*

2.1.6. Le "passage à la limite" perçu comme intuition plus que comme opération.

En guise de synthèse, le professeur tient devant tous les élèves, les propos suivants : *"Soit $[V(t+\Delta t) - V(t)] / \Delta t = [...] = \pi t^2 + \pi t\Delta t + \pi(\Delta t)^2/3$ le débit moyen de la pompe entre l'instant t et l'instant $t+\Delta t$. Le mathématicien appelle débit instantané l'expression obtenue en supprimant de l'expression du débit moyen, les termes contenant Δt et $(\Delta t)^2$. Il dit qu'il prend la limite du débit moyen lorsque Δt tend vers 0 et note le débit instantané :*

$$\lim_{\Delta t \to 0} (\pi h^2 + \pi h \Delta t + \pi (\Delta t)^2/3),$$
ou, plus brièvement, dV/dt.

Il résout le problème en égalant dV/dt à 100, ce qui donne

$$\pi h^2 = 100$$
$$h = 10/\sqrt{\pi}".$$

Les élèves qui avaient résolu le problème en assimilant le débit à une surface s'écrient :

> *[290] Mais ce n'est pas plus rigoureux que ce que nous avons fait. Nous aussi, on a pris des Δh ou des Δt de plus en plus petits jusqu'à avoir 0. Ce que vous écrivez là est tout aussi intuitif.*

D'autres n'admettent pas la suppression des termes, arguant du fait suivant :

> *[291] On aurait pu remplacer Δt par 0 plus tôt et on aurait vu alors, un 0 au dénominateur.*

2.1.7. Le concept de débit instantané récusé.

Certains élèves récusent le concept de débit instantané :

> *[292] Ca n'existe pas, il n'y a pas moyen de le mesurer, car le temps de regarder sa montre et du temps s'est déjà écoulé.*
> *[293] En un temps nul, aucun volume n'est versé et on ne peut pas avoir un débit avec un volume nul.*

Parmi les élèves qui éprouvent cette réticence vis-à-vis du concept de débit instantané, quelques-uns croient malgré tout que l'équation $\pi h^2 = 100$ fournit une réponse exacte au problème 2.1.

2.1.8. Une relation floue entre le volume et le débit.

Déjà, le concept de débit moyen n'est pas toujours clair dans le chef des élèves. On semble le confondre quelquefois avec le concept de volume. Quelques élèves ne savent plus très bien comment on passe du volume au débit. Ainsi, nous avons constaté à plusieurs reprises, l'omission du dénominateur-temps dans l'expression du débit, tantôt à l'occasion des calculs numériques, tantôt dans les expressions littérales. Cet oubli semble plus qu'une distraction, dans la mesure où il est fréquent et récurrent. De plus, quand on les corrige, on voit certains élèves revenir avec peine sur la signification du concept de débit qu'ils éprouvent le besoin de verbaliser :

[294] Le débit de la pompe est de 100/4,57 = 21,88; ça veut dire qu'une pompe de débit constant de 21,88 cm³/min aurait versé 100 cm³ pendant ces 4,57 minutes.
[295] Pendant les 9,77 premières minutes, la pompe a eu un débit moyen de 100; elle a donc versé autant de volume qu'une autre pompe de débit constant pendant ces 9,77 minutes, c'est-à-dire $\pi(9,77)^3/3$ = 976,59 cm³.

L'expression "volume par unité de temps" fait l'objet d'interprétations fallacieuses. Tantôt, il s'agit du volume en fonction du temps :

[296] - Il suffirait de connaître le graphe du volume [pour résoudre le problème 2.1.].
- Mais non, celui du débit.
- Mais non, celui-là [Il désigne le graphe de la Fig.15] *donne le débit, car on a volume sur temps, c'est-à-dire débit avec ce graphe* [Le professeur s'étonne, l'élève reprend :] *mais oui, on dit volume en fonction du temps, ça veut dire volume sur temps.*

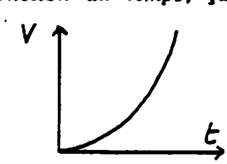


Fig.15

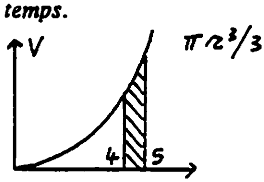


Fig.16

Tantôt, il s'agirait plutôt du produit du volume par le temps, comme chez cet élève qui propose de calculer le débit comme aire sous le graphe représentant le volume en fonction du temps, ce qu'il justifie en ces termes :

[297] Ce graphe [Fig.16] *représente le volume par rapport à la hauteur (= temps), l'aire sous la courbe entre (par exemple) 4 et 5 (= intervalle de temps) représente un certain volume d'eau par minute...*

Quelques élèves proposent de changer les unités en lesquelles on exprime le débit au moment où l'on divise $V(t+\Delta t) - V(t)$ par Δt :

[298] Ce n'est plus des m³ par minute, puisque Δt ne vaut pas forcément 1 mais des m³ par Δt minutes.

Sur ce, ils divisent 100 par Δt dans l'équation $[V(t+\Delta t) - V(t)]/\Delta t = 100$.

2.1.9. Un problème analogue résolu par des élèves qui connaissent la dérivée.

Nous avons proposé l'énoncé suivant à des élèves de 5ème (Math. 7heures) ayant déjà reçu un enseignement sur les dérivées : *On gonfle un ballon élastique sphérique en le remplissant d'eau. La pompe qui fournit l'eau est réglée de telle manière que le rayon du ballon augmente régulièrement à la vitesse de 1 cm/min. A partir de quand le débit de la pompe sera t-il supérieur à 100 cm³/min?*

Voici de façon shématique quelques propos échangés par un groupe de 4 élèves :

> *[299] -Il faut calculer le volume à chaque minute, en fonction du temps;*
> *-$4\pi\ (x+1)^3/3 > 100$; Ah non! $4\pi\ x^3/3 > 100$; $4\pi R_n / 3 - 4\ \pi R_{n-1} / 3 > 100$; $t = 0, V = 0$; $t = 1, V = 4\pi/3$; $t = 3, V = 113$; $t = 4, V = 268$ ($\Delta V > 100$ pour $\Delta t = 1$).*
> *-Le débit augmente progressivement* [Il dessine la Fig.17]. *Il faut calculer l'augmentation ΔV et diviser par Δt et il faudra que le rapport soit > 100* [Fig.18].
> *- Il n'y a pas une dérivée là-dedans?*
> *-Oui, mais c'est quoi une dérivée?*
> *-$\Delta V/\Delta t$ ça fait la pente de cette droite-là* [La secante au graphe précédent] *Il faudrait trouver l'endroit de la courbe qui a une pente > 100. On cherche un débit > 100.*
> *-Entre 3 et 4 on a une différence de 155 : ça fait trop, il faut voir quand on a 100 juste.*
> *- Il faut faire une équation du genre : $4\pi\ x^3/3 - 4\pi(x-1)^3 > 100 + \ldots$;$x = 3{,}9185$.*
> *-Le temps équivaut au rayon.*
> *-Ca donne le débit moyen, il faut trouver le débit au bout du temps.*
> *-Les dérivées.*
> *-Ca marche comment les dérivées? Graphiquement...*
> *-C'est 3,3; $r = 2{,}3$, $V = 100$; $r = 3{,}3$, $V = 150{,}5$.*
> *-Ca prouve rien du tout, ça donne le débit moyen.*
> *-Est-ce que le graphique du volume et du débit en fonction du temps n'est pas le même?*
> *-Ah non !*
> *-Il faut calculer l'endroit du graphique où la pente du graphique est supérieure à la pente moyenne* [Fig.19].
> *-On va faire par rapprochement.*
> *-Mais on ne peut pas faire comme ça.*
> *-Donc, c'est une équation...* [Il sonne].

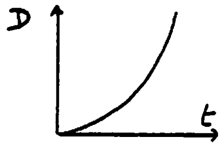


Fig.17

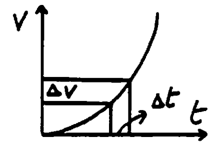


Fig.18

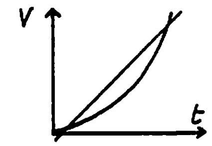


Fig.19

2.2. Et la preuve dans tout ça?

La réponse au problème 2.1. serait : le débit de la pompe, continuellement croissant, passera par 100 cm^3/min au moment précis où le niveau de l'eau atteindra $10/\sqrt{\pi}$ cm. Que pensez-vous de cette solution? Relisez attentivement l'énoncé de la fiche 2.1. et les commentaires qui suivent; testez la solution proposée au moyen d'un raisonnement par l'absurde.

2.2.1. Une preuve dont le besoin n'est pas ressenti.

Le besoin d'une preuve n'est pas ressenti ici comme il l'a été à l'occasion du calcul de l'aire sous $y = x^3$ (problème III.2.7.).

Ceux qui ont perçu le débit comme donné par l'aire d'une section du cône se déclarent d'emblée convaincus de l'exactitude du résultat, sans toutefois parvenir à convaincre tous les autres, le doute venant - comme nous l'avons vu plus haut - du fait "qu'en l'absence de volume, on ne peut obtenir un débit". Ces derniers seront persuadés qu'on a effectivement trouvé la réponse exacte, à la suite de la preuve décrite à la section 2.2.2., mais plus encore lorsque le professeur comparera le remplissage d'un cône à celui d'un cylindre (cfr. section 2.2.3.).

2.2.2. Une preuve par l'absurde jugée ardue par les élèves.

Les élèves éprouvent plus de difficultés à formuler une preuve par l'absurde dans ce problème que dans celui de l'aire sous $y = x^3$. Quelques rares d'entre eux y parviennent. Schématisons leur argumentation dans les notations habituelles. On suppose que le débit de la pompe est strictement supérieur à 100 en $t = 10/\sqrt{\pi}$, c'est-à-dire égal à $100 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). En choisissant judicieusement une valeur de Δt positive et suffisamment petite, on peut rendre l'expression $100 + 10\sqrt{\pi}\,\Delta t + \pi(\Delta t)^2/3$ strictement inférieure à 100

+ ε (par exemple en prenant $\Delta t < (-5\sqrt{\pi} + (25\pi + \pi\varepsilon/3)^{1/2}/\pi/3)$, ce qui rend négative l'expression $\pi(\Delta t)^2/3 + 10\sqrt{\pi}\,\Delta t - \varepsilon$) et ce, si petit soit ε. Mais ceci signifie que le débit moyen calculé sur l'intervalle de temps $[10/\sqrt{\pi}, 10\sqrt{\pi}+\Delta t]$ est strictement inférieur à la valeur supposée du débit instantané en $10/\sqrt{\pi}$, ce qui contredit la croissance de ce dernier.

On suppose à présent que le débit de la pompe soit égal à 100 - ε ($\varepsilon > 0$) en $t = 10/\sqrt{\pi}$. On peut choisir une valeur de Δt négative, suffisamment proche de 0, qui rende strictement supérieur à 100 - ε le débit moyen calculé sur l'intervalle $[10/\sqrt{\pi} + \Delta t, 10/\sqrt{\pi}]$, ce qui va de nouveau à l'encontre de ce qu'on sait du débit de la pompe. Ce dernier ne pouvant être supposé ni égal à 100 + ε, ni égal à 100 - ε, - si petit que soit ε - en $t = 10/\sqrt{\pi}$, ne peut donc qu'égaler 100 en cet instant.

Parmi les élèves qui tentent de formuler une telle preuve, certains se contentent d'affirmer l'existence du Δt par lequel arrive la contradiction, sans l'exprimer en fonction d'un quelconque ε. L'un ou l'autre se servent de valeurs numériques pour formuler l'hypothèse par l'absurde, tout comme le professeur l'avait fait à l'occasion de l'aire sous $y = x^3$.

De nombreux élèves ne parviennent pas à entrer dans le jeu du raisonnement par l'absurde :

> *[300] En $10/\sqrt{\pi}$ le débit exact est égal à 100. Si ce débit valait 100 en $10/\sqrt{\pi}$ il serait d'office supérieur à 100 après $10/\sqrt{\pi}$. Donc, entre $10/\sqrt{\pi}$ et $(10/\sqrt{\pi} + x)$, le débit exact serait > 100; ce qui se démontre dans tous les cas où $x > 0$.*

La plupart s'en tiennent à une argumentation telle que :

> *[301] $\pi h^2 + \pi h.\Delta h + \pi(\Delta h)^2 / 3 \leq 100$. Le h varie très peu. Plus on prend un Δh petit, plus la réponse se rapproche de 100. Plus Δh tend vers 0, plus il devient négligeable et donc on peut le supprimer: $\pi h^2 \leq 100$; $h \leq 10/\sqrt{\pi} = 5{,}64$.*

Certains élèves formulent des hypothèses sur le seul Δh :

> *[302] $\Delta h \to 0 \Rightarrow h^2 + h\Delta h + (\Delta h)^2/3 \leq 100/\pi$; $h = 10/\sqrt{\pi}$. Posons que Δh soit > 0, par ex. 0,0001. Lorsqu'on recommence le même processus (voir cours) avec un h et un h + Δh encore plus précis que pour l'exemple précédent $\Rightarrow$ on peut dire que $\Delta h < 0{,}0001$. Δh devient de plus en plus petit, pourvu que l'intervalle de temps analysé devienne lui-même de plus en plus petit. Parce qu'on peut rendre Δh aussi proche de 0 que*

l'on veut, pourvu qu'on prenne un intervalle de temps entre h et h + Δh suffisamment précis ⇒ Lim Δh = 0. Nombres décimales de h et h +Δh tendant vers l'Infini. [Nous ne sommes pas sûre de pouvoir interpréter cette dernière phrase. Peut-être l'élève veut-il dire que le nombre de décimales de h et de h + Δh doit être très grand?]

2.2.3. Une preuve "physique" bien convainquante.

Le professeur décrit l'expérience suivante : "*Posons à côté du vase conique, un vase cylindrique de base 100 cm² (Fig.20). Au lieu de considérer une seule pompe, on en prend deux qui alimentent, chacune, un des vases, de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement et simultanément de 1 cm/min. La pompe qui alimente le cylindre a évidemment un débit constant de 100 cm³/min. L'autre pompe devra verser moins vite que la première tant que le cône est plus étroit que le cylindre, et plus vite que celle-ci après. Les deux pompes ont donc un même débit égal à 100 cm³/min à l'instant précis où la superficie de l'eau dans le cône vaut 100 cm², ce qui donne*

$$\pi h^2 = \pi t^2 = 100,$$
$$t = 10/\sqrt{\pi}".$$

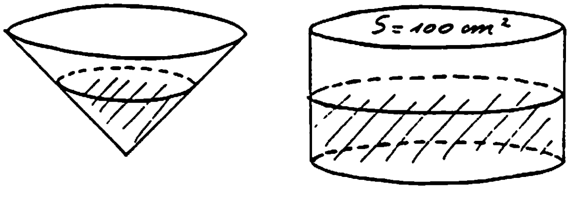


Fig.20

Cette expérience mentale convainc définitivement tous les élèves du bien-fondé des calculs précédents. Elle n'a été décrite qu'après qu'ils aient travaillé le problème des vases communiquants repris ci-après, et cela afin de ne pas déflorer ce problème.

2.3. Les vases communiquants.

Soit deux vases communiquants. Le premier est cylindrique, son rayon et sa hauteur valent respectivement 1 m et 2 m; le second est conique, sa hauteur vaut 2 m de même que le rayon de sa base (Fig.21).

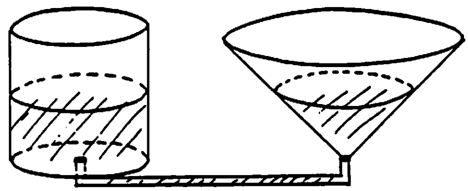


Fig.21

On verse, à tout instant, une même quantité d'eau dans chacun de ces deux vases. Dans quel sens passe t-elle d'un vase à l'autre par le conduit qui les relie? La réponse varie-t-elle d'après le débit, constant ou non, avec lequel on verse l'eau? Prouvez vos affirmations par un calcul.

2.3.1. Le principe des vases communiquants : une connaissance nécessaire mais non suffisante.

La plupart des élèves maîtrisent le principe des vases communiquants, à l'exception de l'un ou l'autre :

[303] On aura le même volume d'eau des deux côtés donc logiquement il y aura une stabilisation et l'eau n'ira ni dans un sens ni dans l'autre.
[304] L'eau passera du cône vers le cylindre car le cône canalise mieux l'eau.

Parmi ceux qui connaissent ce principe, certains en tirent judicieusement parti :

[305] Le volume (correspondant au point de vue de la hauteur) sera d'abord plus grand à remplir dans le cylindre jusqu'à la hauteur où la largeur (le diamètre) est égal dans les deux volumes. L'eau passera du cône vers le cylindre, puisqu'il y a un plus grand volume à remplir, puis du cylindre au cône, à partir de la hauteur où le diamètre est égal dans les deux volumes.

D'autres amorcent le même raisonnement sans l'achever :

[306] Le cône se remplit plus vite que le cylindre : il exerce donc une pression sur le cylindre (le cône se remplit plus vite car, le débit étant le même, dans les deux, le volume du cône < volume du cylindre).
[307] Intuitivement, on pense que l'eau dans un premier temps passera du cône vers le cylindre car il y a moins de volume "à remplir"

> *chez le premier que chez le second. A partir d'un certain moment (lequel?) l'eau passera du cylindre vers le cône car, plus évasé, le cylindre* [Nous pensons que l'élève a pu faire un lapsus en disant cylindre au lieu de cône] *aura plus de volume à remplir pour une même hauteur qu'au début.*

D'autres encore rappellent correctement le fonctionnement des vases communiquants, mais se fourvoient ensuite, toujours de la même façon:

> *[308] Par les lois des vases communiquants, l'eau va du vase où la pression est la plus forte, c'est-à-dire où la hauteur d'eau est la plus grande, vers l'autre. Volume cylindre :* $\pi r_1^2\ h_1 = \pi h_1\ (r_1 = 1)$. *Volume cône :* $\pi r_2^2\ h_2/3 \Rightarrow r_2 = h_2 \Rightarrow$ *Volume* $h_2^3/3$. *On verse à tout instant le même volume dans les deux vases :* $\pi h_1 = \pi h_2^3/3$; $h_1 = h_2^3/3 \Rightarrow 3\ h_1 = h_2^3$. *L'eau ne passe dans aucun sens si* $h_1 = h_2$: $3\ h_1 = h_1^3 \Rightarrow h_1^3 - 3h_1 = 0 \Rightarrow$ *[...]* $h_1 = \sqrt{3}$. *[...] Donc si* $h_1 < \sqrt{3}$, *c'est-à-dire* $V < \pi\sqrt{3}$, *l'eau va du cône vers le cylindre...*

Parmi ceux qui commettent cette erreur, un élève l'amalgame à une interprétation correcte :

> *[309] Pour trouver ce moment* [où la circulation d'eau s'inversera], *il suffit de trouver une hauteur à laquelle les deux solides seront sectionnés par des cercles de même superficie. Volume cylindre =* $\pi r^2 h$; *or,* $r = 1$. $\rightarrow$ *Donc Vol cyl. =* πh. *Volume cône =* $\pi r^2 h\ /3$; *or* $r = h$. $\rightarrow$ *Donc Vol. cône =* $\pi h^3/3$. *Valeur commune à trouver :* $\pi h = \pi\ h^3/3$; $h = h^3/3$ $\rightarrow$ *[...]* $h = \sqrt{3}$.

Un autre pressent qu'un tel résultat est obtenu lorsqu'on bloque mentalement la jonction entre les deux vases pendant un certain temps :

> *[310] Par intuition je peux dire que le niveau d'eau du cône montera plus rapidement au début que celui du cylindre (en supposant que le principe des vases communiquants ne fonctionne pas) et qu'à un certain moment, ils seront égaux et qu'après ça, le niveau du cylindre montera plus vite que celui du cône. Prenons le moment où les deux niveaux d'eau seront à la même hauteur [...]* $\pi r^2\ h = \pi h^3/3 \rightarrow h = \sqrt{3}$. *Avant que le niveau d'eau du cône atteigne* $\sqrt{3}$ *m, le niveau d'eau du cylindre ira plus lentement que celui du cône, et donc recevra l'eau venant du cône.*

2.3.2. Aucun taux n'est évoqué.

Parmi les élèves qui appuyent leurs affirmations sur un calcul littéral, aucun ne parle d'un quelconque taux de variation moyen ou instantané du volume d'eau par rapport à sa profondeur. Les symboles ΔV et Δh sont quelquefois utilisés, mais non leur rapport :

[311] Ainsi, pendant un intervalle de temps Δt entre t_1 et $t_1 + \Delta t$, une même hauteur d'eau Δh aura rempli le cône et le cylindre (entre h_1 et $h_1 + \Delta h$). En fonction du volume compris entre h_1 et $h_1 + \Delta h$ dans le cylindre (ΔV cyl.) et dans le cône (ΔV cô.), le sens de passage variera : si ΔVcy. > ΔV cô. ⇒ du cône au cylindre; si ΔV cy. < ΔV cô. ⇒ du cylindre au cône. Pour un intervalle de temps qui tend vers 0, on pourra considérer, à la place des volumes, des surfaces et c'est selon le rapport entre ces surfaces que le sens variera : si le rapport entre l'aire de la surface de l'eau du cylindre et celle de la surface de l'eau du cône > 1⇒ du cône au cylindre. Si ce rapport est < 1⇒ du cylindre au cône.

2.3.3. D'autres vases communiquants.

Lors d'une préexpérimentation, nous avons posé à quelques élèves la même question à propos des vases communiquants représentés à la Fig.22.

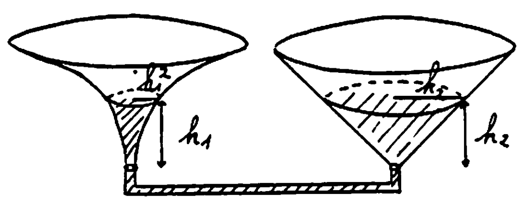


Fig.22

Leur première réaction a été la suivante :

[312] Ca se ramène à un problème entre la hauteur et le volume ⇒ il faut trouver $h_1 = h_2$ pour lesquels le volume est pareil dans les deux cuves.

Le professeur a demandé alors ce qui arriverait si, pour des hauteurs différentes, le volume était pareil dans les deux cuves. Suite à quoi deux élèves ont répondu :

[313] Il faut trouver le niveau pour que, en ajoutant de chaque côté, l'équilibre reste. Il faut donc trouver la quantité d'eau qui fait que la hauteur est constante sans les vases communiquants.
[314] Il faut qu'une même quantité d'eau provoque de part et d'autre une même petite élévation de hauteur; cela n'est possible que là où les sections seront égales.

Et tous deux ont écrit : $\pi h^2 = \pi h^4 \rightarrow h = 1$.

2.4. Comparons deux mouvements décrits à l'aide de tableaux numériques.

Deux voitures A et B roulent sur une route (prise comme axe des x). Les tableaux ci-dessous donnent leurs positions respectives x_1 et x_2 en fonction du temps t.

1) A quel(s) instant(s) les voitures se trouvent-elles à même hauteur?

2) A quel(s) instant(s) ont-elles la même vitesse au compteur?

3) Que vaut alors cette vitesse ?

t(h)	x_1(t) (km)	x_2(t) (km)
-1.00000	415.00000	58.00000
-0.90000	326.03998	47.80000
-0.80000	250.51996	38.80000
-0.70000	187.47997	30.99999
-0.60000	135.95998	24.40000
-0.50000	94.99997	19.00000
-0.40000	63.63998	14.80000
-0.30000	40.91999	11.80000
-0.20000	25.87999	10.00000
-0.10000	17.56000	9.00000
0.00000	15.00000	10.00000
0.10000	17.24000	11.80000
0.20000	23.32001	14.80000
0.30000	32.28001	19.00000
0.40000	43.16001	24.40001
0.50000	55.00001	31.00001
0.60000	66.84001	38.80001
0.70000	77.72002	47.80001
0.80000	86.68002	58.00002
0.90000	92.76000	69.40002
1.00000	95.00000	82.00002

1.10000	92.43997	95.80002
1.20000	84.11996	110.80003
1.30000	69.07996	127.00004
1.40000	46.35995	144.40004
1.50000	14.99988	163.00005
1.60000	-25.96008	182.80005
1.70000	-77.48016	203.80008
1.80000	-140.52026	226.00008
1.90000	-216.04034	249.40009
2.00000	-305.00024	274.00006

2.5. Comparons deux mouvements donnés par des graphes.

Répondez aux mêmes questions qu'à la fiche 2.4., mais à propos des voitures C et D dont les positions x_3 (t) et x_4 (t) sont données, cette fois, au moyen de graphes :

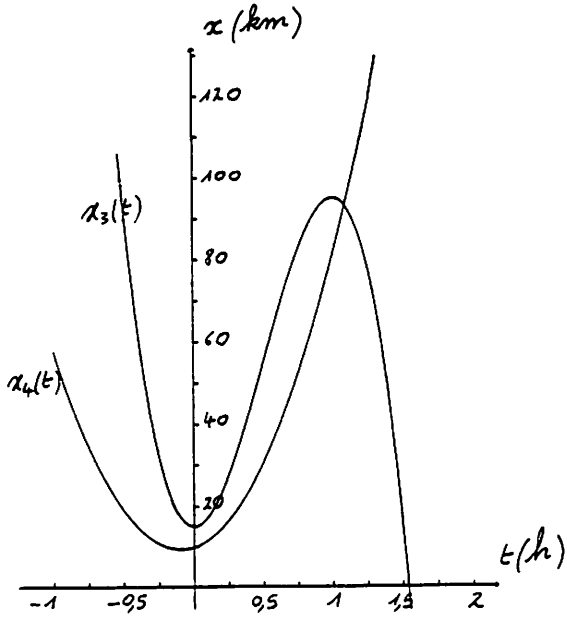


Fig.23

2.6. Et si les mouvements des voitures étaient précisées au moyen d'expressions analytiques?

Répondez toujours aux mêmes questions, mais pour deux voitures E et F dont les positions respectives $x_5(t)$ et $x_6(t)$ s'expriment comme suit, en fonction de t,

$$x_5(t) = -160\,t^3 + 240\,t^2 + 15,$$
$$x_6(t) = 60\,t^2 + 12\,t + 10.$$

2.7. Alors : tables, graphes ou formules?

Vous en êtes-vous aperçu(e)? Les voitures C et E décrivent le même mouvement que la voiture A; de même, les voitures D et F se comportent exactement comme la voiture B.

Comparez les résultats obtenus dans les trois cas. Justifiez vos procédures.

2.7.1. Des problèmes entremêlés.

Nous avons regroupé les énoncés des problèmes 2.4. à 2.7. car ils forment un tout : ils ont été proposés les uns à la suite des autres, et il y a eu entre eux de multiples va-et-vient; ce qui nous empêche de rendre compte des réactions des élèves dans l'ordre des problèmes.

2.7.2. Des nombres bien interprétés.

Le problème 2.4. ne soulève aucune difficulté. Tous les élèves interprètent correctement le tableau numérique, mis à part le fait que certains confondent fugitivement la position (l'abcisse) d'un mobile et l'espace parcouru.

A la première question, ils répondent : en t = 1, la première voiture est située au kilomètre 95; en t = 1,1, au kilomètre 92,43997; elle fait donc marche-arrière. Pendant ce temps-là, l'autre avance du kilomètre 82,00002 au kilomètre 95,80002. Elles se croiseront donc entre ces deux instants. Ils répondent à la deuxième question en repérant un ou plusieurs intervalles de temps Δt de longueur égale ou supérieure à 0,1 pendant lesquels les deux voitures parcourent exactement ou approximativement le même espace : $\Delta x_1 \approx \Delta x_2$. Ils calculent les vitesses au moyen du rapport $\Delta x_1 / \Delta t$. Certains obtiennent l'un ou l'autre résultat négatif et s'en étonnent.

2.7.3. Des vitesses perçues comme des pentes.

Sur base des graphiques de l'énoncé 2.5., les élèves déterminent aisément à quel instant à peu près les deux voitures se situent au même point de la trajectoire :

> *[315] Le point de rencontre correspond à l'intersection des deux graphes.*

Plus laborieuse est la recherche des instants en lesquels les deux voitures ont même vitesse. Quelques rares élèves confondent à nouveau position et espace :

> *[316] C'est là* [à l'intersection des deux graphes] *où les deux voitures ont la même vitesse, car c'est le même x pour le même t.*

De nombreux élèves évoquent ou exploitent l'idée de pente : la pente d'une sécante tout d'abord. Ainsi l'un d'eux déplace parallèlement à l'axe horizontal, ses doigts écartés figurant un certain Δt, jusqu'à ce qu'il trouve le "même écart en ordonnée pour les deux courbes". D'autres parlent de la pente d'un point de la courbe :

> *[317] Quand on aura trouvé deux segments parallèles* [Fig.24], *on resserrera l'intervalle jusqu'au moment où les deux points vont se confondre en un. On aura des points de même pente.*

D'autres encore dessinent des tangentes parallèles aux courbes, tantôt en des abcisses distinctes (Fig.25), tantôt en une même abcisse (Fig.26). Au cours des échanges, la seconde idée a tôt fait de supplanter la première et la plupart des élèves finissent par déterminer empiriquement, en déplaçant leur règle d'une courbe à l'autre, une valeur de t en laquelle les tangentes respectives aux deux courbes sont parallèles.

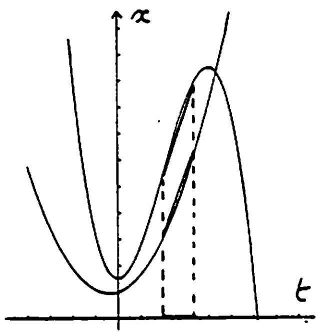


Fig.24

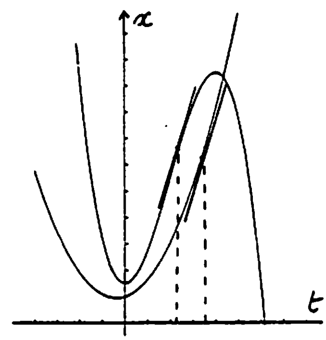


Fig.25

L'évocation de la tangente a été induite - de l'aveu de certains - par le cours de physique de l'année précédente (quelques-uns précisent même qu'ils ne savent plus pourquoi on utilise les tangentes). D'autres prétendent que ça leur paraît naturel de procéder comme cela et que l'idée leur est venue spontanément à l'esprit.

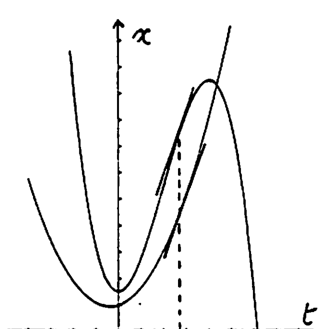


Fig.26

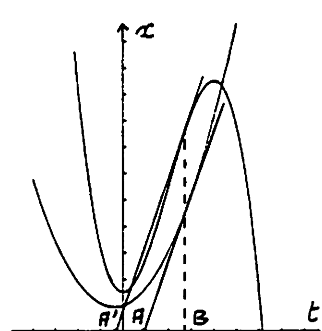


Fig.27

Le professeur rappelle la 3ème question en demandant comment mesurer la vitesse commune des voitures une fois dessinées les tangentes parallèles. Dans deux groupes seulement, le tracé de ces dernières est exploité : dans le premier, les élèves mesurent les ordonnées des points de tangence, les sous-tangentes AB et A'B (Fig.27) et calculent les rapports entre les unes et les autres sans fournir de plus amples commentaires; les élèves du second groupe justifient que la vitesse est la pente de la tangente en se référant aux unités des axes :

> *[318] Ce sont des kilomètres sur l'axe vertical et des heures sur l'axe horizontal, or, une vitesse s'exprime en kilomètres par heure.*

Les autres élèves qui proposent quelque chose abandonnent les tangentes pour revenir aux courbes. Par exemple :

> *[319] On va mesurer sur des intervalles de plus en plus petits, puis on fait la limite de la formule et on trouve la vitesse.* [Ce disant, l'élève montre deux points d'une des courbes situés de part et d'autre du point de tangence, il les rapproche l'un de l'autre jusqu'au moment où il se confondent avec ce dernier; par ailleurs, il est incapable de préciser ce qu'il entend par formule].

Un de ses interlocuteurs lui objecte :

> *[320] La vitesse doit toujours se déterminer dans un intervalle donné différent de zéro. Donc si on veut prendre des intervalles très petits, il va falloir s'arrêter à temps, sinon un point est toujours parallèle à un point et alors en traçant n'importe quelle droite on aura toujours deux vitesses égales.* [Il dessine une droite quelconque, perpendiculaire à l'axe des temps et montre les deux points de rencontre de cette droite avec les courbes $x_1(t)$ et $x_2(t)$].

2.7.4. Un usage malaisé des expressions analytiques.

Les élèves reconnaissent d'emblée dans les expressions analytiques de l'énoncé 2.7., les lois de position des voitures dont il était question dans les deux problèmes précédents. Beaucoup d'ailleurs avaient déjà tenté de déterminer ces expressions.

Ils ne savent que faire dans un premier temps de ces expressions analytiques. Le professeur doit souvent suggérer lui-même de ramener le problème à la résolution d'une équation, pour la formulation de laquelle il propose des idées et des notations d'une manière plus ou moins directive et avec plus ou moins de succès selon les groupes.

1) Dans l'un, il écrit:

$$\lim_{\Delta t \to 0} [x\,(t + \Delta t) - x(t)]/\Delta t = ?,$$

ce qu'un élève complète de la sorte

$$(x.t + x.\Delta t - x.t)/\Delta t = x\Delta t/\Delta t = x.$$

2) Dans un autre, il propose d'exprimer au moyen d'un calcul littéral les vitesses moyennes des deux voitures sur un intervalle de temps Δt. Un élève veut alors faire le calcul entre $t = 0{,}5$ et $t = 0{,}5 + \Delta t$. Un autre refuse:

[321] Non, on va essayer en 0,6, ça ressemble beaucoup plus alors.

Un autre élève trouve sur base de la même suggestion:

[322] k = kilométrage; $(k + \Delta k - k) / \Delta t$. Puis on rend $\Delta k = 0$ et on obtient $1/\Delta t$. Ca donne les points. N'importe quel point de la courbe = une toute petite différence sur une petite différence.

3) Seuls, deux groupes entreprennent de façon relativement autonome les calculs suivants mais éprouvent quelque peine à les justifier :

[323] $*[60(t+\Delta t)^2 + 12(t+\Delta t) + 10 - (60(t-\Delta t)^2 + 12(t-\Delta t) + 10)]/2\Delta t = [...]$
$= [240t\Delta t + 24\,\Delta t]/2\Delta t = 240t + 12.$
$*[-160(t+\Delta t)^3 + 240(t+\Delta t)^2 + 15 - (-160(t-\Delta t)^3 + 240(t-\Delta t)^2 + 15)]/2\Delta t = [...]$
$= [960\ t\Delta t - 960\ t^2\Delta t - 320\ (\Delta t)^3]/2\Delta t = 480t - 480\ t^2 - 160\ (\Delta t)^2.$
$*240t + 2 = 480t - 480\ t^2 - 160\ (\Delta t)^2.$
[324] $*(f(x+n) - f(x)) /(x+n-x) = (g(x+n) - g(x))/(x+n-x).$
$*-160(x+n)^3 + 240(x+n)^2 + 15 + 160x^3 - 240x^2 - 15 = 60(x+n)^2 + 12(x+n) +$
$10 - 60\ x^2 - 12\ x - 10.[...]$
$*-160n^3 - 480x^2n - 480xn^2 + 240x^2 + 240n^2 + 480xn = 60n^2 + 120xn + 12n$
$\rightarrow ?$

Le professeur recommence ce dernier calcul sans rien simplifier dans la première fraction. Il obtient, une fois supprimés les termes en n ou n^2..., l'équation $- 480x^2 + 360x - 12 = 0$ qu'il résout. Les élèves sont sceptiques:

[325] On ne sait plus quand remplacer n par o; on voit que ça donne quelque chose à la fin et on ne comprend pas comment ça ne donne rien au début.

Le professeur demande aux élèves qui ont effectué ces calculs et aux autres si ces développements ont quelque chose à voir avec la tangente évoquée lors du problème 2.5. Les élèves restent cois et perplexes.

2.8. La détermination des tangentes à une courbe : un problème vieux comme le monde.

a. Un cas simple : le cercle

Déterminez l'équation de la tangente au cercle $x^2 + y^2 = 1$ au point de coordonnées $(1/2, \sqrt{3}/2)$.

b. Restons dans le contexte des coniques

Quelle est l'équation de la tangente à la parabole $y = x^2$ au point de coordonnées (1, 1) ?

c. De plus en plus difficile... si l'on veut

Déterminez la tangente aux courbes d'équation $y = x^3$; $y = x^4$;...$y = x^n$ au point de coordonnées (1, 1).

2.8.1. La tangente est avant tout une droite qui ne touche la courbe qu'en un seul point.

Tous les élèves déterminent la tangente au cercle évoqué au problème 2.8. en exploitant une propriété géométrique qu'ils connaissent : la tangente est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de contact :

Les tentatives des élèves - plus ou moins élaborées suivant les cas - pour déterminer la tangente à $y = x^2$ en (1, 1) se basent sur l'idée qu'une tangente ne rencontre la courbe qu'au seul point de contact :

[326] Soit $y = ax + b$ la tangente, on a : $1 = a + b \rightarrow b = 1 - a$; $y = x^2$ et $y = ax + 1 - a \rightarrow x^2 - ax + a - 1 = 0 \rightarrow \rho = a^2 - 4(a - 1) = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2 = 0 \rightarrow a = 2 \rightarrow$ la tangente est $y = 2x - 1$.

Ils s'aperçoivent bien vite qu'une telle procédure se complique lors-qu'on tente de l'appliquer aux fonctions $y = x^3$, $y = x^4$... : il faut ré-soudre une équation du 3ème degré; du 4ème... La plupart en res-tent là. Quelques-uns tentent autre chose, sans grande conviction :

[327] -On connaît tous les points de la parabole. On pourrait avoir une droite parallèle à la tangente et passant par deux points.
-Ah oui mais on ne connait pas la pente : ça ne sert à rien.
-Si on prend un point juste à côté, par exemple 1,1...

2.8.2. Un réinvestissement du taux instantané et les réactions suscitées.

Dans une classe, [qui n'avait eu auparavant comme contact avec l'analyse que les seuls problèmes relatifs à l'aire sous $y = x^3$ (III.2.7.), et au vase conique (V.2.1.)] un élève propose :

> *[328] Soit $x_1 = 1 \rightarrow y_1 = 1$ point passant par (1, 1); $x_2 = 1 - n \rightarrow$ prend un nombre quelconque sur la tangente. $y_2 = (1 - n)^2 \rightarrow$ avec x_2, on calcule y_2; pente $= (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2) = (1 - (1 - n)^2)/(1 - (1 - n)) = (-n^2 + 2n)/n = -n + 2$; calcul de la pente par $n \rightarrow$ en général. On prend $n = 0$; pente $= 2$, donc la pente tend vers $2 =$ pente instantanée.*

Le professeur recopie ce développement au tableau et invite les autres élèves à réagir et à interpréter. Beaucoup d'incompréhension au début. L'auteur du calcul s'explique lui-même :

> *[329] On a deux points en un. On sait que la tangente touche en un point $\Rightarrow$ la différence ne peut qu'être égale à 0...*

Cette explication suscite l'une ou l'autre réaction :

> *[330] Oui, mais si $n = 0$, $x_2 = x_1$ mais n ne peut pas être égal à $0 \rightarrow$ sinon on a 0 au dénominateur dans l'expression de la pente.*
> *[331] Sa méthode est juste puisqu'elle donne la même réponse que la nôtre qui est indiscutable, elle.*
> *[332] Quand on fait ça, c'est comme si on calculait la pente en un seul point. Il ne peut pas prendre $n = 0$. On peut prendre n qui tend vers $0 \rightarrow$ on aura presque 2 comme pente.*
> *[333] C'est comme s'il prenait la tangente juste après et celle juste avant et quand les deux points se rejoignent en un, les trois tangentes se confondent.*

2.8.3. Une ou plusieurs tangentes?

Tous les élèves ne sont pas convaincus de l'unicité de la tangente à une courbe en un point. Ils le manifestent quelquefois spontanément, quelquefois en réponse à la question du professeur.

2.8.4. Quelques autres réflexions à propos de la tangente.

Invités à expliciter l'interprétation géométrique du nombre dérivé, enseignée au préalable par le professeur, quelques élèves répondent :

[334] Quand $\Delta t \rightarrow 0$, la droite du graphique devient de plus en plus droite ($\rightarrow$ horizontale). Je ne sais pas si c'est jusqu'à l'horizontale complète [Cet élève, ainsi que les suivants, se réfère au cas de la fonction $e(t) = t^2$ et à sa tangente en $t = 1$; il ne sera pas le seul à évoquer l'horizontalité de la tangente en $t = 1$: un autre dessinera même la Fig.28].

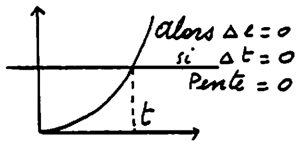


Fig.28

[335] $\Delta t \downarrow$ la pente de la droite se rabaisse. Les deux points deviennent confondus.
[336] Lorsque $\Delta t \downarrow$ la pente $\downarrow$. Si $\Delta t = 0$, $\Delta e/\Delta t$ représente la tangente au point t.
[337] En réduisant l'écart entre les deux points, $(t, e(t))$ et $(t+\Delta t, e(t+\Delta t))$. La droite les reliant $\rightarrow$ la pente délimite un espace de plus en plus petit pour finalement indiquer la valeur d'un point et la droite passant par celui-ci sera en fait la tangente.
[338] $\Delta t \rightarrow 0$, alors pente de la droite se rapproche de la tangente de la droite au point où Δt = 1 point.
[339] Si $\Delta t \rightarrow 0$, $\rightarrow \Delta e \rightarrow 0$, on n'a plus deux points pour délimiter la droite D, mais un seul et pour trouver la pente, on prend la tangente en ce point.

2.8.5. Une variante dans l'ordre des fiches.

Une classe reçoit les énoncés 2.4. à 2.7. après avoir travaillé le problème 2.8. relatif à la détermination des tangentes. Ce dernier a été résolu en définitive par le professeur. Cette inversion des tâches ne change pas grand'chose. Beaucoup d'élèves de cette classe passent par les mêmes errances, les mêmes incompréhensions que les autres. Deux élèves résolvent le problème 2.6. au moyen du taux de variation instantané, mais éprouvent quelque peine à justifier leur façon de faire :

[340] La vitesse est la pente de la tangente et on a vu qu'il fallait calculer celle-ci comme cela.

2.9. Je maximise, tu minimises, nous optimisons.

a. Clôturer un champ

On désire délimiter une parcelle rectangulaire dans un champ situé en bordure d'une rivière rectiligne. On dispose de 1000 m de clôture. Quelles dimensions donner à cette parcelle pour qu'elle ait une superficie maximale?

b. Une même aire, plusieurs périmètres

De tous les rectangles qui enserrent une aire égale à 10 cm², quel est celui de plus petit périmètre?

c. Construire, à partir d'une feuille de carton, la plus grande boîte possible

Aux quatre coins d'une feuille carrée en carton de côté 16 cm, on découpe un carré de côté x. On rabat les bandes latérales suivant les lignes pointillées (Fig.29). Pour quelle valeur de x la boîte aura t-elle le volume le plus grand? Quel sera ce volume?

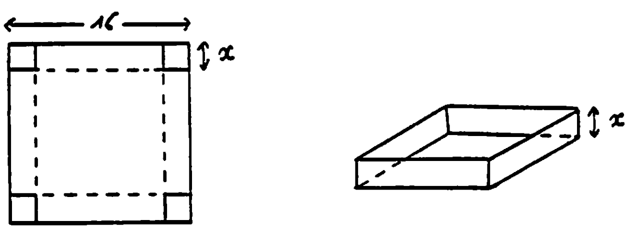


Fig.29

Remarque : Faute de temps, nous n'avons proposé que le problème de la boîte.

2.9.1. Une fonction facile à déterminer.

Les élèves à qui nous proposons ce problème déterminent sans peine la fonction qui exprime le volume V de la boîte en fonction de x : soit $V(x) = (16 - 2x)^2.x = 4x^3 - 64 x^2 + 156x$. Ils esquissent ensuite, point par point, le graphe de cette fonction.

2.9.2. Un transfert non spontané.

Transférer au cas présent le calcul effectué peu de temps auparavant pour déterminer des pentes de tangentes ne va pas de soi pour tous les élèves, loin s'en faut. L'échange suivant en témoigne :

[341] -En fait il faut appliquer la fonction à $x + n$ et $x - n$ [Dessine la Fig.30].
-Est-ce qu'on peut dire que $f(x+n) = f(x-n)$. Ah non! Je me trompe là. [Son interlocuteur écrit $4(x+n)^3 - 64(x+n)^2 + 156(x+n) = 4(x-n)^3 - 64(x-n)^2 + 156(x-n)$, développe et puis s'écrie :]
-On remplace n par 0. Ah oui ! mais ça ne servait à rien de calculer.
-Il faut travailler avec les tangentes. Au maximum, il faudra qu'elle ait une pente nulle. On monte l'axe ox parallèlement et on voit à quel moment il rencontrera la courbe en un seul point.
-Mais en ces points $((x+n), f(x+n); (x-n), f(x-n))$, on a une pente presque nulle. [Il exprime cette pente, avec l'aide du professeur : $12x^2 - 128x + 156 + 4n^2$ et, après avoir remplacé n par 0, résout l'équation $12x^2 - 128x + 156 = 0$. Son compagnon constate :]
-C'est normal qu'on trouve deux racines puisque la parallèle à ox rencontre la courbe en deux points [Il dessine la Fig.31].

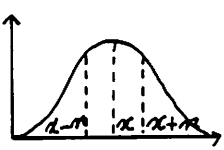


Fig.30

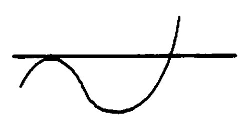


Fig.31

Dans une autre classe, un élève propose une idée qui n'est pas sans parenté avec le début de cet échange :

[342] * $x + 1 \Rightarrow (16 - 2x)^2 (x + 1)$ (1)
* $x - 1 \Rightarrow (16 - 2x)^2 (x - 1)$ (2)
* (1) - (2) $\Rightarrow x^2 - 16x + 64 = 0$. [Remarquons que l'élève ne change x en x + 1 ou x - 1 que dans l'un des deux facteurs].

Lorsque les élèves parlent de tangentes à propos de ce problème, c'est plus souvent pour évoquer comme plus haut la translation de l'axe ox jusqu'à la hauteur où il frôle le maximum. Mais que l'un d'eux propose le calcul d'un taux de variation instantané "pour faire comme avant" et voici les autres favorables à l'idée :

[343] Ah oui, c'est quand la pente égale à 0, sauf si le graphe s'était terminé ainsi [Il dessine la Fig.32].

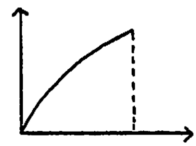


Fig.32

Chapitre VI

Et si l'on inversait les questions?

1. Quelques référents mathématiques et historiques.

On attribue généralement à Newton et à Leibniz la découverte du théorème fondamental de l'analyse. Ce dernier avait pourtant été entrevu par certains de leurs prédécesseurs. Nous décrivons en quelles circonstances à la section 1.1. de ce chapitre. A la section 1.2., nous expliquons pourquoi, malgré tout, la paternité de ce théorème échoit à Newton et à Leibniz.

1.1. Quelques mathématiciens qui ont entrevu le théorème fondamental.

Le théorème fondamental transparaît déjà, à l'état d'embryon, dans les recherches cinématiques de la période moderne. Galilée avait pris l'habitude de représenter le mouvement rectiligne d'un point animé d'une vitesse variable au moyen du graphe vitesse/temps. Il interprétait l'aire située sous ce graphe comme la distance totale parcourue par le point. Avisé de ce fait, Torricelli réalise, dans un cas particulier, qu'un problème de taux de variation est l'inverse d'un calcul d'aire : la vitesse est, en effet, le taux de l'espace parcouru, l'espace est l'aire sous le graphe de la vitesse et l'on sait que calculer d'une part la vitesse connaissant l'espace et d'autre part l'espace au départ de la vitesse sont des problèmes en quelque sorte inverses.

Fermat prend l'habitude de rectifier les courbes en jouant conjointement sur le tableau des quadratures et sur celui des tangentes. Voici comment C. Boyer (1949) décrit sa procédure. Prenons un point P quelconque sur une parabole semi-cubique ($y = kx^{3/2}$; Fig.1) d'abcisse OQ = a et d'ordonnée PQ = b. Fermat détermine tout d'abord la sous-tangente : TQ = 2a/3 par une méthode que nous décrirons à la section VIII.4.2.4. Si l'on élève une ordonnée P'Q' jusqu'à la tangente, à une distance QQ' = E de l'ordonnée PQ, la longueur du segment PP' s'exprime, en fonction de a et de E, comme

$$PP' = E\,(9k^2a/4 + 1)^{1/2}.$$

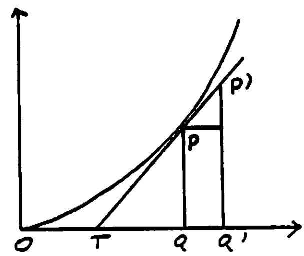


Fig.1

Mais, si l'on prend des valeurs de E assez petites, le point P' peut être considéré comme appartenant autant à la courbe qu'à la tangente : la longueur de la courbe sera donc donnée par une somme de segments tels que PP'. Par ailleurs, la somme de ces segments peut être regardée comme l'aire sous la courbe $y^2 = 9k^2x/4 + 1$. L'emploi des tangentes montre donc que la quadrature de cette dernière fournit la rectification de la première.

Barrow, quant à lui, obtient un résultat géométrique qui contient le germe du théorème fondamental. Il s'énonce comme suit : soit $y = f(x)$ une fonction croissante (Fig.2) et positive et $z = A(x)$ l'aire sous $y = f(x)$ entre les bornes 0 et x (Fig.3). Soit encore les points $D(x_0, 0)$; $E(x_0, f(x_0))$; $F(x_0, A(x_0))$ et T le point de ox tel que $DT = DF/DE = A(x_0)/f(x_0)$. Barrow affirme et démontre que la droite TF rencontre la courbe $z = A(x)$ au seul point F. Ce résultat signifie pour nous que la pente $A'(x_0)$ de la tangente TF égale $f(x_0)$.

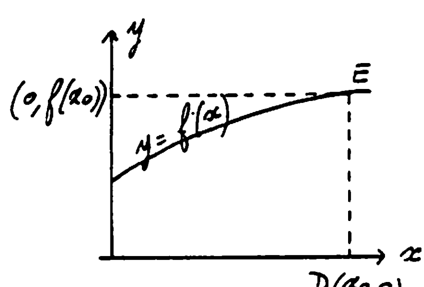


Fig.2

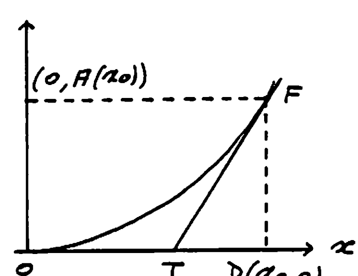


Fig.3

1.2. Newton et Leibniz sont les véritables fondateurs du calcul dit infinitésimal.

Torricelli, Fermat et Barrow sont passés bien près, comme nous l'avons vu, du théorème fondamental de l'analyse. Mais ils n'ont pas su en dégager le sens profond. Torricelli a eu beau associer vitesse à taux de variation et espace parcouru à aire, il n'en a tiré aucune idée sur un moyen de calculer une aire en général. "Fermat aperçoit la liaison entre les deux questions de la quadrature et de la tangence, mais sans la thématiser pour elle-même ni la traiter sur le seul plan algébrique" (P. Raymond, 1976). Quant à Barrow, il ne considère pas la tangente, au sens du terme en analyse, comme une droite dont la pente est donnée par la limite d'un taux de variation, mais bien au sens des Grecs : une droite qui touche la courbe en un seul point.

Tous trois n'entrevoient dans leurs découvertes respectives qu'un fait de nature tantôt cinématique, tantôt géométrique et non des exemples de ce qui pourrait devenir un nouvel algorithme de calcul : "The time was indeed ripe, in the second half of the seventeenth century, for someone to organize the views, methods and discoveries involved in the infinitesimal analysis into a new subject characterized by a distinctive method of procedure. Fermat had not done this, largely because of his failure to generalize his methods and to recognize that the problems of tangents and quadratures were two aspects of a single mathematical analysis - that the one was the inverse of the other - Barrow was unable to establish the new subject for, although the first to recognize clearly the unifying significance of this inverse property, he failed to realize that his theorems were the basis of a new subject" (C. Boyer, 1949).

En ce sens, Newton et Leibniz sont bien les fondateurs du calcul infinitésimal : "Both Newton and Leibniz must be credited with seeing the calculus as a new and general method, applicable to many types of functions. After their work, the calculus was no longer an appendage and extension of Greek geometry, but an independent science capable of handling a vastly expanded range of problems.

Both also arithmetized the calculus; that is, they built on algebraic concepts. The algebraic notation and techniques used by Newton and Leibniz not only gave them a more effective tool than geometry, but also permitted many different geometric and physical problems to be treated by the same technique. A major change from the beginning to the end of the seventeenth century was the algebraicization of the calculus. This is comparable to what Vieta had done in the theory of equations and Descartes and Fermat in geometry" (M. Kline, 1972).

Les historiens s'accordent toutefois à distinguer la démarche de Newton de celle de Leibniz : Newton cherche plus à résoudre des problèmes divers pour lesquels il invente une même méthode de résolution, Leibniz cherche davantage à développer un calcul formel en lequel il a une confiance particulière : "The first principal idea was a philosophical one, namely Leibniz's idea of a **characteristica generalis**, a general symbolic language, through which all processes of reason and argument could be written down in symbols and formulas ; the symbols would obey certain rules of combination which would guarantee the correctness of the arguments" (H. J. M. Bos, 1980).

2. Le travail en classe.

Le professeur annonce aux élèves qu'il va inverser certaines questions : *"On sait à présent comment déterminer la vitesse d'un mobile à partir du moment où on connaît l'espace qu'il parcourt; on va tâcher de retrouver cet espace en partant de la vitesse. On verra que les calculs d'aire permettent de graduer la jauge d'une cuve particulière dont on connaît la forme. Là aussi, on demandera d'aller en sens inverse, c'est-à-dire de retrouver la forme d'une cuve, connaissant la graduation de sa jauge".*

2.1. Donne-moi ta vitesse et je te dirai l'espace que tu parcours.

Dans son numéro du 21 août 86, le "Moniteur de l'automobile" décrit au moyen du graphe de la Fig.4, l'accélération de la Saab 9000i poussée au maximum. Ce graphe exprime la vitesse atteinte par la voiture à tel ou tel instant. Quelle distance aura parcouru cette voiture au moment où elle atteindra la vitesse de 160 km/h? Après combien de temps aura t-elle parcouru 500 m? Quelle sera sa vitesse à cet instant?

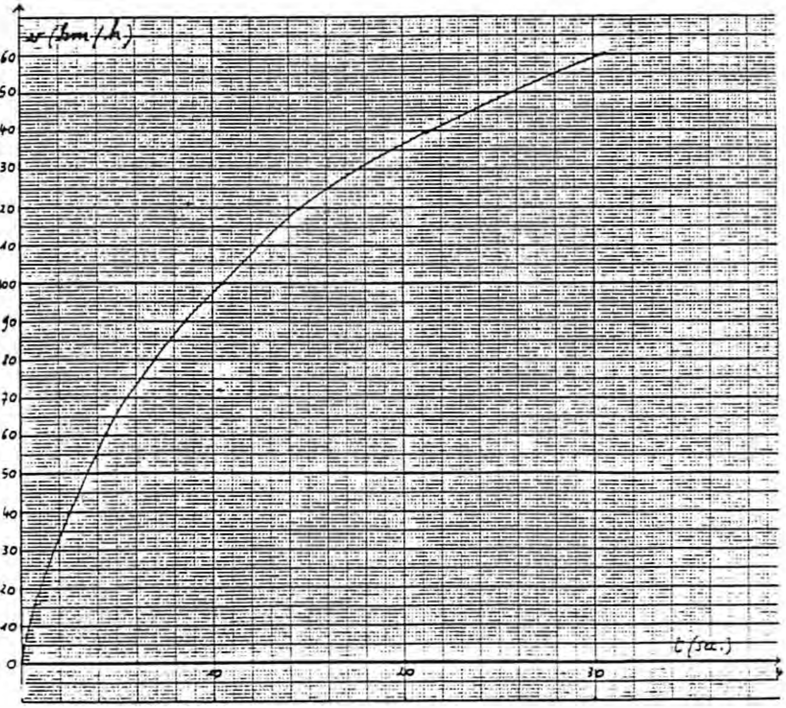


Fig.4

2.1.1. Un espace obtenu via l'accélération.

Rélatons tout d'abord les réactions suscitées par ce problème chez une dizaine d'élèves de 6ème (Math. 7 heures) qui avaient reçu, en 5ème, un enseignement sur les dérivées.

Une première idée surgit dans la tête de la plupart d'entre eux : remplacer la courbe représentative de la vitesse par une ligne polygonale (Fig.5), calculer la pente des segments de cette ligne et utiliser pour chacun d'eux la formule : $e = v_0t + at^2/2$. Ce faisant, ils sont conscients qu'ils approximent le mouvement, sur chaque segment de la subdivision, par un mouvement uniformément accéléré ou, comme le pense l'un d'eux, par un mouvement uniforme :

[344] Courbe = bouts de droite; surface (Fig.6) = surface (Fig.7); β = (B + b) / 2; espace périodique = (B + b) Δt / 2.

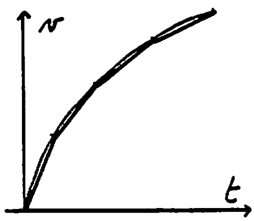


Fig.5

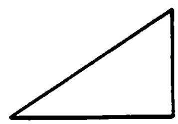


Fig.6

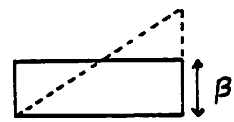


Fig.7

Les élèves croient a priori pouvoir obtenir ainsi, avec une précision arbitraire, l'espace parcouru par la voiture.

[345] On se rapproche de plus en plus des pentes de tangentes,

souligne l'un d'eux pour commenter ce fait. Un élève suggère qu'on a déjà une bonne approximation, sinon un résultat exact, en remplaçant la courbe par un seul segment (Fig.8), étant donné que celle-ci semble symétrique par rapport à l'axe représenté en pointillé. Il suffit, pour lui, de calculer e = $at^2/2$ en remplaçant a par la pente de ce segment.

Beaucoup d'élèves sont enclins à s'en tenir là, avançant que "tant qu'on ne connaît pas la fonction, on ne peut qu'approximer".

2.1.2. Voir un espace comme une aire.

Apparemment, rien ne pousse les élèves à interpréter le calcul de l'espace parcouru comme celui de l'aire sous la courbe v(t) [Notons toutefois que l'élève dont le propos a été relevé plus haut [344] y est presque mais son interprétation reste locale], si ce n'est que l'un ou l'autre

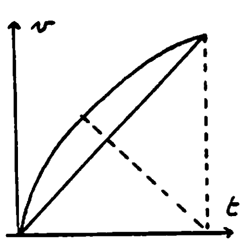


Fig.8

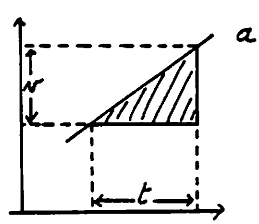


Fig.9

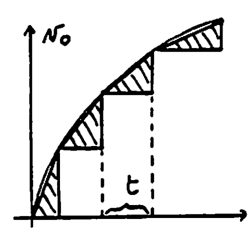


Fig.10

d'entre eux se soucie de savoir si ce problème a quelque chose à voir avec les calculs d'aires vus juste avant [Les élèves en question font partie de ceux qui ont reçu le problème VI.2.1., immédiatement après avoir travaillé les problèmes des chapitres II, III et IV. Ayant déjà vu les dérivées en 5ème, l'année précédente, ils n'avaient pas reçu les problèmes du chap.V]. Le professeur renforce ce souci par l'une ou l'autre sollicitation.

Voyons comment quelques-uns accèdent à cette interprétation.

1) Un des élèves rassemble ses souvenirs du cours de physique de 4ème : "Est-ce qu'on n'avait pas vu que ça donnait l'aire d'un triangle"? Il dessine la Fig.9 et constate que l'expression $e = at^2/2 = vt/2$ correspond bien à l'aire du triangle hachuré. Revenant au problème 2.1., il évoque les triangles hachurés à la Fig.10. Le professeur lui dit que la loi d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré s'écrit plus généralement $e = at^2/2 + v_0t$, lorsque le mobile est à l'origine en $t = 0$, et lui demande ce que vaut v_0 dans ce cas-ci. L' élève réalise que v_0 est la vitesse atteinte par le mobile au début de chaque intervalle de temps; il poursuit en interprétant le terme v_0t comme l'aire du rectangle situé sous le triangle correspondant à cet intervalle et conclut que l'espace parcouru par la voiture équivaut à l'aire sous la courbe v(t).

2) Un autre élève raisonne rapidement par analogie avec un cas simple :

> *[346] Soit le graphe d'un mouvement* [Il dessine la Fig.11]. *L'axe du temps représente un véhicule immobile, la droite horizontale une vitesse constante. Or l'espace parcouru e = vt. Soit une vitesse constante v' et un temps donné t', nous savons que distance parcourue en t' sec = v't'. C'est l'aire de ce rectangle qui représente l'espace parcouru. Dans le cas de la fiche 2.1., on raisonne de la même manière en subdivisant l'aire sous la courbe* [Il dessine la Fig.12].

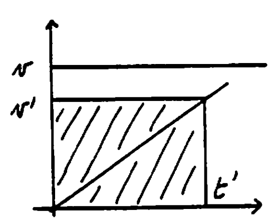


Fig.11

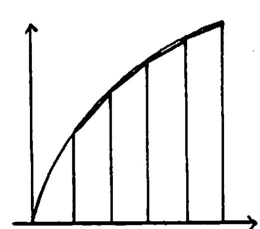


Fig.12

3) Un autre réalise soudain cette interprétation de l'espace comme une aire au cours de l'échange suivant. Il avait écrit, après avoir prolongé la courbe jusqu'au point d'abcisse 34 et d'ordonnée 165,

[347] (e(34)-e(33))/(34-33) $\cong$ *165; e(34)-e(33)* $\cong$ *165* [Il se réfère à la vitesse comme "*dérivée de l'espace par rapport au temps*". Le professeur lui rappelle que 165 est l'ordonnée du dernier point de la courbe et lui demande comment calculer l'espace parcouru entre la 32ème et la 33ème secondes et comment représenter celui-ci. L'élève réalise alors d'un coup que l'espace total parcouru est l'aire sous la courbe car :] *C'est une succession de segments.* [Il s'étonne cependant qu'on obtient des mètres carrés en calculant une aire alors qu'on est censé calculer un espace en mètres mais, après un instant de réflexion, dit :] *C'est normal, la vitesse c'est ça* [Montre un segment-ordonnée], *le temps c'est ça* [Montre l'axe horizontal]. *Donc e = vt c'est le produit, c'est la surface.*

4) Enfin, un élève use, pour justifier cette interprétation, d'un argument assez original :

[348] L'aire sous la courbe représentée, entre 0 et 30 secondes représente l'espace parcouru par le véhicule après 30 secondes, car chaque indivisible de cette courbe représente une distance parcourue pendant un temps donné; la somme des indivisibles représente donc la distance parcourue. Par ex., si je prends l'espace parcouru après 1 seconde, j'observe une vitesse de 20 km/h, donc la distance est de 20. [Invité à préciser sa pensée, cet élève ajoute:] *On prend l'unité qu'on veut sur l'axe et si on a la même vitesse sur cette unité, l'espace est donné par la vitesse. Alors je prends des unités de plus en plus petites et les segments se resserrent les uns contre les autres.*

2.1.3. Du comptage, non des calculs.

Une fois qu'ils ont perçu l'espace comme une aire, les élèves n'éprouvent pas grande difficulté à résoudre les deux autres questions du problème 2.1. Mais ils restent cependant bloqués, le temps - assez bref - de réaliser qu'aucun calcul n'est possible et qu'il leur faut compter les petits carrés du papier millimétré.

2.1.4. Une question proche de la précédente.

Lors d'une pré-expérimentation, nous avons posé la question suivante à un groupe de trois élèves qui commençaient leur 6ème et qui avaient suivi en 5ème le programme classique d'analyse : " *Soit deux mobiles dont les lois de vitesse $v_1(t)$ et $v_2(t)$ sont représentées à la Fig.13. Représentez approximativement sur le graphique l'instant t où les deux mobiles se rejoignent sachant qu'ils partent du même endroit en t = 0*".

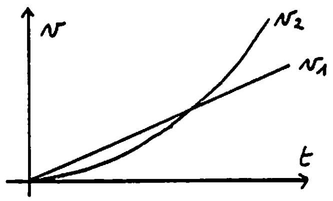


Fig.13

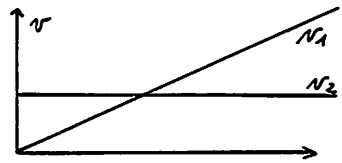


Fig.14

Cette question n'a suscité presqu'aucune réaction chez ces élèves à part le souci de trouver des expressions analytiques pour v_1 et v_2 : un premier degré pour v_1 et un second pour v_2 puisque : "le graphe a la forme d'une parabole". Notons aussi qu'ils avaient tendance à confondre les graphes des vitesses avec ceux indiquant la position des mobiles, certains proposant comme réponse l'abcisse du point d'intersection des deux graphes. Après leur avoir précisé que nous leur demandions une procédure graphique et non une procédure analytique, nous leur avons dessiné deux autres graphes de vitesses (Fig.14).

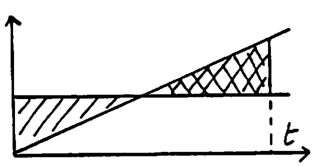


Fig.15

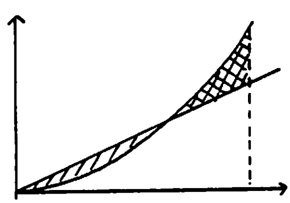


Fig.16

L'un d'eux a indiqué alors la valeur de t pour laquelle les deux triangles hachurés à la Fig.15 avaient même aire et a extrapolé l'idée au cas initial (Fig.16). Il a tenté ensuite de calculer les aires des surfaces hachurées en y inscrivant des triangles (Fig.17).

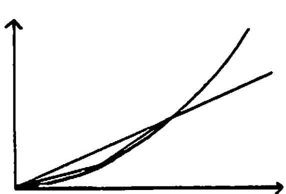


Fig.17

Les autres élèves sont restés sceptiques.

2.2. Dis-moi ta vitesse, ton point de départ et je te dirai où tu te trouves.

Un mobile se meut sur un axe ox à une vitesse donnée par la loi $v(t) = 3t^2 - 5t + 1$. Sa position vaut $x = 2$ au temps $t = 0$.
Quelle position occupe-t-il à l'instant $t = 6$?

2.2.1. Faire du calcul de primitives sans le savoir.

Les élèves qui savent que la vitesse s'obtient en dérivant la loi de position par rapport au temps et qui ont quelque expérience du calcul des dérivées [Tout au moins les dérivées des fonctions polynomiales] résolvent ce problème sans trop de peine. Sans connaître le terme de primitive ni les techniques du calcul des primitives, ils trouvent, par ajustement progressif, une fonction x(t) dont la dérivée vaut v(t), soit $x(t) = t^3 - 5t^2/2 + t$. Par contre l'ajout du terme indépendant ne va pas de soi : le professeur doit suggérer lui-même que plusieurs fonctions possèdent la même dérivée ... Les élèves terminent alors aisément.

2.3. Graduer une cuve.

On considère une citerne en forme de cylindre droit de section parabolique (Fig.18). Graduez de 10 en 10 cm une jauge verticale qui donne le volume en fonction de la hauteur de remplissage.

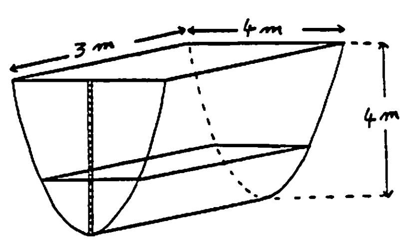


Fig.18

2.3.1. Réinvestissement de l'aire sous une parabole.

La plupart des élèves pressentent qu'il faut réinvestir ici l'aire sous une parabole, c'est-à-dire ramener le problème à celui d'un calcul d'aire : celle de la section parabolique jusqu'à une certaine hauteur. Ils le font correctement dans l'ensemble, une fois maîtrisées quelques difficultés techniques : choisir un système d'axes, trouver l'équation de la parabole, passer de l'aire sous $y = x^2$ à l'aire sous $y = \sqrt{x}$ ... Ils trouvent que le volume V de liquide s'exprime en fonction de sa profondeur h par

$$V(h) = 4\ h^{3/2}.$$

Ils se servent explicitement de cette fonction pour graduer la cuve.

2.3.2. Une étape vers le problème suivant.

Le problème 2.3., une fois résolu, donne un sens immédiat à l'énoncé du problème suivant. Mais il peut entraîner un effet pervers - comme nous allons le voir - dans la résolution de ce dernier.

2.4. Déterminer la forme d'une cuve déjà graduée.

Comme dans le problème précédent, on considère une cuve en forme de cylindre droit, de 3 m de long. Comme cette cuve est enterrée, on ne connaît pas sa section droite. Mais on a deux renseignements : cette section droite admet un axe de symétrie vertical et la jauge extraite de la cuve indique pour une hauteur d'eau h, une contenance égale à 6h/(h+1). Précisez la forme de la section.

2.4.1. D'un problème de volume à un problème d'aire.

La majorité des élèves décode la donnée principale du problème en termes d'aire sous une courbe:

[349] En divisant 6h/(h+1) par 3 on obtient l'aire de la section droite qu'on peut encore diviser par 2 puisqu'il y a un axe de symétrie [L'un d'eux dit que la fonction est paire. Et d'interpréter h/(h+1) comme l'aire délimitée par cet axe et la courbe qui profile une des parois latérales de la cuve; Fig.19].

2.4.2. Le dessin d'un profil plausible.

Dans beaucoup de groupes, on esquisse le profil probable de la cuve : celle-ci est de plus en plus évasée vers le bas, elle n'est pas convexe (Fig.20). Pour justifier ce dessin, les élèves recourent tantôt à des calculs :

[350] h = 0, S = 0, V = 0; h = 1, S = 1, V = 3; h = 2, S = 4/3, V = 4; [...] h = 10 ...

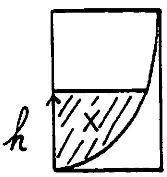


Fig.19

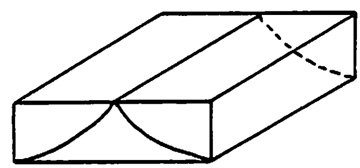


Fig.20

tantôt à des considérations telles que :

[351] $\mathrm{Lim}_{h \to \infty} 2h/(h+1) = 2 \Rightarrow$ *au fur et à mesure que les h augmentent, il faut ajouter de moins en moins de volume.*
[352] On a la surface entre 0 et 1, elle vaut 1 et entre 0 et l'infini, elle vaut 2; donc, on a déjà la moitié entre 0 et 1 et c'est pour ça que ça rétrécit.

2.4.3. Qu'il est loin le taux de variation instantané !

La plupart des élèves restent bloqués à ce stade pour n'avoir considéré, dans leurs calculs, que des volumes délimités inférieurement par le fond de la cuve. Le professeur les incite à *"faire des calculs plus précis"*, ce qui pousse quelques-uns (mais c'est loin d'être systématique) à calculer les volumes de tranches débutant plus haut dans la cuve. Ainsi un élève considère la tranche située entre h = 0 et h = 1 puis celles situées entre h = 1 et h = 2, entre h = 0 et h = 0,1 et entre h = 0,2 et h = 0,3. Voyant cela, un de ses interlocuteurs utilise le symbole Δh et écrit S(h + Δh) - S(h), puis plus rien. Le professeur rappelle qu'on cherche la longueur d'un segment, qu'il montre sur le dessin (le trait gras de la Fig.21). L'élève pense à diviser par Δh, mais dit que ça ne sert à rien puisqu'on ne connaît pas la forme des bords de la tranche.

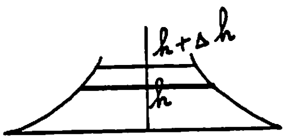


Fig.21

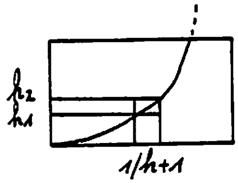


Fig.22

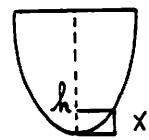


Fig.23

Un autre élève écrit :

> *[353] On peut procéder pour des h tout petits. Pour un h minimum, on peut assimiler la surface obtenue à un rectangle de largeur h et de longueur égale à Superficie / largeur = $(h/(h+1))/h$ = $1/(h+1)$. Prenons un h_2* [Fig.22]. *La largeur est égale à h_2-h_1, et la longueur égale à la superficie / largeur. Mais il faut prendre le rectangle obtenu moins le rectangle précédent. On le connaît, il nous reste un rectangle de largeur h_2-h_1 et largeur égale à superficie / (h_2-h_1) ...*

Enfin, on tient dans un autre groupe des propos similaires, mais en s'en tenant à des tranches partant du fond de la cuve :

> *[354] Pour un h très petit, x* [Fig.23] *est égal approximativement, à $1/(h+1)$ car la surface est presque un rectangle. $x.h.a = h/(h+1)$; rapport : $x.a = 1/(h+1)$.*

2.4.4. Une référence utile au vase conique.

Un élève parvient, seul, à résoudre le problème 2.4. Le souvenir du vase conique (problème V.2.1.) semble jouer chez lui le rôle de catalyseur :

> *[355] $V(h) = 6h/(h+1)$ et $l = 3 \Leftrightarrow S(h) = 2h/(h+1)$. Soit l la largeur; $l(h)$ = largeur du réservoir en fonction de h; largeur = vitesse à laquelle le volume augmente en fonction de h $\Leftrightarrow l(h) = S'(h) \Leftrightarrow l(h) = 2/(h^2+2h+1)$* [Cet élève avait vu auparavant le calcul des dérivées des fractions rationnelles]. *Dans le problème avec le cône au deuxième trimestre, on a employé la dérivée pour calculer la surface de la section du cône en fonction de la hauteur. Avec un raisonnement similaire, on emploie la dérivée pour calculer la section en fonction de la hauteur.*

2.4.5. Un effet pervers du problème 2.3. : les élèves devinent la réponse du problème 2.4. sans éprouver le besoin de la justifier.

Le problème 2.3. a un effet inattendu sur la résolution du problème 2.4., chez des élèves à qui on a enseigné au préalable les techniques de dérivation : ils résolvent correctement le problème

2.4., sans pouvoir justifier leur procédure, ni d'ailleurs en éprouver le besoin. Leur cheminement se résume ainsi : ils s'aperçoivent qu'en dérivant, par rapport à la profondeur h, le volume d'eau : $V(h) = 4\ h^{3/2}$ contenu dans la cuve du problème 2.3., ils obtiennent l'aire de la surface supérieure de l'eau, soit $S(h) = 6\ h^{1/2}$. Le problème 2.4. est, disent-ils, "le contraire" du problème 2.3. Il suffit donc de dériver la fonction 6h/(h+1) pour obtenir l'aire d'une section horizontale de la cuve et de diviser cette aire par 3 pour avoir sa largeur, à une profondeur h donnée.

2.4.6. Des erreurs qui rappellent les décompositions abusives des solides en indivisibles radiaux.

Deux erreurs rencontrées dans des contextes semblables à celui du problème 2.4. rappellent les erreurs liées à la décomposition des solides en indivisibles radiaux.

1) La première est commise par un professeur qui propose à ses élèves de déterminer le profil d'un vase de révolution (Fig.24), connaissant la fonction V(h) qui exprime le volume du liquide qu'il contient en fonction de sa profondeur. Il s'attendait à ce que la dérivée V'(h) soit la fonction dont le graphe est le contour d'une section radiale, l'axe ox étant l'axe de rotation. Observant ses élèves au travail, il s'aperçoit de son étourderie et l'attribue à la prégnance des sections radiales dans son esprit.

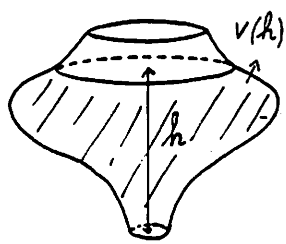


Fig.24

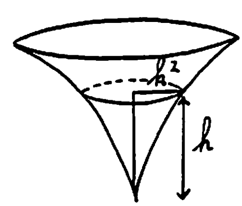


Fig.25

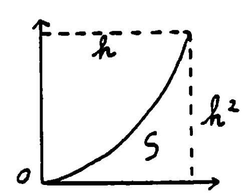


Fig.26

2) Soit le vase représenté à la Fig.25. Désirant exprimer le volume d'un liquide contenu dans ce vase, en fonction de sa profondeur h, un groupe de quatre élèves, qui connaissent le calcul de primitives, propose :

[356] S = primitive de $h^2 = h^3/3$; V = primitive de $h^3/3 = h^4/12$ [Fig.26].

Ils trouvent ensuite un argument en faveur d'une telle réponse :

> *[357] L'équation du volume en fonction de la hauteur sera un quatrième degré; ordonnée (hauteur) = second degré; surface = 3ème degré.*

Ainsi qu'un fait qui leur semble fournir un contre-exemple à leur proposition :

> *[358] Je remarque que la dérivée de $4\pi R^3/3$, qui est un volume, donne $4\pi R^2$ qui n'est pas la surface du cercle, donc la relation entre $h^3/3$ et $h^4/12$ n'est peut-être pas correcte.* [L'élève s'imaginait trouver, comme dans le cas précédent, l'aire d'une section radiale de la sphère, en dérivant l'expression de son volume].

2.5. Avis de recherche.

On recherche une fonction de x qui correspond au signalement suivant : pour tout x positif, l'aire sous la courbe représentant cette fonction, entre les bornes 0 et x, vaut $x^2/(1+x^2)$.

Récompense : devinez !

2.5.1. Des difficultés techniques exclusivement.

Revenus à un problème plan, les élèves se sentent ici en terrain déjà exploré. Ils n'hésitent pas à dériver la fonction $f(x) = x^2/(1+x^2)$. Pour ce faire, ils éprouvent plus ou moins de difficultés, suivant qu'ils connaissent les règles de dérivation des fractions ou qu'ils doivent partir de l'expression

$$\lim_{\Delta x \to 0} [(x+\Delta x)^2/(1+(x+\Delta x)^2) - x^2/(1+x^2)] / \Delta x$$

qu'ils ont quelque peine à simplifier.

2.6. De l'aire du disque à la longueur de la circonférence.

On sait que l'aire d'un disque de rayon r vaut πr^2. Comment tirer de là la longueur de la circonférence?

Faute de temps, nous n'avons pu proposer cette fiche aux élèves, du moins sous cette forme et dans le cadre strict de cette suite de problèmes. Par contre, nous avons posé à plusieurs élèves ayant bénéficié d'un enseignement traditionnel de l'analyse la question : *"Lorsqu'on dérive par rapport au rayon r l'expression πr^2 de l'aire d'un disque, on obtient $2\pi r$, c'est-à-dire l'expression de son périmètre. Pourquoi?"* Les réponses à cette question, reprises à la section 2.10. suffisent à nos besoins d'expérimentation. Mais nous préférons maintenant la question 2.6. car l'autre agace certains élèves qui ne voient pas toujours ce qu'on leur veut et qui se contentent la plupart du temps de refaire le calcul de la dérivée, pensant ainsi avoir répondu.

2.7. De grâce, évitez-moi les sommations fastidieuses!

Prouver que l'aire sous $y = x^k$ ($k \in N$), entre les bornes o et b, vaut $b^{k+1}/(k+1)$, en évitant tout calcul de sommation semblable à celui effectué pour déterminer l'aire sous $y = x^3$.

2.7.1. Une ancienne conjecture enfin démontrée.

Le résultat énoncé en 2.7. a été conjecturé à la suite du problème III.2.8. A présent les élèves disposent d'un outil (le calcul des dérivées) qui leur permet de prouver cette conjecture en évitant les calculs de sommation (somme des $k^{\text{ièmes}}$ puissances des n premiers nombres entiers).

2.7.2. Une hésitation encore à dériver.

A la lumière des problèmes précédents, les élèves se doutent qu'il faut dériver. Cependant, certains ne voient pas la présence d'une fonction, jusqu'au moment où le professeur remplace la lettre b par la lettre x. A ce moment, une seule difficulté reste à surmonter [Du moins pour les élèves qui n'ont pas vu le calcul des dérivées] : le calcul du binône $(x+\Delta x)^{k+1}$. Mais les élèves se rendent compte que seuls les coefficients de x^{k+1} et $x^k\Delta x$ sont à déterminer, ce qu'il font par induction. En effet, les autres termes du développement de $(x+\Delta x)^{k+1} = x^{k+1} + (k+1)x^k\Delta x + ?x^{k-1}(\Delta x)^2 + ... + ?x^2(\Delta x)^{k-1} + ?x(\Delta x)^k + ?(\Delta x)^{k+1}$contiennent une puissance de Δx d'ordre supérieur à 1. Or, dériver la fonction $y = x^{k+1}$revient à diviser $(x+\Delta x)^{k+1} - x^{k+1}$ par Δx et puis, à supprimer tous les termes qui contiennent encore, une fois les simplifications faites, Δx ou une de ses puissances : autant supprimer tout de suite les termes dont les coefficients sont figurés par des points d'interrogation.

S'ensuit une brève synthèse sur le théorème fondamental adapté aux aires sous des courbes positives : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$, avec F primitive de f.

2.8. Il y a aire et aire.

Comment calculer l'aire hachurée ci-dessous au moyen de la fonction $y = x^4/4$?

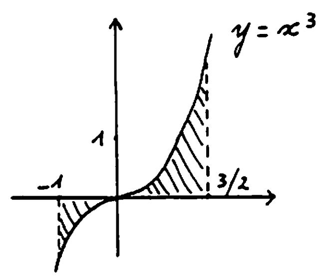


Fig.27

2.8.1. Des aires négatives !

Avec ou sans l'intervention du professeur, les élèves constatent bien vite quelques faits : $\int_{-1}^{0} x^3dx + \int_0^{3/2} x^3dx \neq \int_{-1}^{3/2} x^3dx$; $\int_{-1}^{0} x^3dx < 0$ qui leur apparaissent erronés. Le professeur explique leur provenance : si f est négative sur [a,b], sa primitive F est décroissante et donc F(b) - F(a) < 0; il introduit le vocable "aire algébrique". Les élèves suggèrent comment contourner cette difficulté : on repère les intervalles où la fonction est négative et on y prend son intégrale en valeur absolue.

2.9. Des fonctions, encore des fonctions, toujours des fonctions.

Voici le graphe d'une fonction f. Notons f' la fonction qui donne la pente de sa tangente en un point quelconque (x, f(x)) et notons $\int_a f$ *la fonction qui, à une abcisse x quelconque, fait correspondre l'aire algébrique sous le graphe de f entre les bornes a et x. Dessinez des graphes plausibles pour les fonctions f' et* $\int_a f$ *et justifiez-les.*

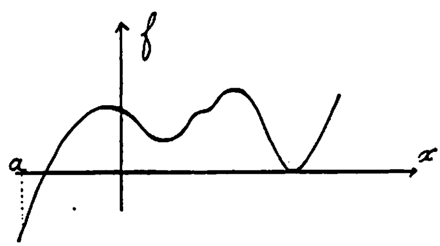


Fig.28

Quels renseignements peut-on lire sur chacun des trois graphes si f représente, à tout instant :
- *la position d'un mobile sur une trajectoire rectiligne?*
- *sa vitesse?*
- *le volume d'eau contenu dans un récipient?*
- *le débit de remplissage ou de vidange de ce récipient?*

Ce problème est proposé aux élèves en guise de synthèse; leurs réactions ne sont pas reprises ici car elles n'apportent rien de neuf pour notre analyse.

Dans les sections 2.10. et 2.11. de ce chapitre nous décrivons des réactions d'élèves interrogés seuls ou par groupes, en dehors du contexte strict des problèmes précédents. Les élèves en question avaient reçu, qui, un enseignement "classique" des dérivées (une cinquantaine d'élèves de 6ème), qui, au moins le cours complet d'analyse prévu par le programme dans les deux dernières années d'humanités (une vingtaine d'élèves en fin de 6ème, une quinzaine d'étudiants de première année universitaire en mathématique).

Nous distinguons leurs réactions chaque fois que cela s'avère nécessaire.

2.10. Des élèves à qui l'on fait constater des faits liés au théorème fondamental.

Nous avons cherché à savoir comment des élèves à qui l'on a enseigné les dérivées, interprètent l'une ou l'autre des deux propositions particulières suivantes, la première apparentée au théorème fondamental, la deuxième directement issue de celui-ci, lorsqu'on les leur fait constater pour la première fois.
1) L'expression πr^2 de l'aire d'un disque, une fois dérivée par rapport à r, donne celle de son périmètre, soit $2\pi r$.
2) L'aire sous $y = x^2$, entre 0 et x, obtenue comme limite d'une suite de sommes de rectangles, s'exprime au moyen d'une fonction $S(x) = x^3/3$ dont la dérivée redonne la fonction $y = x^2$.

2.10.1. Des faits vides de sens.

Seul, sur les cinquante qui n'avaient pas déjà vu le théorème fondamental, un élève fournit une interprétation complète en termes de taux de variation :

> *[359] $S = x^3/3 = f(x)$; fonction $= f'(x)$* [Fig.29].*Cette situation me semble normale :*
> *1. D'abord à cause de ma "culture mathématique".*
> *2. Je m'aperçois que $f(x)$ est croissante (la surface) $\Leftrightarrow f'(x) > 0$ et que au plus cette surface augmentera, au plus $f'(x)$ sera loin au dessus de 0.*
> *3. Une surface s'obtient à partir d'une multiplication (par exemple L.l pour un rectangle ou c^2 pour un carré), il semble donc normal que le polynôme de la fonction donnant la surface soit d'un degré > que le polynôme de la fonction $f'(x)$.*
> *4. $f'(a) = \lim (f(x)-f(a))/(x-a)$; $f(x)$ et $f(a)$ sont des surfaces; $f(x)-f(a)$ devient une "approximation de rectangle" de plus en plus petite. En divisant cette surface par (x-a) on aura quelque chose devenant à la limite le segment [(a, o); (a, f'(a)], c'est-à-dire une valeur $f'(a)$ ($f(a)$ étant la surface sous la courbe de $0 \to a$).*

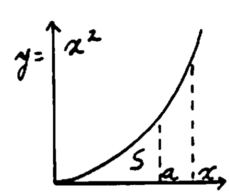


Fig.29

Deux élèves talonnent le précédent, qui parlent, eux, d'accroissement instantané :

[360] La dérivée de la surface en fonction de la hauteur [Il veut dire l'abcisse] *est l'accroissement instantané de la surface : il est égal à la limite à d (o, x^2)* [Il veut dire la distance entre le point de coordonnées (x, 0) et celui de coordonnées (x, x^2)] *et donc à x^2* [Fig.30].
[361] Le périmètre [du disque] *sera la dérivée de πr^2 parce qu'il exprime l'accroissement instantané de celui-ci* [Fig.31]. *Tous deux (le périmètre et l'aire) augmentent si r augmente et vice-versa [...]. L'on voit donc que, si $\Delta r \to 0$, l'aire du grand cercle se rapprochera de l'aire du petit, tout comme le périmètre.*

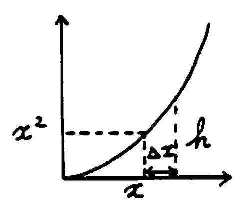


Fig.30

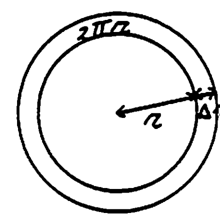


Fig.31

Tous les autres élèves se contentent, dans un premier temps, de constater les faits sans pouvoir fournir d'interprétation probante. Certains expriment leur perplexité par des réactions telles que :

[362] Mais on ne peut pas dériver πr^2 puisqu'il n'y a pas de variable.
[363] S'il s'agit d'un cercle trigonométrique, $r = 1 \to D\pi.1 = 2\pi.1$.
[364] Que veut dire dériver par rapport à ? [C'est l'élève qui souligne].
[365] La notion de dérivée d'une fonction m'a toujours semblé très spéciale et non justifiée, c'est-à-dire qu'elle ne sert à première vue à rien du tout. Ce n'est que [C'est l'élève qui souligne] *dans l'étude des fonctions qu'elle est très utile afin de connaître les croissances. La question que je me pose est de savoir si c'est là la seule utilité d'une notion si complexe que l'on finit par se demander s'il y a encore la moindre relation avec la formule de départ (f(n)-f(n'))/(n-n').*

Souvent les élèves refont, dans le détail, le calcul des dérivées sous la forme :

$$\lim_{x\to a}(\pi x^2-\pi a^2)/(x-a) \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a}(x^3/3-a^3/3)/(x-a),$$

mais sans que cela les inspire davantage. Visiblement, ils ne voient pas où le professeur veut en venir.

2.10.2. Un recours aux tangentes.

Leurs souvenirs de la théorie des dérivées poussent les élèves à recourir aux tangentes, d'une manière ou d'une autre :

> *[366] Il faut trouver la bonne tangente dont le triangle est égal à la surface hachurée* [Fig.32].

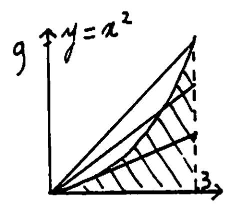


Fig.32

En général, ils se servent des tangentes au graphe de $y = x^3$ pour déterminer des figures rectilignes qui "collent" plus ou moins à la surface située sous ce graphe. En ce qui concerne le cas du disque, certains bordent de tangentes le graphe cartésien de la fonction $y = \pi x^2$; d'autres enveloppent de tangentes le disque lui-même, ce qui leur donne l'idée de circonscrire des polygones à celui-ci.

2.10.3. Des approximations d'aires.

Abandonnant toute allusion à la dérivée, les élèves approximent alors les aires en question au moyen de surfaces rectilignes : des polygones pour le disque, des puzzles hybrides pour l'aire sous $y = x^2$ mais jamais composés de rectangles.

2.10.4. Des interprétations faisant référence aux dimensions des grandeurs, à une certaine idée de variation ou à la vitesse de variation.

Sous l'insistance du professeur, quelques réflexions sont proposées par des élèves à titre d'interprétation.
1) Plusieurs lient les degrés des fonctions aux dimensions des grandeurs :

> *[367] La dérivée permet de réduire d'un degré une fonction, ex : $Dx^2 = 2x$. On passe du second degré au premier degré. Le degré de x devient, après avoir dérivé, coefficient de x. Le périmètre d'un cercle est une longueur. Un point a une dimension qui est de zéro. Une droite ou une longueur a une dimension de un. Une surface a une dimension de deux.*

Un volume a une dimension de trois. Il n'y a pas d'autres dimensions (la 4ème dimension n'existe pas). Pour passer d'une surface à un périmètre, on diminue d'un degré.

[368] Le périmètre, je dirais, a une dimension, la surface en a deux et le volume trois. Pour l'expression du périmètre, l'exposant de r est 1. Pour celle du carré, l'exposant est 2. On monte d'un exposant, on a une dimension en plus.

[369] $\pi r^2 \rightarrow$ *la formule de la surface du cercle, en la dérivant on obtient la formule du périmètre du cercle. Ceci n'est pas surprenant car lorsqu'on dérive un cube, on obtient un carré, la dérivée d'un volume est une surface, il n'est donc pas étonnant que la dérivée d'une surface soit un périmètre.*

2) D'autres réflexions contiennent, en un sens parfois différent mais toujours qualitatif, l'idée de croissance de variation :

[370] Le périmètre d'un cercle est la mesure extérieure du cercle qui nous donne une vision de sa grandeur. Et cette grandeur est l'image de sa surface. Autrement dit, si on connaît son périmètre, on peut avoir une idée de sa surface. Et réciproquement. D'où la dérivée de la surface est la croissance (= la grandeur = périmètre) ou décroissance de cette surface.

[371] La dérivée d'une fonction en détermine l'évolution instantanée et dans le cercle c'est le périmètre qui représente l'évolution point par point. Il est donc logique de trouver comme dérivée de la surface le périmètre du cercle. C'est le périmètre qui détermine la surface du cercle, le périmètre est l'évolution point par point de la surface [Fig.33].

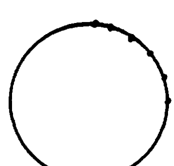


Fig.33

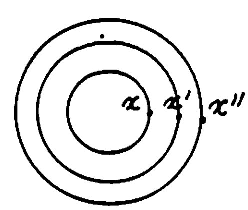


Fig.34

[372] La dérivée de la formule de l'aire donne l'expression du périmètre, soit de la surface minimale d'un cercle. Donc surface minimale d'un cercle = son périmètre.

[373] Cela signifie qu'au plus les dimensions du cercle augmentent, au plus une augmentation constante du rayon fait augmenter l'aire. En effet, sur le dessin : xx' = x'x'' [Fig.34], *donc deux augmentations égales de la valeur du rayon, mais l'anneau extérieur a une aire plus grande que l'intérieur.*

[374] Si à chaque fois que le rayon augmente, la surface a augmenté d'un petit rien, le périmètre, enfin le rayon a augmenté d'un petit rien, donc ça n'empêche pas qu'à une plus grande échelle, la surface évolue, grandit ... enfin, sera plus importante.

3) Enfin, une connotation cinématique :

> *[375] La surface doit se remplir de plus en plus vite à mesure que x grandit. La distance entre l'axe et la courbe augmente en fonction de x^2 (dans ce cas-ci)* [Fig.35]. *La surface sera alors x^3. quelque chose.*

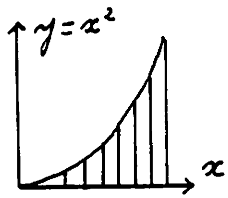


Fig.35

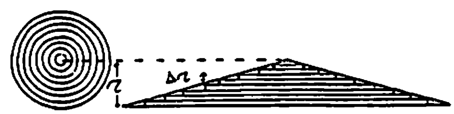


Fig.36

2.10.5. Une notation de dérivée mal intégrée.

Pour aider ses élèves à interpreter le cas du disque, le professeur dessine la Fig.36. Un certain nombre d'entre eux tente alors d'appliquer à ce dessin, leur notation de la dérivée

$$\lim_{x\to a}[f(x) - f(a)]/(x - a),$$

sans succès pour la plupart. Voici quelques ratés significatifs :

> *[376] $a = 2\pi r$ [...]; $\lim_{x\to 0}(f(x)-f(0))/(x-0) = 2\pi r$; $(\pi R^2 - 0)/(x-0) = 2\pi r$; $\pi R^2 = 2\pi rx$; $\pi R^2/2\pi R = x \to x = R/2$.*
> *[377] $Df(a) = \lim_{x\to 0}(f(x)-f(a))/(x-a)$ si $f(x) = \pi R^2$; si $f(a) = \pi(\Delta R)^2$; si $\Delta R \to 0$ variation infinie du rayon.*
> *[378] x-a devrait tendre le plus possible vers 0. $Df(x) = \lim_{x\to 0}(f(x)-f(a))/(x-a)$* [Fig.37]. *Si x = longueur d'une lamelle et a = sa largeur, on a une surface infiniment petite; si a/x tend vers 0, soit que a est pris très petit, $\lim_{a\to 0} a/x = Dax - aDx/x^2$* [...]. [Sur la même feuille, un autre élève dessine la Fig.38].

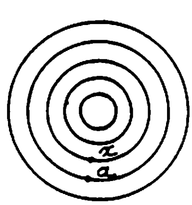


Fig.37

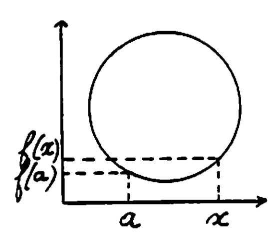


Fig.38

2.10.6. Une certaine confusion entre variable et accroissement de la variable.

A plusieurs reprises, nous voyons les élèves confondre la variable et son accroissement. Déjà les quelques réactions reprises ci-dessus à propos du disque en témoignent : on ne sait plus si c'est a, ou x, ou x-a qui tend vers 0! Voici une autre réaction où ce glissement est manifeste :

> *[379]* $\lim_{r \to a}$ *et* $a \to 0$ $(f(r)-f(a))/(r-a)$; $\lim_{r \to 0}(f(r)-f(0))/(r-0)$.

Une telle confusion se retrouve à propos d'autres exemples :

> *[380]* $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$ *[...]* $f'(3) = 6 = \lim_{\Delta x \to 0}\Delta S/\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0}\Delta S/3 = (\lim_{\Delta x \to 0}\Delta S)/3$; $18 = \lim_{\Delta x \to 0}\Delta S$. [Fig.39]. Un autre élève n'admet pas que l'on puisse fixer la valeur de x, tout en faisant tendre dx vers 0 : il en revient toujours à considérer que c'est x qu'il faut faire tendre vers 0].

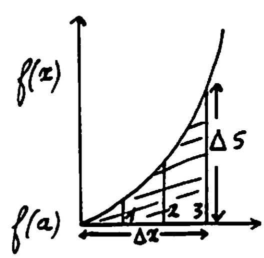


Fig.39

Un élève cependant est conscient du risque de confusion :

> *[381] Il ne faut pas confondre rayon et accroissement de rayon.*

2.10.7. Des dérivées dont l'idée de taux est absente.

Derrière le mot dérivée, plusieurs élèves voient en l'une ou l'autre occasion la "limite de l'accroissement" d'une grandeur et non celle d'un taux d'accroissement. Ainsi, il arrive que le mot dérivée soit associé explicitement à l'accroissement d'une seule grandeur :

> *[382] Il fait intervenir deux dérivées là-dedans puisqu'il parle deux fois d'accroissements : ce même accroissement* [de surface] *tend à s'annuler lorsque l'accroissement de rayon tend vers 0.*

[383] Partir de la dérivée, c'est la limite d'une quantité qui tend vers 0, qui s'amincit [...].

Certains utilisent à nouveau le vocable d'accroissement instantané pour désigner la dérivée, comme en témoigne cet échange :

[384] [Le professeur:] - *Que devient l'aire sous f entre x et x+h lorsque h tend vers 0?*
- *On ne va pas avoir un intervalle* [L'élève fait allusion à l'intervalle [x, x+h]], *mais un point.*
- *Donc, c'est bien le mot d'accroissement instantané qu'on pourra employer. Si h tend vers 0, ma surface va tendre vers 0.*
[Le professeur:] - *Et la dérivée, que calcule-t-elle?*
- *Justement, cet accroissement instantané, si h tend vers 0, je saurai obtenir une approximation de l'accroissement instantané.*

De même, les élèves parlent de la dérivée de la fonction qui exprime l'aire du disque comme de la "limite de l'aire ΔS de l'anneau circulaire d'épaisseur Δr" :

[385] La dérivée de la surface est égale à la différence entre les surfaces de deux cercles de même centre dont les rayons sont aussi peu différents que l'on veut.

ou encore, en un sens non défini, comme de la "limite même de cet anneau":

[386] $Lim_{h \to 0}[(f(x+h) - f(x))/h]$, *c'est la limite de cette quantité-ci* [l'anneau circulaire] *qui s'amincit, qui tend vers... à la limite il n'y aura plus d'anneau.*

De cette perspective, les élèves tirent des conclusions contradictoires. Pour les uns le rapport $\Delta S/\Delta r$ tend vers 0 :

[387] Oui, c'est une limite qui tend vers 0.

et ils dessinent, pour se justifier, des anneaux de plus en plus minces. D'autres, par contre, diront que ce rapport tend vers la longueur du cercle, car :

[388] Plus le rapport diminue, plus l'anneau a tendance à se confondre avec la circonférence du cercle → on ne peut descendre au dessous de la circonférence.

D'autres encore hésitent ou laissent place aux deux possibilités à la fois :

> *[389] Si on prend deux cercles concentriques de rayons différents, mais dont la différence se rapproche de 0 et est égale à R* [Fig.40] $\rightarrow \lim_{R \rightarrow R'}(\pi R'^2 - \pi R^2)/(R'-R) = 0$. *Cette limite tend vers une surface égale à zéro mais...* [Il dessine la Fig.41].

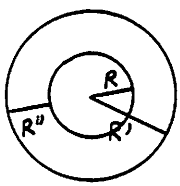


Fig.40

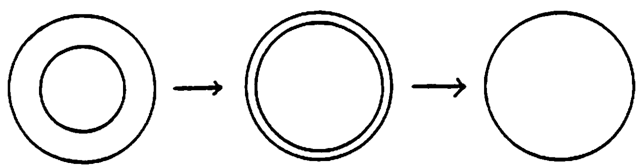


Fig.41

> *[390] [...]* $\lim[\pi(R+\Delta r)^2 - \pi R^2]/\Delta r$ *est plus ou moins égal à l'anneau de plus en plus petit autour du cercle. La surface de cet anneau tend vers 0 et sa surface tend vers* $2\pi R$. *Car, on peut le considérer comme un rectangle de plus en plus mince.*

Enfin, un élève assimile au rapport $(S(x+h) - S(x))/h$ la surface située sous $f(x) = x^2$ entre x et x+h. Il constate que cette surface s'amincit en un segment de longueur f(x) et poursuit ainsi :

> *[391] La surface du segment égale zéro, mais pas sa longueur.*

Ce qui justifie, à ses yeux, que la limite du rapport vaut, non pas 0, mais f(x). Un autre s'appuie sur un même argument dans le cas de l'anneau :

> *[392] La surface de l'anneau est nulle, ce qui veut dire qu'on n'a plus qu'un cercle et donc là, quand on prend* $2\pi R$, *on ne prend plus la surface de l'anneau, mais la longueur du cercle.*

2.10.8. Pourquoi un dénominateur h dans l'expression de la dérivée?

A deux élèves qui assimilent la dérivée à un accroissement (en l'occurrence dans le cas du disque) nous demandons ce que signifie la présence d'un dénominateur h dans l'expression de la dérivée. Ils répondent :

[393] Toujours par définition de la dérivée, quand h tend vers 0, c'est-à-dire quand l'anneau devient de plus en plus petit et se rapproche du dernier cercle ici : puisque h, je suppose que la quantité qui intervient dans la dérivée, puisqu'il parle d'accroissement, je suppose que c'est cette petite quantité h là [Fig.42].

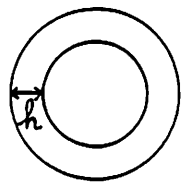


Fig.42

[394] Je retrouve h au numérateur, je le mets au dénominateur. S'il me restait un h au dénominateur, puisqu'il tend vers 0, cela deviendrait gênant. Si je ne l'avais pas fait j'aurais en plus de difficultés : j'aurais eu $2\pi rh + h^2$, si $h \to 0$ cela m'aurait donné 0/0, donc on peut utiliser les règles de l'Hospital [...]. Il a divisé par h pour appliquer la définition de la dérivée [...]. On se sert de l'anneau, c'est un intermédiaire pour calculer la dérivée. C'est comme quand on a un graphe on a par exemple une abcisse x à laquelle on ajoute une quantité h et si h diminue on aura ce qui se trouve en ordonnée avec plus de précision.

2.10.9. Une intégrale qui rappelle les indivisibles radiaux.

Pour justifier que $D\pi r^2 = 2\pi r$, un étudiant de 1ère année universitaire en mathématique propose de calculer l'aire du disque au moyen de l'intégrale $\int_0^{2\pi} r dr = [r^2/2]_0^{2\pi}$. Invité à expliquer, il montre le rayon qu'il fait mine de tourner autour du centre pour engendrer le disque.

2.11. Des élèves qui se souviennent du théorème fondamental ou qui sont en train de l'apprendre.

Les élèves dont il est question dans cette section ont été, pour la plupart, invités à rassembler leurs souvenirs à propos du théorème fondamental qu'ils ont appris quelques mois, voire un an, auparavant. Quelques rares réactions ont été récoltées en cours d'apprentissage : ce sera précisé en temps utile.

2.11.1. Des souvenirs inappropriés.

Tous les élèves ou étudiants interrogés plusieurs mois après l'apprentissage du théorème fondamental rappellent correctement comment on exploite le calcul des primitives pour déterminer une aire sous une courbe :

$$\int_0^1 x^2dx = [x^3/3]_0^1 = 1/3.$$

Pour justifier cette procédure, ils évoquent tous l'encadrement de l'aire au moyen d'aires de rectangles, par excès et par défaut, mais très rares sont ceux qui expliquent pourquoi il faut déterminer une primitive de x^2, c'est-à-dire une fonction dont la dérivée donne x^2 précisément. Sur ce point, c'est le silence. "C'est vieux tout ça", dira un étudiant. Un seul parvient de lui-même à en dire un peu plus, et encore a-t-il fallu lui souffler que la notation df/dx de la dérivée était peut-être suggestive :

> *[395] Ah oui, on peut dire que df est là* [Montre la surface hachurée à la Fig.43], *dx est là donc quand on divise df par dx on obtient la hauteur mais ce n'est pas très beau comme explication [...].*

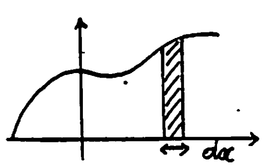


Fig.43

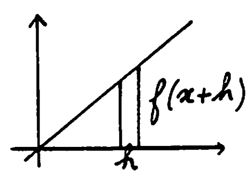


Fig.44

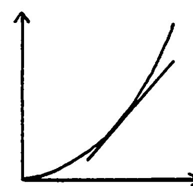


Fig.45

Quelques rares élèves ont des souvenirs partiels qu'ils exploitent parfois à mauvais escient :

> *[396] On parlait de la fonction-aire...*
>
> *[397] Il faut peut être voir le concept de dérivée. Une dérivée c'est une différence de hauteur sur une base... Donc, c'est une différence de hauteur entre deux droites divisée par une base* [Il dessine la Fig.44], *on a* $\lim_{h \to 0}(f(x+h)-f(x))/h$ *et donc peut-être qu'en repassant par le théorème fondamental, peut-être qu'on parviendrait à...* [Le professeur demande de quelle fonction il s'agit; l'élève poursuit :] [...] *Donc ceci c'est la calcul de l'aire* [...] *Pour ce calcul de l'aire, si on en fait la dérivée c'est-à-dire f(x+h)-f(x), on divise en fait par le petit intervalle h, vu alors que la surface c'est une base par une hauteur en général, étant donné qu'on a supprimé la notion de base, on n'a plus que la notion de segment... et donc c'est normal que dans le calcul de l'intégrale, la fonction qu'on met à l'intérieur ne soit plus la fonction qui définit l'aire mais la fonction qui définit le segment.*

Les tangentes sont évoquées, mais par des élèves qui ne savent pas toujours, loin de là, à quelle fonction (f(x) ou $\int_a^x f$) les destiner :

[398] Alors en somme, quand on a une courbe, on fait la tangente alors... pour avoir une surface sans résidus [Fig.45]. *Alors je calcule l'aire sous la tangente et alors comme cela je n'ai plus...*
[399] [...] *Ce serait la pente... puisque, en fait, c'est $x^3/3$ qu'on doit dériver, $x^3/3$ représentant la surface, par la définition de la dérivée qui est pente de tangente mais où pourrait-on la mettre...*

2.11.2. f(x) perçu comme un point.

Lorsque la fonction f est positive, f(x) représente la longueur du segment dont les extrémités sont les points de coordonnées ((x, 0), (x, f(x))). Plusieurs élèves semblent n'en être pas conscients, désignant un point de la courbe ou la courbe elle-même en parlant de f(x) :

[400] Moi, je reste avec l'idée que cette dérivée justement elle calcule la courbe [Il longe du doigt la courbe représentative de f], *comme ici le périmètre* [Il se réfère au cas du disque].
[401] Oui, si h tend vers 0, il restera un point [Il désigne le point de coordonnées (x, f(x)].
[402] On obtiendra une succession de points qui me donnera la courbe [...], donc h tend vers 0, donc la surface tend vers 0, à la limite se concrétiserait par ce point-ci [Il désigne le point A de la Fig. 46].

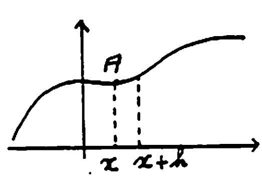


Fig.46

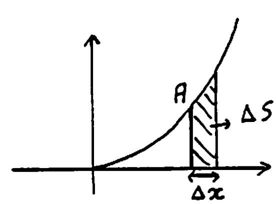


Fig.47

Le professeur montrant le trait gras de la Fig.47 explique à un élève que, comme ΔS est à peu près assimilable à un rectangle de largeur Δx, ΔS/Δx vaut à peu près la longueur du segment désigné. L'élève répond :

[403] Mais le segment, c'est pas ça x^2, x^2 c'est ce point là [Il désigne le point A de la Fig.47].

Rares sont les élèves qui voient f(x) comme la longueur d'un segment et encore y arrivent-ils souvent péniblement :

[404] [...] *Là on a aussi x^2* [Il montre le point de coordonnées (x, x^2)] *et c'est aussi, on a une fonction et si on met un chiffre ce sera plus logique d'avoir une aire aussi parce qu'on n'a pas... je ne sais pas ce qu'on a ... plutôt une distance ou quoi. Parce que si on remplace par 3, on a 9... eh bien 9 justement ça représente une ligne mais c'est un peu bête* [...].

2.11.3. Une surface qui se rétrécit en un segment, un volume qui devient une surface.

Invité à reproduire, en cours d'apprentissage, la démonstration du théorème fondamental, un élève écrit :

[405] $\lim_{h \to 0} S(x+h) - S(x) = f(x)$ [Dans cette expression, S(x) représente l'aire sous y = f(x) depuis une abcisse constante a jusqu'à l'abcisse x (Fig.48). Désignant du doigt la lamelle de cette surface entre les abcisses x et x+h, l'élève commente le résultat de la limite en ces termes :] *Au fur et à mesure que h diminue, la lamelle se rétrécit jusqu'à se réduire en un segment de longueur f(x).*

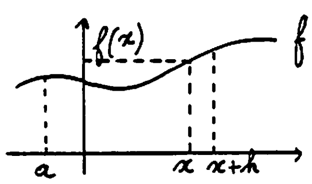


Fig48

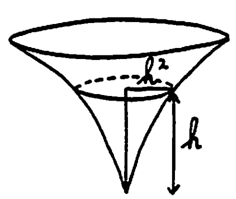


Fig.49

Lisant ce que le premier a écrit, un autre élève s'étonne que f(x) n'est pas forcément nul, alors que S(x+h) - S(x) l'est lorsque h égale 0. Etonnement sans plus, du moins dans l'immédiat : l'élève en question ne pense pas à rajouter le dénominateur h manquant.

Le premier élève se demande aussi pourquoi l'on peut écrire $\int_a^a f = 0$; pour lui, $\int_a^a f$ devrait égaler f(a).

Quatre élèves, en groupe, tentent de démontrer que DV(h) = πh^4 où V représente une quantité d'eau de profondeur h contenue dans le vase de la Fig.49. Ils écrivent $\lim_{\Delta h \to 0}(V(h+\Delta h) - V(h))/\Delta h$ et butent sur ce qui leur apparaît comme une contradiction : d'une part, la différence des volumes V(h+Δh) - V(h) tend vers zéro, avec Δh, d'autre part, elle tend à "égaler la section, comme ça se voit".

2.11.4. Une erreur fréquente.

Interrogés sur le théorème fondamental qu'ils devaient mémoriser pour l'occasion, plusieurs élèves commettent l'erreur suivante. Ils interprètent la différence entre les valeurs en x et en x_0 de la fonction intégrale, soit $\int_a^x f - \int_a^{x_0} f$, comme l'écart entre les rectangles de base commune $x - x_0$ et de hauteurs respectives $f(x)$ et $f(x_0)$ (Fig.50).

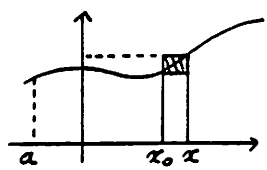


Fig.50

2.12. Autres faits.

D'autres faits ont attiré notre attention et alimenteront notre analyse. Comme ils ne cadraient pas bien dans les sections précédentes, nous avons choisi de les rassembler ici, un peu en vrac.

2.12.1. Des surfaces qui se rétrécissent conjointement.

Nous avons proposé le raisonnement suivant à des étudiants de première année d'études universitaires de mathématiques : "*Soit les deux surfaces hachurées à la Fig.51. La première, délimitée par le graphe de $y = x^2$, l'axe ox et les droites $x = a$ et $x = b$ possède une aire égale à $(b^3 - a^3)/3$, la seconde délimitée par le même graphe, l'axe oy et les droites $y = a^2$ et $y = b^2$, une aire double, soit $((b^2)^{3/2} - (a^2)^{3/2})/3/2 = 2(b^3 - a^3)/3$. Ce rapport d'aires reste constant, quel que soit la proximité de b et a. Au moment où les abcisses a et b coïncident, ces surfaces sont réduites à des segments AB et CB dont les longueurs respectives sont dans ce même rapport 1/2*". Parfois nous avons rajouté : "*la fonction répondant à ces conditions vaut donc $y = x/2$*".

Nous avons demandé à nos auditeurs si ce raisonnement leur paraissait crédible, avant tout examen approfondi. Plusieurs flairant un piège - et pour cause - tombent cependant dedans, dans un premier temps :

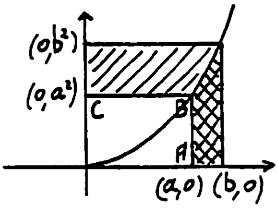


Fig.51

[406] Oui, cela me paraît correct... oui, même si ça n'a pas de dimension, même si une droite n'a pas d'épaisseur, on peut toujours considérer que le raisonnement est correct à la limite; enfin, le raisonnement est correct.
[407] Normalement, oui. Ah, quoique... donc on passe du rapport des aires au rapport des longueurs. Cette aire... logiquement ça devrait marcher, mais pour le démontrer...

Un de ces étudiants nous a même devancée, prévoyant lui-même que le rapport de longueur des segments AB et CB devrait valoir 1/2.

Bien sûr, ils ne sont pas dupes longtemps, ils ont tôt fait de vérifier et d'avancer des intuitions qui détrompent :

[408] Si ça doit marcher pour n'importe quel dx de base, ça doit marcher pour un dx infiniment petit et si, à partir d'un certain moment, on considère qu'on a obtenu un ... Ah... parce qu'un rectangle, si on suit le processus de le diminuer de plus en plus, va tendre vers une droite, alors on dit si la surface, la longueur... n'empêche qu'il doit y avoir quelque chose de douteux là... pour passer de la surface à la longueur... ce n'est pas le même concept [...]. Parce que quand on prend une surface infiniment petite, c'est qu'on a une base infiniment petite et ici la longueur, disons la hauteur qui est la valeur de la fonction en un point... mais quand on prend juste..., ici on aura f(x) fois dx et ici on aura juste f(x), ce qui n'est pas la même chose... il doit y avoir un moyen de calculer tout ça.
[409] On peut considérer qu'une surface ne peut pas se réduire à un segment. Une surface c'est toujours..., la valeur que l'on donne à une surface, en mètres carrés, est toujours liée à une base et une hauteur : deux valeurs linéaires et ici, si nous en considérons une, nous ne pouvons pas laisser tomber l'autre même si nous pouvons dire qu'elle est égale à 0 et que ça se réduisait à un segment parce que ce 0 peut varier, même si c'est 0 d'un côté et 0 de l'autre, la variation de la distance entre a^2 et b^2 n'est pas la même que la variation de la distance entre a et b. Et si on prend un cas où a est extrêmement proche de b, a^2 sera proche de b^2 mais dans des proportions différentes, ce qui fait qu'on aurait encore le double de la surface lorsqu'on considère que la

base est nulle, nous ne sommes plus en présence d'une surface et donc on ne peut plus considérer que le rapport des deux surfaces égale 2.

N'empêche, il arrive que la question prête à débat :

[410] - [Ce raisonnement] *n'est pas juste. Parce qu'il faut tenir compte de la base. Ce serait une erreur de ne pas tenir compte de la base. On ne peut pas assimiler une surface à un segment.*
- Ce serait exact si f(a) = a et f(b) = b... Je dirais, c'est certain que la droite d'équation y = x/2 fait partie de l'ensemble des solutions, ça c'est évident, mais il pourrait y avoir d'autres solutions... là je dirais... lorsque a tend vers b, f(a) tend également vers f(b), mais pas avec la même fonction si je puis dire : elle tend plus lentement ou plus rapidement.
-La proposition n'est pas juste parce qu'on peut essayer la fonction y = 2x et c'est exactement la même surface, donc ça n'est pas juste.
- Non, mais c'est y = x/2.
- Il faut tenir compte de la base.
- C'est ce que je dis : f(b) - f(a) n'égale pas b - a, même lorsque a tend vers b.
- Voilà quand la base tend vers 0, la surface est nulle, c'est aussi simple que ça... Là évidemment on a 2.0 = 0 mais...

Nous avons également proposé cette question à des élèves qui avaient travaillé les paradoxes sur les indivisibles, ce qui n'était pas le cas des premiers interviewés. Tous ont évoqué spontanément une disparité d'espacement ou d'épaisseur d'indivisibles entre les deux surfaces. Certains ont même apporté une correction formelle :

[411] $[(b^3-a^3)/3(b-a)]/[2(b^3-a^3)/3(b^2-a^2)] = (b+a)/2$; $b \to a$: $(b+a)/2 \to 2a/2 = a$. *C'est comme quand on a* $y = x^2$, $x^2/x = x$.
[412] Les longueurs ont un rapport égal à 3 quand b a rejoint 3. Je dirais plutôt que 9 est le carré de 3. Le rapport entre les surfaces est de 1/2, car la densité des indivisibles est différente. La densité vaut le rapport entre la distance entre 3 et b et la distance entre b^2 *et 9, c'est-à-dire* $(b-3)/(b^2-9) = (b-3)/(b+3)(b-3) = 1/(b+3)$. *Il manque (b+3) pour avoir même densité et donc égale à 1 et quand* $b \to 3$, *le rapport tend vers 1/6;* $((b+3)/2)^2(b-3)/((b+3)/2)(b^2-9) = (b+3)/2(b+3) = 1/2$; $1/2 = x/(b+3) \to x = 9/3$ *quand* $b \to 3$ [Fig.52].

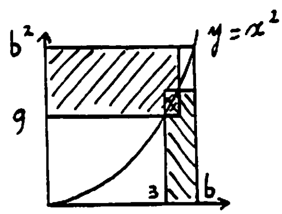


Fig.52

2.12.2. Une impasse déjà rencontrée.

A la section III.2.7.8. nous avons vu dans quelle impasse débouchaient la plupart des débats relatifs à l'exactitude du calcul de l'aire sous $y = x^3$: d'un côté, si les rectangles utilisés pour approcher le résultat restent des rectangles, ils laissent des "résidus en marche d'escalier", de l'autre, s'ils se réduisent à des segments, leurs aires respectives deviennent nulles et sont additionnées en vain.

Des élèves qui ont déjà vu le programme d'analyse de 5ème et 6ème années de l'enseignement secondaire sont loin d'avoir résorbé cette interrogation, qui surgit lors du moindre échange entre eux ou avec un interrogateur.

> *[413]* [...] - *Au début, on n'en avait fait que 2 ou 3* [de rectangles], *puis après, on en avait fait de plus en plus, en cherchant l'aire chaque fois de chaque rectangle, finalement pour arriver à tous les ... finalement à des rectangles les plus petits possible qui... Finalement on disait que la somme des rectangles intérieurs était égale à l'aire entre a et b.*
> [Le professeur :] - *Que veut dire les plus petits possible?*
> - *Une infinité de petits rectangles, en fait... oui... au plus les rectangles sont petits, au plus les... allez, les vides diminuaient jusqu'à devenir nuls en fait.*
> [Le professeur :] - *Jusqu'où va-t-on comme ça ?*
> -*Jusqu'à l'infini... enfin.*
> -*Pas jusqu'à l'infini parce que sinon tu ne sauras plus calculer l'aire.*
> -*Ah oui... jusqu'à un nombre très grand qu'un* [Sic] *nombre par approximation pour arriver à...*
> [Le professeur :] *S'agit-il d'un calcul exact ou d'un calcul approximatif?*
> -*Il y aura toujours une petite différence.*

Individuellement, ces élèves avancent qui, un élément de ce débat contradictoire, qui, un autre :

> *[414] On peut considérer toute une série de rectangles mis les uns à côté des autres, qui auraient comme "base" un point et comme hauteur : entre 0 et f(x) correspondant.*
> *[415] Quand h tend vers zéro, cela revient au même que de calculer la surface d'une droite, ce qui est impossible...*
> *[416]- Quand $x + \Delta x$ tend vers x.*
> - *Mais t'auras plus rien alors, plus de surface...*

Bien sûr, une certaine confiance s'est installée : on n'a pas fait tant de théorie pour obtenir seulement un résultat approximatif! Mais cette confiance est plus ou moins aveugle suivant les cas :

[417] - Ca, c'est en vertu des limites...
[Le professeur :] - *Quelle vertu ?*
- ...
[418] Oui... et bien... c'est par une méthode numérique qu'on obtient le résultat exact. Parce qu'on sait la dérivée... en fait quand on fait la dérivée, les deux dérivées sont égales à une constante près et on s'arrange...
[419] - [...] *C'est comme quand on parle des dérivées, on a toujours un rapport 0/0... en faisant le calcul, on parvient toujours bien à lever le dilemme, ici c'est un problème* $0.\infty$ *: on arrivera bien à le résoudre un jour.*

De plus, il n'empêche que cette confiance est sérieusement ébranlée dès qu'on demande à des élèves la signification d'un vocable qu'ils utilisent volontiers : celui de "rectangle élémentaire":

[420] - Une intégrale, c'est donc un calcul de surface qui n'est pas élémentaire... donc c'est une somme, une addition de petits morceaux de la surface, de rectangles, de rectangles élémentaires et quand la largeur de ces rectangles tend vers une dimension infinie, zéro, on peut les additionner et on approche la valeur exacte. [...] *La base* [des rectangles élémentaires] *tend vers une dimension infinie... zéro, elle tend vers zéro.* [...] *Euh... non, elle n'atteint pas 0, sinon la somme ne serait plus possible* [...] *parce que dans le calcul de ce rectangle, intervient la notion de base fois hauteur... et si la base était nulle, la surface le serait aussi.*
[Le professeur :] - *Mais ne reste t-il pas alors des résidus?*
- Oui... et bien... c'est par une méthode numérique qu'on obtient le résultat exact.

L'étudiant interrogé reste perplexe et passablement ennuyé.

[421] L'intégrale c'est, si on reprend la définition de Riemann, ça fait une somme d'aires, de surfaces de petits rectangles de longueur infinitésimale et puis quand on intègre, on fait tendre dx vers 0 et on a l'aire sous-tendue par la courbe et l'axe ox [...]. Ils [les rectangles] *tendent vers des droites mais enfin... pour calculer... ils deviennent infiniment petits, de base infiniment petite. Et si on fait une somme infinie sur des... donc une somme sur un nombre infiniment grand de rectangles d'aire infiniment petite, on va obtenir...*

Certains élèves, auxquels on demande d'éclaicir cette alternative rectangles versus segments, proposent de sommer, non les aires des segments, mais leurs longueurs :

[422] Pour moi, à partir du moment où on passe à la limite, on ne doit même plus parler d'aire de rectangles, mais de longueur de segments.

Car, si on imagine le problème en remplaçant les rectangles par des segments sous la courbe, on obtiendra ainsi une aire précise jusqu'à n'importe quel point de la courbe [...].
[423] Pour des segments, on ne somme pas leurs surfaces, mais on somme leurs longueurs et cette somme remplit tout-à-fait la surface sous la courbe, car, à chaque point de l'abcisse correspond une ordonnée et inversément (c'est une bijection) et que l'on connaît chaque fois cette longueur. Non, on ne peut considérer ces segments comme vestiges des rectangles, car les segments sont des longueurs. Ce sont deux éléments différents, seulement l'un est la division de l'autre.

Quelques-uns d'entre eux, qui avaient travaillé les paradoxes sur les indivisibles, commentent ainsi l'alternative :

[424] L'indivisible = $lim_{a \to b}$ *de la surface/base =* $lim_{a \to b}$ *de la hauteur;* $lim_{a \to b}$ *de la surface = 0 (logique car la surface du segment = 0). On ne cherche pas une nouvelle surface. On cherche un segment qui n'a plus rien à voir avec la surface de rectangle. On cherche la composante et non l'infinie partie de la surface. Ces segments en ce sens ne sont pas les vestiges des rectangles, mais les composantes.*
[425] Aire sous une courbe entre 0 et b = $b^{k+1}/(k+1)$*; entre 0 et x =* $x^{k+1}/(k+1)$*; entre x et b =* $(b^{k+1} - x^{k+1})/(k+1)$*. Si x tend vers b : la limite de* $(b^{k+1} - x^{k+1})/(k+1) = 0$ *(1). Par contre, si on divise la surface* $(b^{k+1} - x^{k+1})/(k+1)$ *par l'espacement b-x, on obtient un segment (ou indivisible) différent de 0 (la plupart du temps).* $Lim_{x \to b}\ [b^{k+1}/(k+1) - x^{k+1}/(k+1)]/(x-b) \neq 0$ *(2). Donc la limite de la différence des aires (1) n'est pas la même que celle de l'indivisible (2) ⇒ Conclusion : les segments ne sont pas les vestiges des rectangles.*

2.12.3. La dérivée de l'aire d'un carré, du volume d'un cube.

Certains élèves, se référant à l'égalité $D\pi r^2 = 2\pi r$ et son interprétation, s'étonnent que la dérivée de l'expression de l'aire du carré ne donne pas celle de son périmètre. De même, ils s'étonnent qu'en dérivant l'expression du volume d'un cube, on ne trouve pas celle de son aire latérale. Quelques-uns disent même que la derivée de l'aire du rectangle devrait donner son perimètre, sans préciser quelle est la dimension par rapport à laquelle on dérive cette aire.

Troisième Partie.

ANALYSE EPISTEMOLOGIQUE ET DIDACTIQUE DES PROBLEMES ET DES REACTIONS QU'ILS ONT SUSCITEES.

Chapitre VII.

Des surfaces et des solides à leurs mesures.

Dans ce chapitre nous étudions comment l'élève intègre deux pôles : les nombres d'une part, les surfaces et solides d'autre part. D'abord nous montrons en quoi la conception du nombre telle que nous la supposons chez les élèves est propre à rendre compte du continu géométrique (section 1). Ensuite, après avoir interprété quelques réactions d'élèves à la lumière d'autres recherches relatives à l'acquisition des aires et des volumes (section 2), nous montrons comment la conception de solides (resp. de surfaces) composés de surfaces (resp. de segments) ou celle de solides (resp. de surfaces) engendrés par le mouvement d'une surface (resp. d'un segment) peuvent induire des erreurs quant à leurs mesures (sections 3.1. à 3.11.). Nous terminons en analysant comment des paradoxes relatifs à l'usage des indivisibles amènent les élèves à revoir ces erreurs (section 3.12.).

1. Un nombre-mesure disponible pour chaque surface et chaque solide.

"La dualité nombre / grandeur est une difficulté présente dès les origines des mathématiques, elle est même en grande partie la raison de leur pluriel. La grandeur, d'aspect géométrique, paraît le domaine intuitivement évident de la continuité; le nombre, d'aspect discret, paraît celui de la discontinuité des unités. Comment faire alors assurer aux nombres de l'arithmétique la mesure toujours exacte des continuités spatiales?" (P. Raymond, 1976). Les élèves se font une idée a priori du calcul des aires, et en particulier de celui des aires curvilignes. Aucun d'eux ne doute de l'existence d'un nombre qui donne la mesure exacte d'une surface délimitée d'un côté par une courbe (III.2.7.2., e.a. [138]), alors que plusieurs nient l'existence d'un nombre qui donne le débit instantané (V.2.1.7.). En revanche, beaucoup d'élèves doutent que l'on puisse calculer exactement une aire curviligne au moyen d'une suite d'aires rectilignes (III.2.7.4.). Leur perception de l'aire, en tant que mesure d'une grandeur géométrique, conditionne vraisemblablement ces a priori, mais aussi leur conception des nombres. Dans cette section, nous tentons de cerner en quoi les nombres tels qu'ils sont disponibles chez les élèves sont susceptibles de rendre compte du "continu géométrique". Dans la section VIII.2., nous reviendrons sur les présupposés des élèves à propos des aires pour poursuivre l'interprétation des faits précédents.

Bien que ce soient les conceptions des élèves qui nous intéressent, regardons d'abord du côté de l'histoire qui nous offre des faits éclairants.

1.1. L'évolution historique de l'idée de mesure : quelques jalons.

La mesure des grandeurs continues a fait l'objet, depuis l'Antiquité, d'une évolution dont nous épinglons ici quelques traits saillants : ceux qui, à notre estime, cadrent au mieux les conceptions et les difficultés des élèves.

1.1.1. Seuls les entiers sont des nombres.

Dans les mathématiques grecques classiques, l'idée de mesurer une grandeur au sens moderne de cette locution n'existe pas. Mais on établit des rapports entre grandeurs, et des égalités ou inégalités de rapports de grandeurs. Un premier énoncé typique est : "Un cercle est à un autre comme le carré construit sur le diamètre du premier est au carré construit sur le diamètre du second". Il se formule en termes exclusivement géométriques, ramenant un rapport de deux surfaces à un rapport de deux autres surfaces. Un autre énoncé typique, où intervient cette fois un rapport de nombres, est celui de la quadrature de la parabole où Archimède compare le rapport d'un segment de parabole à un triangle au rapport de quatre à trois (II.2.8.). La présence de rapports d'entiers ne signifie cependant pas que l'on considérait les fractions comme des nombres, c'est-à-dire des objets mathématiques abstraits, indépendants des grandeurs qu'ils servent à comparer. A cette époque où les commerçants et artisans se servaient déjà des fractions dans leur pratique quotidienne, les mathématiciens n'octroyaient le statut de nombre qu'aux seuls entiers.

1.1.2. Une mesure commune à une aire curviligne et une aire rectiligne.

L'existence d'une grandeur qui servirait de commune mesure à une aire curviligne et à une aire rectiligne semble tout d'abord impossible jusqu'au moment où Hippocrate de Chios (V^{e} siècle Av. J.-C.) établit que la lunule, hachurée à la Fig.1, délimitée par le cercle de centre M et celui de centre C "a même aire" que le carré MBC. O. Toeplitz (1963) souligne l'importance de cette découverte, en ces termes : "The fundamental importance of this discovery lies in proving the possibility of areas bounded by curved lines being commensurable with areas bounded by straight lines". M. Kline (1972) attribue la même portée à ce résultat qui motiva toutes les recherches ultérieures de quadratures.

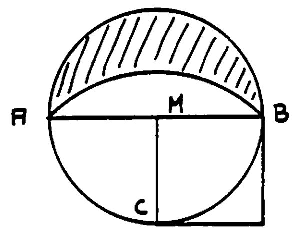


Fig.1

Un a priori semblable subsiste très tard, d'après C. Boyer (1949), à propos des longueurs : "It had long been held impossible, however, that a curved line could be exactly equal in length to a straight line, and Fermat shared this view with a number of his contemporaries".

1.1.3. Le domaine des nombres reste longtemps imperméable à l'infini.

L'infini pénètre l'univers des grandeurs longtemps avant de s'infiltrer dans celui des nombres (à ceci près que la suite des naturels est infinie). Par deux biais : tout d'abord, la découverte des grandeurs incommensurables pour lesquelles la recherche d'une commune mesure au moyen de l'algorithme d'Euclide conduit à un processus infini; ensuite, la méthode d'exhaustion par laquelle on cherche à "épuiser" une grandeur curviligne au moyen de grandeurs rectilignes.

Mais l'incommensurablité ne s'exprime chez Euclide qu'en termes de grandeurs, dans les définitions 5 et 7 du livre V des "Eléments" :

"Magnitudes are said to *be in the same ratio*, the first to the second and the third to the fourth, when, if any equimultiples whatever be taken of the first and third, and any equimultiples whatever of the second and fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the latter equimultiples respectively taken in corresponding order".

"When, of the equimultiples, the multiple of the first magnitude exceeds the multiple of the second, but the multiple of the third does not exceed the multiple of the fourth, then the first is said *have a greater ratio* to the second than the third has to the fourth. (trad. T. L. Heath, 1956)".

Quant à la méthode d'exhaustion, elle se fonde, comme nous l'avons vu à la section III.1.3., sur l'axiome d'Archimède, lequel est bien formulé, lui aussi, en termes de grandeurs.

Il faut attendre de nombreux siècles avant que l'infini se traduise numériquement. Et encore, cela ne fit-il pas l'unanimité de tous les mathématiciens. C. Boyer (1949) signale, à ce propos, les réticences de H. von Helmholtz au XIX.e siècle : "[...] he asserted that incommensurable relations may occur in real objects, but that in numbers they can never be represented with exactness".

L'infini apparaît de deux manières dans les nombres. D'abord, dans leur représentation. A partir d'une certaine époque, on n'hésite plus à opposer, de part et d'autre du signe d'égalité, un symbole identifiant un nombre à un développement où la présence de points de suspension ou de tout autre sigle équivalent suggère un processus infini. Ainsi Leibniz (cité par M. Kline, 1972) écrit :

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$$

Et Euler (cité par J. Dhombres <u>et al.</u>, 1987, 141) :

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \&c.}}}}}$$

Ensuite, dans leur mode de détermination. On conçoit qu'un nombre puisse être déterminé exactement au moyen d'un processus infini tel le "passage à la limite" que nous avons décrit à la section III.1.5.

<u>1.1.4. Des nombres définis par des processus infinis.</u>

Concevoir qu'un nombre-mesure puisse être approché ou même déterminé exactement (s'il est rationnel) par un processus infini n'est pas encore concevoir qu'on puisse le définir ou l'amener à l'existence par ce processus même. Les définitions du nombre irrationnel que proposent respectivement Cauchy et Cantor sont, à cet égard, significatives. Dans son "Cours d'analyse", Cauchy définit les nombres irrationnels comme des limites de suites de nombres rationnels. Mais, comme l'explique en substance C. Boyer (1949), la limite d'une suite est, par définition, un nombre dont les termes de la suite s'approchent d'aussi près que l'on veut. Donc, l'existence d'un nombre irrationnel dépend de celle de cette limite, et pour prouver que cette suite a une limite, on doit supposer, en vertu de la définition de la limite, que l'existence de ce nombre irrationnel a déjà été établie. C. Boyer poursuit en disant : "Cauchy appears not to have noticed the circularity of the reasoning in this connection, but tacitly assumed that every sequence converging within itself has a limit". Ce que C. Boyer appelle "a sequence which converges within itself" est une suite fondamentale $(x_n)_{n\geq 1}$, c'est-à-dire une suite de rationnels x_n satisfaisant à la condition :

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq. } \forall n, m \in \mathbb{N}, n \geq N : | x_{n+m} - x_n | \leq \varepsilon.$$

Et c'est précisément au moyen d'une telle suite que Cantor définit un nombre irrationnel. Cauchy avait bien tenté de démontrer qu'une suite fondamentale converge vers une limite S, au sens précisé plus haut. Mais l'attitude de Cantor, tout comme celle de Heine, est différente en ce sens que : "Rather than postulate the existence of a number S, which is the limit of an infinite series which converges within itself, they considered S, not exactly as determined [terme souligné par l'auteur] by the series [...], but as defined [idem] by the series - as simply a symbol for the series itself". (C. Boyer, 1949). L'attitude de Cauchy ne montre-t-elle pas qu'il considère, plus ou moins inconsciemment, le nombre irrationnel comme un objet premier, dont l'existence est implicitement supposée, et qu'il s'agit de déterminer, pour reprendre le terme de C. Boyer, plutôt que comme un objet que l'on crée, à qui on donne consistance par sa définition même?

Une évolution analogue se manifeste dans la manière de considérer les mesures de grandeurs continues, et plus généralement le continu géométrique. Ces mesures sont d'abord des objets premiers, dont l'existence s'impose à notre perception visuelle. De même, le continu géométrique est un donné perceptif, encore chez Cauchy qui démontre ainsi le théorème des valeurs intermédiaires, en partant des hypothèses classiques : " Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir [c'est nous qui soulignons] que la courbe qui a pour équation y = f(x) rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation y = b dans l'intervalle compris entre les coordonnées qui correspondent aux abcisses x_0 et X; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise" (Cauchy cité par J. Dhombres, 1978). Dans cette perspective, les aires existent a priori : le seul problème posé est celui de leur détermination. Par contre, dans la théorie de la mesure, les aires sont des intégrales; un ensemble n'est plus mesurable a priori mais n'est mesurable qu'en fonction de la définition donnée à la mesure. Les aires et les grandeurs reçoivent ainsi une nouvelle identité, par le biais d'une construction rationnelle. De même, le continu géométrique sera rationnellement défini, aux XIX^e et XX^e siècles, par les coupures de Dedekind et les suites de segments emboîtés de Cantor, de manière isomorphe aux réels : ainsi s'estompe le clivage entre les grandeurs continues et les nombres.

1.2. La conception du nombre-mesure chez les élèves.

Nous n'avons récolté aucune déclaration explicite des élèves sur ce que c'est qu'un nombre. Cependant, nous pouvons avancer quelques hypothèses sur leur conception du nombre-mesure, en nous référant à leur environnement culturel et scolaire ainsi qu'à quinze années d'expérience dans l'enseignement secondaire.

1.2.1. Tout décimal allongeable indéfiniment est un nombre.

Avec Bourbaki (1960), nous supposerons que : "Toute mesure de grandeur implique une notion confuse de nombre réel. Du point de vue mathématique, on doit faire remonter les origines de la théorie des nombres réels à la formation progressive, dans la science babylonienne, d'un système de numération capable (en principe) de noter des valeurs aussi approchées qu'on veut de tout nombre réel. La possession d'un tel système, et la confiance dans le calcul numérique qui ne peut manquer d'en résulter, aboutissent inévitablement, en effet, à une notion "naïve" de nombre réel, qui n'est guère différente de celle qu'on retrouve aujourd'hui (liée au système de numération décimal) dans l'enseignement élémentaire ou chez les physiciens et ingénieurs; cette notion ne se laisse pas définir avec exactitude, mais on peut l'exprimer en disant qu'un nombre est considéré comme défini par la possibilité d'en obtenir des valeurs approchées et d'introduire celles-ci dans le calcul : ce qui, d'ailleurs, implique nécessairement un certain degré de confusion entre les mesures de grandeurs données dans l'expérience, qui ne sont naturellement pas susceptibles d'approximation indéfinie, et des "nombres" tels que $\sqrt{2}$ (en supposant qu'on possède un algorithme pour l'approximation indéfinie de celui-ci)".

Le "nombre réel" tel qu'il est conçu par les élèves de 15 ans et plus nous semble relativement conforme à celui que décrit Bourbaki, à ceci près que ces élèves ne paraissent pas le confondre avec la mesure expérimentale. Ils savent que cette dernière conduit à un nombre décimal forcément limité et reconnaissent par ailleurs le statut de nombre aux décimaux illimités périodiques ou non périodiques tels π dont ils expriment spontanément la spécificité : "il y aura une infinité de décimales qui ne reviendront jamais dans le même ordre". En bref, tout ce qui s'écrit au moyen de chiffres, d'une virgule et d'éventuels points de suspension est considéré par eux comme un nombre. Rien d'étonnant à cela puisque c'est sous cette forme que les programmes belges prévoient d'enseigner les réels dès l'âge de 13-14 ans. Dans S. Lorent et R. Lorent, (1981), manuel conforme à ces programmes, on présente un rationnel comme un rapport d'entiers (positifs ou négatifs) et on montre sur des exemples qu'un tel rapport s'écrit soit sous forme de décimal limité, soit sous celle de décimal illimité périodique. On exhibe ensuite des décimaux illimités non périodiques dont on affirme, sans plus, qu'ils ne peuvent s'écrire sous forme de fraction.

Les nombres "à représentation illimitée", qu'ils soient ou non périodiques, semblent avoir acquis droit de cité dans les classes où, de plus, l'usage des machines à calculer les ont banalisés en les limitant à quelques décimales utiles, ainsi que le précisent en substance C. Hauchart et N. Rouche (1987). Cependant, déjà les décimaux illimités périodiques souffrent d'une crise d'identité, comme le montrent ces deux auteurs, dès qu'on les considère dans le contexte des suites et des séries. En effet, face à la question :
"La suite

0,3 0,39 0,393 0,3939 0,39393...

possède-t-elle une limite? Si oui, cette limite peut-elle être écrite sous forme de fraction?", plusieurs élèves hésitent sur le statut de 0,3939... : "[...] d'une part, 0,3939... est bien un nombre, il n'y a rien d'étonnant à ce qu'il soit une limite; d'un autre point de vue, 0,3939..., vu les trois points, semble bien aussi tendre vers quelque chose sans y arriver jamais. Qui plus est, dans ce cas, la limite de la suite

0,3 0,39 0,393...

de l'énoncé devrait bien être la même que celle de 0,3939... Oui mais 0,3939... est un nombre! Peut-on dire qu'il possède une limite, et quelle serait-elle? Les élèves sont comme piégés par l'ambiguïté du décimal illimité périodique : ils vont et viennent entre ses deux facettes (la suite et la limite de la suite)." (C. Hauchart et N. Rouche, 1987). Quant au fait que 0,3939... puisse être une série telle que

$$39/10^2 + 39/10^4 + 39/10^6 + \ldots,$$

cela semble difficile à admettre : "Les concepts de nombre et de série souffrent dans la classe d'une crise d'identité. Au début, c'était en ajoutant des nombres qu'on constituait une série. Les nombres étaient ainsi les constituants des séries. Puis voilà que 0,3939..., dont on sait que c'est un nombre (rien qu'à la façon de l'écrire), apparaît aussi comme une série. Le constituant s'identifie à la chose constituée, la brique à la maison. [...] C'est un renversement : les nombres étaient conçus comme le matériau à partir duquel on construisait des mathématiques (et notamment des suites et des séries). Mais au moins, ce matériau était pur, premier (un peu comme si c'étaient des données, des mesures de grandeurs). On ne se posait pas de problèmes à son sujet. Or voici que ces objets primitifs peuvent être aussi des objets mathématiquement construits. Qui plus est, il arrive que des objets en un certain sens hors d'atteinte, inexistants, reçoivent une existence par le truchement d'une définition" (Ib., 173).

1.2.2. Mesurer, c'est attribuer un nombre à une grandeur.

La mesure des grandeurs, à l'aide d'unités conventionnelles, est monnaie courante dans la vie de tous les jours. Aussi, pour les élèves d'aujourd'hui, mesurer a-t-il autant le sens d'attribuer un nombre à une grandeur que celui de comparer cette grandeur à une autre de même espèce. Il se pourrait que le premier sens soit plus prégnant que le second, comme si les élèves perdaient incidemment de vue qu'un nombre-mesure établit une comparaison entre une grandeur et une autre choisie comme unité. Ainsi, lorsqu'on applique le calcul intégral aux aires et volumes, plusieurs élèves se satisfont d'un nombre sans unités comme réponse et s'étonnent lorsque nous leur demandons : "L'aire sous $y = x^2$, entre 0 et 1, vaut 1/3, mais 1/3 de quoi?"

1.2.3. Un fait culturel; la droite est isomorphe à R.

L'isomorphisme entre **R** et la droite est enseignée de manière dogmatique, dès la deuxième année du cycle secondaire. Ainsi S. Lorent et R. Lorent (1981) affirment que : "Le repère étant choisi, tout point de la droite a pour abcisse un nombre réel et tout nombre réel est l'abcisse d'un point de la droite, c'est-à-dire que "a pour abcisse" détermine une bijection de D dans **R** ", sans justifier autrement qu'en représentant sur une droite, des réels tels que 0; 1; 3; -2; -3,7; 17/3; $\sqrt{2}$. De même, ces auteurs supposent implicite et obvie le transport des propriétés d'ordre d'un ensemble à l'autre. De cet isomorphisme découle aisément le fait qu'à tout segment correspond, une fois l'unité de longueur choisie, un et un seul réel qui mesure sa longueur.

Nous ne jugerons pas ici du caractère dogmatique de cet enseignement. Nous voudrions simplement souligner que les élèves ont totalement intégré cette propriété de **R**, lorsqu'ils abordent la

5ème : il fait partie de leur culture de savoir qu'à tout point de la droite, correspond un et un seul réel et vice-versa et qu'à tout segment correspond, pour une unité donnée, une et une seule mesure, à ceci près que quand plusieurs personnes mesurent un même objet, elles obtiennent des mesures différentes. Ils ont sans doute eu d'autant moins de peine à l'accepter que :

1). les instruments de mesure tronquent, tout comme la machine, les décimaux illimités : on ne travaille donc qu'avec des décimaux limités lorsqu'on représente un point d'abcisse donnée sur une droite ou lorsqu'on mesure un segment. Et il ne coûte rien d'imaginer des graduations de la droite de plus en plus fines ou des instruments de mesure de plus en plus précis. La confusion entre mesures expérimentales et nombres susceptibles d'approximation indéfinie dont parle Bourbaki, si confusion il y a, ne prête donc pas à conséquence;

2) en l'absence de problématique, comme celle qui consiste à paver des rectangles avec des carrés, proposée par F. Thomas-Van Dieren et N. Rouche (1985), les élèves n'ont aucune raison de se poser des questions relatives à l'existence des nombres irrationnels ou à la concordance entre R et le continu géométrique. Celles-ci ne sont-elles pas plus le propre des mathématiciens-philosophes que celui des élèves dans la mesure où ceux-ci, tout comme les artisans et commerçants, sont amenés simplement à manipuler les nombres?

1.2.4. Le continuum des aires et des volumes se ramène à celui des longueurs.

Demandons-nous d'abord, indépendamment de ce que peuvent être les conceptions des élèves, comment on pourrait se convaincre, par des arguments empiriques plus ou moins familiers, qu'il existe une et une seule mesure pour chaque surface et chaque solide comme il en existe une pour chaque segment? (Bien sûr, nous nous limitons, dans cette section, à des surfaces et des solides mesurables au sens du mathématicien). Pour les solides, c'est facile : on remplit d'eau n'importe quel solide, on la transvase dans un cylindre dont la base est l'unité de surface (Fig.2); ou bien on imagine le solide fait de terre glaise et on lui donne la forme d'un tel cylindre. L'existence

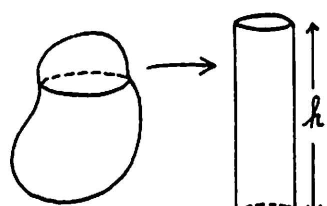


Fig.2

d'une mesure du solide se déduit de celle d'une mesure h de la hauteur du cylindre. Le continuum des volumes se ramène donc aisément à celui des longueurs. Les surfaces, elles, même si elles sont planes, se matérialisent moins aisément, à moins d'imaginer, comme un certain professeur, de transiter par les solides : celui-ci conçoit un récipient cylindrique de hauteur 1 et dont la base est isométrique à la surface qu'on désire estimer. (Fig.3). Il remplit ce récipient d'un liquide qu'il transvase ensuite dans un parallélipipède de base 1 comme précédemment.

Mais est-il besoin de passer par là pour ramener l'existence d'une aire à celle d'une longueur? Considérons l'aire de la surface

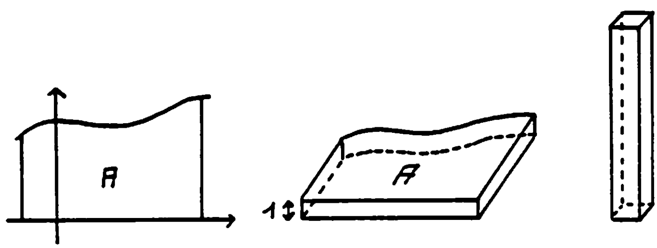


Fig.3

représentée à la Fig.4. L'existence d'un rectangle de même base b - a et de même aire repose sur un argument de continuité : si la

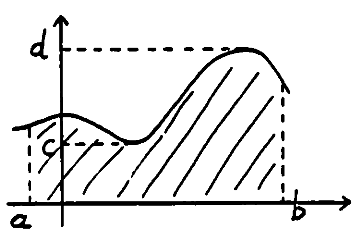


Fig.4

hauteur r du rectangle vaut c, son aire c (b - a) est inférieure à celle de la surface hachurée; si r vaut d, son aire d (b - a) est supérieure; lorsque r parcourt l'intervalle [c, d], l'aire du rectangle, r (b - a) prend toutes les valeurs comprises entre c (b - a) et d (b - a) et donc en particulier celle de l'aire hachurée. Or, toute autre surface (au sens familier du terme, c'est-à-dire, entre autres, pas trop compliquée) se transforme en une ou plusieurs surfaces de ce genre délimitées supérieurement par une courbe : il suffit soit de la couper en deux, soit, à défaut, de la décomposer en segments indivisibles que l'on aligne d'un côté (Fig.5), quitte à procéder morceau par morceau comme sur la Fig.6. La possibilité de mesurer toutes les surfaces dépend donc, elle aussi, de celle de mesurer toutes les longueurs. Quant aux courbes, on imagine de les longer avec de la ficelle qu'on étend ensuite : les longueurs d'arcs de courbe se réduisent ainsi à celles des segments.

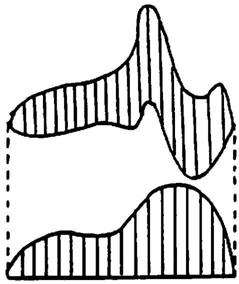


Fig.5

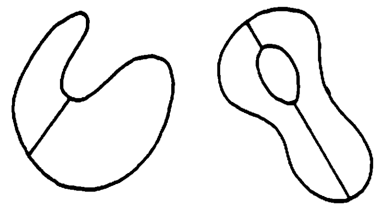


Fig.6

Dans quelle mesure les élèves pensent-ils consciemment à ces arguments? Y seraient-ils réceptifs? Nous n'en savons rien. Quelques indices cependant :

1) certains élèves sont sensibles à la matérialisation des volumes qu'ils évoquent spontanément ([56], [73], [74]).

2) tous semblent convaincus d'emblée de la véracité du théorème de la moyenne, énoncé sous la forme :

$$\exists\, r \in \mathbf{R} \text{ tq. } r\,(b - a) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

(Contrairement à certains mathématiciens de l'Antiquité, ils ne s'étonnent donc pas qu'une aire curviligne et une aire rectiligne puissent être commensurables). Il n'est pas rare d'entendre des élèves justifier d'eux-mêmes ce théorème en évoquant l'argument de continuité décrit plus haut. Il nous est arrivé de voir un élève mobiliser implicitement et spontanément ce théorème : dans la définition de la somme de Riemann, $\Sigma\ f(c_i)\ \Delta x_i$, il proposait de prendre une valeur $c_i \in\ ]\ x_{i-1}, x_i\ [$ telle que le rectangle de base $x_i - x_{i-1}$ et de hauteur $f(c_i)$ ait même aire que la surface délimitée par la courbe f, l'axe ox et les droites $x = x_{i-1}$ et $x = x_i$ (Fig.7).

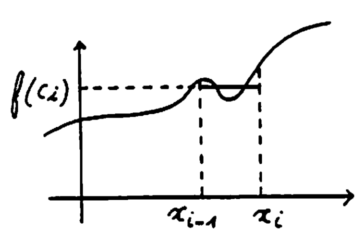


Fig.7

3) l'image de la ficelle est spontanément évoquée par certains élèves lorsqu'on enroule le cercle trigonométrique sur la droite.

Toutes les hypothèses avancées dans la section 1.2. sont compatibles avec le fait que les élèves attribuent a priori une mesure à toute surface, fût-elle ou non rectiligne. Une autre hypothèse explique ce fait : l'aire relève d'un donné perceptif, nous y reviendrons plus loin (VIII.1.1.).

2. Les premières acquisitions relatives aux aires et aux volumes.

Plusieurs recherches ont pris l'apprentissage des aires et des volumes comme objet d'étude. Dans cette section nous décrivons sommairement de quel point de vue cet apprentissage était envisagé dans ces recherches, tant pour situer les élèves interrogés ici que pour décrire la spécificité de notre propre travail.

Les acquisitions étudiées dans ces recherches sont normalement réalisées chez des élèves de plus de 15 ans comme ceux à qui nous avons proposé nos problèmes. Cependant, certaines de leurs réactions attestent de difficultés non encore résorbées et plus ou moins tenaces suivant les acquisitions concernées.

2.1. Conceptions unidimensionnelle et pluridimensionnelle des aires et des volumes.

La distinction que fait G. Vergnaud (1983) entre **conception unidimensionnelle** et **conception pluridimensionnelle** des aires et des volumes nous aidera à mieux préciser les acquis de nos élèves, car ces conceptions concernent des apprentissages qui se réalisent à des âges différents. Voyons en quoi consiste cette distinction.

"Le volume est une grandeur physique qui peut éventuellement être mesurée directement (cas des récipients) : elle supporte à ce titre des propriétés propres aux mesures unidimensionnelles" (G. Vergnaud, 1983). Acquérir le volume par exemple, sous cet aspect unidimensionnel, suppose au moins, ainsi que l'explique en substance cet auteur, de prendre conscience qu'on n'altère pas le volume d'une boulette d'argile lorsqu'on la déforme ou la scinde en plusieurs morceaux. C'est en plus être capable d'estimer, de comparer, d'approximer, de mesurer par rapport à une unité arbitraire les volumes tant des liquides que des solides, tant des solides creux que des solides pleins, tant des grands solides que des petits.

"En même temps la mesure du volume peut être calculée par une combinaison d'informations sur des grandeurs d'une autre nature (longueurs et surfaces notamment) : cela met en oeuvre, au-delà des formules (parallélipipède, prisme, pyramide, sphère...), une conception tridimensionnelle du volume" (Ib.). Acquérir l'aire et le volume en tant que quantités pluridimensionnelles, c'est, par exemple, réaliser que l'aire du rectangle est le produit de deux longueurs et le volume du parallélipipède, le produit de trois longueurs, ou celui d'une aire et d'une longueur. C'est réaliser qu'une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2 et les volumes par k^3. Cela suppose aussi prendre conscience que des mêmes périmètres peuvent enserrer des aires différentes et que des mêmes aires latérales peuvent entourer des volumes différents. En effet, les échecs rencontrés par les élèves dans le calcul de l'aire du rectangle ou dans celui du volume du parallélipipède rectangle renvoient entre autres, d'après J. Rogalski (1982), à l'acquisition des relations entre les différentes quantités spatiales, parmi lesquelles : "la différenciation de propriétés simultanément présentes dans un objet ou une figure (la longueur du bord / la surface intérieure; la surface d'un solide / son volume...)".

2.2. Les élèves interrogés ici maîtrisent les aires et les volumes sous leur aspect unidimensionnel, sauf peut-être dans quelques cas extrêmes.

Il est plus que probable que les élèves que nous avons interrogés maîtrisent les aires et les volumes sous leur aspect unidimensionnel. Leur âge en est une garantie. A titre de repère : J. Piaget et B. Inhelder (1978) situent à l'aube de l'adolescence (un peu avant le début du stade des opérations formelles) la construction de l'invariance du volume; les premières conservations de la longueur, de la surface comme "étendue" apparaissent vers 7-8 ans" (J. Rogalski, 1982, se référant aux travaux de psychologie cognitive en général). N'est-ce pas d'ailleurs ce schème d'invariance qui est mobilisé dans les procédures d'équidécomposabilité et d'équicomplémentabilité proposées par les élèves (II.2.1.2. et II.2.1.3.), puisqu'elles supposent que les aires et les volumes ne changent pas lors d'un fractionnement? De même, deux déductions faites par des élèves sont typiques de la maîtrise de l'invariance du volume : le premier déduit que le parallélipipède oblique a le même volume que le parallélipipède droit du fait qu'ils ont même poids ([56]); le deuxième du fait qu'ils correspondent à une même quantité de matière ([74]). En effet, ces élèves établissent un lien de cause à effet entre, d'une part, "avoir même poids ou même quantité de matière" et, d'autre part, "avoir même volume". Or, J. Piaget et B. Inhelder (1978) expliquent en substance que ce lien de causalité caractérise le stade de l'invariance du volume : plusieurs enfants qui n'ont pas atteint ce stade affirment que deux solides (faits de matière incompressible) ont même quantité de matière ou même poids, tout en niant qu'ils aient même volume; par contre, au stade de l'invariance du volume, les trois types d'invariance (substance, poids, volume) s'impliquent mutuellement et nécessairement.

Mentionnons encore le cas d'un élève qui souligne qu'un triangle peut changer de forme, sans changer d'aire ([92]).

Mais ce schème de l'invariance de l'aire et du volume est-il acquis à jamais, en toutes circonstances, par des élèves de 15 ans et plus? Nous ne le pensons pas. Les parallélipipèdes droit et oblique à propos desquels les élèves mentionnés supra manifestent ce shème se différencient moins l'un de l'autre, d'un point de vue perceptif, que le boudin d'argile et la boule ou la galette que présentent J. Piaget et B. Inhelder à de jeunes enfants. Qu'adviendrait-il si le parallélipipède oblique était penché exagérément? Certains élèves ne s'imaginent-ils pas qu'on augmente (éventuellement jusqu'à l'infini) la mesure d'un solide ou d'une surface lorsqu'on les "incline" très fort, par glissement des couches les unes sur les autres, sans cependant affecter ni leur base ni leur hauteur ([62], [63])? De même, en 15 ans d'enseignement, nous avons rencontré plusieurs élèves de 16-17 ans qui pensaient que le volume d'un cône diminue, jusqu'à se réduire à 0, lorsque son sommet s'éloigne sur un plan parallèle à sa base, en avançant des arguments tels. que : "le cône sera tellement fin qu'il va se réduire à une ligne". N'est-ce-pas aussi le cas de l'auteur du propos [91], bien qu'il se base sur une argumentation plus rationnelle, en apparence du moins? Ces élèves ne sont-ils pas influencés par des effets de perception de ces solides, au même titre que les enfants qui affirment qu'une boulette d'argile prend moins de place, une fois roulée en saucisse, car plus mince, ou au contraire plus de place, car devenue plus longue?

Notons toutefois un fait qui distingue les expériences de J. Piaget et B. Inhelder des circonstances rencontrées ici et qui peut avoir joué un rôle : dans les premières seules, une véritable manipulation physique est effectuée.

Deux autres réactions peuvent être interprétées par une acquisition imparfaite, ou à tout le moins instable, de l'invariance de l'aire vis-à-vis de la forme, bien qu'il s'agisse là d'une interprétation fort aléatoire. D'abord, ces quelques élèves qui s'étonnent que deux surfaces, images l'une de l'autre par une symétrie affine, puissent avoir des formes différentes, tout en étant conscients qu'elles ont même aire. (ce qui est le cas dans la première classe où ce problème a été posé, cfr. II.2.2.13.). Peut-être ces élèves extrapolent-ils à la symétrie affine, par simple analogie, la propriété qu'a la symétrie orthogonale de conserver en quelque sorte la forme d'une surface?

Peut-être aussi sont-ils inconsciemment choqués qu'une surface garde même aire lorsqu'une symétrie affine la transforme en une surface fort allongée et qui paraît de ce fait fort aplatie (rappelons que l'axe de la symétrie était fort penché en cette occasion)? Ensuite, cet élève qui s'étonne, à l'occasion de la quadrature d'une arche de cycloïde, qu'une surface "biscornue" (relativement étirée au demeurant) puisse avoir même aire qu'un demi-disque ([109]). Serait-il influencé par une même intuition?

2.3. Une maîtrise plus aléatoire des aires et volumes en tant que quantités pluridimensionnelles.

En ce qui concerne l'acquisition de l'aire et du volume en tant que quantités pluridimensionnelles, les classes auxquelles nous avons proposé nos fiches de travail semblaient moins homogènes. C'est normal, dans la mesure où cette acquisition pose problème encore à l'adolescence. Bien sûr, on n'a pas vu d'élèves exprimer le volume d'un parallélipipède par une combinaison linéaire des longueurs de ses arêtes, ainsi que l'ont observé G. Vergnaud et al. (1983) au premier cycle de l'enseignement secondaire. Mais d'autres erreurs suggèrent une acquisition inachevée.

1) Certains élèves ont tendance à croire que des mêmes aires latérales enserrent des mêmes volumes et inversement (J. Rogalski parlerait d'absence de différenciation entre la surface d'un solide et son volume). C'est le cas de cet élève qui dit qu'un prisme droit et un prisme oblique de même base et de même hauteur ont non seulement même volume mais aussi même aire latérale ([61]). Cette confusion est latente sans doute dans le fait que certains élèves ne sont pas conscients que manipuler un parallélipipède articulé en altère le volume (II.2.1.4.) ou dans celui que d'autres élèves rapprochent spontanément une telle manipulation du remplacement d'un parallélipipède par un autre de même volume, soit par la méthode du puzzle (II.2.1.4.), soit par la méthode de Cavalieri ([55]). On ne peut s'empêcher de penser à l'expérience relatée par E. Castelnuovo (1965) et celle décrite par A. Berte (1985). D'un côté, une ficelle de longueur constante avec laquelle on enserre des rectangles différents (Fig.8). De l'autre, un carré articulé qu'on déforme (Fig.9). La plupart des élèves du premier cycle (11-14 ans)

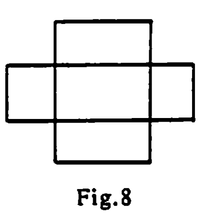


Fig.8

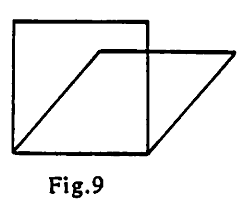


Fig.9

imaginent l'aire invariante d'un rectangle à l'autre ou du carré au parallélogramme. Seuls les cas extrêmes : un rectangle ou un parallélogramme tout-à-fait aplatis sont de nature à les détromper. Et encore, certains persistent à dire que l'aire ne change pas même si elle devient nulle brusquement lors de "l'effondrement final". Le parallélipipède articulé n'est-il pas l'équivalent, en 3 dimensions, du carré articulé? A ceci près que son aire latérale change, tout comme son volume, quand on le manipule. Penser que le parallélipipède articulé ne change pas de volume quand on le manipule ne signifierait donc pas forcément croire que deux aires latérales égales enserrent les mêmes volumes. A moins, ce qui est probable, de commettre deux erreurs simultanées : les arêtes du parallélipipède sont constantes, donc son aire latérale est invariante et partant, son volume également.

Que Galilée ait mis ses contemporains en garde contre de telles intuitions ne montre-t-il pas leur attrait à toute époque : "En vérité je ne crois pas que parmi ceux qui manquent de quelque notion de géométrie il s'en trouverait 4 sur 100 qui, de prime abord, ne croiraient que les corps enfermés en des surfaces égales ne sont aussi égaux en tous points. Ainsi ils encourent la même erreur en parlant de surfaces..., ne sachant pas qu'on peut avoir une enceinte égale à une autre et la place enfermée en celle-ci bien plus grande que la place de celle-là" (Galilée cité par E. Castelnuovo, 1965)?

2) La plupart des élèves connaissent les formules du volume du parallélipipède et du prisme, mais nous ne savons pas si cette connaissance est intégrée de manière significative dans leur structure cognitive. Quelques-uns se trompent déjà dans le cas du parallélipipède oblique, prêts qu'ils sont à remplacer la hauteur par une arête oblique dans l'expression du volume ([58], [60]). Une tentation analogue concernant le parallélogramme se devine derrière le propos [59]. Les surfaces ou solides fort penchés la susciteraient également ([62], [63]). Nous analyserons plus loin ces erreurs. Notons encore que quelques élèves ne parviennent à justifier que les deux prismes (ou parallélipipèdes) droit et oblique ont le même volume qu'en se référant à des images qui relèvent plus de la conception unidimensionnelle du volume que de sa conception pluridimensionnelle : deux pensent à concrétiser les solides au moyen d'une matière malléable ([56], [74]); un à les remplir d'eau ([73]); un dernier imagine les deux solides comme deux visions d'un même objet ([57]).

3) La bilinéarité de l'aire est maîtrisée par ces élèves qui prennent le carré du rapport d'homothétie pour déduire l'aire d'une section plane de la pyramide de celle de sa base (II.2.3.3. Fig.39). Mais nous avons vu, en 15 ans d'enseignement, de nombreux élèves de 15 ans et plus utiliser le rapport d'homothétie, et non son carré, dans des circonstances semblables. (Cette observation confirme des

difficultés mentionnées par J. Rogalski, 1982, au premier cycle). La linéarité du volume de la pyramide par rapport à l'aire de sa base est suggérée ou évoquée dans les propos [86] et [87], mais niée dans les propos [88] et [89].

2.4. Un nouvel axe de recherche.

Les aires et volumes tels qu'ils sont envisagés dans ce travail le sont sous leur aspect pluridimensionnel. En effet, des formules d'aire et de volume sont mobilisées dans tous les problèmes proposés, même ceux où la mesure d'une grandeur est déterminée par comparaison avec une autre grandeur de même espèce.

Seules quelques réactions recueillies ici témoignent de difficultés décrites dans d'autres recherches sur la conception pluridimensionnelle des aires et des volumes (cfr. e.a. G. Ricco et al., 1983; G. Vergnaud et al., 1983; J. Rogalski, 1982; M. J. Perrin et R. Douady, 1986). Toutes les autres relèvent d'intuitions qui n'y sont pas prises en compte et dont la spécificité est de mêler des grandeurs hétérogènes : des lignes avec des surfaces, des surfaces avec des solides. Nous nous proposons de décrire ces intuitions dans la section suivante.

3. L'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions.

Dans cette section, nous caractérisons l'obstacle de **l'hétérogénéité des dimensions** au fur et à mesure de ses multiples manifestations. Nous analysons aussi comment les élèves surmontent cet obstacle dans certaines situations.

3.1. Un solide fait à partir de surfaces, une surface faite à partir de segments : des idées non étrangères aux élèves.

Un solide (resp. une surface) est un assemblage, un agrégat de surfaces (resp. de segments); un solide (resp. une surface) est engendré par le mouvement d'une surface (resp. d'un segment) : voilà des idées qui ne semblent pas étrangères aux élèves interrogés.

1) Si elles n'ont pas été évoquées spontanément lors de la résolution du problème II.2.1., alors qu'elles fournissaient une alternative efficace aux procédures d'équidécomposabilité et d'équicomplémentabilité, c'est que, vraisemblablement, elles ont pâti d'un interdit implicite auprès des élèves. C'est ce que suggèrent, du moins, le contexte des problèmes et les résultats obtenus. On peut imaginer que les élèves se soient crus obligés, à l'occasion du

problème II.2.1., de reproduire ou d'imiter pour le parallélogramme plus haut que large ce qui avait été fait pour l'autre et qui était bien une procédure d'équidécomposabilité. De même, "justifier" la formule du volume du parallélipipède oblique les renvoyait sans doute aux seules méthodes de justification rencontrées jusque-là dans leur cours de géométrie, c'est-à-dire les méthodes d'équidécomposabilité ou d'équicomplémentabilité. Du reste, seules ces méthodes leur paraissent rigoureuses ou du moins les croient-ils jugées comme telles par le professeur : celle de Clairaut pâtissant, de ce point de vue, d'un préjugé défavorable, de sorte qu'une fois venue à l'esprit, elle ne fait pas forcément l'objet d'une formulation (II.2.2.3., e.a. [21]). Alors que la question de la section II.2.2.12. invite les élèves à justifier la formule du volume du parallélipipède quelconque d'une manière intuitive et cette seule précision peut avoir levé l'interdit implicite. Et de fait, à cette occasion, plusieurs évoquent spontanément, qui un solide composé de plans ([65], [66], [67], [71], [72]), qui un solide engendré par le mouvement de sa base ([68], [69]).

2) Les élèves jugent l'argumentation de Clairaut claire, évidente, même si son style leur paraît quelquefois ampoulé (II.2.2.2.) : elle suscite un engouement certain ([3], [4], [5], [6], [8]), des paraphrases ([8], [9], [10], [11]), des images spontanées comme celle du tas de cartes ([51], [52]) et des rapprochements avec la formule du volume du prisme, rapprochements qui ne sont pas suscités par le texte de Clairaut, puisque celui-ci n'évoque pas de telle formule, mais se contente de dire, sans plus, que les prismes droit et oblique ont le même volume ([8], [9], [10]).

Ces images d'un solide composé de surfaces ou balayé par une surface sont d'autant plus facilement mobilisables ou mobilisées dans les problèmes II.2.1. et II.2.2. qu'un des solides concernés est le parallélipipède oblique ou le prisme oblique. Voici pourquoi. Considérons un parallélipipède rectangle. Son pavage en cubes unitaires (supposé implicitement possible) constitue un moyen de réaliser que son volume vaut le produit de ses trois côtés, ces trois facteurs apparaissant dès que l'on groupe ces cubes de manière organisée : les pavés qui forment une colonne, les colonnes qui composent une couche, les couches se superposant pour former le parallélipipède. Mais ce groupement des pavés suggère en même temps une manière de construire le parallélipipède avec le cube unitaire : sa forme est ainsi en parfaite symbiose avec la formule qui exprime son volume. Plus rien de tel ne se produit dans le cas du parallélipipède oblique, à moins de prendre pour brique de base un parallélipipède semblable au premier. Mais en choisissant cette nouvelle brique comme unité de volume, on aboutit à une expression du volume du parallélipipède comme produit de ses arêtes et non comme produit de sa base par sa hauteur. On ne démontre pas que le volume d'un parallélipipède oblique vaut le produit de sa base par sa hauteur en construisant celui-ci, pièce par pièce, avec le cube unitaire, mais bien en le ramenant à un parallélipipède rectangle, soit par équidécomposabilité, soit par équicomplémentabilité, ce qui revient, en fin de compte, à le déstructurer, à briser sa forme dans le premier cas et à la compléter dans le second pour en faire une autre. En revanche, l'empilage de surfaces ou le balayage par une surface sont des images qui ressuscitent cette symbiose entre, d'une part, le mode de construction du parallélipipède (oblique ou non) et, d'autre part, la formule de son volume : on "construit" celui-ci en empilant des surfaces égales à la base ou en translatant la base inférieure jusqu'à la base supérieure; quant à la formule du volume, elle exprime - du moins aux dires des élèves - que ces surfaces s'empilent sur toute la hauteur du parallélipipède ([8], [9], [10], [66], [67], [71], [72]) ou que la base s'élève de cette même hauteur ([68], [69]). Un aléa s'ajoute cependant, qui n'existait pas dans le cas du pavage : c'est que les surfaces peuvent s'empiler tout droit ou de biais. Nous verrons plus loin que cette souplesse nouvelle peut être source d'erreurs. Une même symbiose existe dans le cas du prisme oblique mais disparaît dans le cas de la pyramide. En effet, dans ce dernier cas, une seule des deux images subsiste : on ne peut engendrer une pyramide en faisant coulisser sa base, comme le dit un élève ([79]). On peut par contre la considérer comme un agrégat de sections parallèles à sa base. Mais la formule du volume de la pyramide ne suggère plus de mode de construction de cet agrégat. On y retrouve l'aire de la base et la hauteur totale de l'agrégat mais seul le facteur 1/3 rend compte de la diminution "régulière" des sections depuis la base jusqu'au sommet de la pyramide et le lien entre les deux échappe à la perception immédiate : on sent bien qu'il faut multiplier le produit "base x hauteur" par un facteur plus petit que 1 puisque les sections sont plus petites ou égales à la base, mais pourquoi 1/3 précisément...! Ainsi donc, les images d'un solide fait de surfaces ou balayé par l'une d'elles s'adaptent particulièrement bien aux cas du parallélipipède oblique ou du prisme oblique puisqu'elles "synthétisent" à la fois la forme de ces solides et leur volume et qu'en cela, aucune autre image ne les concurrence. Cela explique sans doute leur succès auprès des élèves lorsqu'ils parlent de ces solides. N'est-il pas significatif aussi que Clairaut définit le prisme par sa "formation" (cfr.problème II.2.2.) plutôt que comme portion d'espace délimitée par des plans , ainsi qu'il le fait pour la pyramide?

Notons que dans le cas du rectangle, pour lequel le pavage par carrés unitaires est un mode de construction autant qu'un moyen de réaliser l'aire comme produit de la longueur par la largeur, plusieurs élèves - d'après E. Castelnuovo (1965) - préfèrent parler de surface balayée par un segment : [La citation suivante s'étend sur les trois alinéas suivants]

"On demande : "Pourquoi trouve-t-on l'aire d'un rectangle de cette façon?"

Les élèves sont surpris de la question : car "on sait" que l'aire d'un rectangle se trouve au moyen de cette règle. Ensuite l'un dit : "Oui, l'aire du rectangle se trouve en multipliant la longueur de la base par la longueur de la hauteur parce que l'on peut imaginer que la base se déplace parallèlement à elle-même sur toute la longueur de la hauteur, en "balayant" ainsi la surface".

Je dois dire que les premières fois cette explication me paraissait étrange et je pensais que pour un enfant l'explication qu'on donne en général en partageant le rectangle en un certain nombre de petits carrés unitaires égaux devait être beaucoup plus spontanée. Ensuite, je me suis persuadée que cette dernière explication est beaucoup plus difficile car elle s'appuie sur une convention : l'unité de mesure. Et une convention imposée est toujours quelque chose d'artificiel".

3.2. Des images qui dévient déjà dans le cas du prisme ou du parallélipipède.

Un prisme composé de sections planes, un prisme engendré par le mouvement de sa base : ce sont là des idées complémentaires, en un sens que nous allons préciser, et qui sont susceptibles, chacune à leur manière, d'induire des intuitions fausses.

Des prismes comparés section plane par section plane sont donnés par **un infini actuel**, c'est-à-dire une "prise de conscience de tous les éléments à la fois d'un ensemble infini" (A. Bouvier et al., 1979) : les sections planes sont là, réalisées, et elles "épuisent" chacun des deux solides. La mise en correspondance des sections planes d'un prisme à l'autre garantit l'égalité de leurs volumes : il ne peut y avoir plus de sections d'un côté que de l'autre puisqu'on obtient le prisme oblique en glissant les sections du prisme droit les unes sur les autres ([51], [52], [70]). Et comme ce sont les points de leur hauteur commune qui ponctuent cette association de part et d'autre, les deux prismes ne peuvent avoir que le même volume : base x hauteur.

L'imagination peut déjà déraper lorsqu'on considère que les points de la hauteur servent en quelque sorte à "dénombrer" les sections planes des deux prismes plutôt qu'à établir leur correspondance de l'un à l'autre ([71], [72]). Pourquoi ne seraient-ce pas les points de l'arête plutôt que ceux de la hauteur qui comptabiliseraient les couches planes dans le cas du prisme oblique? N'aligne-t-on pas celles-ci sur l'arête pour former le prisme, et non sur la hauteur? Auquel cas le volume serait : base x arête ([58], [59], [60]; cfr. peut-être aussi [47], où un élève doute qu'il y ait une même infinité de tranches dans le prisme oblique que dans le prisme droit)? Dans ces conditions, le volume du solide penché grandirait avec son arête, jusqu'à l'infini s'il le faut ([62], [63]). Et l'on peut imaginer que la hauteur commune entre un solide droit et un solide penché serve d'autant moins de "vecteur bijectif" entre leurs sections planes qu'elle sort du solide penché, ce qui est le cas si ce dernier est fort oblique...

Nous reviendrons sur des erreurs comparables dans la section 3.9. de ce chapitre et nous poursuiverons alors leur interprétation.

Une autre source de dérapage réside dans le fait que les surfaces qui "composent" le prisme sont bien conçues par certains comme des objets idéalisés, sans épaisseur aucune ([22], [23]), et qu'à ce titre, elles se prêtent à des manipulations mentales impossibles à réaliser avec des solides, si minces soient-ils. De même pour les segments qui composent une surface. Ainsi on peut comme cet élève ([105]), redresser les indivisibles du parallélogramme (Fig.10) sans changer la longueur du segment AB

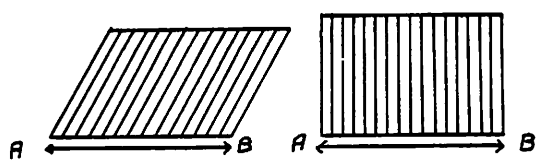


Fig.10

que forment leurs extrémités. Alors que si l'on manipulait de la sorte de fins bâtonnets, ils prendraient moins de place en largeur après qu'avant (Fig.11). Forts d'une conception analogue, des élèves

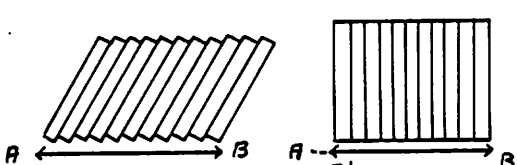


Fig.11

inclinent les "rectangles élémentaires" qui composent la surface sous $y = x^3$, entre 0 et 1, dans un repère orthonormé, sans penser que cela puisse changer son aire puisque ces rectangles gardent leur longueur et s'étalent sur une même largeur ([184], [185]). Nous-même, nous nous sommes laissée prendre à penser que l'on puisse incliner un bloc de feuilles de papier dont la tranche repose sur une table, sans accroître la surface de contact de la tranche avec la table.

De telles intuitions induisent les mêmes erreurs que celles qui consistent à croire que de mêmes périmètres enserrent de mêmes aires et de mêmes aires, de mêmes volumes : un rectangle articulé "ne change pas" d'aire, un parallélipipède articulé "ne change pas" de volume.

L'infini potentiel, "qui évoque une possibilité de dépassement", (A. Bouvier et al., 1979) surgit dès que l'on s'interroge sur la possibilité de construire un solide en superposant des surfaces, ainsi que le font plusieurs élèves ([32] à [38]). Le mouvement apparaît alors comme un moyen de réaliser effectivement cette construction : "Dès Aristote et pour très longtemps, on estime que seul le mouvement permet de penser la continuité qu'on parcourt plutôt qu'on ne la compose; [...]" (P. Raymond, 1976). C'est bien le mouvement qui est présent dans les références de certains élèves au tracé de la droite : une droite est faite de points sans épaisseur et cependant elle est constructible par le tracé du crayon ([39], [40]).

L'idée du balayage supplée donc celle de l'agrégat lorsque cette dernière est sujette à caution. Mais elle aussi peut donner lieu à des imaginations multiples. Pour certains élèves, le mouvement de la base du solide se pense en termes d'élévation ([68], [69]) : la base s'élève d'une même hauteur pour le parallélipipède droit et pour le parallélipipède oblique, seulement elle le fait de biais dans le cas du second. Mais d'autres ont l'attention attirée plutôt par le fait que la base, en s'élevant, longe les arêtes du solide. Et les arêtes du parallélipipède oblique sont plus longues à parcourir que celles du parallélipipède droit. D'où le risque, à nouveau, de remplacer la hauteur par l'arête dans l'expression du volume, surtout si l'arête est beaucoup plus longue que la hauteur.

On voit comment l'intuition peut se fourvoyer, même dans le cas d'un solide aussi simple que le prisme ou dans celui d'une surface aussi simple qu'un parallélogramme, dès que l'on considère ces grandeurs faites à partir d'autres grandeurs qui ont une dimension de moins. Et encore peut-on penser que la connaissance des formules du volume du prisme et de l'aire du parallélogramme, acquises depuis longtemps, joue le rôle de garde-fou, les élèves s'y référant un peu comme à un dogme, à l'instar de celui qui profère le propos [1] : un élève qui aurait tendance à penser que le volume du prisme oblique vaut le produit de sa base par son arête peut rectifier de lui-même son intuition première car il sait que ce volume vaut le produit de la base par la hauteur et, partant de là, se forger une nouvelle intuition plus conforme à ce résultat. Que serait-ce dans le cas de grandeurs dont la mesure est moins connue, sinon pas du tout? C'est ce que nous allons voir.

3.3. Une propension à l'usage abusif des indivisibles.

Plusieurs situations proposées délibérément aux élèves ou suggérées par eux recèlent un même piège que l'on peut résumer comme suit. Deux ou trois grandeurs A, B, C (éventuellement plus) sont décomposées en ensembles équipotents d'indivisibles dont les mesures respectives vérifient une des lois suivantes :

1) la mesure de chaque indivisible de A est égale ou proportionnelle à celle de son homologue dans B;

2) la mesure de chaque indivisible de A est plus petite ou égale à celle de son homologue dans B;

3) la mesure de chaque indivisible de C s'exprime comme combinaison linéaire, à coefficients constants p et q, de celles de ses homologues dans A et B.

On considère de plus que la décomposition en indivisibles transgresse les règles de découpage imposées par Cavalieri : soit qu'il s'agisse d'une décomposition radiale, soit qu'il y ait disparité d'épaisseur ou d'espacement entre les indivisibles (ces notions sont précisées en IV.1.2.), d'une grandeur à l'autre. Le piège consiste alors à transposer indûment aux mesures m des grandeurs A, B et C, la loi vérifiée par celles de leurs indivisibles :

1) $m(A) = m(B)$ ou $m(A) = k.m(B)$;

2) $m(A) \leq m(B)$;

3) $m(C) = p.m(A) + q.m(B)$.

Ce piège fonctionne effectivement comme tel auprès des élèves interrogés. Ainsi, plusieurs d'entre eux essaient de déduire une relation entre les volumes du cylindre, du cône et de l'hémisphère emboîtés au problème II.2.4., d'une relation entre les aires de leurs sections radiales (II.2.4.2.). Beaucoup s'étonnent que le volume d'un cône ne soit pas la moitié de celui du cylindre circonscrit, puisque leurs sections radiales ont des aires respectives dans ce même rapport (Problème III.2.1.; III.2.1.1.; [256]). Pour des raisons analogues, quelques-uns s'attendent à ce que le paraboloïde de révolutión du problème III.2.2. soit les 2/3 du cylindre circonscrit (III.2.2.1.). D'autres élèves sont prêts à croire que l'aire latérale du cône vaut celle de sa base, car l'une et l'autre sont composées d'un même nombre de cercles égaux deux à deux (Problème IV.2.1.; IV.2.1.1.). D'autres éprouvent le besoin d'évoquer des cônes immensément hauts pour se convaincre du contraire. Le problème IV.2.2. (Un drôle de découpage de la sphère) dupe pratiquement tous les élèves qui estiment que deux solides qui sont composés d'un même nombre de surfaces cylindriques égales deux à deux ne peuvent qu'avoir le même volume, même s'ils paraissent fort inégaux a priori. (IV.2.2.1.). Enfin, malgré les avertissements précédents, quelques-uns sont perplexes devant le paradoxe de l'écuelle (Problème IV.2.4.) et quelques autres croient que l'aire du cylindre du problème IV.2.7. est plus grande que celle de la sphère qui lui est inscrite, car faite de cercles plus grands (IV.2.7.3.). Parmi les initiatives plus ponctuelles et, pour certaines, à peine ébauchées, signalons la décomposition du disque et de l'ellipse en diamètres (II.2.6.3.), le cône assimilé à l'ensemble de ses génératrices et aplati en disque (IV.2.1.6.), les disques dont les aires sont entre elles comme les rayons ([257]); la demi-arche de sinusoïde égalée segment par segment à un quart de cercle ([259]), la surface sphérique projetée, cercle par cercle, sur le disque qui partage la sphère en deux hémisphères ([261]).

Ces erreurs témoignent d'une confiance aveugle dans quelque chose qui pourrait s'exprimer par le principe suivant : *Des grandeurs composées d'un même nombre d'indivisibles sont entre elles comme ces derniers*. Le recours à un tel principe est tantôt induit seulement par le découpage en indivisibles (III.2.1., IV.2.1.), tantôt imposé par l'énoncé lui-même (IV.2.2., IV.2.3., IV.2.4., IV.2.7.). La propension des élèves à l'invoquer spontanément dans le premier cas et à se laisser séduire par lui dans le second témoignent de cette confiance, qui est manifeste aussi lorsqu'ils découpent d'eux-mêmes les grandeurs en indivisibles pour déduire le comportement des premières de celui des seconds.

Mais, nous objectera-t-on, les élèves ne se sont-ils pas enhardis à décomposer les grandeurs en indivisibles, à tort et à travers, s'y sentant autorisés, encouragés même, par l'institutionnalisation, au sein de la classe, des principes de Cavalieri? D'autant que les règles de prudence contenues dans ceux-ci n'avaient pas été explicitement dégagées, au moyen de contre-exemples. Peut-être est-ce le cas pour les procédures les plus "originales" comme les dernières que nous avons relevées. Il n'empêche que l'étonnement des élèves devant les paradoxes, leurs intuitions premières - fussent-elles fugitives -, leur récurrence malgré les mises en garde, sont des faits significatifs qu'il nous faut considérer. De plus, d'autres personnes se sont laissées abuser de la même manière, alors que nous ne leur avions parlé ni de Cavalieri, ni des indivisibles : des étudiants de dernière année universitaire en mathématique à qui nous avions proposé le problème IV.2.2., des professeurs de mathématique du secondaire à qui nous avions soumis, par le biais d'un journal de collège, l'ensemble des paradoxes, et les nombreux élèves qui, dans le cadre d'un enseignement classique de l'analyse, commettent l'erreur de comparer, par section radiale, un solide de révolution au cylindre circonscrit (IV.2.9.1., e.a. [254]).

3.4. Une partition ensembliste des grandeurs tient lieu de loi d'additivité.

3.4.1. Une interprétation de l'usage abusif des indivisibles.

D'où vient que les élèves transfèrent si spontanément aux mesures des grandeurs une loi vérifiée par celles de leurs indivisibles respectifs? Examinons, pour y voir plus clair, des grandeurs composées d'un nombre fini de morceaux. Supposons en effet que l'on dise : ces deux surfaces A et B sont composées chacune d'un même nombre n de morceaux A_i et B_i ; de plus, on peut associer deux par deux leurs morceaux respectifs de manière à ce que chaque morceau de la première surface ait une aire égale à celle du morceau qu'on lui associe dans la seconde :

$$m(A_i) = m(B_i), \quad i = 1, 2, \ldots n. \qquad (1)$$

On conclura avec raison que les deux surfaces ont même aire :

$$m(A) = m(B). \qquad (2)$$

C'est grâce à l'additivité de la mesure :

$$\begin{aligned} A = \cup A_i;\ A_i \cap A_j = \varnothing \ &\Rightarrow\ m(A) = \Sigma\, m(A_i), \\ B = \cup B_i;\ B_i \cap B_j = \varnothing \ &\Rightarrow\ m(B) = \Sigma\, m(B_i), \end{aligned}$$

que l'on peut déduire (2) de (1). La même loi d'additivité permet de tirer l'inégalité

$$m(A) < m(B), \qquad (3)$$

des inégalités

$$m(A_i) < m(B_i), \quad i = 1, 2, \ldots n. \qquad (4)$$

Cette formule d'additivité découle du fait que les morceaux A_i (ou B_i) forment une partition finie de la grandeur A (ou B). Elle constitue une sorte de "pendant numérique" de cette partition.

Envisageons à présent deux surfaces partitionnées chacune en une infinité de segments indivisibles dont les mesures respectives vérifient une relation du type (1) ou (4). A ces partitions ne correspond plus aucune relation numérique du type de l'additivité : on n'obtient l'aire d'une surface ni en additionnant les longueurs de ses indivisibles, ni en additionnant les aires - nulles - de ceux-ci. Or, comment peut-on inférer une relation entre les mesures de deux grandeurs d'une relation entre les mesures de leurs indivisibles, si ce n'est - tout comme dans le cas fini - au départ d'une loi reliant, pour chacune de ces grandeurs, sa mesure à celles de ses indivisibles? Il se pourrait cependant - c'est là notre hypothèse - que la partition d'une surface en ses indivisibles soit tellement présente dans l'esprit des élèves qu'elle supplée l'absence d'une telle loi dont elle assume indûment le rôle, induisant ainsi un passage abusif du rapport des indivisibles au rapport des surfaces. Ainsi les élèves glisseraient inconsciemment du contexte des nombres à celui des grandeurs, empruntant à ce dernier une argumentation, un maillon de leur raisonnement qui leur fait défaut dans le premier.

Toutes les surfaces et tous les solides pour lesquels les élèves commettent l'erreur décrite ci-dessus sont effectivement partitionnés en lignes indivisibles ou surfaces indivisibles, à l'exception des surfaces et solides décomposés radialement. Considérons donc celles-ci à part. Quand on décompose un cône en sections radiales, on "compte l'axe à chaque fois", comme dit un élève ([114]). Mais qu'à cela ne tienne, dans la mesure où il s'agit de comparer le cône au cylindre circonscrit. En effet, l'axe est commun aux deux et s'il est compté à chaque fois pour l'un, il l'est aussi pour l'autre. Il suffirait d'ôter l'axe commun (ou le point commun dans le cas de segments indivisibles radiaux), de comparer les deux solides sur base d'un partitionnement en sections radiales privées de cet axe, et de remettre ensuite l'axe aux deux solides : l'emprunt indû au contexte des grandeurs fonctionne tout aussi bien ici que dans le cas où les grandeurs sont effectivement partitionnées. D'autant que plane sans doute inconsciemment l'idée que l'axe est un indivisible "d'ordre supérieur", négligeable par rapport aux surfaces.

3.4.2. Cavalieri définit les indivisibles aussi par leur mode de découpage.

On comprend mieux la nature du dérapage lorsqu'on se réfère, par contraste, à la position de Cavalieri vis-à-vis du concept d'indivisible. Comme en témoigne J. Dhombres (1978), Cavalieri ne définit nulle part ce concept, il se contente d'en donner des images telles que : "Ainsi les plans constituent un volume comme les pages d'un livre forment ce livre" (traduit par J. Dhombres, Ib.). Mais, comme nous l'avons expliqué à la section IV.1.1., il semble que les indivisibles soient implicitement définis tout autant par leur mode de découpage (parallèles à une regula...) que par le fait qu'ils possèdent une dimension de moins que la grandeur dont ils font partie. Et ce sont précisement ces règles de découpage qui garantissent le transfert de l'égalité ou de la proportionnalité des mesures des indivisibles aux grandeurs elles-mêmes. En fait, tout se passe comme si Cavalieri refusait de nommer indivisibles des surfaces ou des lignes dont les mesures seraient proportionnelles, sans que le soient celles des grandeurs dont elles sont extraites. Or, une chose est d'appeler indivisibles des surfaces ou des lignes délibérément découpées de manière à ce que la proportionnalité de leurs mesures se transfère à celles des grandeurs, autre chose est d'appeler indivisibles des surfaces ou des lignes découpées de manière arbitraire et d'opérer le transfert de façon quasi-automatique en arguant que les indivisibles "composent" les grandeurs dont ils sont extraits et que ce qui est vrai pour eux le reste pour les grandeurs elles-mêmes. D'ailleurs, en ce qui concerne la relation entre une grandeur et ses propres indivisibles, Cavalieri reste très circonspect. Il précise : "Je ne me suis pas risqué à dire que le continu soit composé de ceux-ci - les indivisibles -, mais j'ai montré qu'entre les continus il n'y a pas une proportion autre qu'entre les amas d'indivisibles" (cité par F. De Gandt, 1983).

Toute autre est la position de Torricelli, lorsqu'il détermine le centre de gravité d'un segment de parabole. Il décompose un cône ABC (Fig.12) en paraboles [segments de parabole]. Sachant que, dans

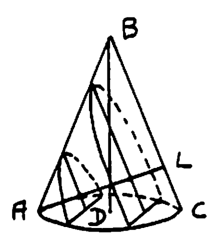


Fig.12

toute parabole, le centre de gravité divise le diamètre dans la même proportion, il établit, par similitude de triangles, que les centres de gravité de toutes les paraboles appartiennent à une même droite AL. Il assimile ensuite l'ensemble de ces paraboles au cône : "Or toutes les paraboles, ou le cône lui-même, c'est une même chose" (cité par F. De Gandt, 1983), ce qui l'autorise à identifier le centre de gravité de toutes les paraboles "prises ensemble" - et qui appartient forcément à AL - à celui du cône. Supposant connue la position du centre de gravité du cône - au 1/4 de l'axe BD - et jouant une nouvelle fois sur la similitude de triangles, il déduit que AL divise l'axe de chaque parabole de telle manière que la partie située vers le sommet soit trois fois plus longue que l'autre. "On aura remarqué la simplicité tranquille avec laquelle Torricelli identifie toutes les paraboles et le cône entier" (Ib.).

3.4.3. Les élèves axent leur argumentation sur le partionnement des grandeurs en indivisibles.

Pour justifier l'usage des principes de Cavalieri à l'occasion des fiches II.2.2. (Le prisme oblique en 1743), II.2.3. (D'une pyramide à toutes les autres) et II.2.6. (Du rectangle au parallélogramme, du cercle à l'ellipse... à la manière de Cavalieri), les élèves, eux, se réfèrent exclusivement au fait que les indivisibles composent les grandeurs. Ils utilisent des expressions telles que : un volume est une superposition de surfaces, une succession de parties d'un plan, un assemblage de plans, l'addition d'une multitude de parties de plans, le nombre de couches successives, un empilement de surfaces parallèles entre elles...; une infinité de segments parallèles est une surface (cfr. e.a [8], [10], [11], [65], [66], [67], [71], [72], [80], [108]). Aucune allusion n'est faite, à ce moment, au mode de découpage des indivisibles préconisé par Cavalieri. Les élèves n'expliqueront les règles propres à ce découpage qu'une fois confrontés aux paradoxes ou aux résultats qui leur apparaissent comme tels ([115], [193], IV.2.3.1.). Clairaut lui-même, pour justifier que le prisme oblique a le même volume que le prisme droit (fiche II.2.2.), se contente de dire : "Or si toutes les tranches imaginables qu'on peut former dans ces deux prismes par de mêmes plans coupants, sont égales, il faudra que les assemblages de ces tranches, c'est-à-dire, les prismes, soient égaux aussi", sans souligner que la manière de découper les tranches participe tout autant à la conclusion. Seule la locution "par de mêmes plans coupants" le rappelle mais de façon bien implicite. De même, il justifie que deux pyramides de même base et de même hauteur ont le même volume en disant : "[...] les deux pyramides peuvent être regardées comme des assemblages d'un même nombre de tranches, qui dans ces deux pyramides seront égales chacune à sa correspondante. Donc, conclura-t-on, la somme des tranches est la même, de part et d'autre : c'est-à-dire, que les deux pyramides ont la même solidité" (rééd. 1920). Or ces propos insistent sur le partitionnement de deux solides en ensembles équipotents d'indivisibles égaux mais n'avertissent pas, en contre-partie, que si on peut dire que les solides ont même volume, c'est aussi parce que leurs indivisibles sont parallèles à un même plan.

Notons que les justifications relevées plus haut émanent autant des élèves qui n'ont pas lu le texte de Clairaut que des autres. Les premiers ne peuvent donc avoir calqué leur argumentation sur ce dernier. On peut imaginer que si le fait que les indivisibles composent les grandeurs soit le seul avancé pour justifier les principes de Cavalieri, alors que des considérations sur le mode de découpage eussent trouvé là leur place, il est a fortiori considéré comme l'élément probant de tout usage abusif des indivisibles.

3.4.4. Une référence indirecte aux indivisibles : un lien entre une grandeur et ses indivisibles qui reste flou.

Les élèves n'ont sans doute pas conscience de s'appuyer sur une relation de nature, non pas numérique, mais ensembliste (la partition en indivisibles d'une grandeur vue comme un ensemble de points), pour déduire une loi numérique (liant les mesures des grandeurs) d'une autre analogue (liant celles de leurs indivisibles). Leur langage glisse facilement d'un domaine à l'autre : les mots assemblage, empilement touchent à des ensembles de points, les mots addition, somme (ce dernier utilisé par Clairaut) évoquent déjà plus les opérations que l'on peut effectuer sur des mesures. Bien sûr, certains élèves soulèvent carrément la question du lien entre la mesure d'une grandeur et celle de ses indivisibles, entre autres lorsqu'ils parlent du volume d'une surface ou de l'aire d'un segment ([32], [107]). Même deux candidats-professeurs de mathématique se demanderont, à la lecture des principes de Cavalieri, si ce dernier additionne les aires ou les longueurs des indivisibles. Mais ces interrogations peuvent rester sans réponse sans que cela altère la conviction que les mesures des grandeurs se comportent comme celles de leurs indivisibles. C'est que la méthode des indivisibles (licite ou non) repose sur une sorte d'isomorphisme et se présente sous forme d'implication : en amont de celle-ci, la relation entre deux indivisibles homologues (flèche 1 de la Fig.13); en aval, la relation entre les deux grandeurs (flèche 2 de la Fig.13); quant au lien entre une grandeur et ses propres indivisibles (flèche 3 de la Fig.13), il est pudiquement caché par l'implication elle-même, plus

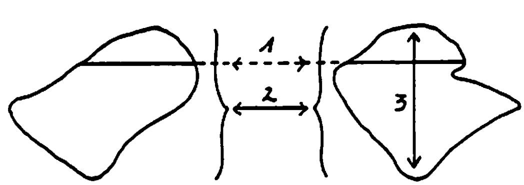


Fig.13

prégnante (et se passant d'autant mieux de justification explicite dans les principes de Cavalieri qu'elle y est correcte). La référence aux indivisibles est donc indirecte. Ceux-ci sont comparés un par un ou bloc par bloc, mais le poids d'un indivisible dans son propre bloc peut rester vague : "La proportionnalité entre deux agrégats de lignes ou de plans peut être transférée aux figures sur lesquelles on a découpé ces lignes ou ces plans, sans que l'on ait à décider si ces lignes composent la figure, si les plans composent le solide " (F. De Gandt, 1983). Il est d'ailleurs significatif de constater, ainsi que l'explique en substance F. De Gandt, que le mot "indivisible" est, dans les écrits de Cavalieri, un terme non technique en ce sens qu'il n'apparaît qu'en dehors des démonstrations proprement dites, le terme technique utilisé étant : toutes les lignes de telle figure ou tous les plans de tel solide.

La nature même des indivisibles qui fait l'objet de controverses à l'époque de Cavalieri (ont-ils ou non la même dimension que les grandeurs dont ils sont extraits?) peut rester implicite. "[...] the distinction was of theoretical interest only, for it remained usual to consider the ratio between two areas, so that an eventually missing Δx was cancelled by the relation

$$A / B = \Sigma a_n\Delta x / \Sigma b_n\Delta x = \Sigma a_n / \Sigma b_n,$$

where a_n and b_n are the altitudes in the rectangles of which the areas A and B are composed." (K. M. Pedersen, 1980).

La référence aux indivisibles étant indirecte, la nature de la relation qui unit une grandeur à ses indivisibles peut rester implicite : le glissement du domaine ensembliste au domaine numérique en reste d'autant plus facilement inconscient chez les élèves, et de ce fait, plus tentant et plus tenace. A la section VIII.2.3., nous verrons que le calcul de l'aire sous $y = x^3$ entre 0 et 1 (problème III.2.7.) pousse davantage les élèves à s'interroger sur le lien entre une grandeur et ses propres indivisibles : il ne s'agit plus dans ce problème de comparer deux grandeurs mais d'en calculer une directement.

3.5. Les principes de Cavalieri étendus aux cas où le rapport des indivisibles est une fonction de x.

Deux erreurs révèlent une difficulté analogue à celle décrite à la section précédente. La première (III.2.9., point 1) consiste à déduire que les aires $\int_0^1 x^3$, $\int_0^1 x$ et $\int_0^1 x^2$ vérifient la relation

$$\int_0^1 x^3 / \int_0^1 x = \int_0^1 x^2, \qquad (5)$$

du fait que

$$x^3 / x = x^2; \qquad (6)$$

la deuxième (III.2.9., point 2) à conclure que les volumes des solides de révolution $\int_0^2 \pi x^4$ et $\int_0^2 4\pi x^2$ vérifient

$$\int_0^2 \pi x^4 / \int_0^2 4\pi x^2 = \int_0^2 x^2/4, \qquad (7)$$

parce que leurs sections homologues ont un rapport égal à $x^2/4$:

$$\pi x^4 / 4\pi x^2 = x^2/4. \qquad (8)$$

Ces deux erreurs ont la même structure : deux grandeurs sont décomposées en indivisibles dont le rapport est une fonction de x et c'est l'intégrale de cette fonction, entre les bornes appropriées, qui sert à exprimer le rapport entre les mesures des grandeurs. Le découpage en indivisibles respecte les règles stipulées dans les principes de Cavalieri, à ceci près que les indivisibles homologues ne sont plus dans un rapport constant. De nouveau ici, il n'existe aucune relation numérique du type de l'additivité servant de jonction entre (6) et (5) ou entre (8) et (7); le seul fait sur lequel on puisse tabler pour faire ces déductions étant que les segments de longueur x^2 forment, côte à côte, une surface d'aire $\int_0^1 x^2$ et que les segments de longueur $x^2/4$ composent, eux, une surface d'aire égale à $\int_0^2 x^2/4$. L'élève qui commet la seconde erreur est d'ailleurs très explicite là-dessus : pour lui, $\int_0^2 x^2/4$ représente bien l'aire d'une surface. En fait tout se passe comme si les rapports numériques (x^2 ou $x^2/4$) étaient perçus par l'élève comme grandeurs (en l'occurrence des segments), globalisés comme tels en surfaces dont ils forment une partition; l'élève retournant en fin de compte dans le domaine numérique au moment où il propose l'aire de cette surface comme rapport entre les mesures des deux grandeurs initiales. Cette fois encore, les prémisses et la conclusion du raisonnement sont d'ordre numérique, mais le noeud de l'argumentation relève d'un partitionnement ensembliste des grandeurs.

Notons que ces deux erreurs ont été commises indépendamment l'une de l'autre et qu'elles ont donné du fil à retordre aux deux professeurs qui en étaient les témoins.

Ne peut-on interpréter d'une manière analogue l'erreur qui consiste à dire que le volume du paraboloïde du problème III.2.2. est à celui du cylindre circonscrit comme πx est à 3π ([128])? En fait, πx est l'aire d'une section indivisible quelconque du premier solide, 3π l'aire d'une section du second solide. Le rapport entre ces sections respectives n'étant pas constant, rien n'autorise à l'étendre aux volumes des solides. Qu'à cela ne tienne : les "πx" sont perçus comme des surfaces, assemblées comme telles pour former un solide; de même pour les "3π". le passage du rapport des aires à celui des volumes se fait ainsi via des considérations sur les seules grandeurs.

3.6. Le poids d'un segment dans le calcul d'une aire ou d'un volume.

Les sections 3.4. et 3.5. donnent à penser que, pour de nombreux élèves, les indivisibles sont des parties constituantes d'une grandeur, chacun d'eux participant à sa mesure. C'est au point que, pour certains de ces élèves, un seul de ces indivisibles - ou un seul couple d'indivisibles - est susceptible de modifier cette mesure. Voici en quelles circonstances cela se manifeste.

1) Pour un élève ([114]), on surévalue le volume d'un cône en le déterminant à partir de ses sections radiales, puisque, celles-ci ayant l'axe en commun, on "compte" ce dernier plusieurs fois.

2) Un autre prétend corriger un certain calcul de l'aire de la sphère en comptant deux fois le grand cercle méridien ([261], [262]).

3) Un autre encore propose de rajouter à l'aire d'une surface, à laquelle s'adjoint un segment comme suggéré à la Fig.14, la longueur de ce dernier ([253]).

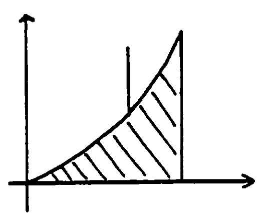


Fig.14

4) Enfin, certains justifient des erreurs commises dans la comparaison de mesures de grandeurs en se référant à un seul couple d'indivisibles homologues : les indivisibles extrêmes. Si les deux solides extraits de la sphère (Problème IV.2.2., Un drôle de découpage de la sphère) n'ont pas le même volume, quoique composés d'un même nombre de surfaces cylindriques égales deux à deux, c'est que la dernière de ces surfaces cylindriques est un segment pour l'un et un cercle plus long pour l'autre ([219]). Si le rapport entre le solide engendré par la rotation, autour de ox, de la surface délimitée par $y = x^2$, $y = 0$ et $x = 2$ et le cône circonscrit ne vaut pas l'aire sous $y = x^2/4$, entre 0 et 2, c'est que ces deux solides commencent par un point, alors que la surface sous $y = x^2/4$ débute

par un point et le rectangle qui lui est circonscrit par un segment. Il semble que l'élève mêle indûment à ce problème les résolutions des problèmes III.2.1. et III.2.2. où l'on avait égalé le rapport de deux volumes (ceux d'un cône et du cylindre circonscrit ou ceux d'un paraboloïde et du cylindre circonscrit) au rapport de deux aires (une aire sous une courbe et celle du rectangle circonscrit). Sans doute l'élève pense-t-il ici à une même égalité : d'un côté, le rapport des volumes concernés, de l'autre, le rapport entre l'aire sous $y = x^2/4$ et l'aire du rectangle circonscrit. Il n'empêche que, par delà cette confusion, la référence aux indivisibles extrêmes pour interpréter une erreur flagrante demeure significative.

Ces exemples montrent que le moindre indivisible est susceptible, au yeux de ces élèves, de modifier la mesure d'une grandeur. N'y a-t-il pas, là aussi, ingérence abusive de la perception des grandeurs en tant qu'ensembles de points dans le calcul des mesures? Ainsi l'ajout d'un segment à une surface est un changement de nature à la fois ensembliste et perceptif mais ne modifie en rien l'aire de cette surface.

De même, l'évocation des indivisibles extrêmes est un argument sans valeur, sans quoi on pourrait remettre en cause la démonstration faite à la section II.2.4.5. (Fig.15). En effet, les

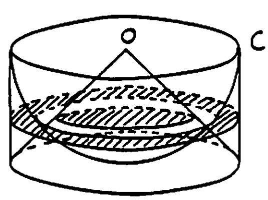


Fig.15

indivisibles homologues, découpés par un plan horizontal contenant le sommet du cône, sont, un point en ce qui concerne le cône et un cercle pour ce qui est de l'écuelle : il n'empêche que ces deux solides ont même volume.

Cette évocation montre qu'il n'est pas évident de considérer les indivisibles du bon point de vue, même lorsqu'on parle de leurs mesures. C'est qu'il y a mesure et mesure : ainsi le segment et le cercle considérés par l'auteur du propos [219], à l'occasion du drôle de découpage de la sphère, ont chacun une aire et une longueur; de même en est-il du point o et du cercle c de la Fig.15. Or, c'est parce que ces derniers ont même aire (nulle) que l'on ne peut remettre en cause, en les évoquant, l'égalité des volumes de l'écuelle et de l'hémisphère. Mais l'égalité d'aire d'un cercle et d'un segment, ou d'un point et d'un cercle, est un résultat très scientifique, provenant de la définition de l'aire. Rien ne pousse à parler d'une aire nulle à propos de segments ou de cercles : n'est-ce pas plus naturel de parler de leur longueur? D'autant que, d'un point de vue perceptif, un segment n'équivaut pas à un cercle et s'ils se différencient du point de vue de leur longueur, ils sont jugés équivalents dès qu'on parle de leur aire. De même, un point et un cercle, ce n'est pas la même chose; or, ils appartiennent à des classes d'équivalence différentes si "avoir même longueur" définit la relation d'équivalence, mais appartiennent à une même classe si la relation est "avoir même aire". N'est-il pas étrange d'adopter un point de vue qui donne de deux objets bien distincts une vision indifférenciée? A cet égard, les commentaires que fait Galilée du problème de Valerio sont très significatifs : "Here we have the miracle mentioned above; as the cutting plane approaches the line AB the portions of the solids cut off are always equal, so also the areas of their bases. [Fig.16] And as the cutting plane comes

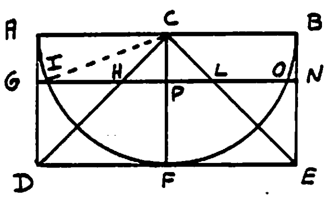


Fig.16

near the top, the two solids (always equal) as well as their bases (areas which are also equal) finally vanish, one pair of them degenerating into the circumference of a circle, the other into a single point, namely, the upper edge of the bowl and the apex of the cone. Now, since as these solids diminish, equality is maintained between them up to the very last, we are justified in saying that, at the extreme and final end of this diminution, they are still equal and that one is not infinitely greater than the other. It appears therefore that we may equate the circumference of a large circle to a single point. And this which is true of the solids is true also of the surfaces which form their bases; for these also preserve equality between themselves throughout their diminution and in the end vanish, the one into the circumference of a circle, the other into a single point. Shall we not then call them equal seeing that they are the last traces and remnants of equal magnitudes? Note also that, even if these vessels were large enough to contain immense celestial hemispheres, both their upper edges and the apexes of the cones therein contained would always remain equal and would vanish, the former into circles having the dimensions of the largest celestial orbits, the latter into single points. Hence in conformity with the preceding we may say that all circumferences of circles, however different, are equal to each other, and are each equal to a single point" (Galileo, trad. H. Crew). Il est à noter que Galilée n'expose le problème de Valerio que pour faire voir ce mystère : ce qui montre sa réticence à juger équivalents d'un certain point de vue des objets qui apparaissent fort différents à sa perception. Ainsi donc, "l'inégalité" des indivisibles extrêmes est elle-même génératrice de paradoxe. Tout le problème soulevé ici est celui des ensembles infinis qui peuvent être mis en bijection sans avoir la même mesure, et, d'une certaine façon, n'être pas en bijection en ayant la même mesure.

Remarquons que les élèves interrogés à propos du problème de Valerio ont tout de suite adopté le bon point de vue : ils parlent en effet des aires des indivisibles extrêmes des solides évoqués par Galilée ([95], [96]), non de leur longueur, amenés qu'ils étaient sans doute, par le contexte dans lequel ce problème avait été posé, à vérifier une conjecture relative aux aires des indivisibles.

3.7. Des lignes vestiges de surfaces.

Rapprochons à présent deux erreurs relatées à la section VI.2.11.3. et une autre relatée à la section VI.2.12.1. Il s'agit de cet élève qui donne f(x) comme limite de la différence S(x+h) - S(x), où $S(x) = \int_a^x f$, lorsque h tend vers 0, et qui s'étonne aussi que $\int_a^a f$ ne soit pas égal à f(a), et de ceux qui s'attendent à ce que les segments AB et CB de la Fig.17 aient des longueurs dans le rapport 2. Ces trois erreurs témoignent, elles aussi, d'une ingérence indue de la perception des grandeurs dans le domaine des mesures. En effet, soit la surface située sous le graphe de la fonction f, entre les

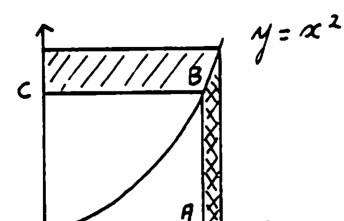


Fig.17

abcisses x et x+h. Au fur et à mesure que nous considérons des valeurs de h de plus en plus proches de 0, nous voyons cette lamelle s'affiner de plus en plus (Fig.18). Lors de cette évolution, un seul des côtés de la lamelle reste inchangé et constamment sous nos yeux : c'est le côté de longueur f(x) (f > 0). Le côté de longueur f(x+h) se rapproche du premier jusqu'à se confondre avec lui. Quant aux autres frontières de la lamelle, elles s'amenuisent petit à petit

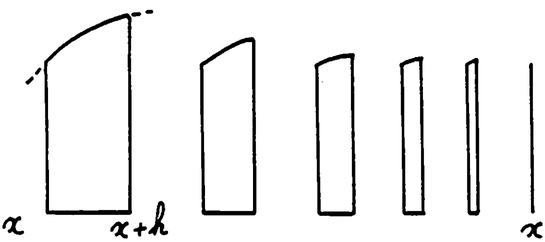


Fig.18

jusqu'à se réduire chacune à un point. A ce moment, on ne verra plus de la lamelle initiale que le seul segment de longueur f(x). Ainsi, d'un point de vue "strictement visuel", la surface en question se réduit à un segment qui constitue son seul vestige. L'élève n'hésite pas alors à traduire cette perception en termes de mesures : puisque le segment est le résidu ultime de la surface, sa mesure sera la mesure du résidu de cette dernière. Or, qu'est-ce que la mesure d'un segment sinon sa longueur et la mesure d'une surface sinon son aire ? Quant au mot "limite", on sait, depuis les travaux de B. Cornu (1983), d'A. Sierpinska (1985) et de C. Hauchart et N. Rouche (1987), qu'il est chargé de connotations multiples dans le langage courant et que l'une de ses significations est : "ce qui reste à la fin". Et c'est sans doute dans cette optique que l'élève écrit $\lim_{h\to 0} S(x+h) - S(x) = f(x)$ et suppose $\int_a^a f = f(a)$. Les propos par lesquels il commente ces résultats ne sont-ils pas révélateurs de cette influence de la perception sur le calcul des mesures, puisque l'élève ne fait que traduire littéralement ce qu'il voit pour justifier le résultat de la limite? Quant à son contradicteur qui s'étonne que la limite de l'expression S(x+h) - S(x) ne vaut pas 0, il est perplexe, attiré qu'il demeure, malgré la contradiction, par le premier résultat. N'est-ce pas aussi par référence aux grandeurs plutôt qu'à leurs mesures que l'auteur du propos [391] justifie que $\lim_{h\to 0}[(S(x+h) - S(x)) / h] = f(x)$? Ce dont on prend la limite n'est pas pour lui un rapport de deux mesures, mais bien - curieusement - une surface; cette surface se réduisant à un segment, il s'agit de prendre la longueur du segment (et non son aire) lorsque on revient ensuite aux mesures. De même, tous les élèves qui assimilent à un anneau circulaire le taux d'accroissement de l'aire d'un disque par rapport à son rayon et qui ne savent trop si ce taux tend vers 0 (comme l'aire de l'anneau) ou $2\pi R$ (comme la longueur du cercle, vestige de l'anneau), ([385] à [390]; [392]). Ce "passage à la limite" au niveau des grandeurs ne s'amorce-t-il pas déjà lorsque les élèves considèrent les tranches de Clairaut comme les "limites" de prismes de plus en plus fins ([49], [50])?

L'erreur commise dans la situation évoquée par la Fig.17 s'explique, elle aussi, par une traduction abusive d'une "perception visuelle" en termes de mesures : les élèves "voient" (imaginent) les surfaces se réduire en segments et cela les pousse à attribuer aux longueurs de ces derniers une propriété vérifiée par les aires des premières.

3.8. Des "partitions" de solides en surfaces, ou de surfaces en lignes, qui conduisent à de fausses intégrales.

Considérons à présent le solide engendré par la rotation, autour de $y = 0$, de la surface délimitée par $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ et $x = 4$, solide pour le volume duquel un élève (IV.2.8.3.) proposait l'intégrale

$$\int_0^4 2\pi\sqrt{x}(4 - x)\, dx. \qquad (9)$$

Rappelons que l'intégrand $2\pi\sqrt{x}(4 - x)$ représente l'aire d'une surface cylindrique disposée comme sur la Fig.19. Cette intégrale ne

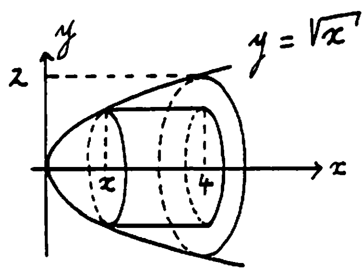


Fig.19

fournit pas la même réponse que cette autre :

$$\int_0^4 \pi x\, dx,. \qquad (10)$$

que l'on obtient en intégrant des disques perpendiculaires à ox, et ce fait provoque, pour un bon bout de temps, la perplexité des élèves et du professeur. Apparemment rien ne les pousse à préférer une intégrale à l'autre, si ce n'est la simplicité de la seconde : chacune des deux leur paraît être un bon candidat. Pourquoi? La raison n'en est pas explicitement formulée, mais ce pourrait bien être celle que suggère un professeur à qui nous avons ultérieurement soumis ce dilemme : les surfaces cylindriques forment, tout comme les disques, une partition du solide; les unes comme les autres le remplissent donc parfaitement.

On perçoit mieux ce qui manque à la première intégrale pour être correcte quand on part de la situation discrète dont cette intégrale est le pendant continu. La variable indépendante de cette dernière est x. Or, si l'on envisage une subdivision régulière de l'intervalle [0, 4] et qu'à chaque intervalle $[x, x+\Delta x]$ de la subdivision, on fait correspondre un anneau cylindrique d'axe ox comme à la Fig.20, on obtient des anneaux d'épaisseur Δy variable :

$$\Delta y = (x + \Delta x)^{1/2} - \sqrt{x} \cong \sqrt{x}\,(1 + \Delta x/2x) - \sqrt{x} = \sqrt{x}\,\Delta x/2x.$$

Le volume du paraboloïde s'obtient en calculant la limite d'une suite de sommes de volumes de tels anneaux, mais cette limite

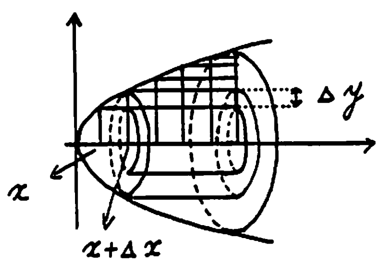


Fig.20

correspond à l'intégrale

$$\int_0^4 2\pi\sqrt{x}(4-x)\sqrt{x}/2x \; dx = \pi\int_0^4 (4-x)\; dx = 8\pi \qquad (11)$$

où l'on a pris en compte, non seulement l'aire latérale intérieure de l'anneau : $2\pi\sqrt{x}(4-x)$, mais aussi la fonction $\sqrt{x}/2x$ qui exprime son épaisseur. Par contre, si l'on "intègre" les disques perpendiculaires à ox, il suffit de primitiver la seule fonction qui donne leur aire pour obtenir un volume correct. Ou bien, on peut aussi "intégrer" les surfaces cylindriques d'axe ox par rapport à la variable y et il suffit, là encore, de disposer de la seule fonction (de y) qui exprime l'aire de ces surfaces :

$$\int_0^2 2\pi y(4-y^2)\; dy = 8\pi \qquad (12)$$

(On retrouve d'ailleurs $\pi\int_0^4 (4-x)\, dx$ à partir de cette intégrale lorsqu'on effectue le changement de variable $y = \sqrt{x}$). C'est que ces deux derniers calculs s'obtiennent en partant d'approximations discrètes du paraboloïde au moyen de solides dont l'épaisseur est un accroissement <u>constant</u> de la variable considérée : des cylindres d'épaisseur Δx dans le premier cas et des anneaux cylindriques d'épaisseur Δy dans le second (Fig.21).

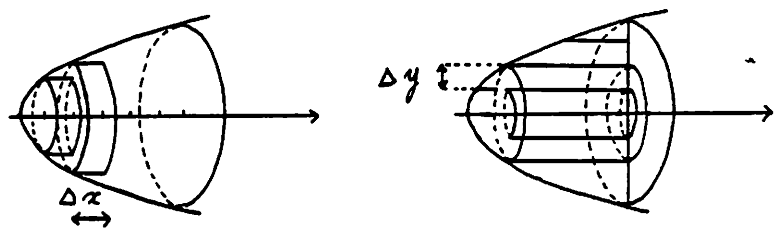


Fig.21

Peut-on faire comprendre aux élèves ce qui distingue les intégrales (9), (10), (11) et (12), et pourquoi il faut tenir compte d'un facteur supplémentaire dans un des cas, en se référant aux situations discrètes dont ces intégrales sont les "limites"? Nous n'avons pas essayé, étant donné que le rappel des paradoxes relatifs aux indivisibles irrégulièrement espacés, venu des élèves, s'est avéré suffisant. Il est possible, et même probable, que cela secoue leur intuition première, mais peut-être n'est-ce pas suffisant pour les convaincre? En effet, n'y-a-t-il pas, à leurs yeux, partition du paraboloïde en surfaces cylindriques, que celles-ci soient intégrées par rapport à x (cfr.(9)) ou par rapport à y (cfr.(12))? N'aboutit-on pas, pour eux, à la même partition, que l'on envisage toutes les surfaces cylindriques qui correspondent à toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 4 ou toutes celles qui correspondent à toutes les valeurs de y comprises entre 0 et 2, puisqu'il y a moyen d'établir une bijection entre les points de l'intervalle [0, 4] de l'axe ox et ceux de l'intervalle [0, 2] de l'axe oy, en se servant précisément de ces surfaces cylindriques comme intermédiaires? Les surfaces cylindriques ne sont-elles pas perçues comme les vestiges des anneaux cylindriques, à qui elles emprunteraient leurs propriétés, dont la capacité à "remplir", à "composer" le paraboloïde (ce qu'elles font parfaitement, elles, alors que les anneaux ne comblent le solide qu'approximativement); de même, on ne pourrait pas plus intercaler de surface cylindrique entre deux surfaces "successives" que d'anneau supplémentaire entre deux anneaux contigus. Et, dans la mesure où les anneaux cylindriques se réduisent à des surfaces, quelle différence y a-t-il à partir d'anneaux régulièrement épais ou non, cette épaisseur s'évanouissant de notre champ de vision? Or, comme le révèlent les erreurs décrites dans les sections précédentes, de nombreux élèves sont susceptibles d'être ébranlés par ces interrogations, sensibles qu'ils sont au "partitionnement" ou à la "réduction" des solides en surfaces, au point qu'ils les traduisent indûment en termes de mesures.

On voit aussi, dans cet exemple, deux intuitions se conforter l'une l'autre : d'une part, des solides partitionnés en surfaces, d'autre part, des surfaces vestiges de solides.

Nous verrons à la section 3.12.4. de ce chapitre le rôle joué par les paradoxes dans l'éclaircissement de cette erreur.

Une autre erreur est à rapprocher de celle qui vient d'être décrite : l'intégrale $\int_a^b 2\pi f(x)\,dx$ détermine l'aire latérale d'un solide engendré par la rotation, autour de l'axe ox, de la surface délimitée par le graphe de la fonction f, et les droites d'équation respective y = 0, x = a et x = b. Cette erreur a été rencontrée dans plusieurs contextes : l'aire latérale du cône ([200], [201]), l'aire latérale de la sphère (IV.2.7.5.) et les calculs d'aires latérales de solides de révolution en général (IV.2.6.1.). Elle est commise autant par les élèves qui n'ont jamais entendu parler des indivisibles que par les autres. Dans ce cas aussi, l'argumentation relève d'une perception des grandeurs : "les surfaces latérales sont "partitionnées" en cercles de périmètre $2\pi f(x)$, tout comme les solides le sont en disques d'aire $\pi(f(x))^2$". Ce glissement des disques qui comblent le solide aux cercles qui remplissent sa surface latérale ne se profile-t-il pas déjà lorsque certains élèves "dénombrent" les cercles de la surface latérale du cône au moyen des points de sa hauteur ([210], [211], [212])?

Là également, l'étude des paradoxes peut s'avérer éclairante. Nous y reviendrons dans la section VII.3.12.4.

3.9. Le "nombre" d'indivisibles exprimé par la mesure d'une grandeur.

A la section VII.3.2., nous avons relevé le cas de deux élèves qui assimilent la hauteur d'un prisme au "nombre" de surfaces dont ce prisme est composé ([71], [72]). L'un d'eux dit même explicitement : "Le nombre est h". Une identification analogue est faite par l'élève qui propose de déterminer le volume de la sphère en multipliant par πr l'aire du disque qui l'engendre en tournant autour d'un de ses diamètres ([251]). Cet élève assimile explicitement le nombre πr (une demi-circonférence précise-t-il) au nombre d'indivisibles. Quelque chose de semblable se joue aussi dans les deux dernières procédures décrites à la section IV.2.10. : pour déterminer le volume d'une sphère, un élève accouple dans ses deux hémisphères des disques parallèles à leur base commune et dont la somme des aires vaut l'aire de celle-ci; il reporte ensuite cette base autant de fois qu'il y a de disques dans un hémisphère et identifie ce nombre au rayon; un autre élève, indépendamment du premier, imagine un procédé analogue pour calculer l'aire du disque ([260]), ce qui l'amène à identifier au rayon le nombre d'indivisibles requis. Ces exemples recèlent à nouveau une échappée du contexte numérique vers celui des grandeurs : on comptabilise le nombre de fois qu'une surface est reportée dans un solide (ou un segment dans une surface) au moyen de points (un point pour chaque indivisible), on agglomère ceux-ci en tant que tels pour former un segment ou un arc de courbe et on revient ensuite dans le domaine numérique en proposant la mesure de ce segment ou de cet arc comme nombre d'indivisibles.

Notons que ce glissement ne débouche pas forcément sur une erreur : il y a erreur dans le cas de la sphère où l'on reporte la surface radialement, dans celui des deux hémisphères dans lesquels les disques couplés sont irrégulièrement espacés, mais ce n'est pas le cas du prisme oblique lorsque ce sont les points de la hauteur (et non ceux de l'arête oblique) qui servent à dénombrer les surfaces.

Ces réactions rappellent la manière d'expliquer l'aire du rectangle ou le volume du parallélipipède, à l'école primaire. On pave le premier de carrés unitaires, le second de cubes unitaires. Dans ce schéma, et même si les unités sont très petites, on multiplie effectivement des nombres : la largeur du rectangle est le nombre de carrés qu'il faut pour former une colonne et sa longueur est le nombre de colonnes qui remplissent le rectangle; de même, pour obtenir le volume d'un parallélipipède, on multiplie trois nombres : le nombre de fois qu'on peut reporter un cube dans une colonne, une colonne dans une couche, une couche dans le parallélipipède. N'y a-t-il pas dans les réactions observées ici une espèce d'inertie de ce modèle mental : celui-ci continue là où il n'a plus cours? Il n'empêche que cette persistance est significative par la manière même selon laquelle ce modèle s'adapte aux nouvelles circonstances : le nombre de fois qu'il faut reporter une surface (resp. un segment) pour former un solide (resp. une surface) est infini; qu'à cela ne tienne, il se concrétise, s'identifie même aux points d'un segment ou d'un arc de courbe et par là, à la longueur de ce dernier.

Ce glissement des nombres aux grandeurs est d'autant plus tentant qu'il est conforté par des considérations sur les dimensions des grandeurs. L'unité de base pour calculer un volume n'est plus un volume cette fois, mais une aire : quoi de plus normal, dès lors, que le "nombre de reports" s'apparente à une longueur; ne faut-il pas multiplier une dimension 2 par une dimension 1 pour avoir une dimension 3 (cfr. e.a.[8])?

Par ailleurs, n'est-ce pas cette intuition erronée d'un "nombre" d'indivisibles déterminé par la mesure d'une grandeur qui renforce l'effet de certains paradoxes? Ainsi les deux solides extraits de la sphère à la fiche IV.2.2. (Un drôle de découpage de la sphère) ont même volume, car ils sont faits d'un même nombre de surfaces cylindriques égales deux à deux. Et ce nombre est effectivement le même dans les deux solides car "donné" de part et d'autre par les points d'un huitième de cercle. L'intuition d'un "nombre" d'indivisibles déterminé par la mesure d'un arc de courbe soutient ici celle de solides vus comme ensembles équipotents d'indivisibles.

3.10. De la traduction numérique d'un mouvement au théorème de Guldin.

Il nous est fréquemment arrivé de voir un élève déterminer le volume d'un solide de révolution en multipliant par 2π l'aire de la surface qui l'engendre (cfr. e.a. [255]). Ce calcul est à rapprocher de celui qui consiste à multiplier la base d'un prisme oblique par la longueur de son arête en considérant que celui-ci est engendré par le mouvement de sa base le long de cette arête. Dans ce dernier cas, le mouvement est une translation et il "s'exprime" dans le calcul par la norme du vecteur translation. Dans le cas du solide de révolution, le mouvement est une rotation et il se "traduit" par un nombre qui mesure l'angle de rotation. Dans ces deux calculs de volume entrent exclusivement en ligne de compte, d'une part la mesure de la surface qu'on déplace, d'autre part "l'amplitude" du mouvement, un peu comme si le mouvement était susceptible de "créer" du volume. N'y a-t-il pas, là aussi, confusion entre solides et volumes : en effet, seuls les premiers peuvent être engendrés mentalement, en tant que grandeurs physico-géométriques, par le mouvement physique d'une surface, les seconds ne pouvant être le fruit du "mouvement d'une aire"?

Ces erreurs rappellent les procédures décrites en 3.9., à ceci près que le "nombre" d'indivisibles est donné ici par le "trajet" d'une surface, alors qu'aucune idée de mouvement n'était présente dans cette autre section.

Le calcul du volume du solide de révolution décrit supra est erroné, mais nous semble être le germe du théorème de Guldin selon lequel le volume d'un solide de révolution s'obtient en multipliant l'aire de la surface qui l'engendre par le périmètre du cercle décrit par le centre de gravité de cette dernière. En effet, on garde dans ce théorème la traduction numérique du mouvement de rotation tout en considérant la distance de chacun des points de la surface génératrice à l'axe de rotation : comme dit un élève, les points situés plus loin "décrivent une plus grande circonférence" [113]), et comme précise un autre, les points situés plus loin "représentent plus de volume" ([118]). Quoi de plus normal, dès lors, que de représenter tous les points de la surface génératrice par celui situé à une distance moyenne, à savoir le centre de gravité?

3.11. L'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions : un essai de caractérisation.

Plusieurs traits sont communs aux procédures relatées dans les sections 3.2. à 3.10. de ce chapitre :

1) une certaine perception des grandeurs s'immisce dans les calculs d'aires ou de volumes de manière inconsciente et indue; elle y provoque une erreur la plupart du temps;

2) des grandeurs de dimensions distinctes sont mêlées au sein de cette perception (solides avec surfaces ou surfaces avec lignes).

Tantôt on conclut abusivement que deux grandeurs sont entre elles comme leurs indivisibles respectifs, car elles sont partitionnées par ces derniers. Tantôt on prend la longueur d'un segment comme limite de l'aire d'une surface dont ce segment est le "vestige visuel"; ou bien on prête aux longueurs de segments une propriété vérifiée par les aires de surfaces dont ils sont les résidus. Tantôt encore on formule une intégrale définie en se basant sur la partition d'un solide en surfaces. A d'autres moments, c'est la mesure d'un segment ou d'un arc de courbe qui tient lieu de "nombre d'indivisibles", ou l'engendrement d'un solide par le mouvement d'une surface qui est traduit naïvement en termes de mesures... Nous dirons que nous sommes en présence d'une manifestation de **l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions**, lorsque sont remplies les deux conditions décrites au début de ce paragraphe. Pour nommer cet obstacle, nous nous sommes inspirée des termes *homogenea* et *heterogenea* que C. Boyer utilise pour décrire la controverse classique qui opposa e.a. Tacquet et Cavalieri sur la nature des grandeurs géométriques : "A geometrical magnitude, he [Tacquet] asserted, is made up only of homogenea, that is, parts of like dimension - a solid of small solids, an area of small areas, and a line of small lines - and not of heterogenea, or parts of a lower dimension, as Cavalieri had maintained "(C. Boyer, 1949). [Notons que C. Boyer interprète la position de Cavalieri un peu différemment que ne le fait F. De Gandt].

Nous verrons à la section VIII.2.3. d'autres manifestations de cet obstacle.

Est-ce un obstacle épistémologique au sens où nous l'avons évoqué dans l'introduction? Nous pensons que oui, en nous appuyant sur plusieurs faits .

1) Cet obstacle se manifeste par des erreurs multiples, fort différentes les unes des autres, mais auxquelles il permet de donner, tel qu'il est défini, une signification commune.

2) Ces erreurs sont récurrentes, persistantes : elles résistent aux mises en garde, elles ressurgissent sans crier gare.

3) Elles semblent indépendantes - ou peu s'en faut - de la formation reçue : certains de ces paradoxes ou erreurs embarrassent autant les professeurs que leurs élèves; et indépendantes aussi de la réussite scolaire : les élèves jugés "forts" sont tout aussi démunis que les autres.

4) Elles rejoignent des confusions fréquentes, ne fût-ce que dans le langage quotidien. Que de fois les élèves ne disent-ils pas "surface" là où ils devraient parler d'aire : peut-on incriminer à chaque fois une simple distraction?

5) Cet obstacle explique de multiples faits historiques : les controverses interminables sur la nature des indivisibles (ont-ils, oui ou non, la même dimension que la grandeur dont ils sont extraits, composent-ils réellement celle-ci...?); les discussions soulevées (e.a. entre Torricelli et Cavalieri) par les paradoxes, dont ceux qui sont repris dans notre suite de problèmes; des erreurs effectives comme celle, commise par Cavalieri lui-même (violant ses propres principes), qui consiste à "comparer les solides de révolution en comparant les figures génératrices, par exemple en "imaginant le cylindre comme composé [compactum] d'une infinité de parallélogrammes; et le cône construit sur la même base et le même axe que le cylindre, comme composé d'une infinité de triangles passant par l'axe" (cité par F. De Gandt, 1983).

6) Plusieurs des intuitions qui sont sources de cet obstacle sont susceptibles de se conforter l'une l'autre, ainsi que nous l'avons vu aux sections VII.3.8. et VII.3.9., à propos du paraboloïde partitionné en surfaces cylindriques inégalement espacées et à propos des deux solides extraits de la sphère à la fiche IV.2.2.

7) Enfin, cet obstacle interfère avec ce que les historiens des mathématiques appellent le **principe de continuité** et que Leibniz, à la suite de Kepler, formule en ces termes : "In any supposed transition, ending in any terminus, it is permissible to

institute a general reasoning, in which the final terminus may also be included" (traduit par M. Kline, 1972). En effet, ce principe se concrétise par des faits dont plusieurs rappellent les attitudes des élèves décrites ci-dessus. Quand, par exemple, Kepler identifie l'infini au fini, la ligne à une surface infinitésimale (C. Boyer, 1949). Quand Torricelli élabore sa conception de l'indivisible en considérant celui-ci comme vestige d'une figure finie : "Les propriétés des figures finies doivent se conserver dans le cas ultime où les figures sont devenues de simples vestiges, ou comme on dira plus tard, des figures "évanouissantes" (F. De Gandt, 1983). Ne sont-ce pas les mêmes raisons qui poussent Torricelli à dire qu'une ligne puisse être égale à une autre "en aire, et non en longueur" parce qu'elles sont, l'une et l'autre, les résidus de trapèzes de même aire, divisés une infinité de fois (IV.1.2.), et qui poussent les élèves à extrapoler aux longueurs de segments le rapport des aires des surfaces dont ces segments sont les vestiges (VII.3.7.). C'est encore le principe de continuité qui est sous-jacent à ces propos repris à la section VII.3.6., par lesquels Galilée étend, non sans étonnement, aux indivisibles extrêmes d'une écuelle et d'un hémisphère, dégénérés respectivement en un cercle et un point, la "relation d'égalité" vérifiée par les autres indivisibles homologues de ces deux solides. Les élèves, eux, estiment que des indivisibles extrêmes devraient, en un sens que nous avons décrit en VII.3.6., se comporter comme les autres dont ils sont une dégénérescence, pour qu'on puisse conclure quoi que ce soit quant aux mesures des grandeurs dont ils sont extraits.

Mais le principe de continuité déborde ce que nous avons appelé l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions, puisqu'on le reconnaît encore (cfr. e.a. I. Lakatos, 1984) dans la tentation à croire que "Si les termes d'une suite jouissent d'une propriété, sa limite jouit de la même propriété", tentation à laquelle succombe, entre beaucoup d'autres, Cauchy quand il prétend, à tort, que : "La limite de n'importe quelle série convergente de fonctions continues est elle-même continue". Ainsi donc, plusieurs manifestations de l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions s'expliquent-elles par le recours à un principe plus global dont tous les historiens soulignent l'impact dans le développement du calcul infinitésimal : "This striving for an expression of the idea of continuity constantly reappears throughout the period of some fifty years preceding the formulation of the methods of the calculus. Leibniz himself, like Kepler, frequently fell back upon his so-called law of continuity when called upon to justify the differential calculus; and Newton concealed his use of the notion of continuity under a concept which was empirically more satisfying, though equally undefined - that of instantaneous velocity, or fluxion" (C. Boyer, 1949).

3.12. Un effet didactique des paradoxes : l'espacement des indivisibles.

3.12.1. Des situations paradoxales.

Plusieurs des fiches proposées, plusieurs procédures spontanées des élèves donnent lieu à un **paradoxe mathématique**, c'est-à-dire, au sens du Larousse, à un "résultat notoirement faux, mais qui semble établi rigoureusement". C'est le cas, entre autres, des fiches III.2.1. (Du cylindre au cône tout de go), IV.2.1. (Comparons l'aire latérale d'un cône à celle de sa base), IV.2.2. (Un drôle de découpage de la sphère), IV.2.3. (Quelques paradoxes célèbres), IV.2.4. (Le paradoxe de l'écuelle), IV.2.7. (De l'aire latérale du cylindre à celle de la sphère). (D'autres erreurs d'élèves décrites en III.2.9. et IV.2.10. et déjà commentées dans ce chapitre, débouchent sur des paradoxes analogues; nous n'en ferons plus mention ici pour ne pas alourdir le texte). Dans les situations paradoxales qui nous intéressent ici (et qui sont celles qui ont contribué à faire mûrir chez les élèves l'idée d'espacement des indivisibles), la prétendue rigueur cache en fait, comme on l'a vu à la section 3.3. de ce chapitre, une confiance aveugle dans le principe qui s'énonce : " Des grandeurs composées d'un même nombre d'indivisibles sont entre elles comme ces derniers".

Mais il n'y aurait pas paradoxe si cette intuition ne contredisait pas soit un fait connu des élèves, soit un fait qu'on leur fait toucher du doigt, soit encore une autre intuition. Cette autre condition, toutes les situations précédentes la remplissent. La décomposition radiale du cône et du cylindre (III.2.1.) contredit le rapport de leurs volumes, rappelé au début de l'énoncé. La mise en correspondance des cercles de la surface latérale du cône et de ceux de sa base (IV.2.1.) remet en cause soit la formule de l'aire latérale - dont les élèves s'enquièrent -, soit l'intuition que, à rayon constant, cette aire croît avec la génératrice. Le drôle de découpage de la sphère (IV.2.2.) débouche sur une conclusion qui heurte l'intuition première (IV.2.2.1.), ou qui se réfute facilement sans recours aux surfaces cylindriques et même sans recours aucun aux indivisibles (IV.2.2.2.). Le parallélogramme découpé par sa diagonale en deux triangles "inégaux" ou le triangle partagé par sa hauteur en deux triangles soi-disant égaux (IV.2.3.) choquent le bon sens. Le paradoxe de l'écuelle (IV.2.4.) oppose un résultat obtenu par le biais des indivisibles à un autre, explicitement démontré par un autre biais. Et on contrôle aisément, sur base de formules connues ou facilement accessibles, que l'aire latérale de la sphère n'est pas inférieure à celle du cylindre circonscrit, comme le suggèrent leurs décompositions respectives en cercles (IV.2.7.).

Le conflit créé par ces paradoxes est d'autant plus sensible et d'autant plus susceptible d'être résorbé que le résultat connu mis en cause a caractère d'évidence aux yeux des élèves : une chose est de savoir qu'un résultat est faux, autre chose est de le sentir comme tel. Une intuition n'a-t-elle pas plus de chances d'être concurrencée par une autre intuition, plutôt que par un savoir? Et ceci peut expliquer, en partie du moins, que les différents paradoxes sont des pièges plus ou moins dangereux et débouchent plus ou moins vite sur l'évocation d'un certain espacement entre les indivisibles; cela explique plus particulièrement qu'il faille attendre les "paradoxes célèbres" (IV.2.3.) pour que la majorité des élèves trouvent une solution au conflit, soit en explicitant des règles de découpage en indivisibles, soit en parlant d'espacement ou d'épaisseur des indivisibles (IV.2.3.2.). En effet, le rapport entre le volume d'un cône et celui du cylindre circonscrit, les formules du volume de la sphère, de son aire latérale (utilisées dans IV.2.4. et IV.2.7.) sont des résultats culturellement connus mais peu reliés à une perception immédiate. L'intuition que l'aire latérale du cône ne peut valoir celle de sa base, surtout si celui-ci est très haut, et le sentiment que les deux solides extraits de la sphère ne peuvent avoir même volume (IV.2.2.) sont évoqués par une partie des élèves seulement et encore sont-ils prêts à s'incliner devant la conviction que les grandeurs sont composées de leurs indivisibles avec tout ce que cela suppose comme déductions hâtives sur leurs mesures. Par contre, aucun élève ne peut concevoir, par exemple, que la diagonale d'un parallélogramme partage celui-ci en deux parties inégales. D'autres raisons que nous détaillerons à la section 3.12.4. expliquent que les élèves résorbent ces différents paradoxes plus ou moins aisément.

3.12.2. Les solutions aux paradoxes proposées par Cavalieri et Torricelli sont issues de la perception. Seule celle de Torricelli débouche sur un revirement d'ordre conceptuel.

Pour pouvoir être distinguée de la position de Torricelli, du point de vue que nous allons développer dans cette section, celle de Cavalieri doit être précisée plus que nous ne l'avons fait en IV.1.2.

Lorsqu'il n'invoque pas un nombre différent d'indivisibles d'une grandeur à l'autre, Cavalieri se réfère à une certaine idée d'espacement entre ceux-ci. Mais cette idée évolue dans ses écrits comme le montrent les deux citations suivantes, par lesquelles il justifie ses règles de découpage des grandeurs en indivisibles :

- "Voyant donc que cette différence des transits [entendez direction de découpage] trouble la vérité de la règle générale, j'ai énoncé par conséquent dans la première définition que toutes les lignes des figures planes données doivent être prises selon le même transit, c'est-à-dire soit selon un transit droit, soit selon un même transit oblique, afin que nous conservions toujours, pour toutes les lignes, un même degré d'épaisseur ou de rareté..."

- "Notez les conséquences de ce qui a été dit : deux lignes quelconques de la figure proposée, parallèles à la règle indiquée, doivent avoir entre elles une distance égale à celles qu'ont entre elles les deux lignes qui leur correspondent dans l'autre figure à laquelle on compare la première" (cité par F. De Gandt, 1983).

Ainsi que l'explique F. De Gandt, Cavalieri n'évoque pas encore, dans la première citation, "la distance entre deux lignes successives mais le caractère plus ou moins "serré" de différents balayages" (Ib.); alors que dans la seconde, "il s'agit bien d'équidistance : Cavalieri compare deux couples de lignes correspondantes [...]" (Ib.).

Le mot épaisseur évoqué ça et là par Cavalieri ne renvoie pas à un nouveau concept d'indivisible doté de deux dimensions et possédant une aire, comme c'est le cas chez Torricelli, ainsi que nous l'avons écrit à la section IV.1.2. La différence entre la doctrine de Torricelli et celle de Cavalieri "tient dans le sens donné à "l'épaisseur", la "condensation" ou la "rareté" des indivisibles : chez Cavalieri ces adjectifs ne s'appliquent pas aux lignes elles-mêmes, mais à leur accumulation sur la surface, il ne dit pas que les lignes sont plus ou moins épaisses, mais qu'elles sont plus ou moins tassées" (F. De Gandt, 1983).

Les idées de Cavalieri, comme celles de Torricelli, semblent nées de la "perception". En lisant les propos de Cavalieri, on ne peut s'empêcher de voir des réseaux discrets d'indivisibles qui strient les grandeurs d'une manière plus ou moins dense, qui les ombrent de manière plus ou moins foncée. Quant aux indivisibles plus ou moins épais de Torricelli, on ne les appréhende jamais aussi bien qu'en regardant se rétrécir conjointement les surfaces dont ils sont les vestiges, tels les trapèzes EBCF et EBAG de la Fig.22 : le premier

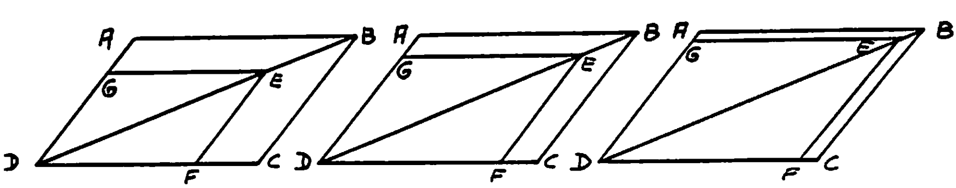


Fig.22

d'entre eux restant toujours plus large que l'autre, il est normal qu'il laisse "à la fin" une ligne plus "épaisse". Toutes ces idées semblent donc liées à une "visualisation".

Mais, la "perception visuelle" débouche chez Torricelli sur un revirement, un essai d'aménagement d'ordre conceptuel, ce qui n'est pas le cas chez Cavalieri. Ce dernier se réfugie derrière ses "sacro-saintes" règles de découpage, écartant en quelque sorte les paradoxes de sa théorie, et oppose à ces derniers des arguments qui relèvent exclusivement de la "perception". Ce qui laisse planer plus d'une interrogation sur la nature du continu telle celle que mentionne F. De Gandt (1983) : "Comment est-il possible que l'ont ait complètement balayé les deux figures, sans oublier aucune des positions successives de la droite pendant qu'elle glisse d'une extrêmité à l'autre, et que néanmoins les deux figures apparaissent finalement comme remplies ou criblées avec une densité inégale?" Tandis que Torricelli propose une tentative de conception nouvelle, pour le moins hardie, de l'indivisible, qui lui permet de rendre compte des usages d'indivisibles échappant aux règles de Cavalieri : sa théorie prend donc les paradóxes en considération. Cette nouvelle conception lui permettra d'ailleurs, ainsi que nous le verrons à la section 3.12.6., de trouver de nouveaux résultats. En ce sens, Torricelli nous paraît plus dégagé de l'intuition géométrique (de la "perception") que ne l'est Cavalieri.

Cette analyse renvoie aussi à I. Lakatos (trad. 1984) : d'abord, on écarte les exceptions par un essai pour cerner la portée du théorème. Ensuite, on change le théorème (et les concepts) pour que les exceptions soient prises en compte.

3.12.3. A quoi renvoie l'espacement et l'épaisseur des indivisibles chez les élèves.?

L'imagination des élèves semble plus proche de celle de Cavalieri que de celle de Torricelli. A l'instar de Cavalieri, ils évoquent :

1) Un nombre inégal d'indivisibles d'une grandeur à l'autre, évaluant ces nombres au moyen des points d'un segment ou d'un arc de courbe : à propos du paradoxe évoqué par le dessin (a) de la Fig.23 ([202], [203], [210], [211], [212]); à propos des dessins (c) et (d) ([234], [235]); à propos du dessin (f) ([249], [250]);

2) la distance entre deux indivisibles "successifs" : à propos du dessin (a) ([204], [205], [209]); à propos des dessins (c) et (d) ([230], [231]);

3) le caractère plus ou moins serré, la densité des balayages qu'ils relient parfois aux deux images précédentes : à propos du dessin (a) ([207], [208]); à propos du dessin (b) ([222]); à propos des dessins (c) et (d) ([236], [237], [238], [239], [240]).

Comme Cavalieri, ils vont d'une idée à l'autre : disparité du nombre d'indivisibles, disparité d'espacement ou de densité, considérant que chacune de ces deux explications des paradoxes rend l'autre superflue ([242], [243]).

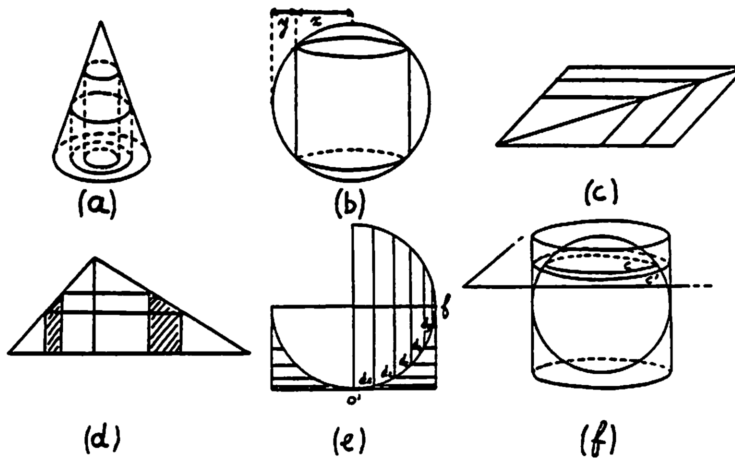


Fig.23

Quelques rares élèves utilisent le mot "épaisseur" : trois en tout, dont l'un ne précise pas ce qu'il entend par là ([206]). Le deuxième semble réserver, tout comme Cavalieri, cet attribut aux réseaux d'indivisibles plutôt qu'aux indivisibles eux-mêmes : il fait allusion au fait que pour ombrer deux surfaces de manière également foncée, il faut dessiner dans l'une des traits plus gros ([232]). Quant au troisième, il part du principe qu'une surface ne peut être faite que de surfaces et non de segments ([233]). Les élèves sont loin donc du concept d'indivisible de Torricelli, conçu comme vestige d'une figure finie dont il conserve les propriétés, entre autres celle de posséder une aire. Un autre fait nous paraît, à cet égard, significatif : c'est qu'en regardant les surfaces hachurées de la Fig.24 se rétrécir pour devenir les segments AB et CB,

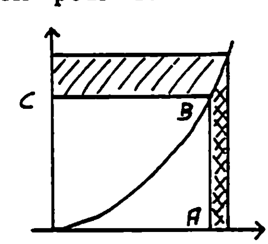


Fig.24

les élèves transfèrent le rapport de leurs aires aux <u>longueurs des segments</u> (VI.2.12.1.), alors que Torricelli, dans un cas semblable et conformément à ce qu'il fait en d'autres circonstances, extrapole ce rapport aux "aires infinitésimales" des segments (expression utilisée par E. Bortolotti, 1983).

Par conséquent, nous croyons pouvoir dire que l'espacement ou la densité des indivisibles relèvent plus, chez les élèves comme chez Cavalieri, de la "perception visuelle" (ou du moins est-ce ainsi que cela leur apparaît) que de la construction mentale : ils avancent des arguments qu'ils considèrent intuitifs, mais ne font aucune tentative d'élaboration conceptuelle, comme Torricelli le fait.

3.12.4. Comment naît et joue l'espacement des indivisibles d'un paradoxe à l'autre.

Le conflit créé par les paradoxes est plus ou moins difficile à dénouer suivant les cas, indépendamment du fait qu'il est, comme on l'a vu plus haut, plus ou moins patent dans l'un ou l'autre. Voici, au travers des exemples, plusieurs raisons qui expliquent pourquoi les images d'espacement et de densité d'indivisibles sont évoquées avec plus ou moins de facilité et d'efficacité suivant les cas.

1) Les segments ou arcs de courbe qui servent à "dénombrer" les indivisibles sont de longueur inégale d'une grandeur à l'autre dans les dessins (a), (c), (d), et (f) de la Fig.23, mais non dans les dessins (b) et (e) : il ne semble donc pas opportun, a priori, d'évoquer un nombre d'indivisibles plus grand d'un côté que de l'autre dans ces deux derniers cas, ou en tout cas c'est là une idée plus difficile à préciser alors. Ainsi l'élève qui suspecte l'idée du même nombre de surfaces cylindriques dans les deux solides extraits de la sphère ne peut-il en tirer parti ([217]). Et c'est sans doute ce qui pousse deux autres à insister sur le fait que ces surfaces sont en nombre égal ([218], [221]).

2) L'espacement entre les indivisibles est, dans certains cas, constant pour les deux grandeurs (dessins (a), (c), (d), dans d'autres, variables pour les deux (dessins (b), (e)) et dans un cas (dessin (f)), constant pour une grandeur et variable pour l'autre. La comparaison des distances entre indivisibles successifs ou de leur densité s'en trouve plus ou moins compliquée. Peut-être est-on tenté de considérer l'épaisseur globale de tous les indivisibles pris ensemble, lorsque ceux-ci sont irrégulièrement espacés, ce qui s'avère efficace jusqu'à un certain point dans le cas du dessin (b) ([221], [222], [223]) - du moins tant qu'on n'en conclut aucun rapport sur les volumes des solides -, mais non dans celui du dessin (e) où un regard local s'avère indispensable ([245]). En ce qui concerne le dessin (f), il faut considérer les indivisibles relativement éloignés du plan médian pour voir une disparité d'espacement entre la sphère

et le cylindre.

3) La mise en correspondance des indivisibles homologues se fait de manière relativement directe dans la plupart des cas : par projection dans le dessin (a), par l'intermédiaire des points d'une même grandeur pour les dessins (c), (d) et (e), par coupe plane dans le dessin (f). Par contre, elle est moins évidente dans le cas du dessin (b) puisqu'il faut considérer des points équidistants du point a : et de ce fait, on peut moins facilement déterminer les deux couples d'indivisibles homologues dont il convient de comparer l'espacement.

4) La direction selon laquelle il faut mesurer l'espacement des indivisibles ou leur nombre ne s'impose pas toujours. Surtout lorsqu'il s'agit d'aires latérales de solides, tenté qu'on est de prendre la direction perpendiculaire aux plans qui ont sectionné les indivisibles, tout comme si on cherchait leur volume ([210], [211], [212]; IV.2.6.1., point 3). Dans le cas du dessin (b), le choix des huitièmes de cercle qui servent à dénombrer les surfaces cylindriques induit une "direction", un parcours qui n'est pas celui qu'on doit faire pour mesurer l'espacement entre elles (ou leur nombre); il faut détacher son regard du cercle vers lequel il est attiré dans un premier temps pour arriver à jauger cet espacement, ce qui nécessite une prise de conscience supplémentaire ([220]).

5) Enfin, dans certains cas, il faut pouvoir coordonner deux informations : l'espacement des indivisibles et leur grandeur. Par exemple, dans le dessin (e), les couronnes et les disques sont irrégulièrement espacés, mais grosso modo de la même manière dans les deux solides : il y a "autant" de couronnes rapprochées que de disques rapprochés... mais les couronnes sont plus grandes là où elles sont les plus rapprochées et plus petites là où elles sont les plus éloignées les unes des autres, alors que c'est le contraire pour les disques.

La décomposition des grandeurs en indivisibles radiaux constitue un piège particulièrement tenace et difficile à déjouer. Nous en avons déjà mentionné plusieurs manifestations. Signalons encore d'autres circonstances où il apparaît - fût-ce à l'état latent - : [93], [94]; II.2.4.2.; II.2.6.3., Fig.53; III.2.2.1.; [251], [252]; IV.2.9.; VI.2.4.6.

Plusieurs raisons peuvent expliquer cette récurrence.

1) La bijection entre les ensembles d'indivisibles s'impose avec d'autant plus de force qu'aucun segment ou arc de courbe n'est nécessaire pour mettre les indivisibles homologues en correspondance : ceux-ci sont directement imbriqués l'un dans l'autre, point n'est donc besoin de faire intervenir des points intermédiaires.

2) Les solides sont définis par la rotation d'une surface. Et l'idée de ce mouvement peut renforcer la conviction qu'aucun point des solides n'échappe à ce "balayage" et que, par conséquent, les sections radiales les partitionnent bien (l'axe mis à part). De plus, la plupart des fois où l'on compare deux solides de révolution, l'un est inscrit dans l'autre : les surfaces qui les engendrent respectivement effectuent donc un même mouvement de rotation, autour du même axe. Alors que, par exemple, il faut considérer deux translations différentes pour engendrer un prisme droit et un prisme oblique par déplacement de leurs bases respectives.

3) Il n'y a pas à proprement parler d'espacement entre les indivisibles puisque celui-ci croît lorsqu'on s'éloigne de l'axe de rotation. Il est d'ailleurs rarement évoqué (à part dans les propos [116] et [117]). Et pour y voir clair, dans le cas du cône et du cylindre circonscrit par exemple, il faut coordonner cette variation de l'espacement en fonction de la distance à l'axe avec une autre information : les points qui composent le cône sont, proportionnellement à ceux qui remplissent le cylindre, de moins en moins nombreux au fur et à mesure qu'augmente l'espacement entre les indivisibles et c'est ce qui fait qu'on surévalue le volume du cône ([116], [117]).

3.12.5. Des situations comparatives aux situations non comparatives.

Les paradoxes cités ci-dessus se caractérisent par le fait qu'on y compare deux grandeurs par opposition aux cas où on en mesure une seule directement. Et c'est de cette comparaison que naît, comme on l'a vu, l'idée de l'espacement des indivisibles (ou de leur épaisseur). En effet, l'espacement entre les indivisibles, leur densité sont des notions relatives; dans l'absolu, elles ne signifient rien, puisque les indivisibles doivent être placés côte à côte, sans interstice aucun, pour qu'ils puissent remplir une grandeur. C'est en dessinant <u>deux</u> réseaux discrets d'indivisibles ou <u>deux</u> couples d' indivisibles homologues qu'on prend conscience de leur densité ou espacement relatifs.

Mais ces images, nées de situations comparatives, semblent garder un certain pouvoir évocateur dans les situations qui ne le sont pas. Ainsi un élève corrige une erreur dans le calcul de l'aire de la sphère en se souvenant que lorsqu'on comparait, cercle par cercle, cette aire à l'aire latérale du cylindre circonscrit, il fallait tenir compte d'une variation d'espacement entre les cercles composant la surface sphérique (IV.2.7.5.). Quant à l'erreur qui consiste à calculer le volume d'un paraboloïde d'axe ox en intégrant, par rapport à x, les surfaces cylindriques de même axe ox, elle se décèle et s'explique - de l'avis de tous, professeur et élèves -

lorsqu'on se réfère aux paradoxes dus à la disposition irrégulière des indivisibles (IV.2.8.3.). Les intuitions développées dans l'étude des paradoxes servent donc à donner du sens aux méthodes formelles de calcul des intégrales. Nous reviendrons sur ce point dans la conclusion.

3.12.6. Le nombre, l'espacement, l'épaisseur des indivisibles : des notions opératoires.

Parler du nombre d'indivisibles, de leur espacement, de leur épaisseur peut apparaître spéculatif, voire stérile. Pourtant ces notions, nées de la perception visuelle, ne fournissent pas seulement une interprétation intuitive des paradoxes sur les indivisibles : elles peuvent être opératoires, c'est-à-dire déboucher sur des résultats nouveaux.

Quelques élèves exploitent à plusieurs reprises l'idée du nombre ou de l'espacement des indivisibles au moyen d'un calcul : pour déterminer le rapport entre l'aire latérale du cône et celle de sa base - quelquefois en substituant indûment la hauteur à la génératrice - (IV.2.1.5.) ou encore le rapport entre l'aire de la sphère et l'aire latérale du cylindre circonscrit (IV.2.7.1.); de même, pour tirer le rapport entre les longueurs de segments du rapport entre les aires des surfaces dont ces segments sont les résidus respectifs ([411], [412]).

Il est bien sûr plus difficile d'exploiter ces notions pour déterminer un rapport entre des grandeurs dont les indivisibles sont irrégulièrement espacés, tenté qu'on est de considérer globalement ceux-ci ([221], [222], [223]), ou contraint qu'on est de coordonner l'espacement des indivisibles et leur mesure, comme dans le cas de l'aire de la sphère. Dans de semblables circonstances, Torricelli montre une maîtrise extraordinaire, exploitant e.a. la "taille des points" pour rectifier des courbes. Expliquons comment.

De même qu'il octroie une épaisseur aux lignes et aux surfaces, Torricelli attribue une taille aux points : "Que les indivisibles soient tous égaux entre eux, c'est-à-dire les points égaux aux points, les lignes égales en largeur aux lignes, et les surfaces égales en profondeur aux surfaces, c'est une opinion à mon avis non seulement difficile à prouver, mais même fausse. Soient deux cercles concentriques, et supposons que l'on tire à partir du centre toutes les lignes vers tous les points de la plus grande circonférence, il n'y a aucun doute que le même nombre de points sera engendré par le passage (transiti) de ces lignes sur la circonférence la plus petite, et chacun de ces points sera d'autant plus petit que le diamètre du petit cercle est plus petit que le diamètre du grand."

(cité par F. De Gandt, 1983). La fécondité de cette conception des points apparaît dans plusieurs applications qu'en donne Torricelli : la détermination de la tangente à une courbe, dont nous ne parlerons pas ici, et la rectification de courbes, telle la spirale d'Archimède. Ainsi il parvient à calculer la longueur d'un arc de spirale d'axe OA et de centre O en le comparant à un arc de parabole de sommet O et d'axe OB (Fig.25). A tout point C de la spirale, il fait correspondre un point C' de la parabole déterminé ainsi : le cercle de centre O et de rayon OC coupe l'axe OA en D; la droite DE parallèle à OB coupe la parabole en C'. Torricelli démontre alors, par un procédé que nous ne décrirons pas ici, que le cercle et la droite DE sont pareillement inclinés, l'un par rapport à l'arc de spirale, l'autre par rapport à l'arc de parabole et déterminent donc sur l'un et l'autre des points de même grosseur : ce qui l'autorise à égaler les longueurs des deux arcs.

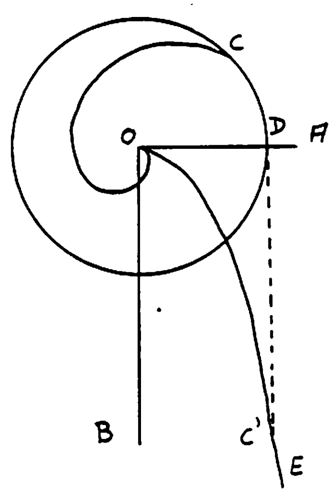


Fig.25

Chapitre VIII

Des grandeurs et des objets géométriques définis par une limite.

Dans ce chapitre nous étudions comment les objets mentaux associés aux concepts d'aire curviligne, de vitesse intantanée et de tangente font obstacle à la définition de ces concepts par le biais d'une limite. Nous tentons tout d'abord de cerner ces objets mentaux avant toute intervention de la limite (section 1). Ensuite, nous montrons comment les élèves conçoivent le passage à la limite à propos de l'aire curviligne (section 2), de la vitesse instantanée (section 3) et de la tangente (section 4). Enfin nous synthétisons les caractéristiques communes de ces trois passages à la limite (section 5).

1. L'aire, la vitesse et la tangente telles qu'elles sont perçues avant toute approche mathématique.

1.1. La vitesse instantanée, le débit instantané sont des objets mentaux plus fuyants que l'aire curviligne.

Ainsi que nous l'avons dit à la section VII.1., les élèves expriment, vis-à-vis du concept de débit instantané, une réserve qu'ils ne ressentent nullement à l'égard du concept d'aire curviligne. Cette réserve s'étend, comme nous le verrons, au concept de vitesse instantanée. Leur conception des nombres et du continu géométrique, telle que nous l'avons décrite dans cette même section, expliquerait partiellement pourquoi ils supposent d'office l'existence d'un nombre qui détermine exactement une telle aire, même s'ils nient celle d'un nombre qui définit une vitesse ou un débit instantanés. Mais la différence pour eux entre l'aire curviligne d'une part, la vitesse et le débit instantanés d'autre part, vient surtout du fait que ces grandeurs sont perçues fort différemment, ainsi que nous allons le voir.

<u>1.1.1. L'aire est une grandeur extensive; la vitesse et le débit sont des grandeurs intensives.</u>

Un premier critère permet de distinguer l'aire, fût-elle ou non rectiligne, de la vitesse ou du débit, constants ou non, : l'aire est une grandeur *extensive* tandis que les autres sont des grandeurs *intensives*. "On appelle **extensive** une grandeur, ou plutôt une espèce de grandeurs, représentable par une étendue, c'est-à-dire précisément telle que chaque grandeur peut être considérée comme la somme de deux ou plusieurs grandeurs de cette espèce; pour cela, il faut évidemment qu'on ait défini l'addition pour cette espèce de grandeurs. On appelle **intensive** toute grandeur qui ne satisfait pas à cette condition, c'est-à-dire [...] logiquement, une espèce de grandeurs pour laquelle l'addition n'est pas définie, mais où l'on peut définir la relation d'inégalité (plus grand que)" (A. Lalande, 1932).

Trois conséquences peuvent être tirées de ceci, qui alimenteront notre analyse :

1) On peut calculer une aire en sommant celles des morceaux en lesquels on aurait partitionné l'étendue qui lui correspond; on ne peut obtenir une vitesse en additionnant des "parties de vitesse" (expression due à F. De Gandt, 1982). (Idem pour un débit).

2) Partant, on peut aisément comparer deux aires de surfaces planes, même proches : soit on superpose les étendues qu'elles mesurent pour estimer l'eventuel excédent de l'une sur l'autre (dessin (a) de la Fig.1), soit on quadrille ces étendues (dessin (b) de la Fig.1). Par contre, la superposition des vitesses ou des débits,

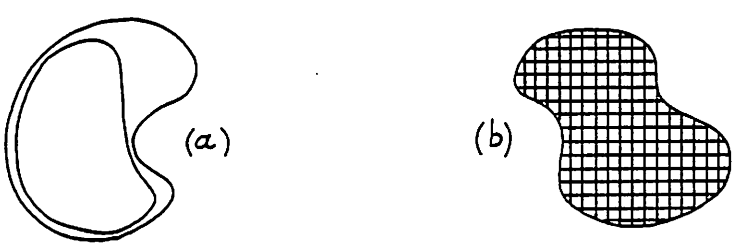


Fig.1

l'excédent de l'une ou l'un sur l'autre ou leur "quadrillage" ne signifient pas grand' chose de concret. Cela rend malaisé la comparaison de deux vitesses, surtout en certaines circonstances. Il est vrai que lorsque vous êtes en voiture et qu'une autre vous dépasse, vous pouvez estimer si cette dernière s'éloigne de vous plus ou moins vite qu'un vélo, par exemple, ne le ferait si vous étiez au repos. Mais les choses se compliquent dès qu'on veut comparer deux vitesses atteintes à des moments différents par la voiture dans laquelle on se trouve : il faut savoir se souvenir de la première au moment où l'on observe la seconde. De même, il est plus malaisé de comparer, en tant qu'observateur extérieur, les vitesses atteintes par un mobile en divers endroits de sa trajectoire que de comparer les vitesses atteintes simultanément par deux mobiles évoluant sur une même trajectoire. De toute façon, il est plus hasardeux d'avancer une affirmation telle que : "cette vitesse vaut à peu près

10 % de plus que l'autre" que de dire : "cette aire vaut à peu près 10 % de plus que cette autre". La première raison en est que l'on ne possède plus, comme dans le cas des aires, de traces visuelles que l'on peut observer et confronter à loisir et à "l'oeil nu", à moins, soit de considérer de mêmes laps de temps et de comparer, en lieu et place des vitesses ou débits, respectivement des espaces parcourus ou des volumes versés (toutes grandeurs extensives représentables par des segments), soit de "géométriser" les vitesses et débits sous forme de pente d'une droite sécante ou tangente. Mais la première possibilité ne convient qu'aux seules vitesses ou débits moyens et la seconde suppose un processus mental déjà élaboré, surtout en ce qui concerne les tangentes (cfr. VIII.4.1.). Déjà la confusion (souvent observée dans notre enseignement et mentionnée e.a. par A. Rouchier, 1980) entre la trajectoire d'un mobile et le graphe de sa loi de position est, à cet égard, éloquente.

Une autre raison qui rend difficile la comparaison de deux vitesses provient de ce que, dans les applications, les vitesses varient souvent par rapport au temps. Nous y reviendrons à la section 1.1.3. de ce chapitre.

3) L'aire se prête à une mesure directe, expérimentale, c'est-à-dire à être "évaluée d'après son rapport avec une autre grandeur de même espèce, prise comme unité" (Larousse). Le pesage est une technique de mesurage facile à imaginer et à réaliser (du moins tant qu'il s'agit de surfaces planes) : on découpe la surface d'aire inconnue ainsi que le carré d'aire unitaire dans un même matériau (du carton fort par exemple) et on pèse les découpes respectives. Rien de tel pour la vitesse ou le débit, du moins dans l'univers des élèves. Si mesures expérimentales il y a, ce ne peut être que celle de l'espace parcouru (ou du volume versé dans le cas de débit) et celle du temps (toutes grandeurs extensives puisqu'on les représente utilement par un segment ou une quantité de matière). La détermination d'une vitesse ou d'un débit dépend donc en fin de compte d'un calcul portant, lui, sur des mesures de grandeurs d'une autre espèce. [On évite le calcul en mesurant la distance ou le volume sur une unité de temps, mais on en n'a pas toujours la possibilité; et dans ce cas aussi, les mesures concernent d'autres espèces de grandeurs que celle à mesurer]. Cette troisième conséquence est intimement liée aux précédentes. En effet, dire qu'une aire vaut 3 cm^2 signifie qu'en juxtaposant trois carrés de 1 cm de côté, on obtient une surface de même aire. Mais qu'une vitesse vaille 3 cm/min ne signifie plus qu'on en obtient l'équivalent en juxtaposant ou en additionnant trois vitesses de 1 cm/min. L'addition n'a de sens que dans la composition de vitesses relatives. Mesurer une vitesse n'équivaut donc pas à la comparer directement à une autre vitesse-étalon.

1.1.2. La vitesse ne devient "métrique" que relativement tard, et dans l'histoire, et dans le développement de chaque individu.

Les faits décrits à la section précédente expliquent sans doute, du moins en partie, pourquoi la vitesse n'est considérée comme une quantité que relativement tard dans l'histoire.

Aristote, écrit H. Carteron (cité par J. Piaget, 1974), définit simplement la vitesse en disant "que le plus rapide est celui qui parcourt un espace égal en un plus petit temps, ou un plus grand espace en un temps moindre [...]".

Le mot *velocitas* est utilisé sans être défini dans les Discours sur deux sciences nouvelles de Galilée. Celui-ci ne fait aucune tentative pour mesurer la vitesse, ni pour expliquer comment on pourrait la mesurer. Sans doute sont-ce ces raisons qui poussent F. De Gandt (1982) à dire, à propos de la vitesse chez Galilée : "La vitesse est simplement une certaine qualité des corps, susceptible de croître et de diminuer - on pourra éventuellement tenter de mettre en rapport des vitesses différentes -. En tout cas, ce n'est pas une quantité à proprement parler. Ainsi, pour affirmer que la vitesse croît proportionnellement au temps, Galilée emploie une formule qui marque la différence de statut entre vitesse et temps : "L'intensification de la vitesse a lieu conformément à l'extensification du temps" ("intensionem velocitatis fieri juxta temporis extensionem", [...]". Il n'empêche que Galilée arrive malgré tout à faire jouer à la vitesse un rôle précis dans les raisonnements, en la représentant chaque fois par un segment, ce qui lui permet d'établir des énoncés quantitatifs tels que : "The spaces described by a body falling from rest with a uniformly accelerated motion are to each other as the squares of the time-intervals employed in traversing these distances" (Galileo, trad. H. Crew). Mais il est vrai qu'en l'absence d'unité de mesure, Galilée traite la vitesse dans l'ambiance des rapports de grandeurs et non dans celle des quantités numériques.

"En fait, il faudra attendre assez longtemps une définition [de la vitesse] proprement dite, en termes modernes; peut-être la première se trouve-t-elle dans les communications de Varignon à l'Académie des Sciences en 1.700. Même Newton se contente de la "définition" suivante dans un manuscrit de jeunesse : "La vitesse est l'intensité (ou l'intensification?) du mouvement" ("velocitas est motus intensio", Unpublished Scientific Papers, p. 115" (F. De Gandt, 1982).

Chez l'enfant, comme dans l'histoire, la notion de vitesse n'arrive à maturité que lentement. En effet, J. Piaget (1972) a mis en évidence que la "quantification" de la vitesse par l'enfant est le résultat d'un processus complexe et relativement long dont nous épinglons ci-dessous quelques traits significatifs.

1) Une première intuition élémentaire de la vitesse est fondée sur la perception de l'instant auquel on atteint le point d'arrivée : le plus rapide de deux mobiles est celui qui atteint le point d'arrivée avant l'autre, quels que soient leurs points de départ respectifs.

2) Ensuite l'enfant de 7-8 ans donne la primauté à la perception du dépassement. Il met en correspondance, par la pensée, n'importe quel point de la trajectoire d'un des mobiles avec n'importe quel point de la trajectoire de l'autre : il y a dépassement du mobile A par le mobile B lorsque ceux-ci se trouvent, d'abord dans l'ordre (B, A), ensuite dans l'ordre (A, B). Il peut également prolonger en pensée les mouvements perçus. A ce stade l'enfant fait des déductions exactes à propos de mouvements partiellement ou totalement synchrones et de quatre types seulement : de deux mobiles se déplaçant durant des temps égaux, celui qui fait le plus long chemin est le plus rapide; de deux mobiles parcourant les mêmes chemins, celui qui met le moins de temps va plus vite; celui qui fait plus de chemin en moins de temps va plus vite; celui qui fait moins de chemin en plus de temps va plus lentement. Il y a déjà l'idée d'un rapport entre le temps et l'espace parcouru mais ce rapport reste qualificatif.

3) Au dernier stade (11-12 ans), la vitesse devient une notion métrique, un rapport quantitatif entre l'espace e et le temps t : e/t. Ce rapport permet de comparer les vitesses de mouvements successifs et de dire quelque chose du mobile qui fait moins de chemin en moins de temps (ou plus de chemin en plus de temps).

On peut supposer que les élèves de 15 à 18 ans auxquels nous nous sommes adressée maîtrisent la notion métrique de vitesse moyenne ou uniforme. Rien ne permet d'infirmer cette hypothèse, sauf peut-être la réaction d'un élève à propos du concept de débit moyen ([298]). Cet élève ne voulait pas égaler l'expression du débit moyen sur l'intervalle de temps $[t, t+\Delta t]$, soit $(V(t+\Delta t) - V(t)) / \Delta t$ à 100 cm^3/min, mais bien à 100 $cm^3 / \Delta t$ min. Cette volonté de mettre le même Δt aux deux dénominateurs ne révèle-t-elle pas une difficulté à concevoir qu'on puisse égaler deux débits déterminés sur des laps de temps différents, c'est-à-dire une difficulté à penser le débit comme rapport quantitatif au sens où l'entend Piaget?

1.1.3. La vitesse et le débit instantanés sont des objets mentaux plus éloignés de la vitesse et du débit uniformes que ne l'est l'aire curviligne de l'aire rectiligne.

Si nous rapprochons le couple (vitesse instantanée, vitesse constante) du couple (aire curviligne, aire rectiligne), c'est que dans un cas comme dans l'autre un passage à la limite est impliqué, (à ceci près que la vitesse instantanée est la limite de vitesses moyennes, mais celles-ci ne sont-elles pas assimilées, en un certain sens et pour un certain temps, à des vitesses constantes?).

Au fait que la vitesse et le débit instantanés sont, tout comme la vitesse et le débit constants, de nature intensive s'ajoute le fait qu'ils sont, contrairement à ces derniers, susceptibles de varier dans le temps, ce qui contribue à les éloigner de notre perception. C'est que, "Notre esprit a besoin pour penser de concepts, c'est-à-dire de définitions stables, toujours identiques à elles-mêmes. Or, l'expérience ne nous fournit qu'un flux de phénomènes dans le temps; lors même que nous y reconnaissons des objets, ceux-ci ont une histoire, leur permanence est relative; notre langage les fixe, notre raison n'est à l'aise que parmi les idées intemporelles" (J. Ullmo, 1967). Est-ce parce que notre pensée se déroule dans le temps qu'elle s'accommode mal des notions "qui varient avec lui"? Peut-être. Quoiqu'il en soit, nous constatons le désir instinctif de figer mentalement cette variation en imaginant par exemple que le processus de variation s'arrête. Ainsi procède Galilée quand il mesure la vitesse d'un corps qui tombe par l'intensité du choc avec le sol : "From the quality and intensity of the blow we are thus enabled to accurately estimate the speed of a falling body" (Galileo, trad. H. Crew).

Et n'est-ce pas une autre manière de figer la vitesse instantanée - outre une façon de la remplacer par une grandeur extensive - que de l'expliquer en évoquant la distance que le mobile parcourrait en un certain temps si sa vitesse ne changeait plus, comme le fait Galilée, en substance, à propos du même mouvement (Ib.). De même, certains élèves éprouvent le besoin de "concrétiser" le débit variable d'une pompe en termes de volume versé par une autre pompe de débit constant. ([294], [295]).

[Il se pourrait qu'une même tendance à bloquer mentalement les processus fonctions du temps soit à l'origine d'une erreur fréquente à propos des vases communiquants (V.2.3.) : dire que le flux d'eau entre les deux vases change de sens lorsque l'eau atteint une hauteur $h = \sqrt{3}$ pour laquelle les volumes d'eau contenus dans les deux vases sont les mêmes ([308], [309], [310]). En fait, deux interprétations de cette erreur sont crédibles dont seule la seconde concerne notre propos présent. Tout d'abord, il pourrait s'agir d'une instabilité mentale entre :

- une vue correcte de la loi des vases communiquants basée sur une conception correcte de la pression (proportionnelle à la hauteur);

- une vue incorrecte de la pression : les deux poids de part et d'autre se font équilibre s'ils sont égaux. Ensuite, cette erreur peut s'expliquer par une difficulté à prendre en compte les échanges qui s'effectuent presqu'aussitôt qu'on verse l'eau, qui se poursuivent constamment et qui maintiennent presqu'instantanément une même hauteur d'eau dans les deux vases. Dans un premier temps, les élèves raisonnent correctement en prévoyant que l'eau ira d'abord du cône vers le cylindre et qu'ensuite elle changera de sens. Mais dans un second temps, ils penseraient ce changement comme un "équilibre", comme s'ils avaient bloqué tout échange depuis le début du processus et qu'ils recherchaient le moment où, une fois rouverte la jonction entre les deux vases, aucun échange ne s'effectue ni dans un sens, ni dans l'autre. C'est une interprétation que suggère en tout cas l'auteur du propos [310], qui donne une telle réponse "en supposant - dit-il - que le principe des vases communiquants ne fonctionne pas". Or, une telle inclination à suspendre les échanges d'eau entre les deux vases ne révèle-t-elle pas une difficulté à prendre en compte le caractère quasi-instantané de ces échanges?

A ceci s'ajoute la marge qu'il y a entre tout phénomène physique et sa modélisation : si l'on tient compte des forces de frottement dans le conduit qui relie les deux vases, les échanges d'eau ne peuvent se faire instantanément. Mais les élèves sont conscients de l'idéalisation qu'ils font du phénomène.]

Plaçons-nous dans la perspective des élèves pour qui, selon toute vraisemblance, les sensations constituent une réalité absolue.

La vitesse instantanée, grandeur intensive et susceptible de varier dans le temps est, du point de vue de leur perception et de l'observation des mesures, plus éloignée de la vitesse uniforme (ou moyenne) que l'aire curviligne ne l'est de l'aire rectiligne. En effet, la perception d'une aire, qu'elle soit ou non rectiligne, est - si l'on s'en tient aux seules sensations - du ressort de ce seul sens qu'est la vue : l'aire se concrétise par une surface qui est là, sous nos yeux, et qui le reste aussi longtemps qu'on le désire. La vision oculaire joue également un rôle dans la perception d'une vitesse mais d'une toute autre manière; il ne s'agit plus d'observer un objet statique mais un objet changeant : la distance d'un mobile à un point fixe de sa trajectoire si l'on est observateur du mouvement, le paysage qui défile si l'on est soi-même le mobile (remarquons qu'on peut, dans ce dernier cas, percevoir une variation de vitesse même en fermant les yeux, puisque l'on ressent l'effet d'une accélération ou d'une décélération). Or, l'enregistrement de toute perception au niveau du cerveau requiert un certain temps et durant ce temps, bien que minime, les objets ont déjà changé. On a donc l'impression - pour peu qu'on ait conscience de ce décalage - de devoir observer quelque chose qui nous échappe. De plus, la perception de la vitesse provient de la coordination de deux sensations : les images dynamiques d'une part, le "sentiment de durée" d'autre part : en l'absence de ce dernier, on ne peut plus se rendre compte si un mobile s'approche du but plus ou moins vite, ou si le paysage défile plus ou moins vite. Il faut donc prendre en considération l'écoulement du temps; mais n'est-ce justement pas le fait qu'il y ait ou non écoulement du temps qui distingue, pour le néophyte, la vitesse moyenne de la vitesse instantanée? On a donc la sensation de ne pouvoir distinguer les deux par la seule perception immédiate, c'est-à-dire l'impression de devoir assimiler la vitesse instantanée à une vitesse constante sur le laps de temps minimal requis par la perception. Par contre, le fait que la perception se déroule dans le temps ne creuse aucun fossé entre l'aire rectiligne et l'aire curviligne : la vue à elle seule permet d'appréhender aussi bien l'une que l'autre; et le même sens discri-mine l'une de l'autre, à l'épaisseur du trait de crayon près. On perçoit donc aussi bien l'aire curviligne que l'aire rectiligne sans avoir à assimiler la première à la seconde.

Au niveau des mesures expérimentales, c'est pareil. Devant la technique du pesage, l'aire curviligne est sur pied d'égalité avec l'aire rectiligne : cette technique permet de comparer, avec la même marge d'erreur, aussi bien les aires curvilignes entre elles que les aires rectilignes entre elles ou les unes avec les autres. Archimède ne s'y trompa point, qui pesa mentalement des surfaces et des solides curvilignes par comparaison avec des surfaces et des solides rectilignes, afin de conjecturer l'aire ou le volume des premiers. Que l'acte de mesurage se déroule dans le temps ne crée aucun clivage entre les aires rectilignes et les aires curvilignes : le temps mis pour la pesée n'influence en rien la précision de la mesure, ni pour les unes, ni pour les autres. Mais cela creuse un fossé entre la vitesse instantanée et la vitesse uniforme. En effet, comme on l'a vu plus haut, on ne mesure pas directement une vitesse mais on mesure un temps et un espace. Or, la précision atteinte lorsqu'on mesure un laps de temps est d'autant plus altérée par l'acte d'observation lui-même que ce laps est petit, l'erreur commise au moment de la mise en route du chronomètre et de son arrêt ayant un impact proportionnellement plus grand. Ici s'ajoute le fait que l'erreur de mesure relative d'une grandeur est inversement proportionnelle à celle-ci. Cela ne désavantage pas les aires curvilignes par rapport aux aires rectilignes (seule leur petitesse importe de ce point de vue), mais cela pénalise beaucoup plus les vitesses qui varient souvent et vite que les autres. En effet, comme la mesure porte entre autres sur le temps dans le cas de la vitesse, on a intérêt, lorsqu'on veut mesurer une vitesse (uniforme) avec précision, à considérer de longs intervalles de temps. On en arrive ainsi à un paradoxe, dès qu'il s'agit d'une vitesse instantanée : il faut aller vite puisque cette vitesse est susceptible de changer à tout moment, mais l'on perd en précision au fur et à mesure que l'on prend des intervalles de temps de plus en plus petits. De plus, lorsqu'on tente de mesurer des grandeurs quasi-nulles (les espaces autant que les temps), les erreurs sont alors de l'ordre des mesures faites.

Quant aux tachymètres des voitures, on a très vite cette impression qu'ils ne peuvent, eux aussi, qu'approcher imparfaitement la vitesse instantanée. En effet, même s'ils sont souvent considérés comme des boîtes noires, on leur impute spontanément les imprécisions inhérentes à tout appareil de mesure. Qui plus est, il faut tenir compte, ici aussi, du délai que nécessite toute lecture de mesure. Et de nouveau, ces imprécisions et ce délai prêtent d'autant plus à conséquence que l'on considère un laps de temps petit.

Ainsi donc, la vitesse instantanée échappe-t-elle au monde des mesures jusqu'à un certain point et, à cet égard, se distingue-t-elle plus de la vitesse uniforme (ou moyenne) que l'aire curviligne ne se distingue de l'aire rectiligne.

1.1.4. Un théorème des valeurs intermédiaires implicite pour le débit et la vitesse.

Un débit qui croît d'une valeur a à une valeur b passe par toutes les valeurs intermédiaires : voilà une proposition que de nombreux élèves supposent obvie à l'occasion du problème du vase conique (V.2.1.). Certains l'expriment explicitement ([263], [264]); d'autres la suggèrent en dessinant des graphes de débit continus ([271], [299]). Mais peut-être cette conviction est-elle induite par le contexte même du problème? C'est ce que nous analyserons, e.a. à la section 3.4. de ce chapitre. Les élèves formuleraient-ils une proposition analogue à propos des vitesses? Sans doute cela dépendrait-il là aussi du contexte. Il est fort probable qu'ils seraient tous convaincus que la vitesse d'une voiture, qui démarre et puis accélère, passe par toutes les valeurs comprises entre 0 et une valeur maximale. Mais peut-être quelques-uns douteraient-ils que la vitesse d'un objet lâché dans le champ de la pesanteur passe par des valeurs minimes au début de sa chute? C'est là en tout cas une question que s'est posé Galilée. Celui-ci écrit : "When I think of a heavy body falling from rest, that is, starting with zero speed and gaining speed in proportion to the time from the beginning of the motion; [...] and since time is divisible without limit, it follows from all these considerations that if the earlier speed of a body is less than its present speed in a constant ratio, then there is no degree of speed however small (or, one may say, no degree of slowness however great) with which we may not find this body travelling after starting from infinite slowness, i.e., from rest. [...]; a phenomenon which baffles the imagination, while our senses show us that a heavy falling body suddenly acquires great speed" (Galileo, trad. H. Crew). Il éprouve ensuite le besoin de se convaincre en assimilant la vitesse à l'intensité du choc [un corps qui ne tombe pas de haut heurte le sol avec un choc minime; or, pour Galilée, l'intensité de ce choc mesure la vitesse du corps].

1.2. La tangente est un objet relativement familier aux élèves.

Au moment où on leur enseigne la notion de tangente, les élèves ont déjà une représentation mentale de celle-ci : ils en parlent comme s'ils savaient depuis longtemps de quoi il s'agit. Dans le cadre de notre analyse, il importe de circonscrire cette conception première car, a priori, elle risque d'interférer avec la conception véhiculée par le calcul infinitésimal, voire de la concurrencer.

1.2.1. Quelques conceptions a priori de la tangente.

La conception de la tangente la plus fréquemment rencontrée chez les élèves est la conception algébrique : une tangente est une droite qui n'a qu'un seul point d'intersection avec la courbe. Elle est à l'origine de la plupart des essais mis en oeuvre pour résoudre le problème V.2.8. (La détermination des tangentes à une courbe : un problème vieux comme le monde), cfr. V.2.8.1., e.a. [326]. Elle ressurgit lorsqu'un élève interprète incorrectement le calcul de son compagnon à l'occasion du problème V.2.9. (Je maximise, tu minimises, nous optimisons). Ce dernier a obtenu l'équation $12x^2 - 128x + 156 = 0$, en exprimant que la droite passant par les points ((x+n), f(x+n); (x-n), f(x-n)) a une pente nulle et en remplaçant ensuite n par 0. Le premier s'imagine que les solutions de cette équation donnent, non pas les abcisses des deux extrêmés de la fonction, mais bien les abcisses des points d'intersection de la courbe, considérée dans sa totalité, avec une droite parallèle à ox, passant par le maximum local de celle-ci. ([341]).

Cette conception est globale : elle concerne la tangente sur toute sa longueur. Elle est rapidement discréditée auprès des élèves eux-mêmes, lorsqu'on évoque devant eux, soit la tangente à $y = x^3$ au point (1, 1) par exemple, soit un diamètre d'une parabole.

Une autre conception, plus locale celle-là, est présente dans l'un ou l'autre propos ou procédure : une tangente est une sécante dont les deux points d'intersection avec la courbe se sont rejoints ([317], [328], [329]). Cette conception est sous-jacente à la procédure par laquelle Fermat détermine des tangentes et que nous décrirons à la section VIII.4.2.3.

A. Sierpinska (1985) a observé, chez des élèves, une conception proche de la précédente : une tangente est une droite joignant deux points de la courbe infiniment proches. C'est, entre autres, celle de Leibniz.

Il est à noter que la plupart des élèves qui partagent ces conceptions locales de la tangente font bouger les deux points d'intersection plutôt que d'en laisser un fixe et de rapprocher l'autre de celui-là (sauf bien sûr si le contexte même du problème ne leur laisse pas le choix). Ainsi ces élèves qui mêlent au sein du même échange - bien qu'on ne soit pas sûr qu'ils se répondent l'un à l'autre - et le mot tangente et le calcul de la pente d'une sécante traversant la courbe aux points d'abcisse x-n et x+n et qui remplacent ensuite n par 0 ([341]). Ainsi aussi l'auteur du propos [319]. Mais en aucun cas, ils n'évoquent spontanément le mouvement de rotation d'une sécante autour d'un point fixe.

Remarquons que, pour bien des courbes (les coniques par exemple), d'autres conceptions de la tangente que celle véhiculée par le calcul infinitésimal suffisent amplement, ainsi que le prouvent certaines procédures d'élèves (p. ex. [328]).

1.2.2. La tangente est première par rapport à sa pente.

Dans le calcul infinitésimal actuel, on définit d'abord le nombre dérivé et ensuite la tangente en un point de la courbe représentative d'une fonction de **R** dans **R**, comme droite ayant ce nombre dérivé pour pente : la pente précède la tangente. C'est là un renversement par rapport au XVII[e], par exemple, au cours duquel la tangente était un objet premier et sa pente un objet second. C'est ainsi que Leibniz définit le "rapport" dy/dx, en se basant sur le triangle caractéristique, c'est-à-dire, en définitive, sur la tangente, comme si celle-ci préexistait au rapport : dx est la longueur finie mais arbitraire d'un segment (représenté à la Fig.2) et dy la

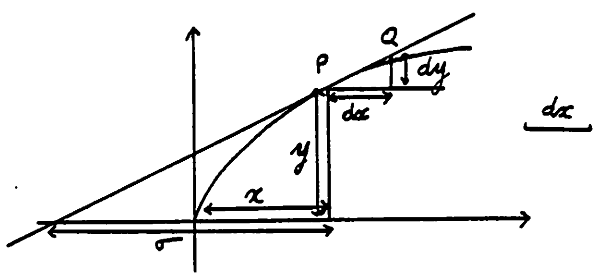


Fig.2

longueur d'un autre segment, donnée par la relation

$$dy/dx = y/\sigma$$

où σ est la longueur de la sous-tangente.

La pente d'une tangente est, tout comme n'importe quelle autre pente de droite, un objet mental pour les élèves, eussent-ils ou non reçu un enseignement sur les dérivées. Et à ce titre, elle est porteuse d'intuitions étrangères au calcul infinitésimal et que nous n'approfondirons pas ici : références à la verticalité, à l'horizontalité, à la gravité, aux angles... Même en tant qu'objet mental, c'est-à-dire avant d'être définie comme dérivée, la pente d'une tangente semble bien seconde, dans le chef des élèves, par rapport à la tangente elle-même. Aucune des conceptions de la tangente spontanément évoquées par ceux-ci ne fait mention de sa pente. Un élève propose même de prendre précisément la tangente pour trouver la pente d'une droite sécante dont les deux points d'intersection avec la courbe se sont rejoints ([339]). La plupart des élèves semblent donc très loin de l'idée de définir la tangente par le biais de sa pente, quelle que soit la manière dont cette dernière est déterminée, et a fortiori, ainsi que nous le verrons à la section VIII.4.2., lorsque la pente est la limite de quotients différentiels. D'ailleurs, l'idée même d'une définition de la tangente est peu évoquée dans les classes : les élèves se posent la question du "comment déterminer la pente d'une tangente", jamais celle de définir la tangente elle-même.

1.2.3. L'unicité de la tangente.

L'unicité de la tangente en un point d'une courbe est mise en cause par quelques élèves interrogés ici ou ailleurs et ce, semble-t-il, indépendamment de la manière dont ils se représentent cette droite. En effet, certains expriment leurs doutes quant à cette unicité, avant que la tangente ait été évoquée comme "position-limite" de sécantes qui tournent autour d'un point. (II.2.8.2.; V.2.8.3.). D'autres le font après : nous avons rencontré, en 15 ans d'enseignement, plusieurs élèves dont c'était le cas. De même, en parlant d'une manipulation qui consiste à montrer une sécante qui tourne autour d'un point jusqu'à devenir tangente, A. Sierpinska (1985) écrit : "Cela s'exprime par la naissance d'un doute sur le caractère déterministe du processus en question : "Quand on arrivera au point S on n'aura plus qu'un seul point, mais par un seul point on peut mener beaucoup de droites" [...]". Peut-être aussi est-ce un doute analogue que ressent l'élève qui se demande si la sécante à la courbe $e(t) = t^2/4$, passant par les points $(1, 1/4)$ et $(1+\Delta t, (1+\Delta t)^2/4)$, tourne ou non jusqu'à l'horizontale lorsque Δt tend vers 0 ([334]) : il semble en tout cas n'être pas conscient que cette sécante va évoluer jusqu'à atteindre une direction univoquement déterminée, différente de l'horizontale.

Il est vrai qu'on ressent une certaine incertitude quand on dessine une tangente en un point d'une courbe. C'est que tout trait de crayon, si fin soit-il, est doté d'une certaine épaisseur : ce qui peut donner l'impression qu'on peut incliner légèrement la règle autour d'un point sans qu'elle devienne sécante, le petit bout de sécante entre les deux points d'intersection avec la courbe formant un gros point noyé dans le trait qui représente cette dernière. Bien sûr, il est peu probable que les élèves interrogés ici confondent le concept de ligne droite ou courbe avec le support matériel qui la figure ou le point du géomètre avec la tache qui en tient lieu sur le papier. Il n'empêche que cette discrimination ne leur est pas toujours présente à l'esprit : ainsi avons-nous souvent vu des élèves s'étonner qu'une courbe puisse s'approcher indéfiniment d'une asymptote sans finir par la rencontrer, en se référant à l'impossibilité de dessiner effectivement une telle situation.

Peut-être les élèves qui disent qu'il y a plusieurs tangentes en un point veulent-ils tout simplement dire qu'il n'y en a qu'une mais qu'on ne sait pas quelle pente lui donner?

Un autre fait peut, par contraste, éclairer le premier : s'il peut y avoir, pour certains élèves, plusieurs tangentes en un point, une droite de direction donnée ne peut être, aux yeux de tous, tangente à une courbe (suffisamment régulière) qu'en un seul point (du moins localement). C'est ce que postulent implicitement les élèves qui proposent de déterminer le maximum d'une fonction en translatant une droite, parallèlement à l'axe ox, jusqu'à ce qu'elle rencontre en un seul point la courbe représentative de cette fonction (V.2.9.2., e.a. [341]). D'où vient une telle certitude? L'objet à déterminer est ici un point et non une pente. De plus, on a tout de suite affaire, dans cette dernière situation, à une famille de droites sécantes (Fig.3) dont la tangente est l'aboutissement et, au fur

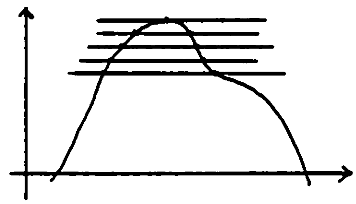


Fig.3

et à mesure que l'on se rapproche de cette dernière, on voit les deux points d'intersection de la courbe et des sécantes successives se rapprocher l'un de l'autre. On a tôt fait d'imaginer, par une sorte d'argument de continuité, que les deux points, à un moment donné, n'en font plus qu'un seul. Par contre, lorsqu'on cherche à dessiner la tangente en un point d'une courbe, la situation se présente autrement. D'abord, l'objet sur lequel porte l'incertitude est, cette fois, une pente. Ensuite, on ne pense pas forcément à une famille de sécantes dont la tangente serait "l'élément extrême" : ainsi dans la conception algébrique d'une tangente, il n'est fait mention d'aucune sécante. Enfin, même lorsque la tangente est vue comme "position-limite" d'une famille de sécantes (soit comme suggéré à la Fig.4 si la tangente est perçue comme sécante dont les deux points d'intersection avec la courbe se sont rejoints, soit comme sur la Fig.5 dans la conception plus classique), il ne va pas de soi que sa pente est la limite de celles des sécantes. Déjà, dans la Fig.4,

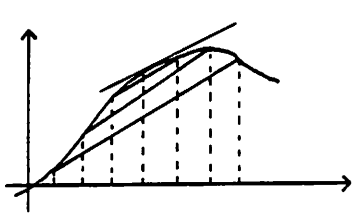


Fig.4

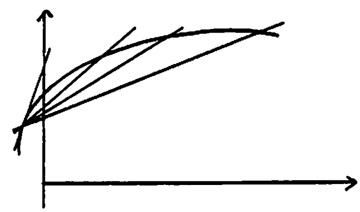


Fig.5

les pentes des sécantes peuvent sembler évoluer de manière anarchique. Mais surtout, le passage de la tangente à sa pente soulève d'énormes difficultés que nous analyserons à la section VIII.4.2.

2. L'aire curviligne définie comme limite d'une suite d'aires rectilignes.

Ainsi que le décrit J. Mawhin (1983), les sommes et l'intégrale dites de Riemann ont joué un rôle très tôt dans l'histoire des mathématiques, bien avant d'être formulées définitivement par celui-ci et de lui être ainsi attribuées. Mais leur statut a subi un profond changement au cours des siècles. Avant Cauchy, ces sommes et cette intégrale étaient regardées comme un moyen d'approximer ou de calculer exactement l'aire sous une courbe, laquelle était un objet premier dont l'existence était implicitement indéniable. "Rompant avec la tradition, il [Cauchy] se pose clairement le problème de l'existence des quantités que l'on veut calculer (exactement ou approximativement), avant de s'intéresser à ce calcul" (J. Mawhin, Ib.). Par exemple, il tente de démontrer, sous l'hypothèse de continuité de f, l'existence d'un nombre vers lequel converge $\Sigma\ f(a_{j-1})(a_j - a_{j-1})$, lorsque $\max_{1\leq j\leq n}(a_j - a_{j-1})$ tend vers 0. L'accent se déplace ainsi peu à peu de l'objet géométrique vers le procédé opératoire qui devient premier. Ce déplacement s'accentue encore lorsque "[Riemann] se demande dans quels cas ce procédé, appliqué à des fonctions discontinues, donne un nombre déterminé. Cauchy n'appliquait son procédé de définition qu'à des fonctions considérées a priori comme intéressantes : les fonctions continues; maintenant, au contraire, toute fonction sera intéressante à laquelle s'appliquera le procédé de définition" (H. Lebesgue, cité par J. Mawhin, Ib.). Dans l'optique de Riemann, l'aire n'est plus définie comme un objet géométrique, mais comme le résultat d'un calcul selon un procédé donné. C'est ce point de vue qui bien souvent est imposé aux élèves du secondaire et aux étudiants d'université. Mais, pour eux, l'aire sous une courbe préexiste comme un objet mental (que nous avons décrit aux sections VII.1. et VIII.1.). Il s'agit donc plus, pour eux, d'établir des connections entre cet objet et l'intégrale de Riemann (ou toute autre définition d'intégrale), que de prendre cette dernière comme point de départ. Quelle "distance épistémologique" sépare l'un de l'autre? C'est ce que nous tentons d'évaluer dans cette section.

2.1. Des découpages qui s'inspirent de la forme de la figure, des quadrillages, des découpages laminaires.

Pour estimer l'aire d'une surface curviligne, on lui inscrit tout naturellement des surfaces rectilignes qui s'en approchent au mieux, ou bien on lui circonscrit de telles surfaces. (Pour fixer les idées et pour ne pas alourdir cette section, nous ne parlerons que des figures inscrites, à propos desquelles nous utiliserons le mot familier de "découpage", étant entendu que notre propos se transpose, mutatis mutandis, aux figures circonscrites).

Les Fig.6, 7 et 8 montrent trois découpages différents du disque. La première suggère une approche de l'aire du disque au

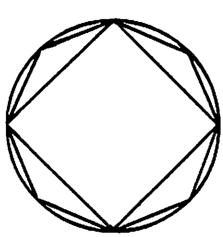


Fig.6

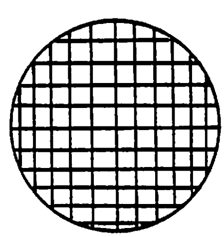


Fig.7

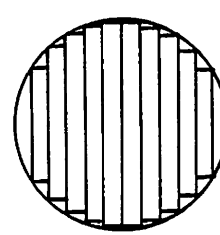


Fig.8

moyen d'un carré, ensuite d'un octogone régulier, puis d'un polygone régulier à 16 côtés, et ainsi de suite. Dans la deuxième, on quadrille le disque de carrés de plus en plus nombreux et de plus en plus petits. Dans la troisième, on inscrit dans le disque des polygones formés de rectangles "parallèles" de même largeur, sans cesse plus nombreux et plus fins. Les Fig.9, 10 et 11 suggèrent des découpages équivalents de la surface sous $y = x^3$, entre 0 et 1.

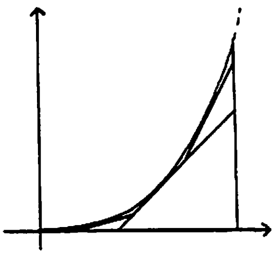


Fig.9

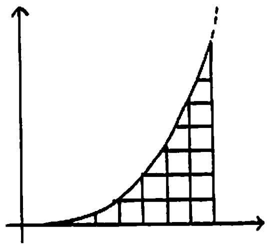


Fig.10

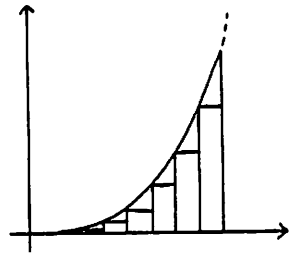


Fig.11

Les découpages des Fig. 6 et 9 sont **inspirés de la forme de la figure initiale.** Ceux des Fig. 7 et 10 seront appelés **quadrillages** (même lorsque la brique de base est un rectangle ou un parallélogramme, et non un carré); ceux des Fig.8 et 11 des **découpages laminaires** (composés de lamelles parallèles) : nous incluons dans ces derniers les découpages en rectangles d'épaisseurs inégales, de même que les découpages en trapèzes.

D'emblée, les élèves proposent plus souvent des découpages qui s'inspirent de la forme de la figure considérée (même lorsque, contrairement au découpage du disque de la Fig.6, ils ne conduisent à aucun algorithme de calcul), quelquefois des quadrillages et beaucoup plus rarement des découpages laminaires (III.2.7.1.; VI.2.10.2.). Et encore préfèrent-ils, dans ce dernier cas, des trapèzes aux rectangles et des rectangles de même épaisseur à des rectangles d'épaisseur inégale. Cette restriction à l'égard des découpages laminaires demeure, même lorsque l'énoncé du problème induit une direction privilégiée de découpage, comme c'est le cas du problème de la symétrie affine (II.2.2.13.), ou même lorsque les suggestions du professeur se font de plus en plus explicites (fin de [135]).

Ceci rejoint un fait historique dont nous avons déjà parlé à la section III.1.5. : il faut attendre le XVII^{e} siècle pour voir des aires curvilignes *systématiquement* approchées par des polygones décomposables en rectangles plutôt que par des polygones dont la forme est choisie en fonction de celle des surfaces curvilignes. Voici pour les faits. Venons-en à l'interprétation.

Les découpages qui sont inspirés par la forme de la figure initiale semblent dictés par un certain sens pratique. Par souci de simplicité et d'efficacité, on essaie de remplir au mieux la surface curviligne avec une surface rectiligne, dont l'aire est facile à calculer et dont la forme ou éventuellement les symétries rappellent celles de la surface initiale : un carré dans le disque, un triangle dans la surface délimitée par $y = x^3$. On détermine ainsi, en un temps minimal, la part la plus substantielle possible de l'aire inconnue. On cherche ensuite à affiner cette première estimation en s'occupant des "effets de bord" : on borde la première surface rectiligne de surfaces rectilignes plus petites pour s'approcher de plus en plus près de la frontière courbe.

Dans les trois types de découpages, l'aire curviligne sera donnée par la limite d'une suite d'aires rectilignes (A_1, A_2,...A_n,...), aussi bien que par la somme de la série $B_0 + B_1 +... B_n +...$, dont les termes sont les différences des termes successifs de la suite : $B_0 = A_1$; $B_i = A_{i+1} - A_i$. Mais "l'aspect-série" ne ressort bien que dans le cas d'un découpage inspiré de la forme de la figure. Voici pourquoi. Dans le cas du disque découpé comme sur la Fig.6, A_1 est l'aire du carré, A_2 celle de l'octogone, A_3 celle du polygone à 16 côtés... alors que B_i représente l'excédent de l'aire du polygone de 2^{i+2} côtés sur celle du polygone de 2^{i+1} côtés. Chacun de ces excédents est une surface significative et aisément identifiable de la Fig.6 : B_1 est l'aire des quatre triangles accolés au carré, B_2 celle des triangles bordant l'octogone... et de plus, ils sont tous facilement discernables sur un seul dessin. Par contre, seul "l'aspect-suite" de la limite est naturellement associé aux découpages laminaires. En effet, supposons que l'on approche l'aire sous $y = x^3$ par une suite dont le terme d'indice n est la somme des aires de n rectangles inscrits (Fig. 12.). Le terme B_i de la série correspondante serait la différence entre la somme des aires de i+1 rectangles et celle des aires de i rectangles, ce qui correspond à une surface difficilement identifiable, comme le montre la Fig.12 où $i = 7$. De plus, on ne peut

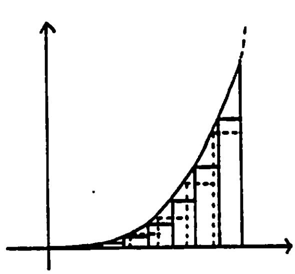


Fig.12

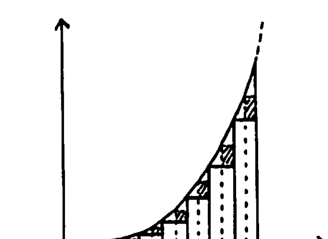


Fig.13

représenter plusieurs des termes de la série en question sur un seul dessin sans surcharger celui-ci. Cela va déjà mieux si l'on prend une suite d'aires rectilignes telle que chaque ensemble de points de subdivision inclut l'ensemble précédent, par exemple en dédoublant les rectangles à chaque fois, comme le suggèrent les traits pointillés de la Fig.13. Mais, dans ce cas comme dans le précédent, on perd de vue la structure "en rectangles" dès qu'on veut écrire les termes de la suite comme sommes partielles d'une série : on doit écrire la somme des aires des rectangles considérés à une étape donnée comme la somme des aires des rectangles de l'étape précédente plus celle de plus petits rectangles (hachurés sur la Fig.13) qui les surplombent.

Or, approcher une aire au moyen d'une série est plus naturel que de l'approcher au moyen d'une suite. En effet, chaque terme de la série est conservé, engrangé, puisqu'additionné aux autres. Quoi de plus normal puisque chacun d'eux est une partie constitutive du résultat final et, de ce point de vue, les premiers termes sont les plus importants : le carré fait plus de la moitié du disque de la Fig.6, les triangles accolés aux côtés du carré, plus de la moitié du reste... Alors que lorsqu'on considère une aire curviligne comme limite d'une suite d'aires rectilignes, les termes de la suite sont tour à tour abandonnés au profit des suivants : on passe de n rectangles à n+1 rectangles en détruisant les premiers pour reconstruire les seconds, ou de n rectangles à 2n rectangles en déstructurant les premiers pour faire les autres. Ces abandons successifs peuvent paraître a priori frustrants, voire aberrants : pourquoi ne pas garder ce qui est déjà acquis! La considération des premiers termes de la suite n'a donc de sens que pour celui qui conçoit d'emblée le déroulement du processus jusqu'à son terme, c'est-à-dire la limite de la suite (et nous verrons les difficultés que cela soulève à la section VIII.2.3.), ou éventuellement pour celui qui espère pouvoir généraliser les premiers termes par le biais d'un algorithme de calcul ([136]), mais ceci arrive souvent dans la perspective d'une approximation. Tout ceci explique pourquoi les découpages laminaires - difficilement associables à l'idée de série - sont, dans un premier temps, peu souvent évoqués par les élèves.

Un phénomène analogue se produit pour les quadrillages sauf que, dans ce cas, on peut considérer l'aire curviligne cherchée comme la somme d'une série sans perdre l'idée même de quadrillage : simplement on quadrille les termes successifs de la suite correspondante avec des carrés de plus en plus petits. De plus, les quadrillages sont familiers et naturels aux élèves depuis longtemps, ne fût-ce qu'à titre de réminiscence de la manière dont on a obtenu l'aire du rectangle, et par le fait qu'ils font référence à une unité d'aire conventionnelle. D'où leur fréquence relative.

Il n'est pas difficile de comprendre pourquoi les élèves choisissent de préférence des trapèzes ou des rectangles de même épaisseur, lorsqu'il leur arrive de considérer des découpages laminaires. Ils sont loin de l'idée qu'on puisse obtenir un résultat exact au moyen d'une limite (cfr. VIII.2.3) : ils cherchent à approximer l'aire le mieux possible, le plus vite possible, le plus simplement possible. Or, l'approximation numérique par trapèzes leur paraît plus efficace que celle des rectangles. Et n'est-ce pas la "régularité" du pas de subdivision qui permet l'algébrisation du calcul (si on a affaire, bien sûr, à des fonctions définies au moyen d'expressions analytiques)?

2.2. Un passage à la limite implicite mais effectif dans le calcul de l'aire sous $y = x^3$.

Lorsque, avec l'aide du professeur, les élèves arrivent aux polynômes en n qui expriment les sommes des aires des n rectangles ou trapèzes approchant par excès ou par défaut l'aire sous $y = x^3$ entre les bornes 0 et 1, ils saisissent tous la spécificité des termes de la forme a/n ou b/n^2 : ces termes deviennent négligeables (nuls?) lorsque n tend vers l'infini. Leur suppression est ipso facto envisagée ce qu'on voit au fait que les élèves pointent le terme 1/4 dans les polynômes obtenus sans que le professeur ait précisé quoi que ce soit en demandant ce que vaut, en définitive, l'aire cherchée (III.2.7.3). Les élèves réalisent ainsi un passage à la limite "en acte", mais ils ne s'accordent pas tous sur la signification du résultat obtenu : pour les uns, 1/4 est l'aire cherchée, pour les autres, ce n'en est qu'une approximation. Plusieurs hypothèses décrites dans les sections 2.3., 2.4. et 2.5. expliquent cette diversité d'opinions.

2.3. Une impasse qu'explique l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions.

La question de savoir si l'aire sous $y = x^3$ entre 0 et 1 vaut 1/4 exactement ou approximativement est matière a débat au sein de toutes les classes. S'il y a débat, c'est que les élèves tirent séparément des conséquences différentes des mêmes faits et ne peuvent trancher lors de la confrontation. Ces débats débouchent tous sur la formulation d'une alternative dont les termes sont, rappelons-le grosso modo, les suivants : tant que les rectangles ont une certaine épaisseur, ils ne remplissent pas tout à fait la surface considérée, il reste des petits "triangles" à combler; et lorsqu'ils se réduisent à des segments, ils ont une aire nulle et on voit mal dans ce cas comment leur "somme" conduit au résultat (III.2.7.3.; III.2.7.4.; III.2.7.5.; III.2.7.8.). Ce débat est loin d'être réglé par les élèves qui ont déjà reçu un enseignement du calcul intégral (VI.2.12.2.). C'est aussi un débat qui a suscité, dans l'histoire des mathématiques, des controverses interminables.

Une alternative analogue est formulée à l'occasion de la lecture du texte de Clairaut : si les tranches des prismes sont des surfaces, elles ne peuvent "composer" ceux-ci et si ce sont des prismes très fins, on n'a rien démontré (II.2.2.4., II.2.2.5. et II.2.2.6.). Mais elle prend, dans ces circonstances, une toute autre signification. Il s'agit là d'accepter ou non le principe de Cavalieri comme axiome. Le débat, en fait, provient du souci qu'ont les élèves de prouver ce principe, souci que certains expriment explicitement (II.2.5.2.). Ici, l'enjeu du débat est tout autre : il ne s'agit plus d'une discussion sur la valeur démonstrative d'un principe mais il s'agit d'un calcul d'aire. Et que l'alternative surgisse à propos d'un tel calcul pourrait bien relever de l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions. En effet, on oppose explicitement dans cette alternative le fait que les rectangles aient une certaine épaisseur au fait qu'ils soient réduits à des segments. D'un point de vue strictement ensembliste, cette alternative a un sens : ou bien on partitionne la surface en véritables rectangles et "triangles" résiduels, ou bien on la partitionne en segments indivisibles. Cependant, l'alternative ne peut fonctionner dans le seul contexte numérique. Pour obtenir l'aire sous $y = x^3$ entre les bornes 0 et 1, on doit calculer la limite d'une suite de nombres, chacun d'eux représentant une somme d'aires de rectangles inscrits. Mais la limite elle-même (égale à 1/4) est, dans ce cas, extérieure à la suite, en ce sens qu'elle n'est pas un de ses termes. Il n'y a donc pas lieu de l'interpréter en se référant aux rectangles. Elle donne l'aire sous la courbe et non pas une somme d'aires de rectangles, ceux-ci fussent-ils devenus des segments. En fait, on ne peut formuler l'alternative sans quitter le domaine des mesures et faire une incursion dans celui de la perception des grandeurs. Tout se passe en effet comme si les élèves effectuaient le "passage à la limite" au niveau de la perception visuelle des grandeurs où les rectangles se rétrécissent jusqu'à devenir des segments, au lieu de prendre la limite, au sens numérique, de la suite susdite. Ils reviennent ensuite dans le domaine des mesures où ils tentent d'interpréter 1/4 comme la somme des mesures des segments-résidus. La plupart des élèves envisagent alors les aires de ceux-ci, soit qu'ils se disent simplement que c'est en additionnant des aires qu'on pourra obtenir une aire, soit qu'ils pressentent qu'on ne peut sommer les longueurs de ces segments en nombre infini sans obtenir un résultat infini. Mais que donne une somme de zéros - fussent-ils très nombreux - sinon zéro? Et cette impasse est à ce point insoutenable que quelques élèves iront jusqu'à proposer de prendre, malgré tout, les longueurs de ces segments ([422], [423]), en se réfugiant, eux aussi, derrière des considérations ensemblistes : les segments "remplissent" tout-à-fait la surface considérée. L'imagination est donc enfermée dans un cul-de-sac pour avoir dévié indûment des nombres aux grandeurs dans un contexte où se mêlent des grandeurs hétérogènes et c'est bien ce qui caractérise l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions.

Ce dérapage du domaine des nombres à celui des grandeurs rappelle celui décrit à la section VII.3.7. (Des lignes vestiges de surfaces) où un élève considérait la longueur d'un segment comme la limite de l'aire d'une surface qui se réduisait "à vue" en celui-ci. Il y a une différence cependant. C'est que dans le cas présent, il y a un garde-fou supplémentaire à ce dérapage visuel. Trois types de grandeurs sont en présence : les rectangles, les segments en lesquels ils se réduisent mais aussi l'aire curviligne à déterminer. On est tenté, au fur et à mesure que l'on imagine ces rectangles se rétrécir, de confronter l'ensemble qu'ils forment à l'aire curviligne, ce qui fait que le dérapage s'effectue tout au long d'une suite discrète de dessins (imaginés ou réalisés). Et quelque chose retient de passer aux segments, c'est l'obligation stricte de continuer à "remplir" l'aire curviligne : c'est ce qu'expriment les élèves lorsqu'ils disent qu'en additionnant des zéros, on ne peut obtenir une aire. Rien de tel à la section VII.3.7. où deux grandeurs seulement sont en présence : un rectangle et un segment et l'on imagine facilement, sur un seul dessin, que le premier se rétrécisse pour devenir le second.

N'est-ce-pas aussi une "limite visuelle" qu'effectue l'élève qui détermine l'aire latérale d'un solide de révolution en calculant la limite des sommes des aires latérales de n cylindres inscrits dans le solide (IV.2.6.1., point 4) : les surfaces latérales de ces cylindres paraissent effectivement se réduire en cercles qui semblent partitionner la surface latérale du solide lorsque les cylindres se réduisent en disques? N'est-ce-pas le même phénomène qui dicte, encore au XIX^{e} siècle, la définition erronée de l'aire d'une surface comme limite de la somme des aires des triangles d'une surface polyédrale inscrite : comme si cette définition se justifiait par le seul fait que ces triangles se réduisent "à vue" en des points qui soi-disant "partitionnent" la surface en question. Il faudra attendre que Schwarz oppose en 1883 un contre-exemple assez sophistiqué pour que cette définition soit éliminée. Il s'agit d'un "cylindre droit de hauteur h et de base circulaire de rayon r, à la surface duquel il

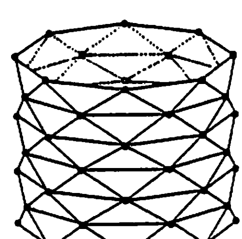


Fig.14

dispose régulièrement 2n+1 couches de m points, de façon à déterminer (Fig.14) une surface polyédrale constituée de 4nm triangles isocèles égaux. L'aire de cette surface est équivalente à $2\pi rh[1 + (\pi^2(r/h)\ (n/m^2))^2]^{1/2}$ qui ne peut être $2\pi rh$ que pour $n = O(m^2)$, ce qui n'est pas le cas par exemple pour $n = m^2$ (cité par I. Lakatos, trad. 1984).

D'autres réactions d'élèves, décrites par C. Hauchart et N. Rouche (1987) se rapprochent des erreurs précédentes, e.a. celle-ci : "La première réaction des élèves est de dire que les longueurs des festons [Fig.15] tendent vers la longueur du diamètre [...]. Il traîne dans les imaginations que le diamètre est constitué d'une infinité de tout petits lobes noyés dans un trait de crayon très fin" (Ib.).

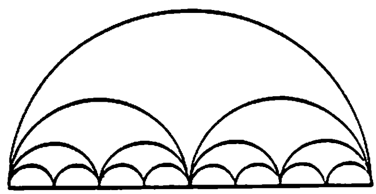


Fig.15

Nous avons relevé, à la section VII.3., d'autres calculs erronés d'aires et de volumes dus à un glissement indû des nombres aux grandeurs. Mais les circonstances de ces erreurs étaient tout autres : il s'agissait alors soit de comparer deux aires ou deux volumes par le biais de leurs indivisibles (VII.3.3. et VII.3.5.), soit de calculer une aire ou un volume par le biais d'une primitive (VII.3.8.). Dans les exemples repris ici, on calcule la mesure d'une grandeur curviligne comme limite d'une suite de mesures de grandeurs rectilignes et ce fait peut rendre le retour au numérique plus inéluctable, une fois réalisée l'échappée dans le domaine des grandeurs. En effet, ainsi que nous l'avons décrit à la section VII.3.4., on peut utiliser les indivisibles comme termes de comparaison sans être acculé à s'interroger sur l'existence d'un lien entre la mesure d'une grandeur et celles de ses indivisibles. De même, le calcul des primitives garde, comme nous le verrons plus loin, une signification un peu mystérieuse pour bien des élèves. Et le recours à un procédé qui conserve un aspect quelque peu magique ne constitue-t-il pas une échappatoire aux questions de fondement? (Dans le même ordre d'idées, la seule évocation des mots "infini" et "limite", à la section II.2.2.7., ou la référence au calcul des limites, institutionnalisé en classe, aux sections III.2.7.10. et VI.2.12.2. sont des échappatoires). Mais dans le calcul de l'aire sous $y = x^3$, on ne peut guère faire l'économie du retour au numérique, une fois le processus de limite réalisé dans le champ visuel : il ne s'agit plus de comparer mais de calculer une aire et qui plus est, de la déterminer au moyen d'un calcul qui se présente de prime abord, ainsi que nous allons le voir, comme une somme très longue de mesures de segments. Quoi de plus normal alors que de s'interroger sur la relation qui lie ces mesures à celle de la surface à déterminer. A moins que l'interrogation ait été émoussée par une pratique préalable du calcul des limites, ce qui pourrait expliquer une certaine acceptation un peu aveugle, de la part d'élèves qui ont reçu auparavant un enseignement des limites (III.2.7.10.).

2.4. Un décimal limité obtenu par un processus infini.

Une autre hypothèse pourrait expliquer la réticence de plusieurs élèves à admettre que 1/4 est la valeur exacte de l'aire sous $y = x^3$, entre les bornes 0 et 1 : c'est que 1/4 est un nombre banal, accessible et qui peut s'écrire sous la forme d'un décimal limité. O. Toeplitz (1963) semble suggérer qu'un étonnement du même ordre s'est produit dans l'histoire. En retraçant l'évolution de la découverte du résultat : $\int_0^1 x^n = 1/(n+1)$, il ponctue chaque étape : $\int_0^1 x^2 = 1/3$; $\int_0^1 x^3 = 1/4$ de la même exclamation : "encore un rationnel!", mais n'en fournit aucune interprétation.

Ce n'est sans doute pas le fait qu'une aire curviligne puisse être égale à un tel nombre qui choque les élèves : ou alors cela contredirait ce que nous avons supposé, à la section VII.1.2.4., de leur conception du continuum des aires. Mais plutôt celui qu'un nombre dont l'écriture requiert un nombre limité de symboles puisse être le résultat d'un processus infini qui s'apparenterait davantage, dans leur chef, à une série qu'à une suite. Expliquons ceci. Dans le calcul de l'aire sous $y = x^3$, 1/4 est obtenu comme limite d'une suite. Or, qu'y-a-t-il d'étonnant à ce que 1/4 puisse être la limite d'une suite de nombres tels que 0,249; 0,2499; 0,24999...? Mais les élèves perçoivent-ils ce calcul comme celui de la limite d'une suite? Ce n'est pas sûr. Ainsi que nous l'avons présumé à la section précédente, ils regardent chacun des rectangles pris séparément se réduire "à vue" et ne reviennent au troupeau de tous les rectangles et à la somme de leurs mesures qu'une fois que ceux-ci sont devenus des segments. De ce fait, leur attention est peu attirée sur l'évolution des nombres qui représentent la somme des aires des rectangles lorsqu'on les prend tous ensemble. Le processus de limite porte alors non pas sur toute la somme en tant qu'entité numérique mais sur chacun des termes conçus comme grandeurs, ce qui fait que le résultat leur apparaît comme une série, en un sens un peu naïf, c'est-à-dire une somme infiniment longue de termes infiniment petits, une sorte de "somme mobile" dont les termes seraient sans cesse plus nombreux et plus petits : "On fait une somme infinie sur des ... donc une somme sur un nombre infiniment grand de rectangles d'aire infiniment petite", précise un étudiant en

1ère année d'université ([421]). Un autre élève propose, lui, de remplacer par 0 les aires des rectangles, avant que le professeur ait écrit leur somme sous forme polynomiale ([158]). N'est-il pas normal d'ailleurs que les termes de la suite dont la limite donne l'aire sous $y = x^3$ apparaissent peu comme des entités numériques dans la mesure où ils font chacun l'objet d'une construction et d'un calcul relativement laborieux : ils se présentent d'abord et avant tout sous forme de somme, c'est-à-dire plus sous un aspect composite que comme un tout coagulé; ensuite seulement sous forme d'un polynôme. Et cet aspect composite ressort d'autant mieux qu'on s'attache à regarder les grandeurs plutôt que les nombres : du côté des nombres, il y a une espèce de coagulation plus facile que du côté de surfaces composées de figures aussi identifiables que des rectangles. Ainsi donc, le calcul de l'aire serait davantage perçu comme une série, au sens défini supra, que comme la limite d'une suite. Or, souvenons-nous, C. Hauchart et N. Rouche ont montré que, déjà, les décimaux illimités périodiques souffrent d'une crise d'identité lorsqu'on les écrit sous forme de série (VII.1.2.1.). Que dire alors de 1/4? Voilà qu'un rationnel qui s'écrit avec un nombre limité de symboles pourrait être égal à une somme illimitée dont les points de suspension suggèrent qu'on n'en finit pas de modifier sa valeur, comme si l'ajout incessant d'un terme supplémentaire à la "série" avait pour effet d'ajouter indéfiniment des décimales supplémentaires ou de modifier sans cesse les décimales déjà présentes.

Evidemment, l'hypothèse qui vient d'être décrite suppose que l'élève, au moment où il dit que l'aire sous la courbe ne vaut pas 1/4 exactement, se polarise plus sur la manière d'obtenir cette aire que sur le résultat en lui-même. Et à ce niveau se mêlent sans doute intimement la vision géométrique des choses et la vision numérique : la surface ne semble pas pouvoir être "épuisée" par des rectangles, sauf lorsque ceux-ci deviennent des segments (mais il y a alors un os!), donc son aire ne doit pas pouvoir être déterminée exactement par la somme de leur aires. De ce point de vue, il est bien plus normal et rassurant que l'aire d'un disque soit un nombre décimal illimité : on ne peut le combler avec des polygones, on ne peut donc déterminer toutes les décimales de son aire!

2.5. La suppression de termes de la forme a/n et b/n^2.

Le passage à la limite revient, dans le calcul de l'aire sous $y = x^3$, à la suppression des termes en a/n et b/n^2. La forme de ces termes contribue peut-être à induire chez certains élèves l'idée qu'on a tronqué le calcul et, par là, celle que l'on n'obtient pas exactement l'aire cherchée. En effet, un élément du débat concerne le fait que ces termes puissent ou non égaler 0 effectivement.

Certains élèves pensent que oui ([140]). D'autres pensent qu'ils deviennent seulement négligeables, mais en concluent malgré tout que l'on obtient un calcul exact de l'aire sous la courbe ([139]). D'autres encore, plus nombreux, insistent sur le fait que ces fractions ne peuvent être nulles ([151]), ceci étant lié au fait que n ne peut atteindre l'infini ([152], [154], [155]). Par contre, aucun élève, sauf un ([156]), ne doute que la base des rectangles puisse, à un moment donné, atteindre 0, même s'ils n'en tirent pas tous la même conclusion ([143], [144], [146], [157]). Or, cette base vaut précisément 1/n. L'imagination oscille ici entre deux aspects : la vision géométrique d'un segment, c'est-à-dire d'une grandeur continue, que l'on peut voir se réduire continûment et d'une seule traite en un point et la mesure de ce segment dont l'écriture est discrète. Une fraction de la forme a/n, de même qu'une fraction de la forme b/n^2, ne peut être diminuée que par sauts discontinus, puisque n est un naturel, ce qui scande et, par là, freine en quelque sorte sa progression vers 0. De plus, son écriture même (avec ce numérateur égal à 1) la rend inaccessible à 0 : l'égalité 1/n = 0 est fausse pour toute valeur de n, ce qui explique la réticence à remplacer 1/n par 0, alors que l'on n'hésite pas à écrire l'égalité $\Delta x = 0$. Par ailleurs, a/n et b/n^2 sont des infiniment petits dont l'évolution est liée à celle d'un infiniment grand, soit n; 1/n ne peut atteindre 0 sans que n atteigne l'infini. Or, l'infini ne semble-t-il pas plus inaccessible que zéro? Les infiniment petits Δt et Δx dont nous reparlerons plus loin, sont, de ce point de vue, beaucoup plus indépendants.

2.6. Une preuve par encadrement et une preuve par l'absurde.

Plusieurs élèves doutent que l'aire sous $y = x^3$, entre 0 et 1, vaut 1/4 exactement, bien que celle-ci soit encadrée par les sommes : $1/4 - 2/n + 1/4n^2$ et $1/4 + 2/n + 1/4n^2$ (III.2.7.6.). Pour d'autres, l'encadrement est suffisamment probant ([141], [142]). D'autres faits enregistrés en dehors de cette expérimentation rejoignent ces observations. A plusieurs reprises nous avons approché cette aire avec des rectangles, par défaut exclusivement : invités à commenter cette approximation par défaut, soit $1/4 - 2/n + 1/4n^2$, les élèves, dans leur grande majorité, n'ont pu admettre que 1/4 était la valeur exacte de l'aire cherchée. Ensuite, une fois l'aire majorée par $1/4 + 2/n + 1/4n^2$, certains se sont laissés persuader mais pas tous, loin de là.

Les "opposants" ne parviennent pas à se convaincre mutuellement : seule la preuve par l'absurde décrite à la section

III.2.7.9. emporte l'assentissement de tous, même si elle leur paraît difficile à comprendre.

Cette disparité dans le crédit octroyé au "calcul" de limite n'est pas sans rappeler la hardiesse, différente d'un siècle à l'autre, avec laquelle les mathématiciens ont établi des aires et des volumes. Archimède complète ses encadrements de figures par la méthode d'exhaustion (III.1.3.), qui comporte une double preuve par l'absurde. Plus tard, on se contente d'invoquer la petitesse des termes de la forme a/n ou b/n^2 pour justifier le passage à la limite (III.1.5.), parfois après avoir encadré la figure en question, parfois après s'être contenté d'une des deux approximations par excès ou par défaut. Stevin est, d'après C. Boyer, le premier à s'être débarrassé du carcan de rigueur imposé par les Grecs : "[...] Stevin did not merely imitate, as had Commandino, Archimedes use of the method of exhaustion : he accepted the direct portion of his characteristic proof as sufficient to establish the validity of any proposition that required it, without adding in every case the formal reductio ad absurdum required by Greek rigor. Furthermore, he frequently omitted, as we do in the integral calcul, one of the approximating figures which Archimedes had used, being satisfied with either the inscribed or the circumscribed figure only" (C. Boyer, 1949). Mais il n'est pas suivi par tout le monde. Par exemple, Galilée fait toujours très soigneusement les deux raisonnements par l'absurde. On en vient par la suite à un certain empirisme fondé sur "[...] l'idée que le calcul infinitésimal fonctionne et que ce fonctionnement est une garantie suffisante de sa valeur [...]" (P. Raymond, 1976), lequel laissera place, dans le courant du XVIII^e siècle à une volonté d'asseoir plus rigoureusement les fondements de cette discipline.

Pourquoi l'encadrement ne convainc-t-il pas tous les élèves de l'exactitude du résultat? D'abord, il se pourrait qu'il soit pour l'élève d'ordre purement visuel : il s'agit plus d'emboîter une figure géométrique entre deux familles d'autres figures que d'encadrer un nombre par deux suites de nombres. (Ainsi, les commentaires des élèves relèvent parfois plus du géométrique que du numérique. De même, c'est par un encadrement "visuel" qu'un élève croit prouver que l'aire latérale d'un solide de révolution est la limite d'une suite de sommes d'aires latérales de cylindres (IV.2.6.1., point 4). Or, on a vu à la section VIII.2.3. les difficultés soulevées par l'assimilation visuelle du curviligne au rectiligne, difficultés qui résistent sans doute à l'encadrement.

Ensuite, les arguments numériques avancés par les élèves qui sont persuadés que l'encadrement "prouve" l'exactitude du résultat sont peu convainquants pour les autres élèves. Les manipulations d'inégalités semblent obéir à des règles confuses et sujettes à caution ([141], [142], [182]) : par exemple, on voit mal a priori comment tirer les inégalités

$$1/4 \leq V \leq 1/4$$

des inégalités

$$1/4 - 1/2n + 1/4n^2 \leq V \leq 1/4 + 1/2n + 1/4n^2,$$

en passant à la limite. En effet, ce passage à la limite dans le membre de droite ne signifie-t-il pas qu'on ôte les termes $1/2n$ et $1/4n^2$: depuis quand une inégalité subsiste-t-elle quand on diminue le membre le plus grand? Et quand ils n'évoquent pas des inégalités, les élèves se réfugient derrière une expression du comportement asymptotique qui leur est naturelle et que C. Hauchart et N. Rouche décrivent en ces termes : "Quand n grandit indéfiniment, a_n se rapproche de plus en plus de l" (1987). Mais que dit cette phrase à quelqu'un qui est sensible au fait que n n'atteint pas l'infini, sinon que a_n ne peut atteindre l, c'est-à-dire, dans le cas présent, que l'aire ne peut être atteinte par une des sommes $(1 - 2/n + 1/n^2)/4$, $(1 + 2/n + 1/n^2)/4$ ou $(1 + 1/n^2)/4$? Aucun élève n'évoque clairement le fait que la différence entre chacune de ces sommes et 1/4 peut être rendue <u>aussi petite que l'on veut</u> et en l'absence d'un tel argument qui préfigure le "$\forall \varepsilon$", il ne peut y avoir de preuve par l'absurde telle celle qui convainc les irréductibles.

Enfin, n'oublions pas que les élèves ne bénéficient pas de la même expérience que les mathématiciens des XVI^e, XVII^e et XVIII^e siècles : or, ces derniers n'accordaient-ils pas foi au calcul des limites en bonne partie parce que ce calcul était capable de fournir des résultats déjà prouvés par la méthode d'exhaustion?

Que la preuve par l'absurde formulée à la section III.2.7.9. réponde à un tel besoin chez plusieurs élèves n'est-il pas la confirmation qu'ils éprouvent quelque peine à réaliser l'unité entre leur objet mental d'aire et le résultat de ce calcul tout-à-fait nouveau pour eux et même a priori illicite : un calcul où l'on supprime purement et simplement des termes sans qu'il y ait compensation? Cette difficulté est corroborée par d'autres faits, dont certains sont plus ponctuels. Citons e.a. cet élève qui est prêt à remettre en cause la formule de l'aire du triangle, car celle-ci a été obtenue par la limite d'une suite de sommes de rectangles ([172]).

Rappelons aussi que les élèves s'imaginent, à l'occasion du problème VI.2.8. (Il y a aire et aire), que les "aires algébriques" vérifient les mêmes propriétés que les aires géométriques, ce qui montre encore qu'ils ne prennent pas spontanément conscience du fossé qu'il y a entre l'intégrale (calculée cette fois par une primitive) et l'objet mental "aire".

2.7. De la preuve par l'absurde au concept de limite.

La preuve par l'absurde formulée à la section III.2.7.9. amorce le concept de limite d'une suite, défini en (ε, N). En effet, cette preuve renverse l'ordre d'énonciation spontanée du comportement asymptotique dont nous avons parlé à la section précédente. Au lieu de décrire d'abord le comportement de l'indice n et ensuite le comportement subséquent du terme a_n de la suite, on s'y intéresse de prime abord aux termes de la suite et puis à ses indices. Qui plus est, le choix de ces derniers est subordonné au choix arbitraire des a_n : on souhaite avoir $(1 + 1/n^2)/4$ inférieur à $1/4 + \varepsilon$ pour un ε donné, on cherche la ou les valeurs de n pour lesquelles cette condition sera remplie. Les quantificateurs "$\forall$" et "$\exists$" et leur agencement classique : $\forall ... \exists ...$ transparaissent en filigrane de cette preuve. En effet, d'une part, il s'agit de vérifier les inégalités $(1 + 1/n^2)/4 < 1/4 + \varepsilon$ et $(1 - 2/n + 1/n^2)/4 > 1/4 - \varepsilon$, <u>quelle que</u> soit la valeur de ε. D'autre part, la contradiction qui ponctue cette preuve découle déjà de <u>l'existence</u> d'une seule valeur de n qui remplit une condition déterminée, ainsi que l'a bien compris l'auteur du propos [175].

Bien sûr, si le concept de limite est mobilisé ici, c'est de manière implicite et à l'état d'ébauche seulement. On ne s'intéresse ni à l'inégalité $1/4 - \varepsilon < (1 + 1/n^2)/4$ (évidente par ailleurs), ni à l'inégalité $(1 - 2/n + 1/n^2)/4 < 1/4 + \varepsilon$, toutes deux nécessaires pour établir que $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n^2)/4 = 1/4$ et que $\lim_{n\to\infty}(1 - 2/n + 1/n^2)/4 = 1/4$. De plus, on n'explicite pas, comme il faudrait le faire pour établir par exemple la première limite, que la double inégalité $1/4 - \varepsilon < (1 + 1/n^2)/4 < 1/4 + \varepsilon$ <u>est vraie pour toute valeur de n supérieure ou égale à un naturel N</u>, ce qui est vérifié ipso facto pour un choix judicieux de N, puisque cette suite est monotone (l'autre l'est à partir d'un certain rang).

Mais ce qui nous paraît important dans cette preuve par l'absurde, c'est qu'elle fait pressentir ce qui débouchera sur la formulation technique précise du concept de limite et que ce dernier joue un rôle instrumental dans son établissement. Cette preuve repose en effet sur la possibilité de rendre à la fois $(1 + 1/n^2)/4$ et $(1 - 2/n + 1/n^2)/4$ aussi proches de 1/4 qu'on le souhaite à partir d'un certain rang. Nous renvoyons le lecteur à ce qu'a écrit à ce sujet I. Lakatos (trad. 1984) sur ce qu'il appelle un <u>proof-generated concept</u> (traduit par "concept-éprouvette"), c'est-à-dire un concept mathématiquement formé pour les besoins d'une démonstration.

Evidemment la formulation symbolique en (ε, N) ne s'impose pas ici.

La preuve de la section III.2.7.9. s'inspire de la méthode d'exhaustion (décrite en III.1.3.), ne fut-ce que par le double raisonnement par l'absurde. On estime généralement que cette dernière évite le concept de limite parce qu'elle est exclusivement géométrique. Notre preuve s'en distingue de ce point de vue : alors qu'il n'est fait mention que d'inégalités ou de rapports entre grandeurs dans la méthode d'exhaustion, nous manipulons, nous, des mesures de grandeurs sous forme de nombres (1/4) ou d'expressions littérales $((1 + 1/n^2)/4)$. Bien sûr, notre preuve est basée sur l'intuition géométrique de figures emboîtées, mais elle est censée justifier un véritable calcul de limite, au sens numérique, qui consiste à supprimer des fractions de la forme a/n et b/n^2 : l'ambiance est donc tout autre dès le départ.

Le calcul d'une aire curviligne nous paraît être une occasion privilégiée d'approcher ainsi le concept de limite au moyen d'une preuve par l'absurde. Nous avons en effet tenté une telle preuve à propos du problème du vase conique (V.2.2.2.), mais celle-ci s'est avérée superflue : l'intuition induite par le contexte même du problème, la "preuve physique" (V.2.2.3.) étaient plus que suffisantes. De plus, cette preuve par l'absurde a été moins bien comprise par les élèves que celle faite à l'occasion du calcul de l'aire sous $y = x^3$, sans doute parce qu'il est plus malaisé de comparer une vitesse instantanée à des vitesses moyennes que de comparer des aires de figures emboîtées (cfr. VIII.1.1.).

Par ailleurs, aucun autre contexte ne se prête aussi bien à une telle preuve par l'absurde que celui des calculs d'aires curvilignes : on ne peut formuler une preuve semblable à propos de la vitesse d'un mobile sans savoir, par exemple, si ce mobile accélère (alors qu'ici, c'est le simple emboîtement de figures que l'on traduit par des inégalités d'aires); on n'éprouve pas le besoin de le faire pour prouver que telle droite est l'asymptote de telle courbe (justement parce que l'asymptote est une droite dont la courbe *s'approche* localement, alors qu'ici l'aire curviligne *est* la limite, ce qui est autrement choquant).

2.8. Une intégrale éloignée de celle de Riemann.

Lorsqu'on calcule une aire courbe donnée et qu'on tâche de prouver, par encadrement ou par exhaustion, l'exactitude du résultat trouvé, on s'éloigne ipso facto de certaines caractéristiques de l'intégrale de Riemann. Tout d'abord, on cherche, ainsi que nous l'avons dit plus haut, à "algorithmiser" le calcul, en procédant à une subdivision régulière de l'intervalle d'intégration. Ne rencontre-t-on pas, dans l'histoire, une seule exception à cette règle (lorsqu'il s'agit de déterminer la valeur exacte d'une aire et non d'élaborer une théorie de l'intégration)? Et encore est-ce un pas de subdivision variant suivant une loi bien déterminée : il s'agit de Fermat qui choisit des intervalles de subdivision dont les longueurs sont en progression géométrique (signalé par J. Mawhin, 1983). Ensuite, on s'attache à considérer des approximations de l'aire qui lui sont soit supérieures, soit inférieures à coup sûr. Ce qu'on ne peut réaliser sans choisir judicieusement les images $f(x_i)$, $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$, dans chacun des termes de la somme $\Sigma\ f(x_i)(a_i - a_{i-1})$. Soit, si la fonction est monotone, en prenant $x_i = a_{i-1}$ ou $x_i = a_i$, soit, si la fonction est monotone par morceaux, en travaillant morceau par morceau et en choisissant $x_i = a_{i-1}$ ou $x_i = a_i$ suivant les morceaux où elle est croissante et ceux où elle est décroissante, soit encore en prenant le maximum ou le minimum sur chacun des intervalles de subdivision (quoique cette dernière alternative éloigne déjà d'une perspective calculatoire dans la mesure où la détermination de ces extrémés pose problème).

On ne s'embarrasse pas de telles restrictions quand on ne cherche pas, comme nos élèves, à déterminer une aire (dont on suppose l'existence a priori) et à prouver l'exactitude du calcul, mais qu'on cherche à définir l'aire au moyen d'une intégrale et à construire une théorie où les propriétés des intégrales feront écho aux propriétés intuitives de l'aire (les propriétés d'additivité par exemple). On arrivera à une théorie d'autant plus complète (englobant de multiples cas) et d'autant plus efficace (les théorèmes se démontrant sans trop de peine) que l'on ne s'impose pas des conditions inutilement restrictives : un pas constant, un x_i susceptible d'être déterminé par un calcul dans l'intervalle $[a_{i-1}, a_i]$. Ainsi la définition de l'intégrale, sortie historiquement des problèmes de calcul, s'épure peu à peu avec ce changement de problématique. Elle prend un second envol lorsqu'à partir de Riemann on ne se contente plus d'appliquer une définition d'intégrale à des fonctions considérées comme "gentilles" a priori, mais qu'on cherche à caractériser la classe de fonctions auxquelles s'applique tel procédé de définition et surtout à généraliser ce dernier pour que s'élargisse la classe des fonctions à laquelle il convient.

Est-il pensable d'adopter d'emblée un tel point de vue avec les élèves, à partir du moment où ceux-ci décodent les théorèmes en termes d'aires géométriques et où la classe des fonctions effectivement rencontrée est si petite ...?

3. Une vitesse instantanée définie comme limite d'une suite de vitesses moyennes.

3.1. Un refus du concept théorique de vitesse instantanée, qui n'a pas d'équivalent empirique.

Ainsi que nous l'avons annoncé plus haut, le concept de vitesse instantanée pâtit, tout comme celui de débit instantané, d'un a priori négatif. Combien de fois n'avons-nous pas entendu, en 15 ans d'enseignement, un élève s'exclamer : "Mais une vitesse instantanée, ça n'existe pas!" Les arguments avancés sont semblables dans les deux cas. On évoque la nécessité d'avoir un volume minimal pour avoir un débit ([287], [293]), ou celle d'avoir un espace non nul pour pouvoir déterminer une vitesse : "Si le temps est nul, le mobile ne bouge plus". On souligne le fait que toute mesure requiert un minimun de temps ([292], peut-être aussi [320], en réponse à [319]). Ces arguments rappellent les propos que Berkeley opposa à Newton parce que ce dernier mettait à l'avant-plan de sa théorie le concept d'<u>ultima ratio</u> : "Un point peut être la limite d'une ligne; une ligne peut être la limite d'une surface; un instant peut terminer le temps. Mais comment peut-on concevoir une vitesse au moyen de telles limites? Une vitesse dépend du temps et de l'espace, et ne peut être conçue sans eux. Et si les vitesses de quantités naissantes ou qui s'évanouissent, c'est-à-dire sans lien avec le temps et l'espace, ne peuvent être comprises, comment peut-on comprendre et montrer leur rapport; ou considérer leur rapport "premier" ou "ultime"? Car, considérer le rapport de deux choses suppose que ces choses aient une grandeur et que cette grandeur puisse être mesurée" (cité par B. Cornu, 1983).

On retrouve une même négation de la vitesse instantanée au long des siècles, e.a. chez Aristote et Hobbes. Elle est interprétée de la même façon par la plupart des historiens. Voici comment P. Raymond (1976) commente la réaction de Berkeley : "[...] or le langage cinématique pose là un problème, car toute vitesse instantanée n'est-elle pas seulement une virtualité? Le débat consiste en ceci que "déterminée", qui a un sens mathématique, ne signifie pas forcément réelle, en acte, qui a un sens philosophique; la confusion des deux domaines est même un aspect caractéristique des débats oiseux de cette époque : au nom de la rigueur conceptuelle, nombre d'auteurs, comme Berkeley, en sont venus à refuser aux mathématiques le droit de manier des abstractions qui ne seraient pas issues de sensations réelles, qui n'auraient pas un statut empirique". C. Boyer, (1949), lui, interprète l'attitude d'Aristote ainsi : "He [Aristote] asserted that "Nothing can be in motion in a present... Nor can anything be at rest in a present". This point of view necessarily operated against the mathematical representation of the phenomena of change and against the development of the calculus. Aristotle's denial of instantaneous velocity, as realized in the world described by science, is, to be sure, in conformity with the recognized limitations of sensory perception. Only average velocities, $\Delta S/\Delta t$, are recognizable in this sense. In the world of thought, on the other hand, it has been found possible - through the calculus and the limit concept - to give a rigorous quantitative definition of instantaneous velocity ds/dt. Aristotle, however, in conformity with a view widely accepted at the time, regarded mathematics as a pattern of the world known through the senses and consequently did not foresee such a possibility". [Notons que C. Boyer revient sur cette interprétation, lorsqu'il oppose l'attitude de Hobbes à celle d'Aristote : "Not realizing, as Aristotle had discerned nineteen hundred years before, that instantaneous motion is an intellectual - not an empirical - concept, he attempted to formulate a definition in terms of his ingenuous nominalism, speaking of it as the motion in an infinitely small interval - an interval less than any given interval - that is, through a point" (Ib.)].

De tels commentaires s'appliquent-ils aux élèves d'aujourd'hui, qui expriment la même réticence vis-à-vis du concept de vitesse instantanée? Nous pensons que oui, nous appuyant à la fois sur la perception qu'ont les élèves de la vitesse en tant que grandeur et sur leur conception des mathématiques, corroborée par ailleurs. Dans la section VIII.1.1., nous avons montré en quoi la vitesse instantanée échappe, pour les élèves, au monde des sens et en particulier à celui des mesures et ce, même si, contrairement à Aristote, Hobbes ou Berkeley, ils sont familiarisés avec les vitesses "quasi-instantanées", ne fût-ce que par le contact quotidien avec les tachymètres des voitures. C'est effectivement l'imprécision de la mesure qu'évoquent explicitement quelques-uns de ceux qui refusent le concept de vitesse instantanée. Les autres se réfèrent à l'absence d'espace (ou de volume versé dans le cas d'un débit), sans qu'on sache s'ils pensent au fait que la mesure est alors impossible : mais n'est-ce pas là encore un signe qu'ils tâchent de se ramener à des grandeurs qui leur semblent plus immédiatement "perceptibles"? Ainsi donc, quand des élèves disent : "La vitesse instantanée n'existe pas", ils ne nieraient pas l'existence d'une vitesse en un instant précis, [si, d'ailleurs, il est vraisemblable, comme nous l'avons supposé à la section VIII.1.1.1., que les élèves imaginent qu'une voiture passe par tous les degrés de vitesse quand elle accélère, comment pourraient-ils douter qu'elle possède une vitesse propre à chaque instant?], mais proclameraient simplement que cette vitesse échappe jusqu'à un certain point à la "perception" et aux mesures.

Mais ce refus de la vitesse instantanée va de pair, ainsi que le suggèrent P. Raymond et C. Boyer, avec une conception particulière des mathématiques. En effet, le concept de vitesse instantanée est défini de manière précise et non ambigüe au sein de ces dernières. Pourquoi l'y récuser sinon parce qu'on dénie aux mathématiques, c'est-à-dire en fin de compte à l'esprit humain, le droit (ou simplement la possibilité) de circonscrire avec précision quelque chose que les sens n'appréhendent que très imparfaitement. C'est que tout oppose la vitesse instantanée en tant que grandeur empirique et le concept mathématique de vitesse instantanée : la première laisse une impression fugace, le second est intemporel en tant que concept théorique; la première paraît difficilement quantifiable, le second est un nombre bien déterminé; la première se calcule sur base d'une mesure d'espace et d'une mesure de temps, le second est la limite d'autres vitesses. Pour étayer une telle interprétation dans le cas des élèves il serait opportun de contrôler, par ailleurs, qu'ils partagent, avec Aristote, Hobbes et Berkeley, une telle conception des mathématiques. N'est-ce pas relativement étonnant a priori, étant donné que souvent, dans l'enseignement actuel, les mathématiques sont présentées comme une discipline constituée, autonome, qui a ses concepts et ses lois propres, qui "fonctionne" suivant les règles de la seule logique et qui n'a que peu de choses à voir avec le "monde réel". En fait, la plupart des autres réactions décrites dans ce travail semblent confirmer l'hypothèse que les élèves, malgré l'enseignement reçu, conçoivent les mathématiques comme une copie quasi conforme de ce qu'ils croient être une "expérience sensible" - du moins en ce qui concerne les problèmes de calcul infinitésimal abordés ici -. Nous reviendrons sur ce point dans la conclusion, en particulier sur le caractère exagérément "positiviste" de cette analyse.

D'autres raisons complètent l'interprétation que nous venons de donner du refus, par certains élèves, du concept de vitesse instantanée. Elles sont décrites dans les deux sections ci-dessous et sont liées à la manière dont le concept de vitesse instantanée est défini en mathématiques.

3.2. Un refus peut-être lié à celui de l'infinie divisibilité du temps.

Plusieurs réactions d'élèves recueillies par C. Hauchart et N. Rouche (1987) tendent à montrer un refus de l'infinie divisibilité du temps chez les élèves (e.a. à propos des paradoxes de Zénon et de la possibilité qu'a une balle de ping-pong de rebondir une infinité de fois avant de s'arrêter). Ce refus interférerait-il avec celui de la vitesse instantanée? Sans doute pas de manière consciente et raisonnée mais peut-être de la façon suivante. La vitesse instantanée est définie, en mathématique, comme la limite des vitesses moyennes. Une telle définition relève plutôt de l'infini potentiel que de l'infini actuel : une vitesse instantanée n'est pas une vitesse moyenne, mais elle peut être approchée d'aussi près que l'on veut par des vitesses moyennes. Mais pour comprendre ce point de vue, il faut admettre l'infinie divisibilité du temps. En effet, chaque fois qu'on se donne un $\varepsilon > 0$, il faut pouvoir trouver un intervalle de temps suffisamment petit pour que la vitesse moyenne calculée sur cet intervalle diffère de la vitesse instantanée d'une quantité inférieure ou égale à ε et cet intervalle de temps doit pouvoir être fractionné indéfiniment au fur et à mesure que l'on considère des ε de plus en plus petits. Faute de pouvoir imaginer ou simplement faute d'imaginer une infinité d'intervalles de temps emboîtés les uns dans les autres, l'élève ne considère-t-il pas tout de go (ou peu s'en faut) un intervalle de longueur nulle, c'est-à-dire ne se précipite-t-il pas trop vite à l'étape finale dans laquelle il s'enferre parce qu'il la pense en termes exclusivement empiriques : la vitesse ne peut être calculée que sur base d'un espace et d'un temps et en l'abscence de ceux-ci, le calcul obtenu, 0/0, n'a aucun sens?

3.3. Une "suite" dont on évalue mal la progression et dont l'aboutissement n'est pas identifié.

Une autre raison contribue à creuser le fossé entre la vitesse instantanée et les vitesses moyennes dont elle est la limite. Nous avons vu, à la section VIII.2.1., que le fait d'approcher une aire curviligne au moyen d'une suite d'aires rectilignes dont les termes ne sont pas spontanément perçus comme les sommes partielles d'une série est déjà susceptible de créer quelque difficulté à l'élève. Or, cette situation est analogue à la situation présente : les vitesses moyennes, grandeurs intensives, ne peuvent décomposées en sommes de "parties de vitesse". La "suite" (en un sens familier puisqu'il s'agit en fait de la limite d'une *fonction-vitesse*) dont la limite définit une vitesse instantanée ne se pense donc nullement en termes de série, c'est-à-dire en termes d'ajouts successifs. On doit, à chaque étape, abandonner la vitesse moyenne déjà calculée pour envisager la suivante, ce qui, comme dans le cas des aires, peut paraître fort peu naturel. Mais il y a dans le cas des vitesses une difficulté nouvelle par rapport aux aires. C'est que, même dans le cas où l'aire curviligne est la limite d'une suite qui ne se voit pas aisément sous son aspect "série", le but à atteindre est visible depuis le début : à chaque étape, on peut comparer - à vue - le terme de la suite à l'aire curviligne et ainsi évaluer la progression, en une succession de dessins bien entendu. On peut aussi comparer deux termes de la suite entre eux, bien que cela conduise vite à un dessin embrouillé. Rien de tel dans le cas des vitesses. Ainsi que nous l'avons vu plus haut, la comparaison de deux vitesses moyennes est déjà malaisée; que dire de la comparaison d'une vitesse moyenne et d'une vitesse instantanée? Cette dernière en effet ne préexiste guère, sur le plan intuitif, à sa définition en termes de limite, au contraire de l'aire curviligne. Il ne s'agit donc plus d'un but perceptible à atteindre, par rapport auquel on peut évaluer périodiquement la progression, mais d'un processus un peu aveugle dont le terme est inconnu car non identifié à l'avance et qui d'ailleurs ne reçoit existence que par le truchement d'une définition, par le processus même dont il est le terme.

A cela s'ajoute un effet mental que l'on peut décrire à peu près comme suit : quand on a une suite et qu'on doit abandonner à chaque pas le résultat précédent, on a tendance à se désintéresser des termes déjà parcourus et on se demande pourquoi ne pas aller d'emblée à un terme très lointain de la suite (aller directement là où on veut !). Mais alors, ou bien ce terme très lointain est avant la limite, il n'est pas exactement ce qu'on cherche, et comme on a perdu l'idée de suite en cours de route, il devient difficile de revenir à la poursuite d'une limite; ou bien on a sauté à la limite, mais on ne sait pas ce qu'elle est et le problème demeure entier. Donc, ou bien on ne saute pas assez loin, ou bien on saute trop loin, et dans les deux cas, on n'a pas résolu le problème.

3.4. L'impact didactique du problème du vase conique ou de la difficulté de faire inventer le taux de variation instantané par les élèves.

Plaçons-nous dans l'idéologie pédagogique qui consiste à vouloir faire inventer par l'élève les concepts mathématiques qu'on désire lui enseigner. Le verbe *inventer* est emprunté à B. Charlot (1978) qui l'oppose au verbe *découvrir* pour rappeler que, à son estime, les mathématiques ne sont pas une structure pré-existante que l'élève doit découvrir mais que l'activité mathématique est une création humaine.

Nous nous sommes interrogée sur les caractéristiques d'un problème susceptible de susciter chez les élèves, "l'invention" d'un taux de variation instantané. Le problème du vase conique (V.2.1.) est, de ce point de vue, un relatif succès, surtout si on le compare à un autre problème que nous avons maintes fois proposé, en 15 ans d'enseignement, sans souvent récolter autre chose que la passivité des élèves ou un recours à des formules vues antérieurement au cours de physique. Ce dernier problème s'énonce : *"Soit un mobile évoluant sur une trajectoire rectiligne; sa position, à tout instant, est donnée par la fonction $e(t) = t^3$. Que vaut sa vitesse en $t = 2$?"* Nous tentons ci-après de comparer ces deux problèmes et leurs impacts respectifs.

3.4.1. Un débit déterminé par un contexte, une vitesse donnée par une expression symbolique.

Un premier trait distingue ces deux problèmes : le premier est relatif à un débit régi par un contexte bien précis, tandis que le second est relatif à une vitesse donnée par une expression symbolique. Or, premièrement, le débit nous paraît être a priori un concept plus tangible que la vitesse en ce sens qu'il y a échange de matière, il y a quelque chose qui reste sous nos yeux, alors que, de ce point de vue, la vitesse est plus immatérielle. A moins d'imaginer une trace visible au point de départ du mobile sur la trajectoire : on voit alors s'agrandir l'espace parcouru, mais pour ce faire, il faut décoder l'expression analytique $e(t) = t^3$ en termes d'espace parcouru sur une trajectoire, ce qui ne va pas toujours de soi (cfr. e.a. la confusion si souvent observée entre trajectoire et loi de position ou entre espace et position, alors qu'il est invraisemblable de confondre aucun élément du graphique relatif au volume avec un élément quelconque de l'écoulement).

Deuxièmement, le débit est, dans le premier problème, proportionnel à une grandeur extensive : l'aire de la section dans le vase, soit πr^2. En effet, c'est un problème de vitesses liées : la vitesse d'accroissement du volume d'eau (dV/dt) et celle de la profondeur de l'eau (dh/dt) qui vérifient

$$dV/dt = (dV/dh).\ (dh/dt),$$

ou, comme $dh/dt = 1$,

$$dV/dt = dV/dh = \pi h^2 = \pi r^2.$$

Que ces deux vitesses sont liées l'une à l'autre est intuitivement évident. Chacune des deux croît ou décroît en fonction de l'autre : si le débit est constant, le niveau monte de plus en plus lentement, étant donné l'évasement du récipient et, inversément, le débit doit augmenter continûment si l'on veut que le niveau d'eau monte régulièrement ([283] à [286]). [Nous reviendrons plus tard sur le fait que certains élèves supposent le débit égal à l'aire de la section, et non seulement proportionnel à cette aire]. Dans le cas qui nous intéresse on voit donc le débit s'accroître rien qu'en regardant la superficie de l'eau s'agrandir. Et c'est sans doute ce qui suscite la conviction que le débit, d'abord faible, doit s'amplifier continûment jusqu'à valoir 100 à un moment donné. (V.2.1.1.). L'intuition équivalente, dans le problème du mobile, est que la loi de position $e(t) = t^3$ est celle d'un mobile qui démarre en $t = 0$ pour ne plus qu'accélérer ensuite. Mais cette intuition est moins immédiate : elle suppose à nouveau un décodage préalable, soit numérique, soit graphique, de cette fonction. De même, la visualisation de cette accélération est tributaire du fait que l'on ait géométrisé la vitesse sous forme de pente de tangente.

Le fait que le débit se concrétise par une aire constitue pour le premier problème un avantage en même temps qu'un désavantage. On peut craindre en effet que les élèves se contentent de cette intuition, de cette perception "physique" du phénomène et ne soient pas ainsi motivés pour le résoudre au moyen d'un calcul. En fait cela n'a été le cas que de quelques rares d'entre eux. C'est que, d'une part, l'intuition reste vague : on sent que le débit s'accroît avec la superficie de l'eau mais de là à lui être égal! Du moins tant qu'on n'imagine pas de remplir simultanément un vase cylindrique comme à la section V.2.2.3. et cela, peu d'élèves y songent et encore, quand c'est le cas, n'est-ce que de manière confuse ([282]). De ce point de vue, le problème du vase conique contraste avec celui des vases communiquants qui, lui, ne suscite aucun calcul de taux de variation (V.2.3.1.; V.2.3.2. et V.2.3.3.). D'autre part, cette intuition du débit lié à une aire est sujette à caution, le débit ne pouvant, pour certains, s'assimiler à une surface, c'est-à-dire en quelque sorte à une "absence de volume" ([287], [288]). De toute façon, l'expérimentation de ce problème dans chacune des classes s'est prêtée à une confrontation des calculs des uns et de l'intuition des autres. Et le calcul qui consiste à supprimer des termes est resté suffisamment étonnant pour tous, pour que cette confrontation ait un sens. N'est-ce pas ainsi que les procédures du calcul infinitésimal ont acquis, dans l'histoire, leurs premières lettres de noblesse?

Notons encore, en faveur du problème du vase conique, comparé à des problèmes cinématiques, la difficulté à trouver un mouvement (autre que les mouvements uniforme ou uniformément accéléré pour lesquels les élèves sont trop tributaires de leurs souvenirs) que l'on puisse décrire par un "contexte" de manière à ce que les élèves puissent arriver d'eux-mêmes à la formulation symbolique. Il n'empêche que l'étude de mouvements qu'on sait accélérés ou décélérés ou de mouvements régis par des forces bien précises peut s'avérer plus aisée, plus porteuse d'intuitions que celle de mouvements arbitraires.

3.4.2. Une question "par la tangente".

Un autre aspect différencie les deux problèmes. C'est que le premier pose une question à propos du débit, en supposant cette notion familièrement connue, tandis que le second centre l'attention sur le concept même de vitesse instantanée. Pour schématiser, comparons les deux questions en localisant un point d'interrogation. Celles-ci sont respectivement résumées ainsi :

$$\lim_{\Delta t \to 0} [V(t+\Delta t) - V(t)]/\Delta t = 100, \qquad t = ? \qquad (1)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} [e(2+\Delta t) - e(2)]/\Delta t = ? \qquad (2)$$

Dans (1), le point d'interrogation concerne t, présent dans le premier membre de l'égalité, du côté de la limite, le deuxième terme est, lui, connu; dans (2), le point d'interrogation se trouve à droite du signe d'égalité, de l'autre côté de la limite. Or, ce que nous avons dit plus haut du refus du débit instantané et de la vitesse instantanée peut jouer ici un rôle. En effet, dans la première question, l'inconnue est un instant et, qui plus est, un instant dont l'existence ne fait aucun doute a priori, étant donné que, intuitivement, le débit jouit de la propriété des valeurs intermédiaires. Tandis que, dans le second cas, l'inconnue est la vitesse instantanée qui, pour certains élèves, est l'objet d'un rejet. Est-il crédible qu'un élève mette en oeuvre des procédures de recherche pour trouver quelque chose qui n'a aucune existence à ses yeux?

Une autre différence entre ces deux problèmes, corrélée à la précédente, est relative aux termes utilisés dans l'énoncé. Dans le premier, on n'use que de mots faisant partie du langage courant : le mot débit renvoie aussi bien au débit moyen qu'au débit instantané du mathématicien, d'autant qu'il s'accompagne d'une unité (les cm^3/min) valable autant pour l'un que pour l'autre. En fait, celui qui pose la question sait qu'il se réfère au débit instantané mais il laisse subsister une certaine ambiguïté dans l'énoncé. Le problème a précisément pour fonction de faire réfléchir à cette ambiguïté. Par contre, on parle, dans le second problème, de "vitesse en t = 2"; or, cette locution appartient au langage savant puisqu'elle ne reçoit de signification qu'au sein des mathématiques elles-mêmes. Ce qui fait que l'élève accepte la première question comme sensée, sans qu'il ait fait la distinction entre débit moyen et débit instantané, tandis que la seconde question ne peut être entendue que par un élève qui a déjà fait la différence entre vitesse moyenne et vitesse instantanée, sans quoi il y a source de malentendu entre le professeur et l'élève, le second étant obligé de deviner que le pemier veut autre chose qu'un calcul de vitesse moyenne. En bref, la distinction entre taux de variation moyen et taux de variation instantané est nécessaire pour résoudre le premier problème, mais non pour saisir le sens de son énoncé, alors qu'elle est incontournable pour la compréhension même du second énoncé.

En conséquence, la première question favorise plus une mise à l'épreuve du débit moyen, que la seconde une mise à l'épreuve de la vitesse moyenne. En effet, en posant t comme inconnue, elle attire l'attention de l'élève sur la globalité du phénomène, sur sa variation du début à la fin. De plus, comme nous l'avons vu, elle laisse planer une certaine ambiguïté sur le concept de débit. Tandis que la seconde localise la recherche dès le début en $t = 2$ et précise en quelque sorte, dès le départ, (pour qui l'interprète correctement) que c'est autre chose qu'une vitesse moyenne que l'on désire. Et de fait, beaucoup d'élèves s'essaient, dans le problème du vase conique, à calculer le débit moyen du vase, soit sur la totalité de sa hauteur, soit sur de plus petites tranches (V.2.1.2., V.2.1.3.). Alors que le second problème tourne souvent court, laissant les élèves sur la touche. Or, n'est-ce pas souvent contre une connaissance antérieure que se forge une connaissance nouvelle? "En fait, on connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même, fait obstacle à la spiritualisation" (G. Bachelard, 1980). Le concept de taux de variation instantané ne peut naître que de l'impuissance du concept de taux moyen à résoudre un problème. Il importe donc que ce dernier soit effectivement engagé par l'élève dans la résolution du problème - à titre de "concept-martyr" -, mis en situation d'échec et peu à peu remplacé par le premier. En somme, le premier problème amène à forger un concept comme instrument pour répondre à une question, tandis que l'autre amène à construire un concept en quelque sorte pour lui-même.

3.4.3. Un "passage à la limite" bien identifiable.

Le premier problème pose peut-être plus clairement que le second la question du "passage à la limite". Pour expliquer cela, comparons quatre situations :

1) la limite d'une "suite" infinie de décimaux limités :11; 11,5; 11,8; 11,9; 11,976..., forcément donnée de manière incomplète;
2) la limite, lorsque t tend vers 2, du quotient $(t^3-8) / (t-2)$;
3) la limite, lorsque Δt tend vers 0, du quotient $((2+\Delta t)^3 - 8)/\Delta t$;
4) la limite, lorsque Δt tend vers 0, du quotient $((t+\Delta t)^3 - t^3)/\Delta t$.

On ne peut décider dans le premier cas de la limite : ces nombres paraissent se rapprocher de 12, mais peut-être le dépasseront-ils? (Remarquons qu'on n'a spécifié aucune loi de construction de la suite) On ne peut qu'observer passivement l'évolution de termes sans cesse plus nombreux. Dans le deuxième cas, le passage à la limite revient à remplacer t par 2 dans la somme t^2+2t+4, obtenue en simplifiant le quotient par t-2 : mais n'est-ce pas là un geste si naturel, si banal et si anodin - du moins tant qu'on ne revient pas en arrière pour remplacer t par 2 dans le quotient, car alors on obtient 0/0 - qu'il risque de ne pas être reconnu comme initiative à prendre ou comme acte à accomplir ou non? Dans les deux derniers cas, le passage à la limite suppose la suppression des termes en Δt et $(\Delta t)^2$ dans les sommes respectives $12+6(\Delta t)+(\Delta t)^2$ et $3t^2+3t\Delta t+(\Delta t)^2$. Il s'agit là d'un acte inhabituel, chargé d'interdits a priori et qu'on n'accomplit pas sans un certain courage, ou en tout cas pas sans s'être posé au préalable la question de son opportunité. C'est de ce point de vue un acte bien identifiable qu'on ne peut poser sans être conscient.

Les deux problèmes comparés dans cette section ne sont pas, de ce point de vue, sur pied d'égalité. Le problème du mobile, demandant un nombre dérivé, favorise plus l'approche numérique et de fait, les élèves qui ont tenté quelque chose se sont contentés de calculer des vitesses moyennes "autour de 2", obtenant ainsi une suite de nombres, comme dans la première situation ci-dessus. Et on peut imaginer qu'un élève enclin, dans ce contexte, à une écriture littérale choisirait de désigner un temps voisin de 2 plus volontiers par t que par $2+\Delta t$, ce qui le ramènerait à la situation 2. Par contre, le problème du vase conique, en posant t comme inconnue, mobilise l'application dérivée et, de ce fait, se traduit peut-être plus naturellement en termes d'équation, c'est-à-dire au moyen d'expressions littérales plus conformes à la situation 4. Et c'est la vue globale d'une équation à deux variables (la variable temps et son accroisement) et le désir ne n'en garder qu'une qui pousseront les élèves à se demander s'il y a lieu ou non de supprimer des termes, c'est-à-dire qui leur fera prendre conscience d'une décision à prendre (V.2.1.4.). Remarquons toutefois que l'algébrisation sous cette forme du problème du vase conique ne va pas de soi : quelques élèves s'en tiennent à une approche numérique (V.2.1.2.), dans laquelle d'ailleurs ils ne reconnaîtront aucune manoeuvre susceptible de conduire à la réponse exacte ([266]); d'autres répugneront à désigner la seconde variable par une lettre, sous prétexte qu'on ne peut pas résoudre une équation à deux inconnues ([272]).

Au total, il y a donc plusieurs aspects qui différencient le problème du vase conique et celui du mobile. Pour évaluer leur impact respectif, il y aurait lieu d'adopter la politique du "toutes choses égales par ailleurs", en comparant les réactions des élèves à plusieurs autres problèmes intermédiaires, se différenciant deux par deux par un seul de ces aspects. Par exemple : "*Soit un mobile* *dont la position, sur une trajectoire rectiligne, est donnée par la fonction $e(t) = t^3$. Jusqu'à quand sa vitesse sera t-elle inférieure à 100 cm/min?*

Remarquons enfin que le taux instantané, tel qu'il naît de ces problèmes, a ceci de particulier que la variable indépendante est le temps : nous verrons au chapitre IX que ce n'est pas neutre, d'un point de vue épistémologique.

Nous analyserons à la prochaine section si les problèmes relatifs aux tangentes et aux extrémés sont susceptibles de susciter chez les élèves l'invention du taux de variation instantané.

4. Une tangente dont la pente est un taux de variation instantané.

4.1. Une difficulté à associer la pente d'une tangente à la limite d'une suite de quotients différentiels.

Plusieurs faits relevés lors de cette expérimentation ou ailleurs témoignent d'une réelle difficulté à associer la pente d'une tangente à la limite d'une suite de quotients différentiels.

1) Revenons au problème du ballon sphérique (V.2.1.9.), analogue à celui du vase conique. Les élèves qui échangent à propos de ce problème ([299]) ont reçu, quelques semaines auparavant, un enseignement sur les limites et les dérivées, interprétées comme pentes de tangentes. Ils dessinent le graphe du volume d'eau V dans le ballon en fonction du temps t; ils interprètent correctement le débit moyen $\Delta V/\Delta t$ comme pente de sécante à ce graphe; ils évoquent, ici le mot "dérivée", là "l'endroit de la courbe qui a une pente supérieure à 100" et, ailleurs, "le débit au bout du temps" qu'ils opposent au débit moyen. Cependant, malgré ces rapprochements, ils n'associent pas explicitement la pente en un point de la courbe à la limite du rapport $\Delta V/\Delta t$, lorsque Δt tend vers zéro, et ce, durant toute leur recherche qui dure 50 minutes. Bien sûr, on peut supposer qu'ils n'évoquent pas cette limite parce qu'ils ne savent ni comment l'exprimer, ni comment la calculer. Il n'empêche, cette omission est d'autant plus étonnante que, comme indiqué déjà, cette limite leur a été enseignée systématiquement - peu de temps auparavant - et qu'elle a été bien assimilée, aux dires de leur professeur.

2) Les élèves qui cherchent à déterminer quand les voitures des problèmes V.2.4. à V.2.6. ont la même vitesse exploitent correctement, dans l'ensemble, les graphes de position de ces

voitures : ils repèrent les abcisses en lesquelles les deux graphes (ou leurs tangentes) ont même pente (V.2.7.3). Mais plusieurs échouent déjà à interpréter les vitesses comme pentes de tangentes, oubliant celles-ci dès qu'il s'agit de calculer les premières (V.2.7.3.). En outre, quelques-uns de ceux qui y réussissent ont été conditionnés à le faire au cours de physique. Mais le fait le plus significatif n'est-il pas que la double association : de la vitesse instantanée à la pente de la tangente et de la vitesse moyenne à la pente d'une sécante ne suggère aux élèves qui la font aucun calcul de limite permettant d'obtenir l'expression de la vitesse instantanée à partir de celle de la vitesse moyenne? Seuls deux groupes tentent un tel calcul, mais sans être capables de le justifier, ce qui semble suggérer qu'ils aient plutôt travaillé en aveugle, en reproduisant (jusque dans le choix des notations pour l'un des groupes) des calculs effectués pour résoudre le problème du vase conique (V.2.7.4.). Quand d'autres élèves utilisent le mot limite, c'est pour évoquer deux points de la courbe qui se rapprochent l'un de l'autre jusqu'à se confondre ([317], [319]), mais ils ne transposent pas effectivement cette idée de limite au calcul d'une pente, même si l'un d'eux évoque une formule de façon très vague. Evidemment, on peut invoquer la difficulté de manipuler des expressions littérales. Il n'empêche qu'une fois le calcul de limite mené à bien par le professeur, les élèves éprouvent de la peine à l'interpréter en termes de pente de sécante et de tangente (V.2.7.4.) Les rares élèves que nous ayons entendus justifier que la vitesse est la pente de la tangente se réfèrent aux unités des axes ([318]).

3) Le seul élève qui détermine la tangente au graphe de $y = x^2$ au point (1, 1) par une procédure mobilisant implicitement le passage à la limite interprète cette dernière, non en termes de limite d'une suite de quotients différentiels, mais en parlant de la tangente comme d'une droite qui rencontre la courbe en deux points confondus ([328], [329]). Les autres élèves interprètent sa procédure comme lui ou, en tout cas, sans évoquer de suite de nombres ([331], [332], [333]) et expriment de nettes réticences à l'égard de ce calcul ([330], [332]).

4) Le calcul de la pente d'une tangente ne se transfère pas aisément d'un contexte à l'autre : du problème des vitesses à celui des tangentes, de ce dernier à celui des extrémés et vice-versa, si ce n'est, souvent, de manière aveugle (V.2.8.2., V.2.8.5., V.2.9.2.).

5) Plusieurs élèves interrogés, en dehors de cette expérimentation, à propos de l'interprétation géométrique du nombre dérivé, parlent exclusivement des droites sécantes qui se rapprochent de la droite tangente et ne mentionnent pas la suite de leurs pentes. Le glissement verbal : tangente au lieu de pente de tangente est fréquent.

6) En guise de séquence didactique, B. Cornu (1983) donne les deux instructions suivantes, à plusieurs élèves en fin d'enseignement secondaire :

-"Voici une courbe [Fig.16]. Au point A, je plante un clou (perpendiculairement à la feuille de papier). Je tiens un autre clou, perpendiculairement à la feuille, avec sa pointe sur le point M. J'appuie une règle sur les deux clous [Fig.17] : je déplace le point M vers le point A, le long de la courbe, en maintenant la règle appuyée contre les deux clous. Décrire ce que fait la règle.

Fig.16

Fig.17

-La courbe est maintenant la représentation graphique de la fonction $x \rightarrow x^2$, pour $x \geq 0$ [Fig.18]. Le point A est le point de coordonnées (1, 1). Le point M est le point de coordonnées (m, m^2).

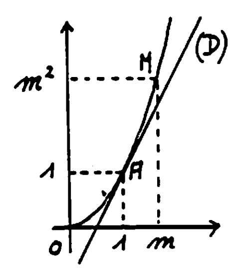


Fig.18

Quelle est la pente de la droite AM? Quelle est la pente de la droite (D)? (comment avez-vous fait pour la trouver?)

Voici comment l'auteur commente les réactions des élèves : "Venons-en à l'activité sur la tangente. Tous les élèves font allusion au mouvement de la règle (l'angle diminue, la distance diminue; les mots "rotation", "translation", sont employés). Mais beaucoup ne font pas allusion à ce qui se passe lorsque le point M arrive en A. Et parmi ceux qui y font allusion, beaucoup n'ont pas vu la notion de limite : "la règle tombe", "un point ne suffit pas pour déterminer une droite". Le mot "tangente" a été introduit par plusieurs élèves. Mais, pour calculer la pente d'une droite, tous affirment qu'il faut deux points, ce qui a incité plusieurs élèves à mesurer sur le dessin les coordonnées de deux points de la tangente pour calculer la pente. Là encore, on a donc trouvé l'idée d'un <u>état final</u>, mais qui est isolé, qui est tout à fait indépendant de ce qui s'est passé "avant" (B. Cornu, 1983).

7) A. Sierpinska (1985) met en évidence un fait comparable. Un expérimentateur manipule devant deux élèves, un matériel semblable à celui que décrit B. Cornu : il leur montre ainsi, sans recourir à la parole, comment l'on peut regarder une tangente comme la "position limite" de sécantes qui tournent autour d'un point fixe. Ces mêmes élèves sont invités, deux semaines plus tard, à déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$ au point d'abcisse $x = 0$. Ils se souviennent de l'expérience mais "L'idée de calculer quelques valeurs du quotient différentiel au voisinage de zéro n'est pas venue des élèves; elle leur a été soufflée par l'expérimentateur. La prise de conscience de la dépendance numérique de la position de la tangente à partir des positions de la sécante était très faible".

4.2. Quelques éléments d'interprétation de cette difficulté.

Tout semble donc indiquer que la pente d'une tangente n'a a priori, dans le chef des élèves, que fort peu de choses à voir avec la limite d'une suite de quotients différentiels. Dans les sections 4.2.1. à 4.2.4., nous tentons d'interpréter ce fait.

<u>4.2.1. Dans la théorie, la tangente est reliée aux sécantes par le biais de leurs pentes respectives.</u>

Comme nous l'avons dit plus haut, la tangente est, <u>en analyse</u>, un objet second par rapport à sa pente, puisqu'elle est définie par le biais de celle-ci. Le circuit effectué dans la théorie est schématisé par la Fig.19 : le point de départ est la sécante, droite définie par deux points. Celle-ci détermine une pente exprimée par la "fonction-taux d'accroissement" et la limite de cette fonction est un nouveau nombre grâce auquel on définit le point d'arrivée, à savoir la tangente. Ce qui fait qu'on ne peut aller de cet objet géométrique qu'est la sécante à cet autre objet géométrique qu'est la tangente sans passer par un domaine autre que la géométrie et que nous qualifierons de "numérique symbolisé". "Numérique" car la tangente est définie par le biais d'un nombre : sa pente. "Symbolisé" parce que cette pente est la limite d'une "suite" de pentes de sécantes et que, conformément à ce que nous avons décrit à la section VIII.3.4.3., l'acte de passage à la limite ne peut être identifié et accompli que si l'on dispose de l'expression littérale de ces pentes.

On pressent déjà ici une première difficulté. Pourquoi <u>a priori</u> considérerai-t-on des sécantes si ce n'est pour approximer seulement la pente de la tangente : en effet, aucune d'elles n'est la tangente! Mais, mathématiquement parlant, il ne sert à rien d'évaluer des pentes de sécantes, si l'on vise un résultat exact, puisque la limite d'une suite est toujours indépendante d'un nombre fini quelconque de ses termes. Il est typique d'ailleurs que, lorsqu'on veut estimer la limite d'une suite convergente, on va toujours chercher un (et un seul!) terme le plus loin possible dans la suite. Le détour par les sécantes ne peut donc être opérationnalisé que si l'on pense à utiliser l'expression littérale de leurs pentes, au lieu de se contenter d'approximations numériques. Or, n'est-ce pas une extraordinaire excursion mentale que de se dire : je vais écrire l'expression littérale de ces pentes de façon à pouvoir revenir par après à la tangente, par un passage à la limite?

Notons aussi que seule cette dernière perspective peut justifier que l'on prenne les sécantes d'un seul côté : s'il s'agit d'estimer seulement la pente d'une tangente, on obtient d'emblée une bien meilleure approximation lorsqu'on travaille symétriquement, de part et d'autre du point de tangence.

domaine géométrique | domaine "numérique symbolisé"

$$\begin{tikzcd}
\text{sécantes} \arrow[r] & \text{pentes} \arrow[d, "\text{limite}"] \\
\text{tangente} & \text{pente} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Fig.19

4.2.2. Les élèves perçoivent le passage à la limite en termes géométriques.

Ainsi que nous l'avons décrit à la section VIII.1.2.2., la tangente est, pour les élèves, un objet premier par rapport à sa pente. La tentation est grande, dès lors, de concevoir la tangente comme un objet géométrique défini au moyen d'autres objets géométriques, à savoir les sécantes, pour ensuite seulement revenir à sa pente. Le circuit emprunté par les élèves aurait, dans ces conditions, plutôt la structure de la Fig.20 que celle de la Fig.19.

Le passage à la limite serait interprété, de ce fait, de manière presque exclusivement géométrique : le mot limite du langage savant étant compris comme "position limite" de droites, au sens d'une topologie - implicite et confuse bien entendu - sur l'ensemble des droites. Pour illustrer ce décalage, décrivons comment J.M.

domaine géométrique — domaine "numérique symbolisé"

$$\begin{tikzcd} \text{sécantes} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\text{limite}"] & \text{pentes} \\ \text{tangente} \arrow[r] & \text{pente} \end{tikzcd}$$

Fig.20

Nachtergaele et al. (1978) présentent la tangente : "[...] lorsque x tend vers x', le point y de la courbe tend vers y', ou "a pour limite y' " [Fig.21]. Quand on passe à la limite, la droite yy' qui avait, avec la courbe, au moins deux points communs distincts : y et y', voit ces deux points se confondre en un seul. A ce moment, la droite yy' est devenue tangente : elle est devenue la limite, lorsque le point y tend vers y' sur la courbe, de la sécante yy'.

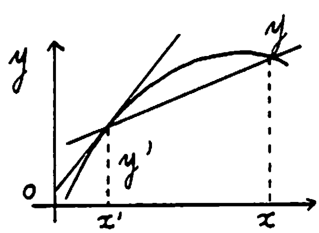


Fig.21

Définition :
La tangente au point (x', f(x')) du graphe d'une application f est la limite de la sécante comprenant ce point et un point (x, f(x)) du graphe, lorsque x tend vers x' ".
Bien sûr, ces auteurs ne confondent pas la limite mathématique avec la "limite de droites" en un sens intuitif, mais néanmoins placent les guillemets à mauvais escient. Ceux-ci sont inutiles autour de l'expression a pour limite y', puisqu'il est mathématiquement vrai qu'un point peut en avoir un autre pour limite, au sens de la distance usuelle dans $\mathbf{R}^2$, mais ils devraient entourer les deux derniers mots limite de la citation, aucune distance n'ayant été définie sur l'ensemble des droites. Cet abus - que nous ne critiquons pas dans la mesure où il témoigne du souci de rejoindre l'intuition des élèves et qui ne prête pas à conséquence si le professeur précise les choses - n'en serait pas un pour les élèves : ceux-ci entendraient le mot limite utilisé à propos des droites comme s'il avait, dans ce contexte, son sens propre, c'est-à-dire son sens mathématique.

4.2.3. Un "passage à la limite" plus actuel que potentiel.

Ce "passage à la limite" sur les sécantes, décrit à la section précédente, relève plus de l'infini actuel que de l'infini potentiel. La définition que propose G. Chilov pour la tangente représente un contraste intéressant. Nous la décrivons ci-dessous, aux seules fins de cerner, a contrario, la position des élèves. "La tangente en un point A du graphique y(x) [Fig.22] est définie en tant que droite α menée par le point A et telle que la courbe y(x), en s'approchant du point A, pénétre dans tout angle de sommet A contenant la droite α et y reste, aussi petit que soit cet angle "(G. Chilov, 1974).

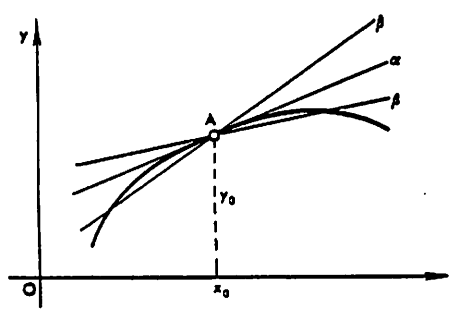


Fig. 22

Cette définition est, elle aussi, purement géométrique, en ce sens qu'elle ne suppose aucun détour par les pentes, mais, contrairement à la perception des élèves, elle évoque plus une "possibilité de dépassement" qu'une réalisation effective. Elle revient à dire qu'on peut trouver une sécante aussi "près" que l'on veut de la tangente. En effet, le fait que la courbe y(x) pénètre dans tout angle de sommet A signifie qu'on peut trouver une sécante β et une sécante β' qui forment cet angle autour de la droite α : en pénétrant dans l'angle, la courbe coupe effectivement chacune de ces droites en A et un autre point. Mais cette définition maintient comme une sorte de séparation entre la tangente d'une part et les sécantes d'autre part : une tangente n'est pas une sécante et vice-versa. Rien de tel chez les élèves ou chez les auteurs de manuels cités plus haut : la sécante devient tangente (qu'elle tourne autour d'un point fixe ou que ses deux points d'intersection avec la courbe se rapprochent l'un de l'autre). Le passage à la limite devient ainsi actuel au sens philosophique du terme, c'est-à-dire qu'il est accompli effectivement. Le mouvement (vu ou du moins imaginé) joue un rôle dans cet accomplissement : un point de la courbe que l'on voit se rapprocher d'un autre n'a aucune raison de ne pouvoir rejoindre cet autre effectivement; de même une sécante qu'on voit tourner autour d'un point ne s'arrête pas avant d'occuper la position de la tangente.

4.2.4. De la sécante à sa pente, par le biais d'un triangle. De la tangente à sa pente par le biais d'un point.

Une fois la tangente perçue comme "limite géométrique" de sécantes, il faut pouvoir repasser à sa pente. Cela soulève d'énormes difficultés pour les élèves, étant donné la façon dont ils perçoivent cette "limite". Voici pourquoi.

La définition "géométrique" que donne G. Chilov de la tangente est en symbiose avec celle qu'on en propose en analyse, dans le sens où l'une comme l'autre relèvent de l'infini potentiel. [Rien d'étonnant à cela puisqu'il est mathématicien et qu'il tâche sans doute d'élaborer une définition proche de la théorie qu'il connaît; en ce sens sa définition est peu "naturelle"]. C'est déjà montré pour la première. C'est évident pour la seconde, puisque la tangente y dépend, par le biais de sa pente, d'une définition de la limite en "ε, δ" : c'est une droite dont la pente peut être approchée d'aussi près que l'on veut par celle d'une sécante bien choisie. Cette symbiose aide à comprendre que la tangente ne peut avoir comme pente que la limite de celles des sécantes. D'une part, la tangente est une droite qui n'appartient pas à l'ensemble des sécantes, mais qui peut être "approchée" d'aussi près que l'on veut par celles-ci. Et c'est la seule droite qui jouisse de cette propriété, puisqu'en faisant tourner d'aussi peu que ce soit la droite qui était tangente, celle-ci peut déterminer avec une sécante un angle dans lequel la courbe ne pénètre pas autour de A. D'autre part, le nombre dérivé est un nombre qui n'est pas la pente d'une sécante, mais qui peut être approché d'aussi près que l'on veut par les pentes des sécantes. Et c'est le seul. C'est donc le seul candidat-pente de la tangente. Cette conséquence vient dès lors d'une mise en parallèle de deux "infinis potentiels".

Mais en "actualisant" le passage à la limite dans le domaine géométrique, en se précipitant à l'état final, les élèves s'enfoncent dans une impasse. En effet, le passage d'une sécante à sa pente s'effectue au moyen d'un autre objet géométrique qui sert de médiateur : un triangle (Fig.23). Or, pour la tangente, il n'existe plus d'objet géométrique intermédiaire, sinon un point en lequel le triangle s'est réduit ("visuellement") (Fig.24). On comprendra mieux la difficulté soulevée par ce fait si l'on imagine la situation que voici.

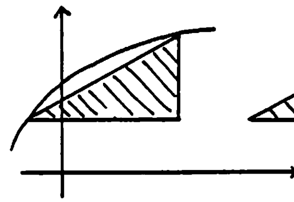


Fig.23

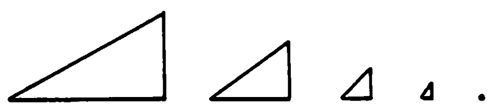


Fig.24

Supposons que l'on dessine une tangente en un point d'une courbe et quelques sécantes dont elle est la "position limite" (Fig.25) et qu'ensuite, on efface la courbe (Fig.26). Pour comparer les pentes de

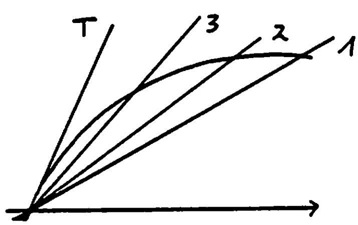


Fig.25

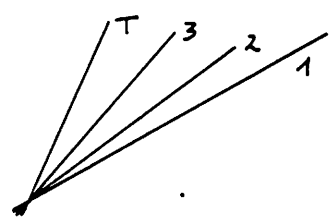


Fig.26

ces droites, il serait naturel de choisir un même incrément Δx pour toutes, auquel cas on compare les Δy correspondants (Fig.27), ou bien de choisir un même Δy et de comparer les Δx (Fig.28). Vue

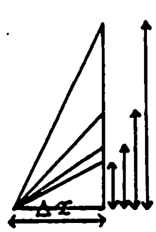


Fig.27

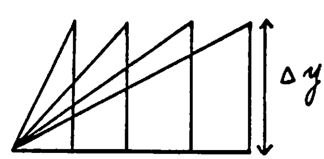


Fig.28

comme cela la pente de la tangente s'inscrit dans une sorte de continuité avec celles des sécantes : il y a bien un triangle pour la tangente comme pour les sécantes et, pour un même Δx, les Δy des sécantes successives augmentent (sur le cas de figure que nous examinons) jusqu'à valoir le Δy de la tangente. Mais les sécantes restant intimement liées à la courbe f, on est forcé de calculer leurs pentes successives au moyen du taux d'accroissement de la fonction considérée, soit (f(x)-f(a))/(x-a) : d'où, on ne peut passer d'une pente à l'autre qu'en diminuant conjointement et le Δx et le Δy. Tout d'abord, cela complique la comparaison des pentes qui sont des rapports. Ensuite, cela crée une discontinuité, une cassure entre les sécantes et la tangente : au lieu d'avoir une suite de triangles qui se termine par un vrai triangle comme aux Fig.27 et 28, on a une suite de triangles qui se termine par un point comme à la Fig.24.

Peut-être est-ce la difficulté à déterminer des pentes sur base de petits triangles - ne fût-ce que pour la précision quand il y a mesure - qui pousse quelques élèves (V.2.7.3. Fig.27) et certains mathématiciens du XVII^e siècle (Leibniz e.a., cfr. VIII.1.2.2.) à considérer un triangle dont un côté est la sous-tangente?

Or, - et c'est là le point-clé de notre argumentation - un point ne peut servir de médiateur entre une droite et sa pente, s'il a perdu la mémoire de la pente du triangle dont il est le vestige. Un détour assez long par les procédures mises respectivement en oeuvre par Fermat et Barrow pour déterminer des tangentes aidera à comprendre cette difficulté.

1) Voici, dans les grandes lignes, comment Fermat détermine la tangente en un point d'une parabole (résumé inspiré de C. Boyer, 1949 et de M. Kline, 1972) :

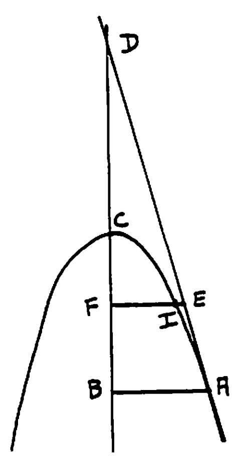


Fig.29

Exploitant la similitude des triangles DFE et DBA (Fig.29) : BA/FE = DB/DF, la propriété spécifique de la parabole : BC/CF = (BA)^2/(FI)^2 et assimilant FI à FE, il trouve

$$BC/CF = (DB)^2/(DF)^2,$$

ou, en notant BC = d; FB = e et BD = a :

$$d/(d-e) = a/(a-e)^2.$$

Il égale le produit des moyens au produit des extrêmes :

$$da^2 - 2dae + de^2 = da^2 - a^2e,$$

simplifie les termes communs de part et d'autre du signe d'égalité :

$$-2dae + de^2 = -a^2e,$$

divise par e :

$$-2da + de = -a^2.$$

et supprime le dernier terme qui contient encore e :

$$-2da = -a^2,$$

ce qui donne la valeur a = 2d de la sous-tangente.

2) La procédure de Barrow, décrite par M. Kline (1972), est quelque peu différente. Barrow assimile, tout comme Fermat, un arc de courbe PP' au segment PQ de la tangente (Fig.30), ce qui lui

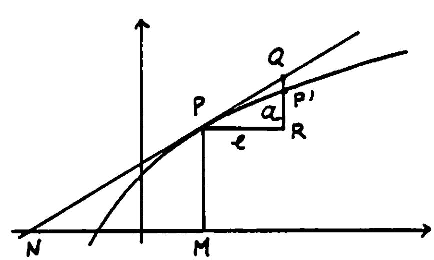


Fig.30

permet de conclure au rapport a/e = PM/MN où e = PR et a = P'R (il assimile le triangle PP'R au triangle PQR). Ensuite, il utilise l'équation de la courbe $y^2 = px$ où il remplace x par x+e et y par y+a, ce qui donne

$$y^2 + 2ay + a^2 = px + pe.$$

Il soustrait $y^2 = px$ et obtient

$$2ay + a^2 = pe.$$

En négligeant a^2, il trouve

$$a/e = p/2y,$$

d'où $PM/MN = p/2y$, ou encore $y/MN = p/2y$ et aboutit à :

$$MN = 2y^2/p = 2x.$$

Ces deux procédures sont assez semblables : d'abord, Fermat et Barrow prêtent, tous deux, deux points communs à la tangente et à la courbe (chez Fermat, les points A et I = E, le segment FI étant assimilé au segment FE; chez Barrow, les points P et Q = P', le triangle PQR étant assimilé au triangle PP'R); ensuite, ils font coïncider ces deux points, le premier en "annulant" e, le second en "annulant" a^2. Mais une différence entre elles deux nous paraît fondamentale pour notre propos : c'est que Barrow ne néglige ni a ni e, mais qu'il "passe à la limite" au niveau du quotient a/e, un peu comme s'il voulait que le point P vestige du triangle PP'R conserve en lui, intacte, cette idée de pente dont le triangle est porteur, comme s'il partageait, avec Leibniz, le sentiment que : "Quand la réalité sensible d'un objet s'évanouit, reste son essence et non le néant, la forme de l'objet survit à sa matière" (cité dans un autre contexte par P. Raymond, 1976). Tandis que dans les calculs de Fermat, on ne retrouve trace d'aucune pente, comme s'il envisageait le point résiduel I (=E) comme le vestige, non d'un triangle mais du segment EA qui joint les deux points d'intersection de la droite (sécante) avec la courbe.

De ce point de vue, les élèves semblent plus proches de Fermat que de Barrow. N'est-ce pas le cas de celui qui détermine la tangente à $y = x^2$ au point (1, 1) par "une procédure de limite"? Pour se justifier, il n'évoque pas l'évolution des pentes de sécantes mais le fait "qu'on a deux points en un" ([328])? N'est-ce pas encore plus évident chez celui qui dit "qu'un point est toujours parallèle à un point" en concluant qu'on trouve toujours deux vitesses égales, lorsqu'on coupe, par une droite perpendiculaire à l'axe des temps, les courbes représentatives des lois de position de deux voitures? N'est-ce pas aussi le cas de ceux qui doutent de la possibilité de déterminer une tangente unique en faisant tourner une sécante autour d'un point : en effet, si le point de tangence gardait la mémoire des pentes des sécantes, la direction de la tangente ne serait-elle pas univoquement déterminée? Seul l'auteur du propos [322] semble associer au point de tangence le souvenir d'une pente.

Tout ceci expliquerait pourquoi les élèves éprouvent quelque peine à penser la pente d'une tangente comme limite d'une suite de pentes de sécantes, une fois qu'il ont perçu la tangente comme "position limite" de sécantes. Le schéma de la Fig.31 en résume la

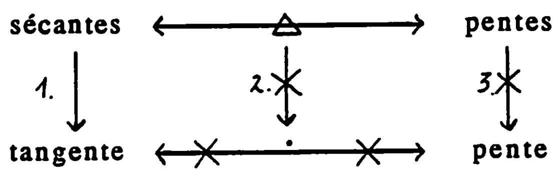


Fig.31

raison. Ils perçoivent bien la filiation entre les sécantes et la tangente (flèche 1), mais non pas celle entre les triangles et le point (flèche 2) (c'est-à-dire que ce dernier est plus perçu comme le vestige d'un segment que comme celui d'un triangle, seul susceptible d'être porteur de l'idée de pente), ce qui fait que le rôle de médiateur que joue chaque triangle entre une sécante et sa pente ne se transfère pas au point. Cette cassure, de nature géométrique, serait cause d'une autre cassure, de nature numérique celle-là, entre les pentes des sécantes d'une part, et celle de la tangente d'autre part (flèche 3). Et c'est pourquoi les élèves n'établiraient pas de filiation, en ce qui concerne les pentes, entre l'état final (la tangente) et les états antécédents (les sécantes).

4.3. La tangente et le taux de variation instantané dans les problèmes d'extrémés.

La tangente n'est pas plus spontanément associée à la limite d'un taux de variation dans les problèmes d'extrémés qu'elle ne l'est dans les problèmes précédents. En effet, la pente d'une tangente au maximum ou au minimum de la courbe est déterminée a priori : il s'agit plus de savoir en quel point une droite parallèle à l'axe ox est tangente, que de déterminer la pente d'une droite tangente en un point choisi d'avance. (V.2.9.2.). De ce fait, c'est une tangente qui évoque sans doute peu l'idée du taux de variation. Déjà, de manière générale, une pente quelconque ne suscite pas forcément une telle idée : dans le quotidien, on pense plutôt, pour parler de la pente d'une route, à l'angle qu'elle forme avec l'horizontale plutôt qu'à un rapport. Mais c'est a fortiori vrai lorsqu'il s'agit d'une pente nulle, qui évoque quelque chose d'absolu alors qu'un rapport est quelque chose de relatif. De plus, n'est-il pas plus spontané pour résoudre les problèmes d'extrémés d'exprimer que deux points, situés aux alentours du maximum ou du minimum de la courbe, ont à peu près la même image, plutôt que d'exprimer que la droite joignant ces deux points a une pente quasi nulle? C'est en tout cas ainsi que procèdent d'instinct et Fermat et les auteurs, des propos [341] et [342].

Notons enfin que, ici plus qu'ailleurs, s'impose naturellement l'idée d'approcher l'extrémé autant d'un côté que de l'autre, ce qui est contraire à la manière de faire classique.

5. La limite telle qu'elle apparaît dans les réactions des élèves aux situations précédentes.

5.1. Des "dx" et "dy" autonomes, rendus nuls trop tôt.

Décrivons tout d'abord trois caractéristiques de la définition de la limite par rapport auxquelles nous situerons ensuite l'imagination des élèves.

1) Dans l'analyse classique (celle de Weierstrass), la phrase "x tend vers a" ou "x-a tend vers 0" n'a pas de sens indépendant. La formulation en "ε, δ" de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq. } | x-a | < \delta \Rightarrow | f(x)-b | < \varepsilon$$

définit ce que veut dire : "la limite de la fonction f égale b lorsque la variable x tend vers a", mais elle forme un tout indissociable dont on ne peut isoler ni l'expression "f(x) tend vers b", ni l'expression "x tend vers a".

2) Dans cette définition, le comportement de x est régi en quelque sorte par celui de f(x) : c'est le choix de ε, arbitraire, qui détermine la distance maximale entre x et a.

3) Les comportements respectifs de x et f(x) sont envisagés d'un point de vue potentiel. On évoque deux possibilités de dépassement liées l'une à l'autre : f(x) peut se rapprocher indéfiniment de b, pourvu que x puisse se rapprocher indéfiniment de a. Les réels ε et δ qui précisent respectivement la proximité entre f(x) et b et celle entre x et a sont strictement positifs : on n'a donc à considérer ni $\varepsilon = 0$, ni corrélativement $\delta = 0$. Il n'y a pas à se demander si f(x) finit ou non par égaler b ou si x finit ou non par égaler a.

Il en va tout autrement dans l'imagination des élèves où l'expression "x-a tend vers 0" (que nous noterons "dx $\rightarrow$ 0" pour abréger) possède un sens autonome. Leurs réactions aux trois situations rencontrées dans ce chapitre en témoignent : le calcul de l'aire sous $y = x^3$, celui d'une pente de tangente et celui d'une vitesse instantanée. Dans le premier cas, ils "passent à la limite" au niveau de la "perception visuelle" des objets géométriques : ils "voient" (ou plutôt imaginent) les rectangles se réduire en segments. Lors de cette "vision" dynamique, la base dx des rectangles tend vers 0 jusqu'à l'atteindre et cela, de manière autonome et avant même qu'ils se posent la question de savoir si la somme des mesures des rectangles (devenus segments) fournit ou non celle de la surface. Le comportement de dx n'est donc pas régi par la progression de la suite des aires rectilignes vers l'aire curviligne, comme c'est le cas dans la théorie où, pour un ε donné, il faut trouver une valeur de dx pour laquelle la différence entre l'aire curviligne et l'aire rectiligne composée de rectangles de base dx soit inférieure ou égale à ε. C'est une fois que dx est devenu nul, "à vue", que les élèves reviennent dans le domaine numérique. C'est la même situation en ce qui concerne la tangente : les élèves "voient" une sécante tourner autour d'un point jusqu'à devenir tangente à la courbe. Durant ce mouvement, les incréments dy et dx qui déterminent la pente de la sécante évoluent vers 0 conjointement, mais de manière autonome, c'est-à-dire sans référence à la progression de leur rapport alors que, dans la théorie, c'est l'évolution du rapport dy/dx qui commande celle de ses termes. Les élèves, eux, n'évoqueront à nouveau ce rapport, qu'une fois que dx et dy seront devenus nuls, irrémédiablement. De même, en ce qui concerne la vitesse, le passage à la limite s'effectue au niveau de dt et de dx qui diminuent ensemble jusqu'à devenir nuls et les élèves ne reparleront de vitesse qu'une fois que ces incréments auront atteint 0; alors que leur évolution devrait être dictée par la proximité de la vitesse instantanée et de la vitesse moyenne que leur rapport détermine.

Dans les trois cas, dx est conçu d'abord de manière potentielle (on regarde par exemple l'épaisseur des rectangles en train de diminuer), ensuite de manière actuelle (cette épaisseur finit par égaler 0) : de manière générale, rien ne retient dx de devenir nul, à partir du moment où son comportement n'est pas subordonné à celui de $\Sigma f(x)dx$ ou celui de dy/dx. [Notons toutefois une hésitation en ce qui concerne l'épaisseur des rectangles, d'allure discrète a/n et liée à l'infiniment grand n : cfr. VIII.2.5.]

Dans les trois cas, il y a antériorité, au sens du temps de déroulement de la pensée, de "$dx \to 0$" ou "$dy \to 0$" par rapport à "$\Sigma f(x)dx \to$ aire" ou par rapport à "$dy/dx \to b$" : les élèves pensent à l'évolution de dx et de dy d'abord et ne reviennent à celle de $\Sigma f(x)dx$ ou à celle de dy/dx qu'ensuite, une fois que "$dx = 0$" et "$dy = 0$" sont effectivement réalisés.

Dans les trois cas, le retour à la variable dépendante de la fonction concernée débouche sur une impasse : les rectangles devenus segments ont une aire nulle, la pente de la sécante devenue tangente s'écrit 0/0, il n'y a pas de vitese en un temps nul.

Ce scénario n'est-il pas propre à expliquer l'origine d'un débat survenu dans l'histoire (cfr. e.a. C. Boyer, 1949) et observé chez les élèves (cfr. e.a. B. Cornu, 1983) et qui peut se résumer par la question : *"La limite est-elle atteinte atteinte ou pas?"*. "The question as to whether the variable S_n reaches the limit S is furthermore entirely irrelevant and ambiguous, unless we know what we mean by reaching a value and how the terms "limit" and "number" are defined independently of the idea of reaching" (C. Boyer, 1949).

Nous voyons a priori deux aspects dans ce débat. Le premier consiste à se demander si une valeur b, qui n'est pas image d'une fonction f, peut être "atteinte" par celle-ci, une fois que a est "atteint" par x. (C'est, semble-t-il, en ces termes que les élèves soulèvent le débat). Question vaine qui est source de perplexité : une aire curviligne peut-elle être égale à une aire rectiligne, une pente de tangente égale à celle d'une sécante, une vitesse instantanée égale à une vitesse moyenne? C'est cette interrogation que nous avons analysée.

Le second aspect consiste en une réticence à englober dans le concept de limite, les images effectives de la fonction (est-on enclin à dire que f(a) est la limite de f quand x tend vers a, si f est continue en a, dans la mesure où le mot limite est associé à "quelque chose" d'inaccessible?). Nous ne parlerons pas ici de cet aspect.

Enfin, nous pensons avoir précisé, dans ce chapitre, en quoi consiste, chez les élèves, ce que A. Sierpinska (1985) appelle la *conception géométrique de la notion de limite*. "Cet obstacle peut se manifester par : [...] Une idée géométrique de la différence entre une grandeur variable et une grandeur constante qui est sa limite. Justement : "Grandeur" et non "nombre". Conception du cercle comme limite des polygones inscrits ou circonscrits serait un des symptômes de cet obstacle : plus le nombre de côtés est grand, plus *la forme* du polygone devient proche de la forme du cercle. Aussi, une idée de tangente comme limite de sécante variable où on se dit qu'à un certain moment la position de la sécante diffère aussi peu que l'on veut de la position de la tangente. C'est bien la conception de différence avec laquelle on a affaire dans la méthode d'exhaustion. Le terme "différence" changeait de sens avec le changement de la grandeur en question et ceci peut être une des raisons pour lesquelles on avait tant de mal à transformer cette méthode en un théorème général."

5.2. Un parallèle historique : des dx et dy définis avant leur rapport.

Comme nous l'avons dit à la section V.1.4., longtemps l'infinitésimal a été choisi comme concept premier du calcul infinitésimal. Et même lorsqu'il fut supplanté dans ce rôle par le rapport d'infinitésimaux, il resta longtemps la référence implicite. Ainsi ce qui distingue l'ultima ratio de Newton (cfr.V.1.4.) de notre dérivée, c'est que Newton échoue à définir ce concept sans faire référence à l'infinitésimal : "In other words, it is the ratio in which Newton was interested, not the evanescent quantities themselves; but he failed to define the ratio unequivocally (C. Boyer, 1949). De même Leibniz tente de définir le "rapport" dy/dx en exploitant le triangle caractéristique (cfr.VIII.1.2.2.), mais il définit la tangente comme la droite joignant deux points infiniment proches de la courbe. Et ne retrouve-t-on pas encore cette référence à l'infinitésimal dans le langage de Cauchy, lorsqu'il définit la fonction dérivée comme "la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits et simultanés de la fonction donnée et de la variable dont elle dépend" (Cauchy, rééd. 1882-1932, tome XIII).

Le primat du dx dans la théorie ne témoigne-t-il pas de son autonomie dans la pensée des mathématiciens du XVII^{e} siècle? N'est-ce pas en effet contre la tentation de s'intéresser à "dx $\rightarrow$ 0", avant de s'intéresser à "dy/dx $\rightarrow$ b", ou, en tout cas, indépendamment, que Newton - qui a donné priorité au rapport d'infinitésimaux - met en garde lorsqu'il écrit : "[...] by the ultimate ratio of evanescent quantities is to be understood the ratio of the quantities not before they vanish, nor afterwards, but with which they vanish" (Newton, trad. 1947)?

Nous verrons au chapitre IX, le rôle joué par le temps dans le sens octroyé aux "infinitésimaux" et, de manière plus générale, aux "limites de variables".

Chapitre IX.

Des calculs d'aires et de volumes au calcul des primitives.

Les applications du théorème fondamental sont multiples; chacune d'elles soulève des difficultés épistémologiques spécifiques. Dans ce chapitre, nous nous limitons essentiellement aux calculs d'aires et de volumes. Cependant, en guise de préliminaire, nous tentons de brosser un panorama d'ensemble des facettes de ce théorème, tant pour donner un aperçu de celles qui ne concernent pas les calculs d'aires et de volumes que pour cerner, par comparaison avec les premières, les facettes spécifiques à ces calculs. Un survol historique de la découverte du théorème fondamental apportera des points de repère complémentaires. Ces préliminaires font l'objet de la première section. Dans les autres, nous revenons exclusivement au calcul de primitives appliqué aux aires et aux volumes pour en approfondir la complexité épistémologique, suivant un plan qui sera précisé juste avant la section 2.

1. Deux approches distinctes du théorème fondamental du calcul intégral.

Dans cette section, deux formulations du théorème fondamental seront distinguées. Elles seront confrontées aux approches respectives de Newton et de Leibniz. Après quoi, nous analyserons la portée de chacune de ces deux formulations dans l'une ou l'autre application du théorème.

1.1. Deux énoncés, deux interprétations, deux preuves.

Voici deux énoncés du théorème fondamental.

1) Si f est continue sur [a, b], alors elle admet des primitives sur cet intervalle, et, pour toute primitive F de f sur [a, b], on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

2) Si f est de classe C^1, alors

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Ces deux énoncés sont fort éloignés l'un de l'autre, épistémologiquement parlant : ils privilégient des interprétations différentes et suggèrent des preuves différentes. En effet, supposons représentée la courbe représentative de la fonction f sur laquelle porte l'hypothèse du théorème dans chacun des deux cas. L'intégrale dont il est question dans le premier énoncé représente alors l'aire sous cette courbe entre les bornes a et b (Fig.1). Pour prouver qu'un tel calcul d'aire s'obtient en soustrayant l'image en a d'une primitive F de f de son image en b, on démontre que le taux d'accroissement de la fonction intégrale, soit $\int_a^x f(u)\,du$, possède une limite égale à f(x) (Fig.2) :

$$\lim_{\Delta x \to 0}[\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du \,/\, \Delta x] = f(x).$$

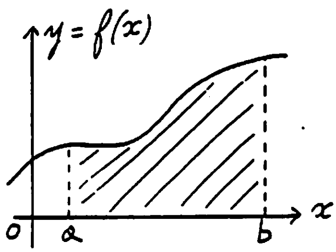


Fig.1

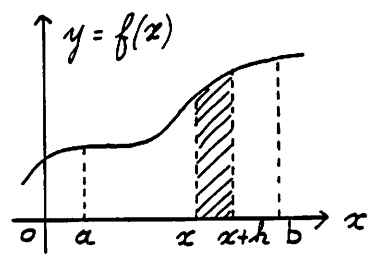


Fig.2

L'intégrale présente dans le second énoncé mesure la "dénivellation" (terme emprunté à l'équipe Mathécrit, 1980) de la courbe représentative de f, entre les bornes a et b, soit f(b) - f(a) (Fig.3). En effet, chaque dénivellation ou différence partielle de la fonction, $f(x+\Delta x) - f(x)$ (Fig.4), correspondant à un "petit incrément" $\Delta x = dx$, est approximé par $dy = f'(x)dx$ (que nous appelerons familièrement "*différentielle*", par rapprochement avec l'application du même nom). La dénivellation totale de la fonction, entre les bornes a et b, qui est la somme de ses dénivellations partielles, vaut donc la limite, pour Δx tendant vers 0, de la fonction définie par la somme de ces différentielles depuis a jusque b. Nous désignerons brièvement cette limite, à l'instar de l'équipe Mathécrit (Ib.), par "*intégration des différentielles*" et nous la noterons, tout aussi brièvement, par "$\lim_{dx \to 0}(\Sigma\ dy)$".

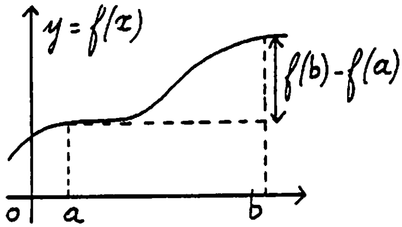


Fig. 3

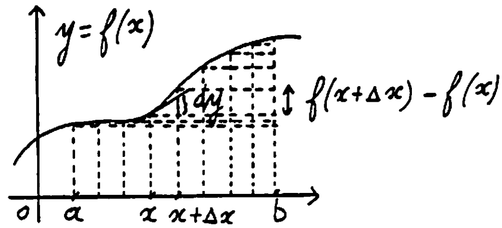


Fig. 4

Ces deux points de vue diffèrent plus qu'il n'y paraît a priori. D'un côté, on dérive la fonction intégrale : l'opérateur de dérivation succède donc à celui d'intégration. On pourrait résumer le premier énoncé en disant succintement : "On revient au point de départ lorsqu'on dérive ce qu'on a intégré". De l'autre, on intègre des différentielles, c'est-à-dire que l'"on intègre ce qui a été dérivé". Dans ce cas, c'est l'opérateur de dérivation qui intervient en premier lieu et celui d'intégration en second. De ce fait, dans le premier cas, l'opérateur de dérivation porte sur la fonction définie par la "somme", et, dans le second, il intervient sur les "termes de la somme". Dans les deux cas, c'est l'opération effectuée en dernier lieu qui s'impose à l'esprit : on dérive une fonction intégrale dans le premier, on intègre des différentielles dans le second. Ce qui fait que l'idée de somme passe à l'arrière-plan dans le premier cas alors qu'elle reste fort prégnante dans le second.

1.2. Newton "dérive la fonction-intégrale".

Comme nous l'avons vu à la section V.1.4., le concept d'ultima ratio est le concept premier autour duquel Newton articule sa théorie, à partir d'un certain moment de sa vie. Dans les calculs d'aires, ce concept se concrétise par le *moment d'aire*, c'est-à-dire le rapport entre une augmentation "infinitésimale" de l'aire et une augmentation "infinitésimale" de l'abcisse x. H. J. M. Bos (1980) illustre par un exemple comment Newton met en oeuvre ce moment d'aire. Voici, en substance, sa description. Soit z l'aire ABD de la Fig.5, y = BD et x = AB; posons Bβ = o et choisissons v = BK de telle sorte que aire(BDδβ) = aire(BKHB) = ov. Newton considère une aire (ABD) donnée par une formule particulière : soit $z = 2x^{3/2}$ ou $z^2 = 4x^3/9$. Dans cette dernière égalité, il augmente x de la quantité o et z de la quantité ov :

$$(z + ov)^2 = 4(x + o)^3 / 9;$$

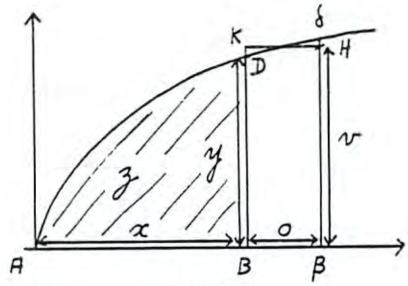


Fig.5

il développe chacun des binômes

$$z^2 + 2zov + o^2v^2 = 4(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3) / 9;$$

il simplifie les termes z^2 et $4x^3 / 9$ de part et d'autre de l'égalité et divise les autres termes par o

$$2zv + ov^2 = 4(3x^2 + 3xo + o^2) / 9;$$

il prend ensuite une valeur de o "infiniment petite", ce qui lui permet de négliger tous les termes contenant o ou une de ses puissances et d'égaler v à y :

$$2zy = 4x^2 / 3,$$

ce qui s'écrit encore, en tenant compte de $z = 2x^{3/2} / 3$,

$$y = x^{1/2}.$$

Ce faisant, Newton déclare explicitement que les quadratures s'obtiennent en inversant le processus de différentiation : ayant trouvé y en fonction de x en "différentiant" la loi qui exprime z en fonction de x, il a trouvé une courbe $y = y(x)$ quarrable par le biais de $z = z(x)$.

On ne peut s'empêcher d'établir un parallèle entre la démarche de Newton et la dérivation de la fonction intégrale. En effet, le point de départ de Newton est une fonction, la fonction z, qui représente l'aire sous une courbe depuis une abcisse déterminée : c'est donc l'équivalent de notre fonction intégrale. La manipulation qu'il lui fait subir produit les mêmes effets que notre calcul de dérivées. Ainsi pourrait-on dire que Newton dérive la fonction intégrale, si ce n'est que le concept de dérivée au sens où nous l'entendons est absent de l'oeuvre de Newton, ainsi que nous l'expliquerons plus loin. Ce faisant, il met l'accent sur le processus "d'antidérivation" plutôt que sur le processus de sommation : puisque la fonction z, une fois "dérivée" donne la fonction y, un processus inverse devrait permettre de passer de y à z. Cette accentuation se confirme lorsqu'il reformule l'objet du calcul infinitésimal à peu près ainsi :

- le calcul du moment d'aire est un cas particulier d'algorithmes dont la recherche constitue l'objet du calcul différentiel et qui s'appliquent à des contextes divers : aires, vitesses, pentes de tangentes. Ces algorithmes fournissent ce qu'on appelle aujourd'hui le taux de variation instantané d'une variable y par rapport à une autre x. Ils s'obtiennent en généralisant la procédure décrite plus haut à propos du moment d'aire. Ainsi, soit $y = x^n$. On incrémente x de o et on développe le binôme $(x + o)^n$

$$(x + o)^n = x^n + nox^{n-1} + ((n^2-n)/2)o^2x^{n-2} + \ldots$$

Le rapport entre l'accroissement de y et celui de x est donc, après avoir simplifié par o,

$$nx^{n-1} + ((n^2-n)/2)\ ox^{n-2} + \ldots$$

ou encore nx^{n-1} si l'on néglige les termes contenant o ou une de ses puissances.

- le calcul intégral consiste à déterminer des algorithmes "réciproques".

1.3. Leibniz "intègre des différentielles".

Voici, résumée à partir des commentaires de H. J. M. Bos (1980), C. Boyer (1949) et M. Kline (1972), la découverte du théorème fondamental chez Leibniz. Celui-ci étudie d'abord des suites de nombres $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$, ainsi que les suites correspondantes, formées des différences des termes consécutifs : $b_1 = a_1 - a_2$; $b_2 = a_2 - a_3$; $b_3 = a_3 - a_4$ ... Il remarque qu'en additionnant ces différences on obtient la différence entre les termes extrêmes de la suite initiale : $b_1 + b_2 + \ldots b_n = a_1 - a_{n+1}$, ce qui revient à dire que les calculs de différences sont, en quelque sorte, les inverses des calculs de sommes. Il se sert de cette constatation, e.a. pour sommer la série

$$1/1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + 1/15 + \ldots$$

En effet, les termes de cette série peuvent être regardés comme des différences : $2/r(r+1) = 2/r - 2/(r+1)$. La série converge donc vers 2 puisqu'elle s'écrit

$$\Sigma_{1\leq r\leq n} 2/r(r+1) = 2 - 2/(n+1).$$

De cette étude sur les suites et les séries, Leibniz induit la liaison entre les processus d'intégration et de différentiation. Il passe du discret au continu en regardant une courbe comme une "suite" d'ordonnées y dont l'abcisse représente en quelque sorte le numéro d'ordre (Fig.6). Si on considère une suite d'abcisses régulièrement

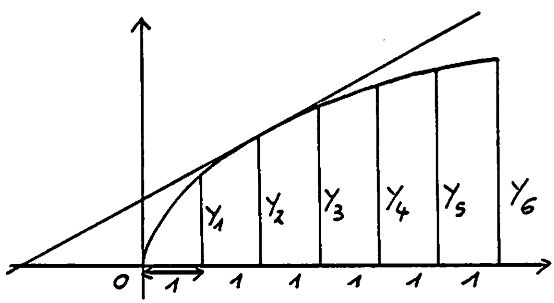


Fig.6

échelonnées et que l'on prend pour unité la distance entre deux abcisses successives, on peut, d'une part, approximer l'aire sous la courbe en sommant les y_i et, d'autre part, approximer la pente de la tangente en y_i en effectuant la différence $y_{i+1} - y_i$. La réciprocité entre les quadratures et les déterminations de tangentes serait dès lors déduite, par analogie, de celle entre les calculs de sommes et ceux de différences. Leibniz extrapole cette réciprocité au cas où la distance dx entre deux abcisses consécutives est choisie "infiniment petite", auquel cas, estime-t-il, les sommes et différences d'ordonnées fournissent avec exactitude, les unes, l'aire sous la courbe, les autres, les tangentes. Cette analogie avec les calculs de sommes et de différences des termes d'une suite, il la formule, en substance, comme suit : un calcul d'aire s'apparente à un calcul de somme ($\int_{x_1}^{x_2} ydx \leftrightarrow b_1 + b_2 + \ldots b_n$), mais si chacun des termes de la somme peut être regardé lui-même comme une différence ($ydx = dz \leftrightarrow b_i = a_i - a_{i+1}$), alors le résultat de la somme peut s'obtenir comme la différence des termes extrêmes ($\int_{x_1}^{x_2} dz = z(x_2) - z(x_1) \leftrightarrow \Sigma\, b_i = a_1 - a_{n+1}$).

La démarche de Leibniz ressemble à l'intégration des différentielles. En effet, il conçoit une aire avant tout comme une "somme d'ordonnées", qu'il compare à la somme des termes d'une suite et il interprète comme des "différences" les termes de la somme, et non la somme elle-même. Ce faisant, il garde à l'idée de sommation toute sa priorité, contrairement à Newton : "Newton solved area and volume problems by thinking entirely in terms of rate of change. For him differentiation was basic; this process and its inverse solved all calculus problems, and in fact the use of summation to obtain an area, volume, or center of gravity rarely appears in his work. Leibniz, on the other hand, thought first in terms of summation, though of course these sums were evaluated by antidifferentiation" (M. Kline, 1972).

1.4. A formulations différentes, applications différentes mais un impératif commun : penser en termes de fonctions.

A propos des deux formulations du théorème fondamental reprises plus haut, H. Freudenthal (1973) évoque deux types d'applications différentes de ce théorème : "It can be shown in two different ways that differentiating and integrating are inverse operations; both efforts should be exacted from students, since both proofs are paradigmatic for numerous applications of differential quotient and integral. On one hand differentiating of the integral function is shown to lead back to the original function, on the other hand integrating the differential quotient appears to reproduce the original function up to a constant".

N'ayant pas trouvé d'illustration de ces propos chez son auteur, nous en tentons une dans les paragraphes qui suivent. Voici trois problèmes :

1) Calculer l'aire sous la courbe $y = x^3$, entre les bornes 1 et 2.

2) Un mobile se meut sur un axe ox, à une vitesse donnée par la loi $v(t) = 3t^2 - 5t + 1$. Quelle distance parcourt-il entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = 6$?

3) Soit un réservoir cylindrique de rayon $R = 2m$ et de hauteur $h = 3m$. Le débit d'écoulement v au tuyau de sortie, placé à la base, étant à chaque instant proportionnel à la racine carrée de la hauteur de l'eau, calculer le temps nécessaire pour que le réservoir se vide, sachant que le débit est de deux litres par seconde au moment où la hauteur est de un mètre (énoncé proposé par J. Quinet, 1976).

Ces trois problèmes se résolvent au moyen d'un calcul de primitives. Pour le premier, on calcule la primitive de la fonction $y = x^3$ et on applique la primitive trouvée aux bornes 1 et 2 :

$$\int_1^2 x^3dx = [x^4/4]_1^2 = 15/4.$$

Pour le deuxième, on intègre la fonction-vitesse $v(t) = 3t^2 - 5t + 1$ pour obtenir une loi de position du mobile plausible mais dont il reste à déterminer une constante additive, soit $e(t) = t^3 - 5t^2/2 + t + k$; on fixe cette constante en 0, en supposant que le mobile se trouve à l'origine de l'axe en $t = 0$ et on applique la fonction à $t = 6$: $e(6) = 132$. Pour le troisième, on intègre, entre les bornes 0 et 3, la fonction $t = t(h) = 2\pi 10^3/\sqrt{h}$ qui exprime la limite du taux de variation du temps t nécessaire pour vider la cuve d'un volume d'eau de hauteur h, par rapport à cette même hauteur :

$$\int_0^3 2\pi 10^3/\sqrt{h}\ dh = [4\pi 10^3\sqrt{h}]_0^3 = 4000\pi\sqrt{3}.$$

Mais avant d'en arriver là, il faut prendre conscience du théorème fondamental, soit en dérivant la fonction intégrale, soit en intégrant des différentielles. Tâchons d'analyser en quoi chacune de ces deux preuves est "paradigmatique" de l'un ou l'autre des problèmes précédents et esquissons succintement le seuil épistémologique qu'elle suppose dans chacun des cas. Nous approfondirons le cas du calcul d'aire dans les sections 2, 3 et 4 de ce chapitre.

Les problèmes 2 et 3 ont quelque chose de commun qui les différencie du problème 1 : c'est que leur énoncé induit d'emblée l'idée de <u>variation</u>, ainsi que la considération d'un point de vue <u>local</u>. En effet, la donnée du problème 2 est une fonction : la loi de vitesse du mobile grâce à laquelle on peut déterminer l'espace parcouru par celui-ci. (En un sens, la donnée centrale du problème 1 est une fonction aussi, mais cette dernière y apparaît plus comme une courbe qui délimite une aire que comme une loi de variation). Mais le passage de la vitesse à l'espace s'effectue de prime abord de façon locale : on ne peut envisager la vitesse du mobile qu'en un instant donné, puisque celle-ci varie continuellement. On ne peut donc approximer l'espace parcouru que sur de très petits intervalles de temps durant lesquels on aura supposé la vitesse constante. De même, on dit dans le problème 3 comment le débit varie en fonction de la hauteur de l'eau. Ce renseignement permet de calculer de prime abord le temps mis pour vider la cuve, mais à nouveau par calculs successifs de petites quantités : en effet, il faut, pour ce faire, supposer le débit constant, le temps que l'eau descende dans la cuve d'une hauteur minime. Dans un premier temps, on est donc amené naturellement dans un cas comme dans l'autre, à sommer des petites approximations. Ensuite, pour passer de cette idée de sommation à celle d'un calcul de primitives, il faut décoder les termes de cette somme comme les approximations des dénivellations partielles d'une fonction. Les petits espaces additionnés dans le problème 2 doivent être vus comme les approximations des dénivellations de la loi de position du mobile, correspondant à des incréments Δt du temps : leur "somme infinie" valant donc la dénivellation totale de cette fonction entre les bornes 0 et 6. Les temps additionnés dans le problème 3 sont, à peu de chose près, les dénivellations partielles de la fonction $t(h) = 4\pi 10^3\sqrt{h}$ qui exprime le temps mis pour vider complètement la cuve d'un volume d'eau de hauteur h et leur "somme infinie" est la dénivellation de cette même fonction entre les abcisses 0 et 3. Il suffit d'ailleurs de penser l'inconnue en termes fonctionnels pour faire l'économie de l'idée même de somme, comme cela est arrivé à certains élèves à qui nous avons posé une variante du problème 2 (VI.2.2.) : *Un mobile se meut sur un axe ox, à une vitesse donnée par la loi* $v(t) = 3t^2 - 5t + 1$. *Sa position vaut* $x = 2$ *au temps* $t = 0$. *Quelle position occupe-t-il à l'instant* $t = 6$? Les élèves qui ont réussi ce problème n'évoquent pas une somme de petits espaces parcourus, mais raisonnent directement en termes de fonction primitive : ils intègrent (empiriquement) la loi de vitesse et trouvent directement la loi de position dont ils calculent l'image en $t = 6$ (VI.2.2.1.).

Mais n'est-il pas plus difficile de penser les problèmes 2 et 3 en termes fonctionnels que de le faire pour la variante que l'on vient d'évoquer? Sans doute, surtout en ce qui concerne le problème 3. Déjà, pour le problème 2, un espace parcouru par un mobile n'est pas forcément considéré comme la différence de deux images de sa loi de position (sauf pour les élèves habitués dans leur cours de physique à jongler avec les lois de position, de vitesse et d'accélération), ce qui éloigne quelque peu le problème 2 de sa variante. Mais, de ce point de vue, le problème 3 est plus difficile encore. D'abord, contrairement au problème 2, la variable indépendante de la fonction qu'il faut considérer n'est plus le temps et nous verrons plus loin dans ce chapitre que l'idée de variation en général est liée spontanément à la variation temporelle. Partant, la fonction t(h) qui exprime le temps mis pour vider la cuve d'un volume de hauteur h paraît terriblement peu naturelle : on a l'impression que c'est la hauteur qui varie en fonction du temps, et non le temps en fonction de la hauteur. Ensuite, on ne s'aperçoit que la dérivée de cette fonction est donnée dans l'énoncé qu'au prix de détours alambiqués. En effet, soit Δt le temps nécessaire pour faire passer le volume contenu dans la cuve de $V + \Delta V$ à V, ou, ce qui revient au même, son niveau de $h + \Delta h$ à h (Fig.7); la donnée du débit et de la hauteur au moment où le débit vaut 2 pousse à consi-

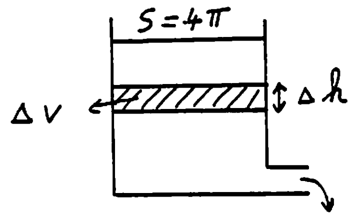


Fig. 7

dérer le rapport $\Delta V/\Delta t$, ou le rapport $\Delta h/\Delta t$, mais non l'inverse de ce dernier, qui est pourtant le seul utile à envisager : puisqu'il conduit à la fonction qu'il convient de primitiver.

$$\Delta t/\Delta h = 4\pi\Delta t/\Delta V = 4\pi/V = 2\pi 10^3/\sqrt{h},$$

La modélisation du problème 3 passe donc par une <u>inversion</u> très artificielle de la pensée.

Dans ces deux problèmes, on doit ainsi envisager les termes d'une "somme" comme des "petites différences" pour percevoir que cette somme équivaut à la différence des images d'une fonction primitive, mais l'idée du taux de variation est présente, dès l'énoncé, au niveau de chacun des termes de cette somme (même si le décodage de l'énoncé pose, d'un problème à l'autre, des difficultés inégales). C'est pourquoi la prise de conscience du théorème fondamental nous paraît se rapprocher, à l'occasion de ces problèmes, plus de l'intégration des différentielles que de la dérivation d'une fonction intégrale.

Le problème 1 se présente sous un tout autre jour épistémologique. Contrairement aux problèmes 2 et 3, plus rien n'induit dans son énoncé ni l'idée de variation, ni celle d'une étude locale : on demande, dans le problème 1, de calculer une aire et dans les sections suivantes, nous montrerons combien ce calcul est a priori étranger à ces deux idées. La considération d'une fonction primitive et de son taux de variation doit être dès lors un acte délibéré que rien ne suggère. Or, c'est là un passage obligé si l'on veut appréhender le théorème fondamental dans le contexte des aires, que ce soit par le biais de l'intégration des différentielles, ou par celui de la dérivation de la fonction intégrale. En effet, d'un côté, il faut interpréter les petites aires ajoutées en termes de "différentielles" d'une fonction primitive de la fonction initiale : l'aire A, située sous $y = x^3$ s'écrit $\int dA$ où $dA = x^3\,dx = F'(x)\,dx$ avec

$F(x) = x^4/4 + k$; chaque dA approximant la dénivellation partielle de F(x) de x à $x+\Delta x$, leur "somme infinie" est donc la dénivellation totale entre a et b, soit $[x^4/4]_a{}^b$. De l'autre, il faut voir l'aire demandée comme l'image en 2 de la fonction intégrale : $\int_1{}^x u^3\,du$ et penser à dériver cette dernière pour s'apercevoir qu'elle est une primitive de la fonction initiale. Le fait de penser un calcul d'aire ou de volume en termes fonctionnels est d'ailleurs si payant que certains élèves devineront comment déterminer la forme d'une cuve déjà graduée (VI.2.4.) pour avoir constaté que le volume d'eau contenu dans une autre cuve (VI.2.3.), dérivé par rapport à la profondeur h, donnait l'aire de sa section supérieure (VI.2.4.5.). Mais s'il faut porter à leur actif d'avoir vu la présence d'un calcul de dérivées, on ne peut pas dire qu'ils aient découvert ainsi le théorème fondamental : c'est en effet le contexte même de ces problèmes (remplissage de cuves) qui les poussait à voir les volumes comme fonctions de leur profondeur et, de plus, ils furent incapables de justifier leur procédure.

Comme nous le développerons dans les trois sections suivantes, énorme est la difficulté de percevoir l'opportunité du calcul des primitives dans le contexte des aires et des volumes, que l'on s'inspire de l'intégration des différentielles ou de la dérivation de la fonction intégrale. Si bien qu'il est difficile de dire qu'une de ces deux approches est plus "paradigmatique" que l'autre en ce qui concerne le calcul des aires et des volumes. D'ailleurs Newton et Leibniz ne se sont-ils pas inspirés, l'un de l'une de ces approches et l'autre, de l'autre, pour accéder au théorème fondamental? Sans anticiper notre analyse, nous pouvons dès à présent avancer un argument en faveur de la première et un autre en faveur de la seconde

D'une part, le calcul d'une aire se présente tout naturellement comme une sommation. Or, si l'idée de somme subsiste lors de l'intégration des différentielles, il n'en va pas de même lors de la dérivation de la fonction intégrale : là, le processus de sommation est littéralement balayé pour être supplanté par celui d'anti-dérivation; il ne s'agit plus, comme dans le premier cas, de sommer des "différences", il s'agit de remplacer délibérement un calcul de somme par un calcul du taux de variation de quelque chose qu'on s'attend a priori à trouver sous forme de somme. Vu comme cela, on serait plus proche, ici, de l'intégration des différentielles.

D'autre part, comme on l'a dit plus haut, l'intégration des différentielles s'interprète assez naturellement en termes de dénivellation d'une fonction et la dérivation de la fonction intégrale en termes d'aire sous la courbe représentative d'une fonction. Or, lorsqu'on calcule l'aire sous $y = x^3$ on a déjà le graphe d'une fonction sous les yeux : celui de $y = x^3$ précisément. Et l'interprétation du théorème fondamental en termes d'aire fait intervenir cette même fonction alors que son interprétation en termes de dénivellation en fait intervenir une autre dont la considération ne va pas de soi, ainsi que nous le verrons plus loin. De ce point de vue, la dérivation de la fonction intégrale semble plus proche du problème concerné que l'intégration des différentielles.

Dans les sections qui suivent, nous analysons plus en détail le seuil épistémologique qu'il faut franchir pour réaliser que des aires et des volumes peuvent être obtenus par le calcul de primitives. Dans le calcul de l'aire sous une courbe, deux fonctions seront distinguées : la *fonction-courbe* dont le graphe délimite partiellement l'aire en question et la *fonction-aire* qui exprime l'aire sous le graphe de la première depuis une abcisse constante jusqu'à une abcisse variable. Dans les sections IX.2. et IX.3. nous étudions les difficultés qu'éprouvent les élèves à considérer respectivement l'une et l'autre. Après quoi, nous nous penchons, dans la section IX.4., sur les obstacles propres au calcul par lequel on passe de l'une à l'autre. Nous verrons aussi, dans la section IX.3., le rôle joué par le temps dans toute idée de variation.

2. La fonction-courbe.

Aux sections III.1.1. et III.1.2., nous avons vu que l'unité mathématique entre des problèmes aussi divers que la quadrature de la parabole, la cubature du cône et celle de la sphère est d'ordre fonctionnel : une même fonction exprime la mesure des indivisibles de ces grandeurs respectives en fonction de la "position" de ceux-ci au sein de chacune d'elles. Mais la prise de conscience d'une telle unité n'est pas plus obvie pour les élèves d'aujourd'hui qu'elle ne l'a été dans l'histoire des mathématiques.

2.1. L'émergence des aires sous une courbe dans l'histoire des mathématiques.

Les aires sous une courbe n'apparaissent qu'assez tard dans l'histoire des mathématiques. On étudie d'abord des aires et des volumes familiers tels l'aire du disque, le volume de la sphère et du cône, non pas ces aires bizarres délimitées de trois côtés par des segments et d'un seul par une courbe et dont la forme peut paraître a priori bien arbitraire. Il est difficile de dater l'apparition des aires sous une courbe car, ainsi que le précise O. Toeplitz, (1963) : "Almost imperceptibly the course of these discoveries had taken a new turn. Beginning with the measurement of areas in general, it had wound up with the study of very special sorts of areas - those, namely, whose boundaries below and on left and on right were box - shaped and which were bounded by a curve only above". Mais nous avons pointé plusieurs faits historiques qui nous apparaissent comme autant de jalons importants dans l'apparition de telles aires et plus généralement dans celle de la notion de fonction. et qui cadrent, un peu par contraste, l'attitude des élèves que nous avons interrogés.

1) Dans le livre V des "Eléments", Euclide représente des grandeurs quelconques par des segments qui servent de support à sa pensée lorsqu'il établit des théorèmes relatifs aux grandeurs.

2) C'est chez N. Oresme au XIV^{e} siècle qu'apparaît explicitement la représentation graphique des fonctions. Celui-ci "entend rendre compte quantitativement de la variation de l'intensité de grandeurs continues qui dépendent de grandeurs analogues" (J. Dhombres <u>et al.</u> 1987) au moyen de figures géométriques telles celles qui sont représentées à la Fig.8. Il précise qu'au lieu de considérer les surfaces ABCD, on peut se

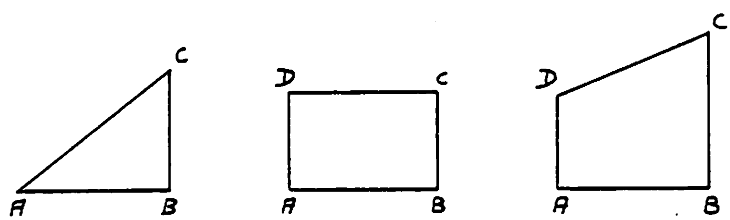


Fig.8

contenter de la "ligne des sommets DC".

3) "[...] Cavalieri s'autorise à réarranger "toutes les lignes" d'une figure, à les tasser, pour ainsi dire, le long d'un segment rectiligne qui sert de butoir [Fig.9 où |QL| = |BE| + |ID|] pour

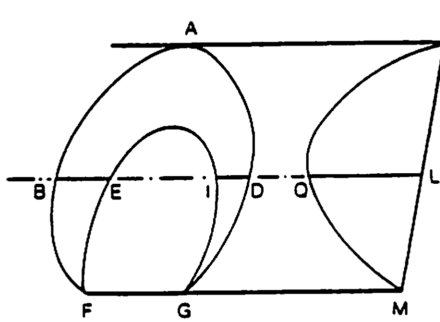


Fig.9

transformer des figures curvilignes compliquées en des figures plus simples appuyées sur des droites" (J. Dhombres et al: 1987).

4) Par la méthode des coordonnées, Descartes ramène le calcul sur les grandeurs à celui sur les nombres. Dorénavant, chaque grandeur sera représentée par un nombre. Ainsi moyennant le choix d'une unité sur l'axe Oy, soit OA = 1, le nombre 3 correspond à la grandeur figurée par le segment BC (Fig.10). Quant aux

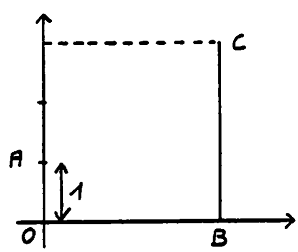


Fig.10

relations entre grandeurs, elles sont représentées par des courbes. Et parmi ces dernières, Descartes distingue les "courbes géométriques", c'est-à-dire les courbes composées de points dont les coordonnées x et y vérifient une équation algébrique.

En amont des courbes et des expressions analytiques qui leur sont éventuellement associées se situe donc tout un contenu sémantique que nous pouvons résumer schématiquement comme suit :

grandeur	→	segment
variation d'une grandeur	→	segments aux extrémités alignées
grandeur décomposée en indivisibles	→	segments aux extrémités alignées
segments aux extrémités alignées	→	courbes composées des extrémités non alignées de ces segments
courbes composées de points	→	équations vérifiées par des coordonnées.

Les segments chez Euclide, les surfaces chez Oresme, les segments dont les extrémités sont alignées chez Cavalieri et les nombres ou les courbes chez Descartes sont des *signes* au sens où l'entendent les linguistes : "Un signe est un phénomène à double face qui oppose et relie un signifiant (vocal, écrit, gestuel, etc.) à un signifié corrélatif" (P. Ricoeur, 1980). Chez Euclide, les segments représentent des grandeurs constantes mais quelconques; chez Oresme, les surfaces et les segments qui les délimitent supérieurement concrétisent la variation de grandeurs; chez Cavalieri, les segments "aux extrémités alignées" figurent les indivisibles d'une grandeur et les aires sous une courbe, leur variation en fonction de leur "position" dans cette grandeur; chez Descartes les nombres représentent des mesures de grandeurs et les courbes des relations entre grandeurs. Dans tous les cas, ces signifiants ont valeur de représentation, c'est-à-dire qu'ils sont en tant qu'images clairement distingués des signifiés qu'ils représentent.

2.2. Des graphes qui, pour certains élèves, ont perdu toute valeur de représentation.

La méthode des coordonnées, le tracé de graphes de fonctions simples (polynômes du 1er et 2ème degrés, éventuellement d'autres fonctions) sont monnaie courante pour les élèves que nous avons interrogés. Mais pour bon nombre d'entre eux les courbes représentatives des fonctions semblent avoir perdu toute valeur de représentation, comme si elles étaient à la fois signifiant et signifié mais confondus, cette fois, en un tout indissociable, le signifié étant assimilé au signifiant. La fonction ne serait plus, pour eux, une relation entre deux grandeurs x et y, une ordonnée positive f(x) ne serait plus la longueur d'un segment figurant l'une ou l'autre grandeur. Le concept de fonction serait en quelque sorte réduit à l'image visuelle qu'imprime sur la rétine sa courbe représentative, l'expression analytique y = f(x) qui lui est associée servant uniquement à désigner cette courbe, à l'identifier parmi d'autres de formes différentes, tout comme la coordonnée (x, f(x)) serait le nom de tel ou tel point particulier de la courbe. Comme s'ils avaient

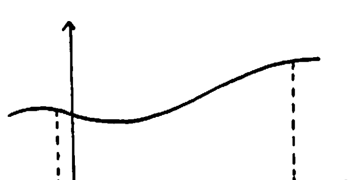


Fig.11

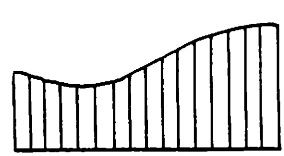


Fig.12

perdu de vue (on n'avaient jamais perçu) que la Fig.11 pouvait être une sorte de stylisation de la Fig.12 par abstraction des segments verticaux qui figuraient les grandeurs comme chez Oresme ou Cavalieri, pour ne garder que leurs extrémités supérieures.

Cet état d'esprit n'est-il pas celui des élèves - relativement nombreux - qui identifient f(x) à un point de la courbe ou à la courbe elle-même (IV.2.11.2.)? Ou encore de ceux qui éprouvent des difficultés à exprimer les mesures des indivisibles au moyen de l'abcisse ou de l'ordonnée d'un point d'une courbe (III.2.9., point 6)? Il est manifeste que, pour certains de ceux-là, il ne peut y avoir de mesures de grandeurs associées à l'idée de fonction que celles de segments inclus soit dans l'axe ox, soit dans l'axe oy. Ainsi cet élève à qui nous expliquons que le segment CD de la Fig.13 a une longueur égale à 2 - x et qui s'écrie : "Mais le x est ici [Il montre le segment OA] et pas là [Il montre le segment BC] !"

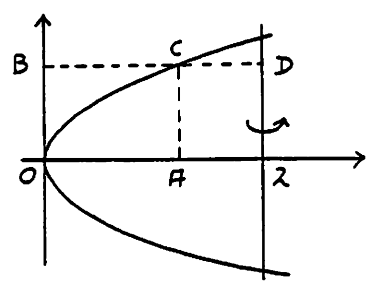


Fig.13

Cette confusion entre la courbe-signifiant et la fonction-signifié n'est-elle pas aussi à l'origine de la confusion entre la trajectoire d'un mobile et sa loi de position?

Encore un fait dont cette conception tronquée de la notion de fonction rend partiellement compte : l'interprétation erronée de la différence $\int_a^x f - \int_a^{x_0} f$, comme aire d'un rectangle de base $x - x_0$ et de hauteur $f(x) - f(x_0)$ (VI.2.11.4.). En effet, ce rectangle enserre le morceau de la courbe représentative de f compris entre les bornes x et x_0. Or, quand on prend la limite, pour x tendant vers x_0, de cette aire divisée par $x - x_0$, le rectangle rétrécit en longueur et en largeur, le bout de courbe qui lui est inscrit se réduisant à un point. Quoi de plus normal que la limite en question soit $f(x_0)$, dans la mesure où $f(x_0)$ est perçu comme le nom de ce point? L'erreur trouve ainsi un sens qui la conforte.

Ne sommes-nous pas ici en présence d'un obstacle didactique au sens où nous l'avons défini dans l'introduction, dans la mesure où c'est l'enseignement lui-même qui sécrète cette conception tronquée de la notion de fonction. En effet, la fonction (ou plutôt sa courbe représentative) y est trop souvent considérée comme un objet d'étude en soi, non comme un mode de représentation d'une loi de variation. Nous reviendrons sur ce point dans la conclusion.

2.3. La difficulté à privilégier une direction de découpage.

Pour comprendre que certains calculs d'aires et de volumes se ramènent à un calcul d'aire sous une courbe, il faut voir ces dernières découpées en lamelles parallèles à l'axe oy (réduites ou non en segments) : il faut donc privilégier une seule direction de découpage. Or, parmi les découpages distingués à la section VIII.2.1., les découpages laminaires sont quasiment les seuls à le faire. Et l'on a vu que leur évocation était peu spontanée, parce qu'ils faisaient mal ressortir "l'aspect-série" du calcul de limite. Cette restriction à l'égard des découpages laminaires joue donc à l'encontre de la découverte du rôle des fonctions dans le calcul des aires et des volumes.

2.4. Le caractère standard des aires sous une courbe : un apprentissage nécessaire.

Que les aires sous une courbe standardisent d'autres aires ou volumes, grâce à une unité fonctionnelle au sens où nous l'avons rappelé au début de la section 2, ne va pas de soi pour les élèves, même pour ceux qui ont commencé le calcul intégral par l'étude de telles aires. Ainsi ceux qui négligent d'exprimer la loi de variation des rayons des cylindres découpés dans une sphère, en proposant de calculer le volume de celle-ci au moyen de l'intégrale : $\int_0^R \pi r^2\, dx = \pi[r^3/3]_0^R$ ([189]), comme si la seule vue de la forme du solide suffisait à déterminer la loi de variation des sections de ces cylindres .

Cette difficulté résulte sans doute en partie de leur éventuelle conception tronquée de la notion de fonction, telle que nous l'avons décrite en IX.2.2. Elle s'explique aussi de la manière suivante. En alignant, à l'instar de Cavalieri, les extrémités des segments indivisibles d'une surface, le long d'une ligne qui sert de butoir, on déstructure en quelque sorte cette surface, ce qui peut donner l'impression pénible que l'on perd de l'information : ainsi, lorsqu'on réarrange, comme Roberval, les indivisibles d'une figure aussi facilement identifiable qu'un demi-disque pour en faire une surface "biscornue" [109]). De plus, pour exprimer la mesure de ces indivisibles en fonction d'une abcisse ou d'une ordonnée, on doit "rabattre" ceux-ci en quelque sorte sur un des axes, au risque de leur faire perdre leur rôle d'indivisible qu'ils ne peuvent assumer sans occuper une place bien précise dans la surface.

Les choses se compliquent encore dès qu'il s'agit de passer d'un volume à une aire sous une courbe. Des références multiples aux unités (sur lesquelles nous reviendrons plus loin), l'une ou l'autre réflexion (e.a. [186]) montrent que, pour certains élèves, les aires d'une part et les volumes d'autre part renvoient davantage aux surfaces et solides qu'ils mesurent qu'à des nombres, ce qui en fait des objets mentaux bien différents.

2.5. Les aires sous une courbe au travers des problèmes sur les indivisibles.

Les principes de Cavalieri favorisent, pensons-nous, la découverte du rôle joué par les fonctions dans les calculs d'aires et de volumes. Et ceci pour deux raisons.

1) Tout d'abord, en comparant des solides tranche par tranche ou des surfaces ligne par ligne, <u>on privilégie d'emblée une direction de découpage</u> et on opérationnalise ce choix dans l'immédiat, puisqu'un tel découpage permet de remonter des tranches aux solides et des lignes aux surfaces : et de fait, les élèves qui ont vu les principes de Cavalieri ou toute autre procédure similaire sont un peu plus prompts que les autres à opter pour un découpage laminaire à l'occasion de calculs d'aires ou de volumes (II.2.2.13.; III.2.7.1.). Or, ainsi que nous l'avons expliqué en IX.2.3., on ne peut percevoir le sens des aires sous une courbe sans privilégier une direction de découpage.

2) Ensuite, les principes de Cavalieri ne peuvent être appliqués sans que <u>l'on compare tous les couples d'indivisibles homologues</u> des grandeurs. Développons, de problème à problème, comment ce côté comparatif fait émerger la fonction dans les aires et les volumes.

Celle-ci ressort peu, il est vrai, dans les cas des prismes et parallélipipèdes (II.2.2.) : les indivisibles homologues y sont trivialement égaux, leur grandeur est la même à tout étage et l'on sait que la fonction constante est peu perçue comme une fonction et induit peu l'idée de variation (à telle enseigne que la plupart des élèves feront subir au troisième terme de la somme $5x^2 + 6x + 2$ un sort différent des deux autres lorsqu'il s'agira de calculer l'aire sous cette courbe, cfr. III.2.6.).

La notion de fonction est déjà plus présente dès qu'il s'agit de comparer les indivisibles homologues de deux pyramides ou ceux d'une pyramide et d'un cône (II.2.3.). En effet, on ne peut les comparer sans avoir perçu que les uns et les autres sont des images homothétiques des bases correspondantes des solides. Mais le fait de devoir considérer les mesures des indivisibles comme fonctions de leur position et surtout le fait de devoir exprimer cette fonction sous la forme d'une expression analytique ne s'imposent pas avec acuité dans le cas des pyramides et des cônes. On peut se contenter d'une perception qualificative de cette fonction en ce qui les concerne. En effet, ces solides ont la même structure : un polygone ou un disque de base, un sommet et des "arêtes" joignant ce sommet à chacun des points du contour de la base. Quand on compare deux pyramides ou une pyramide et un cône, on a vite l'impression que la diminution des indivisibles de la base au sommet est "pareille" de part et d'autre, car ceux-ci sont empilés d'un côté comme de l'autre, le long d'arêtes rectilignes et non le long d'arêtes "concaves" ou convexes" (Fig.14). "Ca diminue régulièrement" disent certains élèves.

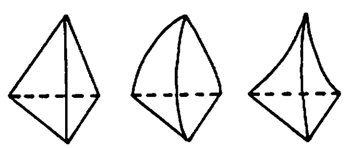


Fig.14

De là à penser que les indivisibles sont entre eux comme les bases des solides, il n'y a qu'un pas.

La situation est tout autre dans le problème où il s'agit d'obtenir le volume de l'hémisphère à partir de ceux du cylindre et du cône (II.2.4.). Une vue qualitative permet, dans un premier temps, de récuser certaines erreurs grossières comme celle qui consiste à mettre le cône et l'hémisphère "à l'endroit" avant de les comparer tranche par tranche au cylindre (II.2.4.3., Fig.44), ou celle qui consiste à prendre une sphère entière au lieu d'un hémisphère (II.2.4.3., Fig.45); mais cette vue ne suffit plus par après. C'est que les indivisibles du cône diminuent régulièrement ("en suivant une droite" [II.2.4.3.]), alors que ceux de la sphère ne semblent pas augmenter, eux, de façon aussi régulière. Or, il s'agit de démontrer que la diminution des uns est compensée par l'augmentation des autres, puisque la somme des aires de deux indivisibles homologues est constante. La prégnance des rayons, l'intuition erronée que les indivisibles doivent varier comme eux (II.2.4.3., e.a. [99]), comme s'ils leur étaient proportionnels, font que certains réfutent la conjecture établie à propos des tranches. Un calcul s'avère ici indispensable et nécessite le choix d'une variable indépendante. (II.2.4.4.)

La disparité géométrique s'accentue encore dès qu'il s'agit d'indivisibles courbes : un disque n'évoque pas a priori un triangle

(III.2.4.), une sphère fait peu penser à un cône (III.2.5.). On ne peut réaliser le lien cette fois que lorsqu'on prend conscience que les deux surfaces ou les deux solides sont décomposables en indivisibles régis par la même loi de variation. Le "pareil" d'une grandeur à l'autre est ici d'ordre fonctionnel et non plus d'ordre géométrique. Le cas du disque est évidemment plus facile à régler : la fonction mobilisée est une fonction du premier degré et on sait combien la linéarité est prégnante dans l'esprit des élèves. De plus on peut effectivement dérouler de véritables fils qui forment des circonférences. La sphère concerne, elle, une fonction du second degré et les surfaces sphériques qui la composent ne peuvent être aplaties sans se casser, ainsi que le souligne un élève ([132]).

Le paysage change à nouveau et du tout au tout, avec les problèmes III.2.1. et III.2.2. relatifs au cône et au paraboloïde. On a ici quatre grandeurs à comparer et non plus deux (ou éventuellement trois) et l'on doit établir une égalité entre deux rapports de grandeurs. Qui plus est, ces grandeurs sont hétérogènes de part et d'autre du signe d'égalité. De ce fait, on ne peut faire ici l'économie ni du concept de fonction, ni de son contenu sémantique. En effet, si ces solides sont entre eux comme les surfaces qu'on leur fait correspondre, c'est que toutes les sections indivisibles homologues de ces solides sont entre elles comme les segments indivisibles de ces surfaces. Mais le rapport entre deux de ces indivisibles (sections ou segments) varie en fonction de leur position. Pour vérifier que les indivisibles des solides se comportent comme ceux des surfaces où que ce soit, on doit prendre en considération la fonction qui régit leur rapport. De plus, la fonction en question apparaît ici chargée d'un double sens : la variation de l'aire d'une surface d'une part, celle de la longueur d'un segment d'autre part. Le passage des solides aux surfaces ne peut donc s'effectuer, dans les circonstances présentes, que sur le mode fonctionnel.

Ajoutons à cela des difficultés liées à la perception géométrique de ces grandeurs. D'abord le cône et le paraboloïde possèdent un axe de symétrie, alors que l'aire sous $y = kx^2$ et celle sous $y = \pi x$ qui leur correspondent respectivement n'en possèdent pas : il faut donc assumer une "perte de symétrie" pour aller des uns aux autres. Ensuite, on sait que les sections radiales sont particulièrement prégnantes dans la perception des solides de révolution. Or, la section radiale du cône est une figure plane délimitée exclusivement par des segments alors que la surface qu'on lui fait correspondre possède une limite courbe : le graphe de $y = kx^2$. Pour le paraboloïde, c'est le contraire qui se passe : la section radiale se dessine avec une courbe, le triangle remplaçant le paraboloïde par des segments. On passe donc du "droit" au "courbe" dans le premier cas et du "courbe" au "droit" dans le second. Ces difficultés ont une contre-partie positive. En effet, les faits précédemment décrits n'ont-ils pas suffisamment frappé les élèves pour que ces deux problèmes soient devenus pour eux **paradigmatiques** au sens de H. Freudenthal (1980); en substance, un exemple est dit paradigmatique d'un concept ou d'une propriété si, par son contexte et sa structure, il participe à la compréhension profonde de ce concept ou de cette propriété)? En tout cas, les références à ces problèmes sont fréquentes, et, surtout, efficaces (III.2.9., point 5).

Les caractéristiques des problèmes précités expliquent en partie, à côté des difficultés techniques propres à chacun, l'aisance plus ou moins grande avec laquelle les élèves s'en tirent dans l'un et l'autre. D'un point de vue expérimental, ces problèmes et les réelles embûches qu'ils suscitent attestent la difficulté à percevoir l'unité fonctionnelle de ces divers calculs d'aires et de volumes.

D'un point de vue didactique, ils amènent les aires sous une courbe de manière instrumentale, en se basant sur l'intuition des élèves et en restituant du sens au concept de fonction. Voici pourquoi. Premièrement, les aires sous une courbe sont incontournables dans cette progression didactique. En effet, jusqu'au moment où l'on aura reconnu leur intérêt, on fait primer la comparaison des grandeurs. Tant que les indivisibles sont proportionnels, les principes de Cavalieri suffisent à établir la comparaison; une fois que ce n'est plus le cas, l'aire sous une courbe apparaît comme un intermédiaire incontournable entre les grandeurs à comparer : ainsi le cône ne peut être comparé au cylindre qui le circonscrit, par le biais de leurs indivisibles, qu'en passant par l'aire sous $y = kx^2$. Mais cette dernière doit faire l'objet d'une évaluation directe si l'on ne veut pas tourner en rond. On en arrive donc à voir les aires sous une courbe comme passage obligé vers des aires et volumes plus familiers.

Deuxièmement les aires sous une courbe sont construites, dans cette progression, à partir des indivisibles : ainsi le paraboloïde est décomposé en disques, ceux-ci représentés par des segments et ces derniers assemblés pour former un triangle. Ce qui à la fois rejoint l'intuition des élèves pour qui les solides sont composés de surfaces et les surfaces composées de lignes et rend aux fonctions et à leur représentation un contenu sémantique, tel qu'il transparaît dans les propos [118], [120] et [121] et qui est celui auquel songeaient Oresme et Cavalieri.

Une alternative didactique est proposée par une équipe de l'I.R.E.M. de Strasbourg (1986). Les membres de cette équipe font constater aux élèves, quand l'occasion s'en présente, qu'un calcul de volume par les limites peut conduire au même intégrand que le calcul d'une aire. Ainsi, après avoir calculé la somme des volumes de n cylindres qui circonscrivent l'hémisphère comme sur la Fig.15, soit W_n, et celle des volumes de n cylindres inscrits comme sur la Fig.16, soit V_n, ils soulignent : "Dans l'expression de V_n et de W_n, on reconnaît à nouveau les sommes qui interviennent dans le calcul de l'intégrale $\int_0^R \pi(R^2 - z^2)\, dz$ par la méthode des rectangles. La fonction à intégrer étant monotone, la méthode des rectangles fournit deux suites convergentes : $\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} W_n = \int_0^R \pi(R^2 - z^2)\, dz = \pi[R^2z - z^3/3]_0^R = 2\pi R^3/3$. Le volume d'une boule de rayon R est donc $V = 4\pi R^3/3$". Mais l'unité se reconnaît ici au niveau

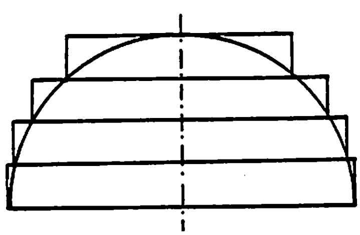


Fig.15

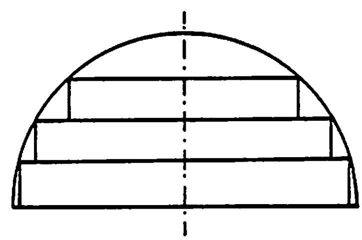


Fig.16

du calcul : on identifie une même fonction par le biais de son expression analytique, et non, comme dans notre progression didactique, au niveau de la perception des grandeurs et de leur représentation graphique. C'est supposer que les élèves ont déjà accédé à ce stade où l'on pense les aires et volumes en termes de limites numériques, ce qui n'est pas le cas de tous ceux que nous avons interrogés. Par exemple, celui qui sait qu'on peut obtenir l'aire d'une surface comme la limite d'une suite de sommes d'aires de rectangles inscrits, mais qui ne conçoit pas qu'on puisse obtenir le volume du solide engendré par la rotation de cette surface en partant des cylindres engendrés par la rotation de ces rectangles, car, dit-il, "le manque va s'amplifier en tournant" ([186]). De plus, la reconnaissance de cette unité n'est pas incontournable dans cette proposition de l'I.R.E.M., puisqu'il y a moyen de calculer, d'une part, la limite d'une suite de sommes d'aires de rectangles et, d'autre part, celle d'une suite de sommes de volumes de cylindres sans s'apercevoir, dans le fouillis des symboles, qu'une même fonction y apparaît.

3. La fonction-aire.

3.1. L'aire est étrangère à toute idée de variation.

Il faut attendre le XIV^e siècle, d'après C. Boyer (1949), pour que les mathématiques prennent en compte le concept de variation : "[...] it was precisely during this interval, and particularly in the fourteenth century, that a theoretical advance was made which was destined to be remarkably fruitful in both science and mathematics, and to lead in the end to the concept of the derivative. This consisted in the idea - often expressed, to be sure, in terms of dialectical rather than mathematical method - of studying change quantitatively, and thus admitting into mathematics the concept of variation".

Les notions à propos desquelles surgit cette "idée de variation" sont e.a., d'après le même auteur (Ib.), : la vitesse, la densité, l'intensité lumineuse, la chaleur. Mais ni l'aire, ni le volume ne sont mentionnés à ce titre. C'est Newton qui sera le premier, au XVII^e siècle, à penser l'aire et le volume comme des "quantités variables", fonctions d'une abcisse.

Les élèves que nous avons interrogés éprouvent, eux aussi, quelque peine à associer à une aire ou un volume ne fût-ce qu'une conception commune de "variabilité" et a fortiori le concept mathématique de fonction. Plusieurs faits en témoignent.

1) Aucun élève ne reconnaît en l'expression $b^{k+1}/(k+1)$ la fonction-aire associée à la fonction $y = x^k$, jusqu'à ce que le professeur le suggère explicitement en remplaçant b par x (VI.2.7.2.).

2) Parmi les élèves à qui on a enseigné le théorème fondamental et à qui on demande, longtemps après, de rassembler leurs souvenirs à son propos, rares sont ceux qui évoquent la fonction-aire (VI.2.11.1.).

3) De nombreux élèves interprètent indûment la différence $\int_a^x f - \int_a^{x_0} f$ comme l'aire d'un rectangle de base $x - x_0$ et de hauteur $f(x) - f(x_0)$ (VI.2.11.4.) : ce qui montre qu'ils ont été frappés davantage par l'encadrement de l'aire sous la courbe représentative de f, au moyen de rectangles par excès et par défaut, que par le balayage de cette aire depuis l'abcisse constante a jusqu'à une abcisse variable.

4) Rares sont les élèves qui évoquent spontanément une quelconque idée de variation à propos d'une aire ou d'un volume. Au contraire, plusieurs nient l'existence d'une variable dès qu'il s'agit de dériver une formule d'aire ou de volume, soit à l'occasion des problèmes d'extrémés, soit lorsqu'on leur demande de dériver

l'aire du disque ([362]). Et encore ceux qui parlent en termes de variation le font-ils dans des circonstances qui y incitent : soit à l'occasion du problème VI.2.4. où l'on évoque le remplissage d'une cuve; soit lorsqu'on leur fait constater quelques faits liés au théorème fondamental ([359], [360], [361], [370], [371], [373], [374]), mais, dans ce dernier cas, le seul mot "dérivée", prononcé alors par le professeur, n'est-il pas associé depuis longtemps aux mots "croissance", "décroissance", "taux de variation", "vitesse instantanée", et n'a-t-il pas provoqué chez les élèves un simple "réflexe scolaire"? De plus cette idée de variation n'est pas toujours évoquée à propos. Ainsi cet élève qui dessine des points sur le périmètre d'un disque comme s'il s'agissait, pour cerner la variation de son aire, de parcourir ce cercle qui "représente l'évolution point par point", un peu comme on longe du doigt le graphe d'une fonction pour parler de ses variations ([371]). Nous verrons aussi plus loin que certains de ces élèves pensent plus à une vitesse de variation, fonction du temps, qu'au taux de variation de l'aire par rapport à une abcisse.

5) A l'occasion du problème II.2.3. (D'une pyramide à toutes les autres), peu d'élèves imaginent de comparer une pyramide quelconque à une pyramide dont le sommet est le centre d'un cube et la base, une de ses faces. C'est que, sans doute, les formules d'aires et de volumes évoquent peu, pour eux, une aire ou un volume, fonctions continues d'une de leur dimensions. Expliquons ceci. Ils savent bien sûr que la valeur octroyée au volume d'une pyramide est <u>fonction</u> de celles données à sa base et à sa hauteur, mais ils pensent sans doute plus à ces fonctions en termes d'ensembles discrets composés de couples (base, volume) ou (hauteur, volume) vérifiant la formule, qu'en termes de fonctions continues susceptibles de prendre toutes les valeurs réelles (positives bien sûr et imaginables par eux), comme les grandeurs dont elles dépendent, un peu comme s'ils avaient quelque peine à imaginer une pyramide <u>animée</u> dont la hauteur et la base varieraient à vue, continûment. A cet égard, il est significatif que les élèves qui songent spontanément à faire intervenir la pyramide faite à partir du centre et d'une face d'un cube soient ceux qui passent aisément d'une classe de pyramides à une autre, en faisant varier continûment leurs dimensions et leur forme. ([81], [82], [83], [85]). Il est aussi révélateur de voir des élèves se "bloquer" simplement parce qu'ils ne s'aperçoivent pas que le problème est résolu dès qu'on a exprimé le volume de la pyramide quelconque en fonction de ses propres base et hauteur ([90]), ou qui ne songent pas à le faire ([80], [86], [89]). On dirait qu'ils s'attendent plus à trouver une valeur déterminée qu'une formule de volume. En tout cas, ces observations rendent crédible notre interprétation.

Par ailleurs, on ne peut exclure une autre explication des difficultés éprouvées ici par les élèves : on ne pense à faire intervenir une pyramide dont le sommet est le centre d'un cube et la base, une de ses faces, que si on imagine comment l'exploiter, c'est-à-dire si l'on songe au découpage à la Cavalieri et à la proportionnalité des indivisibles. Or, si un tel découpage a déjà été évoqué par ces mêmes élèves, c'était à propos de solides (prismes et parallélipipèdes) auxquels il était plus adapté qu'à la pyramide (cfr. VII.3.1.). De plus, il s'agissait dans ce cas d'une relation d'égalité entre indivisibles alors qu'on a affaire, ici, et pour la première fois, à une proportionnalité (cfr. e.a. [78]). Il n'empêche, une fois l'idée lancée, les élèves sont prompts à envisager des indivisibles proportionnels, même s'ils rencontrent quelques difficultés techniques pour les justifier tels; c'est pourquoi nous pensons que notre première explication est plus probante : les formules d'aires et de volumes évoquent peu le concept de fonction-aire ou de fonction-volume.

Remarquons toutefois que les formules d'aires et de volumes sont a priori susceptibles d'induire une certaine idée de variation (c'est ce qui se passe d'ailleurs chez certains élèves) et que leur présence dans l'acquis culturel des élèves d'aujourd'hui devrait faciliter l'apparition des fonctions dans le contexte des aires et des volumes : on était sans doute encore moins disposé à voir celles-ci et ceux-ci comme des fonctions à l'époque où l'on disait : "le volume de la pyramide est à celui d'un prisme circonscrit comme 1 est à 3" au lieu de : "le volume de la pyramide vaut le tiers du produit de sa base par sa hauteur".

Si les aires et les volumes ne sont pas spontanément perçus comme des fonctions, peut-être est-ce parce qu'ils sont fonctions d'une variable indépendante autre que le temps? En effet, on conçoit aisément que les quantités qui varient dans le temps soient a priori perçues comme des fonctions : une idée intuitive de variation s'impose par le fait même qu'elles changent effectivement pendant qu'on les considère ou qu'on les observe. Mais peut-être ces quantités sont-elles les seules à être considérées, d'entrée de jeu, comme des "variables"? Or, ce n'est le cas ni de l'aire, ni du volume : lorsqu'on envisage de mesurer une surface ou un solide, on l'a devant les yeux tout le temps que dure le calcul et même lorsqu'on les coupe en parties, on s'y refère de temps à autre comme à un tout déjà constitué, ne fût-ce que pour juger de la proportion du total représentée par un tel ou tel morceau. Et lorsque, dans la vie quotidienne, on évoque des récipients que l'on remplit, on s'intéresse plus au volume une fois le récipient rempli qu'au volume en train d'être versé, à son mode ou à sa vitesse de formation. Quant aux aires, l'idée de variation surgit d'autant moins à leur propos qu'il n'y a plus de remplissage matériel possible.

Cette interprétation est corroborée par certains faits historiques et par plusieurs réactions d'élèves que nous décrivons dans les sections suivantes : l'idée première de variation est souvent assimilée à la variation temporelle, en un sens que nous préciserons, y compris à propos des aires et des volumes; elle lui reste pour longtemps associée.

3.2. Une imagerie cinématique.

F. De Gandt (1982) insiste sur le rôle joué par le mouvement dans le développement du calcul infinitésimal : "Le XVII^{e} siècle a vu naître en même temps le calcul infinitésimal et la science du mouvement, à peu près entre 1610 et 1690. Les deux directions de recherche sont inséparables; [...]" A titre d'exemple, le même auteur décrit comment Napier a pensé les logarithmes : "Le problème à résoudre est le suivant : on veut faire correspondre une progression géométrique (par exemple de base 10, ce qui n'est pas le cas chez Napier) et une progression arithmétique.

1/100	1/10	1	10	100	1000
-2	-1	0	1	2	3

L'intérêt pratique vient de ce que la progression du haut se fait par multiplication, celle du bas par addition. Mais le but ne sera atteint que si l'on peut considérer les deux progressions comme des réalités continues, qui gardent un sens pour les valeurs situées entre les nombres que l'on a écrits. Il faut pouvoir trouver par interpolation quelle valeur de la suite arithmétique correspond à une valeur quelconque dans l'autre suite (que 3 soit le logarithme de 1000 n'est pas très intéressant; par contre, on aimerait savoir à quel nombre en bas correspond 687 en haut).

C'est sur ce point que la représentation du mouvement semble avoir été utile à Napier. Il imagine des déplacements continus sur deux droites parallèles, selon un mouvement uniforme sur la première ligne et avec une vitesse décroissante sur la seconde ligne. La vitesse variable est proportionnelle à la distance restant à parcourir [...]. De cette manière, l'espace parcouru sur la première ligne sera le logarithme de l'espace parcouru sur l'autre ligne (mouvement décéléré)" (Ib.).

Une même imagerie cinématique est sous-jacente à la conception des courbes et des surfaces chez Newton : " Je vais considérer dans cet ouvrage les grandeurs mathématiques non pas comme étant formées de parties constantes même infiniment petites mais comme étant engendrées par un mouvement continu.

Les lignes seront décrites et par là générées non par addition de parties mais par un mouvement continu de points, les surfaces par un mouvement de lignes, les solides par un mouvement de surfaces. Ces générations se réalisent vraiment dans la nature et on peut les observer tous les jours dans le mouvement des corps. De cette manière, nos ancêtres ont indiqué la génération du rectangle comme s'il était décrit par un segment mobile perpendiculaire à un segment fixe." (Newton cité par E. Castelnuovo, 1965).

Nous avons rencontré chez les élèves cette idée de balayage de surface par une ligne ou de solide par une surface mais à propos d'exemples auxquels elle était, ainsi que nous l'avons expliqué à la section VII.3.1., particulièrement bien adaptée : un rectangle balayé par sa hauteur, un prisme ou un parallélipipède balayés par leur base, un solide de révolution balayé par une section radiale. Nous n'avons pas - ou presque pas - retrouvé cette idée à propos des aires sous une courbe : c'est que, cette fois, il ne s'agit plus simplement d'évoquer la translation ou la rotation d'une grandeur constante, comme si l'on pensait au déplacement d'un objet matériel, mais, ainsi que le décrit F. De Gandt, la "translation" d'une grandeur qui varie tout en avançant : dans la Méthode des fluxions, "une figure géométrique est une sorte de mécanisme où le mouvement se transmet selon les articulations de la figure. Les lignes et surfaces sont engendrées au sens propre par des déplacements. Le schéma le plus général et le plus simple est celui-ci : sur une ligne horizontale, un point mobile qui se déplace à partir de l'extrémité gauche A entraîne dans son mouvement un segment vertical BD de longueur variable [Fig.17], l'extrémité D de ce dernier engendre la courbe et le balayage crée la surface" (F. De Gandt, 1982).

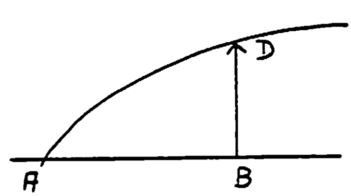


Fig.17

Si le balayage de l'aire sous une courbe n'est pas spontanément évoqué par les élèves, n'est-ce pas aussi parce qu'il s'accorde mieux à un découpage laminaire, parallèle à oy, auquel les élèves préfèrent d'emblée d'autres types de découpages (cfr. VIII.2.1.)?

Mis à part le cas du prisme, l'ambiance change radicalement dans notre progression didactique, à l'occasion du théorème fondamental. Dans les principes de Cavalieri, on constate l'égalité ou la proportionnalité des indivisibles qui sont là et qui forment un tout; on ne construit pas une grandeur en juxtaposant indivisible après indivisible. Les principes sont donc de l'ordre de la bijection, de la "compilation", mais non de l'ordre de "l'engendrement". Pour construire les sommes qui vont conduire à l'intégrale de Riemann, on commence par les rectangles de gauche pour poursuivre vers la droite, sans doute parce qu'ils y a une habitude culturelle qui consiste à lire de gauche à droite : cela induit un peu l'idée de parcours mais malgré tout la somme est commutative et, ce qui importe, c'est que cette somme, une fois terminée, approche plus ou moins bien l'aire sous la courbe. L'idée de parcours est encore moins évidente lors de la complétion des fonctions en escalier où, là, on s'intéresse encore plus à ce qui se passe aux abords de la courbe. Alors que dans le cas du théorème fondamental on regarde comment la somme se construit de gauche à droite et on s'interroge sur le mode de construction de la somme, sur sa loi de formation locale.

3.3. L'intervention du temps dans le calcul d'aires chez Newton; son élimination.

Avant d'être pensée comme quantité dépendant de l'abcisse x, l'aire sous une courbe est perçue par Newton en termes de quantité variant en fonction du temps. Toute autre quantité "variable" est également considérée de la sorte, du moins au début de son oeuvre.

Le choix initial des concepts premiers de sa théorie atteste ce fait. Effectivement, le concept de base choisi par Newton au début de son oeuvre n'est pas celui d'ultima ratio : il construit d'abord sa théorie à partir des concepts de **fluente** et de **fluxion**. Une fluente x est précisément une quantité qui évolue en fonction du temps, tandis que sa fluxion x' représente sa vitesse ou, comme le dit Newton lui-même, son "taux d'écoulement dans le temps". C'est par le biais des fluentes et des fluxions que Newton définit, dans un premier temps, l'objet du calcul infinitésimal : "In this second work [Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum], Newton states somewat more clearly the fundamental problem of the calculus : Given a relation between two fluents, find the relation between their fluxions, and conversely" (M. Kline, 1972).

Le balayage de l'aire sous une courbe par le segment de hauteur f(x) est donc à l'origine un balayage temporel. Newton imagine un point qui se meut dans le temps sur l'axe des x; à hauteur de ce point, il se représente un segment qui balaye l'aire dans le même temps. Il envisage d'abord les variations temporelles concomitantes de l'abcisse et de l'aire et exclut ensuite le facteur temps pour ne plus tenir compte que de la seule dépendance entre l'aire et l'abcisse.

Pour éliminer le paramètre temps dans la suite de son oeuvre, Newton choisit une variable : soit x dont il suppose la vitesse uniforme : p. ex. $x' = 1$; il accorde alors la priorité non plus au concept de fluxion lui-même mais au rapport de deux fluxions, c'est-à-dire à l'ultima ratio :

$$y'/x' = (dy/dt).(dx/dt) = dy/dx.$$

Dès ce moment, ce n'est plus du temps, mais d'une variable quelconque x choisie comme variable de référence que dépendent toutes les autres variables.

3.4. Un taux de variation instantané assimilé à un "accroissement instantané".

D'après plusieurs auteurs dont G. James et R. C. James (1949), la locution : "taux de variation instantané d'une variable par rapport à une autre" ne fait aucunement référence au temps, puisqu'elle désigne la fonction dérivée. C'est sous cette signification qu'elle a été enseignée aux élèves interrogés dans cette expérimentation (ou qu'elle l'avait été avant cette dernière). Ceux-ci l'assimilent indûment à ce qu'ils appellent un "accroissement instantané" et que nous allons décrire ci-dessous.

Comme nous l'avons vu plus haut, rares sont les élèves qui évoquent une quelconque idée de variation quand on leur demande de commenter le fait que l'expression πr^2 de l'aire d'un disque, une fois dérivée par rapport à r, donne l'expression de son périmètre et le fait que l'aire sous $y = x^2$, entre les bornes 0 et x, s'exprime au moyen d'une fonction $S(x) = x^3/3$ dont la dérivée égale $y = x^2$ précisément. Mais ceux qui le font, sous l'insistance et les sous-entendus du professeur, s'expriment en des termes qui ont attiré notre attention. Ils parlent, pour la plupart, "d'accroissement instantané" ou de "limite d'une quantité" ([360], [361], [382], [383], [384], [385], [386], [387]). On pourrait penser que c'est une manière à eux de résumer la locution : "taux de variation instantané d'une variable par rapport à une autre". Mais ce n'est sans doute pas le cas. En effet, il est significatif qu'une seule grandeur à la fois soit désignée par ce terme d'accroissement instantané auquel ils identifient le mot dérivée : c'est soit une aire, soit le rayon du disque ou une abcisse. L'un d'entre eux précise même qu'il y a deux dérivées dans le cas du disque : une pour l'accroissement de surface, une autre pour l'accroissement de rayon ([382]). Il ne peut donc s'agir de la limite d'un rapport entre deux accroissements : il s'agit plutôt de la "limite d'un seul accroissement". Bien sûr, les élèves savent qu'un nombre dérivé est la limite d'un rapport, mais ils ne semblent pas songer au dénominateur de ce rapport comme à un véritable diviseur. C'est un peu comme si la présence de ce dénominateur avait pour seule fonction de préciser qu'il faut prendre des tranches de surfaces de plus en plus fines. En tout cas, un élève n'hésite pas à écrire lim [(f(x+h) - f(x)) / h] et à interpréter cette expression comme la limite d'un anneau circulaire ([386]); les deux élèves à qui on demande ce que signifie le dénominateur dans l'expression de la dérivée se retranchent prudemment derrière la définition de celle-ci ou derrière des raisons calculatoires ("pour pouvoir appliquer les règles de l'Hospital", [393], [394]) et ne remettent pas en cause leur confusion entre accroissement instantané et dérivée. La locution <u>accroissement instantané</u> et d'autres semblables ne renverraient donc pas au taux de variation instantané au sens décrit supra mais plutôt, dans le cas d'une surface, "à la quantité minimale dont s'accroît cette surface dans le temps qui s'écoule", c'est-à-dire une ligne (courbe ou non suivant les cas). Ainsi le disque s'agrandirait, dans le temps, d'un cercle et puis d'un autre; de même la surface sous $y = x^2$ se formerait par ajouts successifs d'un segment, d'un autre, et ainsi de suite... Cette vision des choses n'est-elle pas cohérente avec la conception qu'une ligne est le vestige ultime d'une tranche de surface qui s'amincit (VII.3.7.) et surtout avec l'opinion qu'une surface est <u>composée</u> de lignes (VII.3.4.) : quoi de plus normal dès lors qu'elle soit engendrée par juxtaposition d'une ligne après l'autre. C'est là en tout cas une vision que suggèrent quasi-explicitement deux élèves ([372], [374]).

Cette interprétation expliquerait aussi l'étonnement des élèves devant le fait que la dérivée de l'aire du carré ne donne pas son périmètre, et devant d'autres faits semblables (VI.2.12.3.). En fait, la confusion entre "accroissement <u>instantané</u>" [Dorénavant nous soulignerons le qualificatif "instantané" ou l'adverbe "instantanément" chaque fois qu'il faut leur attribuer le sens abusif qui vient d'être décrit] et taux d'accroissement instantané (au sens mathématique) ne prête pas à conséquence dans le cas du disque ou de l'aire sous $y = x^2$: le disque s'accroît <u>instantanément</u> d'un cercle et le taux de variation de l'aire du disque par rapport à son rayon donne précisément la longueur de ce cercle; l'accroissement <u>instantané</u> de la surface sous $y = x^2$ est un segment, son taux de variation instantané par rapport à x est la longueur de ce segment. Par contre, l'aire du carré s'accroît <u>instantanément</u> de son périmètre, mais le taux de cette aire par rapport à son côté c donne

$$\lim_{\Delta c \to 0}[((c+\Delta c)^2 - c^2) / \Delta c] = 2c,$$

c'est-à-dire un demi-périmètre. De même, l'accroissement instantané du volume d'un cube est son aire, mais son taux d'accroissement instantané par rapport à son côté vaut la moitié de cette dernière.

On retrouve, dans cette interprétation, le glissement subreptice des mesures de grandeurs aux grandeurs elles-mêmes là où sont mêlées des grandeurs hétérogènes, observé en d'autres circonstances (VII.3.3. à VII.3.11.), et qui caractérise l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions.

Ces confusions attestent la prégnance chez les élèves du temps et de la variation temporelle, dès qu'il s'agit de "variation" tout court. Bien sûr, rien que le qualificatif "instantané" accolé au substantif "taux" durant l'enseignement peut avoir induit cette référence abusive au temps. Cela n'explique pas tout, à notre avis : les confusions décrites précédemment n'en découlent pas ipso facto. De plus, n'est-il pas significatif que ce qualificatif ait été choisi par des mathématiciens pour qualifier un concept dont toute référence au temps est absente?

3.5. Le temps du déroulement de la pensée.

Newton ne fait pas intervenir le temps de manière formelle, c'est-à-dire qu'il n'explicite pas les équations paramétriques $x(t)$ et $y(t)$: il n'en a d'ailleurs pas besoin dans la mesure où il s'intéresse, dans la deuxième phase de ses travaux, non pas aux fluentes et fluxions elles-mêmes, mais à leurs rapports. Néanmoins on ne doute pas que le temps auquel Newton se réfère lorsqu'il définit une fluxion est le temps du physicien, objectivé, mesuré : la fluxion n'est-elle pas pour lui l'équivalent de la vitesse en mécanique? De plus, il semble très conscient de cette référence au temps et de la nécessité de s'en dégager. Il n'assimile pas tout-à-fait la variable x à la variable t, puisqu'il n'impose à son taux d'écoulement dans le temps $x'(t)$ que d'être constant. Ensuite il fait prendre à cette variable x le relais du temps, de manière délibérée, en la faisant servir de référence pour toutes les autres : en effet, il élimine dt dans le double rapport $(dy/dt)/(dx/dt)$ pour ne plus garder que dy/dx.

En tout cela, les élèves semblent s'écarter de la position de Newton. Le temps auquel ils se réfèrent implicitement pourrait bien ne pas être le temps de l'horloge, mais plutôt le temps de la pensée propre à chacun. Ainsi ils ne font jamais allusion à la vitesse (au sens du physicien) à laquelle croît le disque ou le carré ou la surface sous $y = x^2$. Le premier s'agrandit de cercles, le second de périmètres et la troisième de segments, mais on ne s'intéresse nullement à la quantité de temps "physique", calculée par rapport à une unité conventionnelle, requise pour ajouter un seul de ces cercles, de ces périmètres ou de ces segments. Comme si cette quantité était tout simplement l'unité de pensée, c'est-à-dire le temps qu'il faut pour imaginer chacun de ces ajouts. Comme si on ponctuait, on découpait le temps de l'horloge en pensant ces ajouts les uns après les autres.

De manière générale, le temps auquel les élèves se réfèrent, même lorsque le problème mobilise le temps de l'horloge, semble ambigu. Au point que sa place dans le calcul est floue ou même omise. Ainsi plusieurs élèves ne prennent pas le temps en compte dans le calcul du débit (VI.2.1.8.), ou confondent le graphe du débit et celui du volume en fonction du temps ([296], [299]). Quelques-uns entendent l'expression "volume par unité de temps" comme "volume en fonction du temps" ou même "volume fois temps" ([296], [297]), comme si le fait que la valeur du temps intervienne au numérateur ou au dénominateur, ou encore soit laissée pour compte, avait peu d'incidence sur le calcul du débit (mais peut-être que l'ambiguïté de l'appréhension du temps n'explique pas toutes ces confusions?). De même, il n'est pas sûr que tous les élèves pensent au temps du physicien, à l'occasion du problème du vase conique (V.2.1.); particulièrement deux des élèves qui le résolvent rapidement en identifiant la section du cône au débit . En effet, s'il est intuitivement évident, ainsi que nous l'avons décrit antérieurement, que le débit de l'eau versée dans ce vase doit être proportionnel à sa section supérieure, on ne peut montrer qu'il lui est égal sans évoquer la vitesse de montée de l'eau : c'est parce que dh/dt = 1 qu'on a

$$dV/dt = dV/dh = \pi h^2 = \pi r^2.$$

Or, parmi les élèves concernés, deux parlent de cette vitesse ([285], [286]), mais deux autres n'y font aucunement allusion, préférant argumenter du fait qu'en prenant des tranches de volume de plus en plus fines on arrive à des surfaces ([283], [284]). Peut-être est-ce simplement parce que cette vitesse vaut 1? Mais il se pourrait aussi qu'une intuition fausse soit à la base de ces dernières réponses : l'intuition d'un volume qui s'accroît d'une section à la fois dans le temps requis pour penser chaque ajout supplémentaire. Le temps n'étant pas pris en compte dans le calcul, ces élèves identifieraient le débit à la tranche de volume et le débit instantané à la tranche "minimale", c'est-à-dire à la section qui en est le résidu. Une telle hypothèse pourrait être contrôlée : il suffirait de changer quelque peu l'énoncé du problème en imaginant une pompe qui déverse l'eau de manière à ce qu'elle monte dans le vase à une vitesse constante mais différente de 1. On verrait alors si les élèves continuent d'identifier le débit à la section du cône ou s'ils font intervenir explicitement dh/dt comme rapport entre dV/dt et dV/dh. Nous n'avons pas eu le loisir de proposer cette variante à des élèves.

L'auteur du propos [355] ne rejoint-il pas les deux élèves précédents lorsqu'il parle de la largeur d'une cuve comme de la "vitesse" à laquelle croît le volume d'eau qu'elle contient?

3.6. La référence au temps donne du sens à la "limite d'une variable". Bien souvent, elle est indûment sous-jacente à la limite d'une fonction.

On ne peut "définir" la "limite d'une variable" sans, soit faire référence au temps et au mouvement, soit faire intervenir la limite d'une fonction de manière implicite. La définition que donne Cauchy de la limite (cfr. V.1.4.) est, à cet égard, éloquente. En voici deux autres proposées par des étudiants de dernière année d'université en mathématique.

1) "Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit $\mathfrak{I}_a$, l'ensemble des intervalles ouverts centrés en a. On dit que x tend vers a ($x \to a$) ou que lim x = a si et seulement si $\forall\, I_a \in \mathfrak{I}_a$, x prend <u>successivement</u> des valeurs telles que, à partir d'un <u>certain moment</u>, $x \in I_a$, et <u>restera</u> dans I_a".

Et avec les mêmes notations :

2) "$\forall\, I_a$, tous les x sauf un nombre fini appartiennent à I_a".

Dans la première définition, nous avons souligné des mots et un verbe conjugué au futur comme autant de connotations temporelles. Quant à la seconde, elle suppose une indexation des x, c'est-à-dire, implicitement, une suite et donc, en définitive, une fonction.

De nouveau, le temps auquel il est fait référence ici est le temps de déroulement de la pensée. On ne précise pas si x tend vers a ou si dx tend vers 0 plus ou moins vite au sens du temps de l'horloge : seules des vitesses relatives seront prises en considération lorsqu'on comparera des infiniment petits d'ordres différents : dx et $(dx)^2$.

Les références implicites au temps du déroulement de la pensée sont tenaces également dans la conception de la limite d'une fonction et ont été observées par d'autres chercheurs. Ainsi pour ce qui est de la limite d'une suite : "Quel que soit le support physique ou numérique d'une suite infinie, le temps est mêlé à sa perception sous la forme, comme nous l'avons vu, du temps physique de l'énumération jamais achevée. C'est le temps du sujet pensant, celui dans lequel s'exerce son imagination, le temps <u>subjectif</u>" (C. Hauchart et N. Rouche, 1987).

La façon même dont on parle de la limite est à cet égard significative : "f(x) <u>tend</u> vers b lorsque x <u>tend</u> vers a". Les deux verbes "tendre" expriment deux mouvements qui se déroulent dans le temps et que l'on dit être concomitants. Certains auteurs, d'ailleurs, souhaitent proscrire de telles connotations cinématiques en choisissant de dire "limite en x = a" au lieu de "limite pour x tendant vers a". D'autres, au contraire, désirent sauvegarder la deuxième expression, vraisemblablement parce qu'elle rejoint l'intuition : "I have followed Mr. J. G. Leathem and Mr. T. J. I'A. Bromwich in always writing $\lim_{n\to\infty}$; $\lim_{x\to\infty}$; $\lim_{x\to a}$ and not $\lim_{n=\infty}$; $\lim_{x=a}$. This change seems to me one of considerable importance, especially when "∞" is the "limiting value". (G. H. Hardy cité par F. Cajori, 1929)

Evidemment l'utilisation du verbe "tendre vers" chez des élèves ayant déjà reçu un enseignement de l'analyse est difficile à interpréter car "le sens français de [ce] verbe de mouvement [...] a été trop banalisé par son utilisation mathématique pour que nous puissions ranger ces descriptions dans celles où le syntagme verbal indique réellement un mouvement ou une évolution dans le temps" (A. Robert, 1982).

Tentons de cerner les raisons d'une telle référence. Le temps n'est-il pas la seule "variable" qui se présente comme telle d'une manière inéluctable : toute autre quantité variable dans le temps, telle la vitesse ou le débit, peut-être constante dans l'un ou l'autre intervalle de temps, mais on ne peut arrêter, figer le temps? Une vitesse constante n'en reste pas moins une vitesse, mais que veut dire un temps constant sinon un temps nul? Et rien ne se passe en un temps nul : toute action requiert un minimum de temps. De plus, pour considérer une grandeur quelle qu'elle soit comme une "variable", il faut la penser comme telle, c'est-à-dire lui attribuer mentalement une valeur, puis une autre, ... Or, ce processus mental se déroule lui-même dans le temps. Quoi de plus normal, dès lors, que toute idée de variation renvoie à la variation temporelle et de là viendrait qu'on soit tenté instinctivement d'assimiler une variable quelconque à une variable temporelle.

D'autre part le temps varie d'office, tout seul, sans qu'on doive s'en occuper, alors que se poser la question de savoir si une vitesse est constante ou non est un acte délibéré et plus encore le fait de considérer qu'une grandeur géométrique varie en fonction d'une autre : rien n'oblige à voir une aire, fonction d'une abcisse, c'est une initiative à prendre. De là peut-être la tentation de s'en remettre au temps inconsciemment et la tendance à "l'oublier" dans le calcul du débit, comme décrit plus haut.

La référence au temps est d'autant plus inconsciente qu'il ne s'agit pas du temps du physicien, mesuré avec des unités conventionnelles mais du temps subjectif de chacun, le temps que requiert chacune de nos actions et en particulier notre réflexion.

4. Un calcul local, inhabituel, opérant sur une fonction inconnue.

Dans le théorème fondamental, on passe de la fonction-aire à la fonction-courbe au moyen d'un calcul qui a ses caractéristiques propres, résumées au moyen des mots soulignés dans le titre précedent. Outre la difficulté à considérer, d'une part, la fonction-courbe et d'autre part, la fonction-aire, dont nous avons déjà parlé, ces caractéristiques éloignent fort le théorème fondamental des élèves, d'un point de vue épistémologique.

4.1. Un calcul local.

4.1.1. Désintégrer des aires.

Contrairement à la tangente par exemple, les aires et les volumes sont des "choses" a priori globales. En effet, elles sont peu sensibles aux petites variations de l'objet considéré : quand on change un peu les contours d'une figure, l'aire ne varie pas beaucoup et c'est sans doute en partie pourquoi on commence par la remplir de gros blocs polygonaux pour se rapprocher ensuite des bords. Tandis que quand on change un peu la courbe, la position de la tangente varie très vite et c'est ce qui incite d'emblée à un examen local.

Et lorsqu'on imagine une aire sécable en tranches laminaires, on prend ces parties globalement, toutes ensemble et il ne vient pas naturellement à l'esprit d'étudier le poids respectif de chacune d'elles, c'est-à-dire d'étudier à quelle "vitesse" croît l'aire lorsqu'on ajoute ces parties, une à la fois, les unes après les autres. C'est que chacune d'elles représente une part infime et qu'elle n'est rien sans les autres. Calculer une aire, c'est intégrer ces parties au sens du Larousse, c'est-à-dire les "faire entrer dans un ensemble plus vaste", alors qu'en calculant le taux de variation de cette aire, en l'étudiant localement, on se mettrait en quelque sorte à la désintégrer au sens de "détruire l'intégrité de ce qui formait un tout"(Larousse).

L'imagerie cinématique n'y change sans doute rien : lorsqu'on pense au glissement, le long de l'axe ox et parallèlement à l'axe oy, d'un segment de longueur variable, on voit mentalement la surface se former et s'agrandir depuis le début du processus. Et il y a comme un aspect cumulatif : on n'efface pas de sa pensée la surface entre les bornes a et x lorsque le segment passe de l'abcisse x à l'abcisse $x + \Delta x$. Or, le calcul du taux de variation passe par la soustraction de l'aire entre a et x (comme si on l'effaçait) de l'aire entre a et $x + \Delta x$.

N'est-ce pas une réticence à faire une étude locale qui retient les élèves de considérer des petites tranches d'eau qui ne débutent pas au bas de la cuve lorsqu'on leur demande de déterminer la forme de celle-ci à partir de sa graduation (VI.2.4.3.)? S'ils pensent dans ce contexte - et pour cause - à la variation du volume, c'est souvent pour considérer le volume entier, depuis sa base, obtenu à un moment donné, rarement une de ses tranches choisie à une profondeur arbitraire. Pourtant, il est assez clair que le renseignement demandé dans ce problème est d'ordre local : la forme de la cuve étant donnée par la largeur de celle-ci à une profondeur quelconque.

Peut-être la confusion entre la variable et l'accroissement de la variable vient-elle en partie d'une même réticence? En effet, on peut interpréter les erreurs relevées ([376], [377], [379], [380]) comme une tentation à faire tendre la variable de la fonction-aire vers la borne inférieure plutôt que de faire tendre vers 0 l'accroissement de la variable, dans le calcul de la limite. Comme si l'on s'obligeait à considérer la surface en question depuis le début de sa formation.

4.1.2. Remonter du local au global.

Le théorème fondamental introduit donc un calcul local là où le but (un calcul d'aire) revêt d'emblée un caractère global. Cette démarche peut paraître aberrante a priori, sauf si on pressent dès le départ comment remonter après du local au global. L'attitude de Newton est, à cet égard, très éclairante. On aura remarqué que Newton rédige son théorème fondamental sous forme d'un algorithme de dérivation et en choisissant un exemple particulier de fonction-aire (ou une classe particulière de telles fonctions) : il "dérive" effectivement dans sa procédure la fonction-aire z pour obtenir la fonction-courbe y. Cela peut paraître paradoxal : toute application de ce théorème prend en effet comme point de départ la fonction-courbe et non la fonction-aire. Si Newton procède de la sorte, c'est probablement en raison de la peine qu'il éprouve à trouver des algorithmes d'intégration. Or, c'est là une difficulté qui risque de rendre le théorème fondamental inefficace. En effet, ce théorème ne devient opérationnel qu'à partir du moment où l'on dispose de nombreuses fonctions dont les primitives s'expriment comme composées des fonctions dites élémentaires et pour élargir le champ de telles fonctions, il convient de connaître le plus grand nombre possible d'algorithmes d'intégration, ce qui n'est pas le cas de Newton. Pour combler cette lacune, celui-ci emprunte deux détours qui sont significatifs de ses préoccupations essentielles. Tout d'abord, il s'attache à dériver le plus grand nombre possible de fonctions et établit une liste où il consigne en regard l'une de l'autre une fonction et sa dérivée : cette liste lui sert en fait de table d'intégrales puisqu'il la lit en "sens inverse", c'est-à-dire qu'il y repère la fonction qu'il souhaite "quarrer" dans la colonne des fonctions dérivées et qu'il lit en regard sur l'autre colonne quelle en est la fonction primitive. Ensuite, il mise sur l'usage des séries infinies. Ainsi, par le biais du développement binomial, il assimile une fonction telle que $y = 1/(1+x^2)$ à la série $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$ et intègre celle-ci terme à terme. Pour ce faire, et dans la mesure où il ignore substantiellement les problèmes de convergence, il n'a besoin que de règles simples de l'opérateur d'intégration, à savoir

$$\int x^q = x^{q+1}/(q+1)$$

$$\text{et} \int (ay + bz) = a \int y + b \int z,$$

(contrairement à Leibniz qui, lui, ne s'autorise l'emploi des séries que pour des approximations et qui explore, de façon quasi exhaustive, toutes les règles qui régissent l'usage de cet opérateur). Ces deux détours de Newton mettent en évidence, d'une part, la mise en correspondance d'une fonction et de sa fonction dérivée (ou d'une fonction et d'une de ses primitives) en ce qui concerne les tables d'intégrales et, d'autre part, la manière dont l'opérateur d'intégration opère sur des fonctions puissances et des combinaisons linéaires de fonctions, pour ce qui est de l'usage des séries. De toute façon, c'est un opérateur qui agit sur des fonctions (celui d'intégration ou celui de dérivation) qui est mis à l'avant-plan. Et c'est grâce à cet opérateur que l'on remonte du local au global dès qu'il s'agit d'exploiter le théorème fondamental pour calculer l'aire sous une courbe particulière. En fait, le calcul effectué dans ce théorème n'est local qu'en apparence. On y étudie le taux de variation de la fonction-aire et on trouve la fonction-courbe, mais une fonction est une "chose" autant globale que locale : locale si on s'intéresse à une image en une abcisse précise et globale lorsqu'on considère d'un bloc l'ensemble de toutes ses images. On privilégie l'aspect local lorsqu'on regarde l'aire sous la courbe f, entre les bornes a et b, comme l'image en b de la fonction intégrale $\int_a^x f$. On privilégie le global lorsqu'on applique l'opérateur d'intégration à une fonction qui, donnée par une expression analytique, rassemble en quelques symboles une infinité d'images. Mais alors la fonction devient à son tour un élément parmi d'autres d'un ensemble de fonctions qui est l'ensemble de départ d'une autre fonction appelée opérateur. On ne peut mesurer aussi bien l'escalade dans l'abstraction que requiert la considération de cet opérateur qu'en citant E. Husserl (1972) : "Les objets du niveau d'abstraction n+1 sont les opérations que l'on peut effectuer sur les objets de niveau n". De ce point de vue, l'opérateur de dérivation est d'un niveau d'abstraction supérieur à celui de la fonction-courbe et de la fonction-aire. Or, les élèves éprouvent déjà des difficultés à prendre ces deux dernières en considération. On mesure donc le pas qu'ils ont à franchir pour accéder à l'opérateur d'intégration, et, en fin de compte, pour pressentir comment d'un renseignement local on peut remonter au global. A moins qu'ils n'aient vu le calcul des primitives au préalable. Mais la difficulté est alors, pour le professeur, de motiver ce calcul sans recourir à un contexte trop étranger aux aires et aux volumes (comme la cinématique).

4.2. Un calcul qui opère sur une fonction.

4.2.1. La prégnance des grandeurs.

Pour les raisons décrites aux sections IX.1.4. et IX.4.1.2., on ne perçoit bien la réciprocité entre les problèmes d'intégration et ceux de dérivation que lorsqu'on réalise que les uns et les autres sont avant tout une question de calcul formel, c'est-à-dire un calcul qui opère sur une fonction prise au sens d'expression analytique dont il modifie la forme. (Nous nous restreignons ici au contexte rencontré dans l'enseignement secondaire : celui des fonctions exprimables analytiquement en termes de fonctions simples). C'est d'ailleurs pour avoir négligé ce point de vue que Fermat et Barrow n'ont pas pressenti l'unité du calcul infinitésimal (cfr. VI.1.)

Or, on a vu en IX.3. que le concept d'aire est peu rattaché, pour les élèves, à celui de fonction. De manière générale, leurs réflexions sont plus proches du monde des grandeurs que de celui des fonctions. Les références fréquentes aux unités des grandeurs physiques et aux dimensions des grandeurs géométriques en témoignent. Ainsi cet élève qui, dans le problème du vase conique, divise le débit de la pompe par la vitesse de montée du liquide et trouve des unités d'aire : ce qui lui donne l'idée d'égaler à 100 l'aire de la section du cône ([286], voir aussi [289] à propos d'une réaction analogue). De même les élèves qui s'étonnent qu'on puisse égaler Δh à Δt parce que le premier représente une longueur et le second, un temps. Et ceux qui justifient que la vitesse est la pente de la tangente au graphe de la loi de position, en se référant aux unités des axes ([318]). Sans doute aussi celui qui, à l'occasion du problème VI.2.1. (Donne-moi ta vitesse et je te dirai l'espace que tu parcours), s'étonne que l'espace parcouru par un mobile sur une trajectoire rectiligne puisse être représenté par une aire, en argumentant d'une disparité d'unités (des m pour l'espace, des m^2 pour l'aire; [347]). Enfin ceux qui établissent un parallèle entre les dimensions des grandeurs géométriques et les degrés des fonctions que l'on dérive (la dérivée de l'aire du disque, de degré 2 donne la longueur du cercle, de degré 1; [367], [368], [369]; cfr. aussi [357] et [359]). Leibniz lui-même pensa longtemps les problèmes d'intégration et de dérivation en termes de dimensions avant de s'en dégager partiellement : "Thus the "d" - symbol (or rather the symbol "1/d") is introduced. Because Leibniz interprets $\int$ dimensionally, he has to write the "d" in the denominator : l is a line, $\int$l is an area, say ya (note the role of "a" to make it an area), the differences must again be lines, so we must write "ya/d". In fact he soon becomes aware that this is a notational disadvantage which is not outweighed by the advantage of dimensional interpretability of $\int$ and d, so he soon writes "d(ya)" instead of "ya/d" and henceforth re-interprets "d" and "$\int$" as dimensionless symbols. Nevertheless, the consideration of dimension did guide the decisive steps of choosing the new symbolism" (H. J. M. Bos, 1980).

4.2.2. Des rapprochements stériles.

On ne peut nier la fécondité des références aux unités des grandeurs puisqu'elles permettent à quelques élèves de résoudre certains problèmes et que Leibniz y trouva la source d'un symbolisme efficace. Mais il importe tout autant de s'en abstraire si l'on veut pouvoir reconnaître dans certains faits l'ébauche du théorème fondamental. Et c'est sans doute parce que les élèves ne le font pas suffisamment que certains rapprochements sont stériles pour eux, en ce sens qu'ils n'induisent, dans leur chef, aucune amorce de ce théorème, ou sont, a priori, peu susceptibles de le faire. Ainsi en est-il de l'analogie que Leibniz fait avec le calcul des suites. Celle-ci nous paraît a priori d'une portée didactique fort mince. En effet, tout d'abord le rapprochement entre les suites qui sont discrètes et les grandeurs continues que sont les aires est fort artificiel pour des élèves. Comment rapprocher le calcul d'une aire curviligne de la somme des termes d'une suite, si ce n'est en imaginant, à l'instar de Leibniz, l'aire donnée par la somme de segments parallèles entre lesquels on choisit une unité de plus en plus petite (cfr. IX.1.3.). Un seul élève y songe ([348]), mais encore est-ce dans un contexte (l'espace parcouru par un mobile) où la référence aux unités des grandeurs semble avoir soutenu sa réflexion, puisque c'est le fait d'avoir considéré une unité de temps qui permet, à ses yeux, d'assimiler à une distance un segment représentant une vitesse. Quant aux autres, on sait depuis la section VIII.2.3., qu'ils ont, dans l'ensemble, quelque peine à assumer l'image d'une aire faite de segments. Ensuite l'association que Leibniz fait entre, d'une part, les différences de deux termes successifs d'une suite et, d'autre part, les pentes de tangentes, est fort éloignée de l'imaginaire des élèves qui éprouvent beaucoup de peine, comme nous l'avons vu à la section VIII.4.1., à concevoir la pente de tangente comme la limite d'un quotient différentiel. N'est-ce pas sa fameuse confiance dans le calcul formel, que nous avons évoquée plus haut (VI.1.2.), qui pousse Leibniz à rapprocher des suites, fonction de n, des aires et des tangentes? N'a-t-il pas dû, pour ce faire, considérer ces dernières plus comme des "produits" d'un symbolisme formel que comme des mesures de grandeurs ou des objets géométriques? Par exemple, c'est vraisemblablement parce qu'il pense avant tout en termes de calcul symbolique, que sa pensée n'est pas acculée dans une impasse, tout comme celle des élèves, lorsqu'il pense l'aire comme une "somme d'ordonnées" (cfr. IX.1.3.).

De même, l'analogie avec la cinématique reste lettre morte pour les élèves. Ceux-ci savent que les calculs de vitesse sont liés à ceux de pente de tangente. Ils ressentent sans doute comme une évidence que le calcul de la vitesse d'un mobile à partir de l'espace parcouru et celui de l'espace à partir de la vitesse sont, en quelque sorte, inverses l'un de l'autre. Suffirait-il de leur faire constater que l'espace parcouru par un mobile équivaut à l'aire sous le graphe de sa vitesse pour qu'ils réalisent le lien de réciprocité entre les tangentes et les aires? Et bien non, loin de là. D'abord, il s'agit pour beaucoup d'entre eux d'un constat qui ne rejoint aucune intuition première, sans doute en raison de la prégnance des unités dans leur réflexion (VI.2.1.2). J. Dhombres n'interprète-t-il pas la représentation de l'espace comme aire sous la vitesse chez N. Oresme en ces termes : "on ne craint pas de figurer une longueur par une aire, ce qui est un pas de plus vers l'algébrisation" (1978)? Ensuite, les élèves ne tirent aucun parti de ce constat, qui n'a pas beaucoup de signification pour eux, pour résoudre les problèmes concernant plus explicitement le théorème fondamental (problèmes VI.2.4. à VI.2.7.). C'est que, vraisemblablement, à l'instar de Fermat et de Barrow, ils pensent fort peu au calcul d'aire comme à un cas particulier de calcul opérant sur une fonction.

4.3. Un calcul inhabituel sur une fonction inconnue.

Dans la formulation du théorème fondamental telle qu'elle apparaît dans les manuels du secondaire, le calcul de dérivée porte sur une fonction-aire qui, contrairement à ce qui se passe dans la procédure de Newton, n'est représentée ni par une expression analytique, ni par un graphe. Or, pour la plupart des élèves, qui ne sont familiers qu'avec ces deux seuls modes de détermination d'une fonction, connaître une fonction signifie connaître son "équation", comme ils disent, c'est-à-dire l'expression analytique (éventuelle) qui lui correspond ou connaître l'allure générale de son graphe. Pour eux, la fonction que l'on dérive dans le théorème fondamental a donc le statut de fonction inconnue. N'est-ce pas d'ailleurs dans le fait de suggérer un moyen de trouver cette expression analytique inconnue au départ que réside le principal intérêt de ce théorème?

Cela porte à conséquence dans l'apprentissage du théorème fondamental. Un parallèle avec l'algèbre fera comprendre pourquoi. Une des conquêtes les plus ardues, les plus longues mais aussi les plus prestigieuses des mathématique a été l'idée de calculer sur une inconnue. On savait multiplier, additionner des nombres connus mais cela n'avait a priori aucun sens d'additionner ou de multiplier des nombres inconnus. On n'a pu passer de l'équation $2x - 3 = 0$, à l'équation $2x = 3$ et finalement à $x = 3/2$ qu'en assumant l'hypothèse de pouvoir manipuler x comme si on en connaissait la valeur jusqu'à aboutir à une nouvelle équation dont la solution est triviale. Cela reste une lourde conquête à faire par les élèves. S. Baruk (1973) décrit de nombreux cas d'élèves pour lesquels le calcul "sur des lettres" n'a aucun sens et qui se comportent comme celui qui exprime son désarroi à propos d'une équation telle que $2x - 3 = 0$ en disant : "Je ne peux pas diviser x par 2 puisque je ne connais pas x". Quelque chose de comparable se produit ici. On a devant les yeux le graphe d'une fonction (la fonction-courbe), représentée par une expression analytique et voilà qu'il faut "loucher" en même temps vers une autre fonction inconnue au sens où l'entendent les élèves et envers laquelle il faut se comporter comme si on la connaissait puisqu'on la dérive. Qui plus est, le mot dériver reprend ici son sens initial : calculer la limite d'un taux d'accroissement alors que pour beaucoup d'élèves (ayant reçu un enseignement de l'analyse, tel qu'il est habituellement conçu), dériver signifie tirer une nouvelle expression analytique d'une autre, au moyen de règles de calcul bien codifiées. Ils ont, en effet, eu peu d'occasions de revenir à ce sens initial, le calcul des dérivées l'emportant souvent sur le reste, au point qu'ils confondent variable et accroissement de la variable (VI.2.10.6.) et qu'ils ne savent comment interpréter les notations connues (VI.2.10.5.).

La difficulté à "lorgner" vers cette fonction-aire inconnue alors qu'on a la fonction-courbe sous les yeux est manifeste lorsque les élèves imaginent que le théorème fondamental lie pente et aire, mais du même graphe initial. Car c'est bien au graphe de la fonction-courbe que plusieurs élèves tracent des tangentes lorsqu'on leur demande d'interpréter pourquoi l'aire sous $y = x^2$, une fois dérivée par rapport à x, redonne la fonction de départ. (VI.2.10.2.) : le mot dérivée évoque pour eux la pente d'une tangente, mais il ne peut y avoir de tangente qu'à la seule courbe déjà tracée! D'autres hésitent ([398], [399]). De même, lorsqu'on leur fait dériver l'aire du disque, la courbe à laquelle ils traceront des tangentes ou sur laquelle ils représenteront les abcisses a et x présentes dans leur notation de dérivée est non pas le graphe de la fonction $y = \pi x^2$ mais le pourtour du disque (VI.2.10.2.; VI.2.10.5., Fig.38).

Quatrième Partie

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.

Chapitre X.

Des difficultés d'apprentissage qui font apparaître des dysfonctionnements dans l'enseignement de l'analyse.

1. Quelques hypothèses relatives aux objets mentaux "aires et volumes".

Résumons, au terme de ce travail, quelques caractéristiques saillantes des objets mentaux "aires et volumes", que nous avons inférées, à titre d'hypothèse, des réactions des élèves.

1) Ceux-ci considèrent a priori qu'une surface curviligne (délimitée par des courbes) doit pouvoir être mesurée exactement au moyen d'un nombre réel, tout comme l'est une surface rectiligne (délimitée par des segments), e.a. parce que la première s'imposerait à leurs sens tout autant que la seconde ou du moins ressentiraient-ils cela confusément. Toutefois certains trouveraient choquant qu'une aire calculée au moyen d'un processus <u>infini</u> (perçu comme une somme indéfiniment allongeable) soit un nombre décimal <u>limité</u>.

2) Les découpages laminaires des surfaces et des solides ne sont pas privilégiés d'emblée, sans doute parce qu'ils ne débouchent pas sur une suite de termes spontanément perçus comme les sommes partielles d'une série approchant de mieux en mieux l'aire ou le volume cherché.

3) Certaines lois erronées sur les mesures (par exemple la proportionnalité fallacieuse entre les mesures de deux grandeurs, déduite de celle de leurs indivisibles respectifs) trahiraient l'intuition souvent implicite qu'une réunion d'indivisibles disjoints correspond toujours à une somme de mesures ou celle qu'un indivisible qui se déplace engendre autant un volume qu'un solide.

4) Les élèves ne percevraient pas comme telle la limite d'une suite de sommes d'aires de rectangles : ils percevraient une réunion de beaucoup de rectangles fins, que leur imagination transformerait progressivement en une réunion de plus en plus longue de rectangles de plus en plus fins. Ils passeraient continûment "à vue" des rectangles aux segments avant de sommer les aires, ce qui les empêche ensuite de sommer, quelle que soit la mesure qu'ils affectent au segment : son aire nulle ou sa longueur. Leur imagination s'enfermerait ainsi dans un dilemme dont l'issue est une impasse : une aire curviligne n'est pas "réductible" à un

polygone formé de rectangles, elle ne peut être obtenue en sommant des segments.

5) Le calcul de l'aire d'une surface par le truchement d'une aire sous une courbe définie par une fonction serait compromise par le fait que la fonction renvoie moins aux indivisibles de longueur $y = f(x)$ $(f > 0)$ qu'à son graphe (ou à un point de son graphe). A fortiori un calcul de volume s'apparenterait difficilement à une aire sous la courbe représentative d'une fonction f, car $y = f(x)$ évoquerait encore moins l'aire d'une section indivisible du solide en question.

6) N'étant pas des fonctions du temps, les aires et les volumes suggéreraient peu l'idée commune de variation; ils ne se prêteraient pas spontanément à une étude locale.

7) L'apparition de l'idée de variation dans le contexte des aires et des volumes s'accompagnerait de références indues et inconscientes au temps de déroulement de la pensée. Ainsi un segment dont la longueur (en fait l'ordonnée d'un point d'une fonction) est le taux de croissance instantané de l'aire sous le graphe de cette fonction, serait perçu en lui-même (et non à travers sa longueur) comme l'élément minimal qu'on doit rajouter, à la vitesse de la pensée, pour constituer la surface en allant de gauche à droite. Des confusions analogues s'observent à propos d'autres surfaces et solides.

2. Des interprétations corroborées par des observations relatives à d'autres contextes.

Parmi ces interprétations des objets mentaux "aires et volumes", quelques-unes leur sont spécifiques. D'autres s'étendent à d'autres contextes où elles sont corroborées par certaines de nos observations.

Les élèves ressentiraient, ne fût-ce qu'inconsciemment, qu'ils appréhendent moins aisément, par les sens et la mesure, les vitesse et débit instantanés que les vitesse et débit moyens. Sans doute est-ce pour cela que, comparativement aux concepts cités en second, les premiers pâtissent d'un a priori négatif : on nie leur existence. Ceci expliquerait, a contrario, les raisons données plus haut pour justifier que, par rapport aux aires rectilignes, les aires curvilignes ne souffrent a priori d'aucun discrédit supplémentaire.

L'hypothèse 2) possède une sorte de pendant dans le cas de la vitesse instantanée : celle-ci est définie comme la limite d'une "suite" de vitesses moyennes qui ne se pense nullement en termes de série, ce qui rend la progression des vitesses moyennes et son aboutissement difficiles à cerner.

Les lois erronées sur les mesures mentionnées en 3) sont, parmi bien d'autres, des manifestations particulières de l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions (propre, lui, au contexte des aires et volumes), qui se caractérise par des glissements subreptices et indus entre le monde des grandeurs et celui de leurs mesures.

L'hypothèse 4) a son équivalent dans le contexte des tangentes où le passage à la limite s'effectuerait "à vue", au niveau des objets géométriques, ce qui fait que dx serait rendu nul (et dy aussi), avant même que l'on envisage le rapport dy/dx. Quelque chose d'analogue se produit pour la vitesse instantanée. Le passage à la limite se ferait au niveau du temps et de l'espace, qui seraient égalés à 0 avant que l'on ne revienne à leur rapport et donc, indépendamment de lui. Les "infinitésimaux" auraient donc une place première dans l'imagination des élèves. Ils relèveraient plus de l'infini actuel que de l'infini potentiel : rien n'empêche "dx" d'atteindre 0.

L'hypothèse 7) et, en partie, l'hypothèse 6) sont confortées par l'intervention inéluctable du temps dans toute idée de variation et par d'autres références implicites et inconscientes au temps du déroulement de la pensée (e.a. à propos de la "limite d'une variable"); aussi par l'absence du temps dans certains calculs (celui du débit par exemple), comme si le temps mesuré du physicien était remplacé par celui du déroulement de la pensée qui s'écoule à un rythme propre à chacun et de manière si inéluctable qu'on ne pense même pas à le faire intervenir dans le calcul.

Le principal matériau de recherche a été une suite de problèmes proposés à des élèves et dont les caractéristiques sont décrites au début de la deuxième partie de ce travail. Il a été complété d'interviews et de "souvenirs d'enseignant".

3. A titre d'interprétation globale : une séparation floue entre un monde sensible illusoire et les mathématiques.

Parlant des difficultés liées au développement du calcul infinitésimal en général, C. Boyer (1949) souligne : "In all probability, however, the chief obstacle in the way of the development of the concepts of the calculus was a misunderstanding as to the nature of mathematics. Ever since the empirical mathematics of the pre-Hellenic world was developed, the attitude has, upon occasion, been maintained that mathematics is a branch either of empirical science or of transcendental philosophy. In either case mathematics is not free to develop as it will, but is bound by certain restrictions : by conceptions derived either a posteriori from natural science, or assumed to be imposed a priori by an absolutistic philosophy".

Il précise, à propos d'Aristote : "Aristotle considered mathematics an idealized abstraction from natural science, and as such the premises and definitions were not arbitrary, but were determined by our interpretation of the world of sense perception".

De tels propos nous paraissent exagérément positivistes mais, avant de développer une telle critique, nous croyons pouvoir les appliquer aux élèves, mutatis mutandis, en un sens que nous allons préciser, et interpréter ainsi plusieurs de leurs réactions.

Les objets mentaux étudiés ici correspondent soit à des grandeurs, soit à des objets géométriques, c'est-à-dire à des choses qui, pour l'élève font partie d'un monde sensible, à savoir un monde qu'ils croient pouvoir appréhender partiellement, d'une manière objective, par leurs seuls sens. Et nombreux sont ceux qui s'attendent à ce que les concepts mathématiques et leurs propriétés prolongent en quelque sorte leur perception première de ces objets issus du monde sensible. Nous avons déjà avancé cette hypothèse à propos de leur refus du concept de vitesse instantanée : ils dénieraient aux mathématiques la possibilité de circonscrire avec précision quelque chose qui leur semble échapper jusqu'à un certain point aux sens et aux mesures.

Les surfaces et les solides quant à eux font l'objet d'une première perception : d'abord, l'élève voit ces grandeurs (ou du moins croit-il les appréhender par la seule vue); ensuite il les imagine partitionnées en indivisibles, ou pour certaines (tel le prisme) construites par le déplacement d'un de ces indivisibles. Et chaque manifestation de l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions ne s'explique-t-elle pas par une traduction abusive, en termes de mesures, de l'un ou l'autre aspect de cette perception primitive?

N'est-ce pas encore la "perception" d'un mouvement saisi intuitivement qui fait que le passage à la limite se pense, non au niveau numérique, mais en termes d'objets géométriques : les rectangles se réduisent "à vue" en segments, la sécante qui tourne devient tangente?

En ce qui concerne la vitesse instantanée, le passage à la limite s'effectue au niveau de l'espace et du temps, non à celui des vitesses moyennes, c'est-à-dire au niveau de deux grandeurs qui semblent à l'élève plus immédiatement perceptibles et directement mesurables, alors que leur rapport relève déjà plus, à ses yeux, de la construction mentale.

La référence au temps du déroulement de la pensée ne provient-elle pas également de son vécu subjectif, de sa perception première du sentiment de durée : avant d'être objectivé, le temps auquel on se réfère spontanément n'est-il pas celui pendant lequel se déroulent nos actes? La tentation d'assimiler une variable quelconque à une variable temporelle ne viendrait-elle pas, elle aussi, de la nécessité de faire varier cette variable effectivement, c'est-à-dire lui attribuer une valeur, puis une autre, dans le temps du déroulement de la pensée, avant de la penser comme telle et de la déclarer telle. Quant à la confusion entre taux d'accroissement instantané d'une grandeur et quantité minimale dont s'accroît cette grandeur dans le temps subjectif, elle semble indiquer de même qu'il n'y a pas de séparation bien nette entre la perception qu'ont les élèves des grandeurs et les propriétés de leurs mesures : un taux entre deux mesures (celle d'une lamelle de surface et celle de sa largeur par exemple) devient une grandeur (un segment en l'occurrence); l'idée qu'une grandeur est composée par ajouts successifs d'indivisibles, dans le temps du déroulement de la pensée, serait à l'origine de cette confusion.

Voir les mathématiques comme une copie quasi-conforme de ce qu'on croit être l'expérience sensible créerait donc obstacle à la modélisation d'objets issus du monde prétendûment sensible (aires, volumes, vitesses ...) au moyen de concepts mathématiques (intégrales, dérivées) et d'un calcul formel (le calcul des dérivées et celui des primitives). Cette modélisation doit donc faire l'objet d'un apprentissage. Les mots "modélisation" et "modèle" sont à prendre au sens où l'entend le physicien qui "utilise les notions de mathématique pour réduire, décrire, étudier le monde sensible ou celui qui est conceptualisé dans le langage naturel" (B. Jaulin, 1980).

Mais l'obstacle ainsi formulé suppose l'existence de ce monde sensible et suppose, en fin de compte, une attitude épistémologique essentiellement *positiviste*, selon laquelle la science part de faits observables qu'elle ne fait que traduire. K. Popper e.a. a introduit une nouvelle conception épistémologique que l'on peut résumer brièvement ainsi : faire de la science ne consiste pas à partir de faits observables mais bien à remplacer une interprétation du monde par une autre, dès le moment où la première ne paraît plus utile.

Cette vision nous amène à reformuler autrement l'obstacle que nous décrivons ici : n'est-ce pas parce qu'il croit en l'existence d'un monde sensible, en celle de faits observables, donné absolu et incontournable, que l'élève s'attend à ce que les mathématiques traduisent ce donné presque terme à terme. S'il se rendait compte du caractère illusoire de ce monde sensible, c'est-à-dire s'il était conscient que sa perception est en fait une structuration mentale, le fruit d'une décision de l'esprit, conditionnée par un environnement socio-culturel, peut-être aurait-il moins de réticence, de difficultés à remplacer cette structuration première par une autre qui s'articule autour de concepts mathématiques? Sans doute est-ce là que se situe le noeud de l'obstacle?

Cet obstacle serait vraisemblablement très global : il concernerait quantité d'autres matières. Beaucoup d'autres obstacles lui seraient apparentés. Ainsi n'y a-t-il quelque chose d'analogue à l'origine du discrédit dont ont pâti, au XIX[e] siècle, les géométries non euclidiennes, à ceci près que les mathématiques seraient ici copie conforme, non de l'expérience sensible, mais du monde savant des expériences physiques : "La question est posée alors de savoir, parmi la multiplicité des géométries, laquelle est la vraie géométrie, c'est-à-dire celle qui représentera l'espace physique" (R. Bkouche, 1982)? Ici aussi les expériences physiques semblent être considérées comme un donné irréfutable dont il faut tenir compte.

Cette conception des mathématiques partagée par les élèves et décrite plus haut n'est pas sans conséquences sur l'apprentissage des élèves et leur vision de la société. Pour analyser celles-ci situons cette conception parmi d'autres possibles.

B. Charlot (1978), s'inspirant de J.T. Desanti, distingue, d'une part, les *Mathématiques du ciel* et les *Mathématiques de la Terre* et, d'autre part, les *Mathématiques comme instruments*. Les Mathématiques du Ciel sont celles qui existent depuis longtemps dans le monde des idées. Elles y forment un univers structuré que le mathématicien explore mais dont il ne saisit qu'une vue fragmentaire. Les Mathématiques de la Terre sont celles qui structurent la nature et "peut-être, le monde social". Elles se révèlent petit à petit à celui qui observe, qui manipule les objets concrets du monde naturel. Tout comme les Mathématiques du Ciel, elles pré-existent à l'activité intellectuelle et sont donc, soit à révéler par le professeur, soit à découvrir par l'élève. A l'opposé, il y a les Mathématiques produites par l'activité intellectuelle de celui qui construit des instruments pour résoudre des problèmes. Il ne s'agit pas de les explorer ou de les découvrir mais bien de les créer ou plutôt de les recréer (avec l'aide du professeur).

Dès le moment où l'élève pense les mathématiques comme le prolongement de sa perception des objets appartenant au monde sensible, ne concevrait-il pas que les mathématiques sont dans ces objets eux-mêmes? Sa conception des mathématiques s'apparenterait, dans ces conditions, aux Mathématiques de la Terre, à ceci près qu'il n'y a pas, chez lui de sublimation mentale de ces objets : les mathématiques ne supposent même pas une idéalisation, elles prolongent les objets eux-mêmes, participant quasiment à leur nature ou du moins s'identifiant à la "perception" qu'on en a.

De même que B. Charlot fait découler, dans le chef du professeur, une conception de l'enseignement des mathématiques de chacune des conceptions des mathématiques qu'il distingue, on peut imaginer que l'élève pense son propre apprentissage en symbiose avec sa conception des mathématiques. Et ne trouve-t-il pas dans celle-ci quelque incitation (inconsciente) à ne pas inventer dans la mesure où il pense les mathématiques, non comme le produit d'une activité mentale (éventuellement la sienne), mais comme celui d'une observation "passive" des objets du monde de la perception?

Une telle conception des mathématiques ne risque-t-elle pas aussi de faire du mathématicien le détenteur de la vérité "sur les choses"? En effet, si les mathématiques prolongent les "choses" elles-mêmes, elles ne peuvent qu'être uniques et elles confèrent à celui qui les a découvertes, une sorte de pouvoir sur le monde. C'est pourquoi cette conception n'est pas sans conséquences idéologiques et donc sociales. Pour une analyse plus détaillée des idéologies véhiculées par le cours de mathématique et les cours de sciences en général, nous renvoyons le lecteur à G. Fourez (1985).

4. La modélisation de ce "monde sensible" par un calcul formel : un apprentissage souvent négligé.

Un premier coup d'oeil sur les manuels et les pratiques des professeurs nous pousse à penser que l'on néglige généralement l'apprentissage dont devrait faire l'objet la modélisation par des concepts d'analyse des objets mentaux "aire", "volume", "vitesse".

Voici quelques coups de sonde dans quatre manuels, à propos des aires et des volumes.

1) Dans les quatre, on considère comme vérité implicite que le calcul de l'aire sous la courbe représentative d'une fonction a un intérêt en soi. C'est l'élève qui est censé découvrir, par lui-même, et au travers des exercices, qu'il s'agit là d'un calcul "standard" au sens où nous l'avons expliqué plus haut. Dans deux des manuels (E. Boutriau et al., 1985 et S. Lorent, R. Lorent, 1988) un tel calcul est choisi comme introduction du chapitre relatif au calcul intégral. A. Adam et al. (1985) commencent eux aussi par le calcul de l'aire sous $y = x^2$, mais le motivent au préalable par quelques considérations d'ordre historique en évoquant la quadrature de la parabole par Archimède. J. M. Nachtergaele et al. (1979) débutent par le calcul de l'aire du disque et passent ensuite sans transition à l'aire sous la courbe représentative d'une fonction continue quelconque.

2) On a vu que de nombreux élèves doutent que l'on puisse obtenir exactement l'aire sous $y = x^3$ entre 0 et 1 comme limite d'une suite de sommes de rectangles, d'autant, sans doute, que le résultat est un décimal limité et que le processus est censé être

infini. Certains se laissent convaincre lorsqu'on encadre l'aire en question; les autres non, restant perplexes devant l'alternative : les rectangles ne peuvent former une aire curviligne, les segments ne peuvent être sommés.

Les manuels cités ne prennent pas ces doutes en compte ou si peu! Ainsi on ne revient pas, dans le chapitre du calcul intégral, sur la signification du concept de limite (lorsqu'on a défini l'intégrale comme une limite), par exemple pour établir par l'absurde, que l'aire (au sens intuitif) ne peut être ni plus petite, ni plus grande que la limite.

Seuls A. Adam et al. (1985) démontrent, dans un cas précis, que les limites des approximations par excès et par défaut donnent le même résultat. S. Lorent et R. Lorent (1988) se contentent de dire qu'"on peut démontrer que, lorsque n tend vers l'infini, de telle manière que tous les Δx_i tendent vers zéro, les limites de s et de S [les sommes d'aires de rectangles qui minorent et majorent respectivement l'aire curviligne] existent et sont égales". E. Boutriau et al. (1985) traitent un exemple mais s'en tiennent à une investigation exclusivement numérique. Ils définissent ensuite l'intégrale d'une fonction comme lim $\sum f(a_i)\, \Delta x_i$ où a_i est choisi aléatoirement dans l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. J. M. Nachtergaele et al. (1979) effectuent un calcul de limite pour obtenir l'aire du disque (Notons que cette aire curviligne irrationnelle choque peut-être moins les élèves qu'une aire curviligne rationnelle) et développent aussitôt après une théorie fort éloignée de l'exemple traité (l'intégrale est définie dans ce manuel comme supremum ou infimum d'ensembles d'intégrales de fonctions en escalier, alors que l'aire du disque est la limite d'une suite de polygones dont les côtés s'approchent tangentiellement du bord de celui-ci).

3) Chez J. M. Nachtergaele et al. (1979) et chez A. Adam et al. (1985) le théorème de la moyenne et le théorème fondamental sont démontrés sans être illustrés, ni par des aires, ni par des volumes. E. Boutriau et al. (1985) d'une part, S. Lorent et R. Lorent (1988) d'autre part justifient le théorème fondamental "en faisant appel à une idée intuitive de l'aire" comme disent les premiers, mais supposent obvie ce théorème dans le cas des volumes : ils passent des aires aux volumes réductibles à une primitive, en évoquant qui les "tranches élémentaires" qui sont aux solides ce que les "rectangles élémentaires" sont aux surfaces, qui des approximations par excès et par défaut. Nous connaissons une seule référence (I.R.E.M. de Strasbourg, 1986) où l'on particularise le théorème fondamental à un moment donné au cas des aires, à un autre à celui du volume de la sphère.

Ces quelques faits ne montrent-ils pas que ce ne sont pas les aires et les volumes qui sont les objets premiers dans les manuels du Secondaire, mais bien l'intégrale définie d'une fonction grâce à laquelle on les définit? D'une manière générale, la notion intuitive d'aire et la définition d'intégrale définie y cohabitent mais sans qu'on prenne la peine de faire vraiment la jonction entre les deux.

Est-ce là le rôle des manuels? N'est-ce pas plutôt celui du professeur? Sans doute, mais, de ce côté là, les choses n'ont pas l'air de s'arranger. Se basant sur des interviews de trois groupes de professeurs et sur une analyse structurale du contenu de celles-ci ["L'analyse porte, non plus sur le vocabulaire, lexique ou répertoire sémantique ou thématique du message, mais sur les principes d'organisation sous-jacents, les systèmes de relations, les schémas directeurs, les règles d'enchaînement, d'association, d'exclusion, d'équivalence, les agrégats organisés de mots ou d'éléments de signification, les figures rhétoriques, etc., c'est-à-dire toutes relations qui structurent les éléments (signes ou significations) de manière invariante ou indépendante de ces éléments" (L. Bardin, 1977)], M. Schneider (1983) a inféré plusieurs hypothèses sur les pratiques des professeurs liées à leur enseignement de l'analyse. Celui-ci serait avant tout "Lagrangien" : la fonction serait considérée a priori comme un objet d'étude en soi, et longtemps le seul, non comme un outil de résolution de problèmes; le calcul infinitésimal serait plus axé sur les règles de passage de l'expression f(x) à l'expression dérivée et vice et versa que sur la résolution de problèmes. L'importance démesurée accordée aux exercices dits de variation de fonctions en serait un indice.

Bien sûr, les professeurs apprécient ce qu'ils appellent des applications concrètes, ce par quoi ils entendent surtout les applications des intégrales aux calculs d'aires et de volumes. Mais les pôles et oppositions qui structurent leur discours donnent à penser que "le pôle concret signifie davantage la présentation d'une somme de résultats [culturellement connus tels le volume de la sphère...] qu'une réflexion sur l'adéquation de l'analyse en tant que modèle d'un "monde sensible". Dans cette perspective la théorie serait détournée de ses fonctions propres [fonction interprétative, fonction instrumentale, fonction de validation] pour devenir une procédure didactique à l'usage du professeur [elle serait l'occasion d'entraîner les élèves au raisonnement logique, à l'expression orale; l'occasion de les évaluer; elle asseoirait, en étant gage de rigueur, le prestige des mathématiques et donc celui du professeur...] Les symboles seraient davantage exhibés comme notations que comme "objets pour penser" : leur manipulation syntaxique serait souvent dissociée de toute problématique" (M. Schneider, 1983).

En guise d'approche intuitive, les professeurs disent miser (toujours d'après la même source) sur les explorations numériques et les interprétations géométriques (la pente de tangente par exemple). Sans nier que l'investigation numérique soit porteuse d'intuitions fécondes, nous avons montré qu'elle est loin de suffire à nourrir de sens l'apprentissage des concepts d'analyse : la symbolisation par des lettres est incontournable si l'on veut pouvoir ne fût-ce qu'identifier l'acte de passage à la limite et elle soulève des difficultés spécifiques. De même le passage de la tangente à sa pente n'est pas évident, comme on l'a vu, et illustre le fait que l'interprétation géométrique à elle seule peut être source d'obstacles à l'apprentissage.

5. Quelques recommandations didactiques.

L'arithmétique et la géométrie sont, dans le développement habituel de l'éducation mathématique, appréhendées d'abord au niveau expérimental. A l'école primaire et au début de l'école secondaire, les élèves rencontrent une foule de phénomènes numériques et géométriques et se familiarisent avec eux. C'est seulement à un stade ultérieur qu'une théorie mathématique leur est proposée, dans laquelle les concepts sont mis en forme et engagés dans des raisonnements d'où le point de vue empirique est en gros écarté. L'enseignement habituel de l'analyse procède autrement. Jusqu'à ce qu'ils aient 16 ans environ, les élèves n'entendent presque pas parler de l'infini, de l'idée de limite, etc. L'enseignement de l'analyse ne passe par aucune phase *préalable* de caractère expérimental. Le résultat est qu'à partir de 16 ans, les élèves doivent assimiler *en même temps* les phénomènes associés aux apparitions de l'infini et des limites et les concepts, les théories formelles qui les expriment et les développent mathématiquement. Une théorie intervient là qui ne peut avoir pour fonction d'ordonner un ensemble riche d'expériences préalables, tout simplement parce qu'un tel ensemble n'existe pas. H. Freudenthal (1973) a mis en évidence les difficultés résultant de cet état de choses.

Notre suite de problèmes contient des éléments permettant d'organiser une telle expérience préalable qui constituerait une première boucle d'apprentissage de l'analyse. Mais, rappelons-le, nous ne proposons nullement ces problèmes comme projet d'enseignement. D'abord, pour des raisons déjà décrites dans l'introduction. Ensuite, parce que, en tant que première boucle d'apprentissage empirique, cette suite est incomplète. En effet, nous avons misé presqu'exclusivement sur des situations géométriques (et quelques situations physiques). Celles-ci doivent être complétées d'expériences *numériques* visant à faire naître d'autres intuitions constitutives des concepts d'analyse. Enfin, nous ne saurions prétendre que les problèmes proposés ici soient les seuls susceptibles de "faire sentir géométriquement" aux élèves les notions d'analyse impliquées, pour reprendre une expression de H.

Freudenthal, 1973 ("to have undergone these notions geometrically [...])". C'est pourquoi notre suite de problèmes n'a valeur que d'illustration de recommandations didactiques plus générales qui la transcendent et qui nous paraissent essentielles. Voici les principales d'entre elles.

1) Nourrir de sens les techniques formelles de l'analyse par des intuitions "perceptives".

Ici, l'espacement des indivisibles né des paradoxes causés par leur usage abusif constitue une sorte de pendant "perceptif" de la technique du changement de variable.

2) Tenir compte de la variété épistémologique des concepts et des théorèmes. Diversifier les contextes problématiques.

La dérivée surgit ici de contextes variés qui ne sont pas interchangeables, comme on l'a vu : un débit n'est pas une vitesse; il n'est pas indifférent que la variable indépendante soit le temps ou non; savoir interpréter la dérivée comme pente de tangente n'est pas savoir interpréter pourquoi la dérivée de l'aire du disque, par rapport à son rayon, donne son périmètre ...

Mais, de ce point de vue, notre suite de problèmes n'est qu'un embryon. Comme nous l'avons déjà dit, on y explore peu les facettes numériques de la dérivée. De même, le théorème fondamental y est appréhendé dans le seul contexte des calculs d'aires et de volumes. Par delà ceux-ci le problème de vidange d'une cuve que nous avons analysé en IX.1.4. conduit à exploiter ce théorème dans la résolution d'une équation différentielle, ceci ouvrant de nouveaux horizons ...

3) Restituer aux concepts un rôle d'instrument pour résoudre des problèmes ou faire des démonstrations.

C'est le cas de la limite dans nos problèmes, à la fois considérée comme "acte" et comme concept : d'un côté, l'"acte de passage" à la limite permet de résoudre un problème qui a du sens a priori pour l'élève (Le problème du vase conique, V.2.1.); de l'autre le calcul d'une aire curviligne (L'aire sous $y = x^3$, III.2.7.) suscite, lui aussi, un tel acte et les doutes qu'il soulève rendent nécessaire une preuve à travers laquelle on s'approche du concept de limite tel qu'il est formalisé dans la théorie.

C'est aussi le cas des concepts de fonction et d'aire sous une courbe : la comparaison de certaines grandeurs (le cylindre et le cône par exemple), par le biais de leurs indivisibles, amène à considérer des fonctions et des aires sous leur courbe représentative.

4) Se contenter, dans une première boucle d'enseignement, de prendre comme axiomes des évidences empiriques qui, dans la (les) boucle(s) suivante(s), feront l'objet d'un théorème. Explorer les limites de validité et d'opérationnalité de ces premières évidences, ce qui rend nécessaire(s) une (des) autre(s) boucle(s) ayant pour principale fonction de répondre aux questions laissées en suspens dans la précédente.

Les principes de Cavalieri constituent le point de départ de la "théorie" développée à la suite de nos problèmes. Le remplissage infini par segments ou tranches parallèles, sous-jacent à ces principes, préfigure la définition de l'intégrale et sa propriété de linéarité.

La méthode de Cavalieri soulève, quand on cherche à l'étendre, des paradoxes que le calcul intégral a eu précisément pour fonction de résoudre. Donc, la méthode de Cavalieri nourrit de sens le calcul intégral, mais nous ne pouvons prétendre que soit là un de ses monopoles.

Certains calculs d'aires et de volumes se ramènent, grâce à la méthode de Cavalieri, à des calculs d'aires sous une courbe. La méthode de Cavalieri est mise en échec dans certains de ceux-ci, ce qui montre la nécessité de recourir à des limites. On épuise ainsi les moyens d'évaluation d'aires et de volumes qui évitent la notion de limite, ce qui fait apparaître celle-ci avec tout son sens et sa fonction.

Notons la difficulté de certains élèves "avancés" à entrer dans cette perspective semi-empirique (cfr. II.2.5.2.)

Signalons aussi la démarche d'Apostol (1967) qui intègre les principes de Cavalieri dans sa définition axiomatique de l'aire et du volume, ce qui lui permet d'accéder aisément aux calculs d'aires planes et à ceux de volumes réductibles à l'intégrale d'une fonction d'une variable.

5) Donner aux élèves l'occasion d'une réflexion épistémologique à propos de leurs propres erreurs.

Ainsi les paradoxes relatifs aux indivisibles font prendre conscience aux élèves de leurs propres dérapages entre le monde des grandeurs et celui de leurs mesures, pourvu, bien sûr, que l'on commente avec eux la raison profonde de ces dérapages.

L'ensemble des problèmes proposés est de nature à développer chez les élèves une pensée réflexive sur la construction des mathématiques et de la science en général.

6. Vers une formalisation plus poussée.

La formalisation des concepts premiers de l'analyse a été évoquée à plusieurs reprises dans ce travail. Tout d'abord, lorsque nous avons analysé jusqu'où la preuve par l'absurde, formulée à propos du problème du vase conique (VIII.2.7.), nous rapproche de la formalisation en "ε, δ" du concept de limite. Ensuite, quand nous avons montré en quoi le formalisme adopté par Riemann s'intègre mieux dans la problématique de la construction d'une théorie de l'intégration que dans celle des calculs d'aires et de volumes (VIII.2.8.). Enfin, dans l'ensemble de cette thèse où nous croyons avoir montré le risque d'être en porte-à-faux vis-à-vis des élèves si l'on formalise prématurément sans leur avoir donné l'occasion de vivre les concepts - sous une forme moins formalisée - comme instruments pour résoudre des problèmes.

Une formalisation plus poussée est probablement à la portée d'un certain nombre d'élèves du secondaire. Mais nous croyons qu'elle s'imposera d'autant mieux que l'on aura sensibilisé ceux-ci aux difficultés inhérentes à la construction d'une théorie de l'intégration cohérente et efficace. Cette sensibilisation nécessiterait, à nos yeux, que l'on élargisse la classe des fonctions effectivement rencontrées (jusqu'où?) et que l'on trouve des problèmes d'ordre plus théorique mais qui auraient un sens a priori pour les élèves. Une telle réflexion reste à faire...

7. L'analyse non-standard au cycle secondaire?

Notre travail est susceptible d'éclairer quelque peu celui qui envisagerait d'initier les élèves du secondaire à l'analyse non standard.

Nous avons montré la présence des "infinitésimaux" dans l'imagination des élèves. Nous les pensons incontournables dans certains processus tels la modélisation de problèmes au moyen d'équations différentielles. M. Artigue (1988) a mis en évidence leur institutionnalisation au sein du cours de physique à l'université : on peut imaginer qu'il en va de même dans les cours de sciences du secondaire. Or, évacué de l'analyse classique, l'infinitésimal retrouve en analyse non standard une place première, sous forme axiomatisée. Faut-il en conclure l'opportunité de faire de l'analyse non standard relativement tôt avec les élèves, voire de débuter l'analyse par là ?

On imagine fort bien un argument en faveur de cette alternative : tant qu'à faire, si on ne peut éviter les infinitésimaux, autant les faire intervenir "proprement".

Mais il ressort de ce travail que les infinitésimaux sont, chez les élèves, des sortes d'"excroissances" de leur "perception". Rien à voir avec les infinitésimaux de l'analyse non standard qui font l'objet d'une construction logique. D'un côté la conception des mathématiques comme copie quasi-conforme de l'expérience sensible; de l'autre, une construction rationnelle dont le but est de donner un bien-fondé logique à des pratiques de calcul en vigueur chez les utilisateurs des mathématiques. La démarche est donc tout autre.

Il semble, à première vue, que "l'appareil" logique sous-jacent à l'analyse non standard et donc la problématique qui lui a donné naissance soient inabordables pour les élèves du secondaire. Mais peut-être le "fonctionnement" de la théorie leur serait-il accessible? Peut-être les images mentales associées à leurs "infinitésimaux" ont-elles quelque parenté avec les propriétés formelles des infinitésimaux de l'analyse non standard? Peut-être pourrait-on leur enseigner ces propriétés de manière telle qu'on rejoigne leurs intuitions premières pour les prolonger? N'est-ce pas ce qui se passe avec les réels? Beaucoup d'élèves ont des réels des connaissances suffisamment cohérentes et intégrées que pour les manipuler sans heurt, sans pour autant être mis au courant de leurs fondements. Nous n'en savons pas assez pour répondre à de telles questions. Nous avons montré comment surgissent les "infinitésimaux" de divers contextes problématiques, mais il faudrait investiguer davantage pour dresser le profil de ces objets mentaux et savoir ainsi s'ils pourraient servir de points d'anchrage à l'apprentissage de l'analyse non standard. Mais sans doute cette question suppose-t-elle, à elle seule, toute une thèse ...

Bibliographie

C. P. ABELOOS, *Science et clinique : incompatibles?*, Mémoire de licence en psychologie, Université de Louvain, Louvain-La-Neuve, 1983.

A. ADAM, F. GOOSSENS, F. LOUSBERG, *Mathématisons 65*, A. De Boeck, Bruxelles, 1985.

T. APOSTOL, *Calculus, Volume 1*, Second edition, Xerox College Publishing, Lexington, 1967.

M. ARTIGUE, Quelques aspects de la transposition didactique de la notion de différentielle, *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1988.

ARCHIMEDE, tome II, trad. Ch. Mugler, Les Belles Lettres, Paris, 1971.

ARCHIMEDE, tome III, trad. Ch. Mugler, Les Belles Lettres, Paris, 1971.

G. BACHELARD, *La formation de l'esprit Scientifique*, J. Vrin, Paris, 1980.

N. BALACHEFF, *Elaboration d'explications par des élèves de sixième à propos d'un problème combinatoire*, Laboratoire Imag, Grenoble, 1980.

N. BALACHEFF, *Etude de l'élaboration d'explications par des élèves de troisième, à propos d'un problème combinatoire*, Laboratoire Imag, Grenoble, 1981.

E. BALIBAR, P. MACHEREY, Epistémologie, in *Encyclopaedia Universalis*, vol.6 : 370-373, Paris, 1980.

L. BARDIN, *L'analyse de contenu*, Presses Universitaires de France, Paris, 1977.

S. BARUK, *Echec et maths*, Seuil, Paris, 1973.

A. BERTE, Qu'y a-t-il de fondamental pour nos élèves d'Afrique, d'Europe ... ou d'ailleurs?, *Comptes-rendus de la 37e rencontre organisée par la C.I.E.A.E.M (Mathématiques pour tous à l'âge* *de l'ordinateur)*, Leiden, 4-10 août 1985, 43-59.

R. BKOUCHE, Euclide, Klein, Hilbert et les autres ..., *La rigueur et le calcul, Documents historiques et épistémologiques*, Groupe inter-I.R.E.M. d'épistémologie, Cedic, Paris, 1982.

E. BORTOLOTTI, L'oeuvre géométrique d'Evangeliste Torricelli, *Cahier N°17, Torricelli II du Séminaire d'épistémologie et d'histoire des sciences*, Université de Nice, sans date, aux environs de 1983.

H. J. M. BOS, Newton, Leibniz and the Leibnizian tradition, dans *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910; an Introductory History*, I. Grattan-Guinness, Duckworth, London, 1980.

N. BOURBAKI, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1960.

P. BOURDIEU, *Homo academicus*, Editions de Minuit, Paris, 1984.

P. BOURDIEU, J. CL. CHAMBOREDON, J. CL. PASSERON, *Le métier de sociologue*, 4e éd., Mouton, Paris, 1983.

E. BOUTRIAU, J. BOUTRIAU, J. LIEVENS, *Savoir et savoir-faire en Mathématiques, 6ème année, niveau B*, H. Dessain, Liège, 1985.

A. BOUVIER, *Didactique des mathématiques, Le dire et le faire*, Cedic-Nathan, Paris, 1986.

A. BOUVIER, M. GEORGE, sous la direction de F. Le Lionnais, *Dictionnaire des Mathématiques*, P.U.F., Paris, 1979.

C. BOYER, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover Publications, New York, 1949.

F. BRAUDEL, *Ecrits sur l'histoire*, Flammarion, Paris, 1969.

G. BROUSSEAU, *Problèmes de didactique des décimaux*, Rech. en Didactique des Mathématiques, Vol. 2.1. (1981), 37-128.

G. BROUSSEAU, *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, Rech. en Didactique des Mathématiques, Vol. 4.2. (1983), 165-198.

G. BROUSSEAU, *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Rech. en Didactique des Mathématiques, Vol.

7.2. (1986), 33-117.

F. CAJORI, *A History of Mathematical Notations, Vol. II*, The Open Court Publishing Company, Chigago, Illinois, 1929.

J. CARDINET, M. SCHMUTZ, *L'évaluation des recherches en pédagogie*, I.R.D.P., Neuchâtel, 1975.

E. CASTELNUOVO, L'objet et l'action dans l'enseignement de la géométrie intuitive, dans *L'enseignement des mathématiques, Tome II, Etude du matériel*, Delachaux et Niestlé, Paris, 1965.

A. CAUCHY, *Oeuvres complètes*, Publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences, 25 vol., Gauthier -Villars, Paris, 1882-1932.

B. CAVALIERI, *Exercitationes geometricae Sex*, Bononiae, Typis Iacobi Montij, 1647.

B. CAVALIERI, *Geometria degli indivisibili*, Tipografia Torinese S.p.A., Torino, 1966.

B. CHARLOT, *Les contenus non mathématiques dans l'enseignement des mathématiques*, Cahiers Galilée, n° 42, 1978, 5-9.

G. CHILOV, Analyse mathématique dans la classe des fonctions rationnelles, *Initiation aux mathématiques*, Editions MIR, Moscou, 1974.

A. C. CLAIRAUT, *Eléments de géométrie*, Gauthier-Villars, Paris, rééd. 1920.

J.-L. CLOSSET, *Le raisonnement séquentiel en électrocinétique*, thèse de Doctorat de 3ème cycle, Université Paris VII, 1983.

B. CORNU, *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*, thèse de doctorat de 3ème cycle, Université de Grenoble, 1983.

F. DE GANDT, Mathématiques et réalité physique au XVIIe siècle, dans *Penser les mathématiques*, Seuil, Paris, 1982.

F. DE GANDT, Les indivisibles de Torriceli, *Cahier n°17, Torricelli-II, du Séminaire d'Epistémologie et d'Histoire des Sciences*, Université de Nice, sans date, aux environs de 1983.

M. DEHN, *Über den Rauminhalt,* Mathematische Annalen, Vol. 55 (1902).

G. DE LANDSHEERE, *Introduction à la recherche en éducation,* G. Thone, Liège, 1976.

G. DE LANDSHEERE, *Dictionnaire de l'évaluation et de la recherche en éducation,* P.U.F., Paris, 1979.

J. DE LANGE, *Mathematics, insight and meaning,* Thèse de doctorat, Université d'Utrecht, 1987.

M. DEVELAY, *L'élève et/ou les connaissances scientifiques,* Ouvrage collectif sous la responsabilité de A. Giordan, Peter Lang, Berne, 1983.

CH. D'HALLUIN, D. POISSON, *Une stratégie d'enseignement des mathématiques : la mathématisation de situations intégrant l'informatique comme outil et mode de pensée,* thèse de doctorat, Lille, 1988.

J. DHOMBRES, *Nombre, mesure et continu, Epistémologie et histoire,* Cedic, Paris, 1978.

J. DHOMBRES, A. DAHAN-DALMEDICO, R. BKOUCHE, C. HOUZEL, M. GUILLENOT, *Mathématiques au fil des âges,* Gauthier-Villars, Bordas, Paris, 1987.

C. H. EDWARDS, *The historical development of the calculus,* Springer-Verlag, New York, 1979.

F. ENRIQUES, Questions d'ordre élémentaire, dans *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, éd. française, Tome III (1er vol.), Fondements de la géométrie,* F. Meyer éd., Gauthier-Villars, Paris, 1911.

EQUIPE MATHECRIT, *Ateliers 203, Calcul différentiel et intégral II,* Modulo editeur, Québec, 1980.

EUCLIDE, *Euclid's elements,* traduits par T. L. Heath, 3 vol., Dover, New York, 1956.

G. FOUREZ, *La science partisane,* Duculot, Gembloux, 1974.

G. FOUREZ, *Pour une éthique de l'enseignement des Sciences,* Vie ouvrière, Bruxelles, 1985.

G. FOUREZ, *La Construction des Sciences*, De Boeck, Bruxelles, 1988.

H. FREUDENTHAL, *Mathematics as an educational task*, D. Reidel, Dordrecht, 1973.

H. FREUDENTHAL, *Weeding and Sowing*, D. Reidel, Dordrecht, 1978.

H. FREUDENTHAL, *Didactical phenomenology of mathematical structures*, D. Reidel, Dordrecht, 1983.

GALILEO GALILEI, *Dialogues concerning two new sciences*, traduit par H. Crew et A. De Salvio, Dover Publications, New York, (sans date).

C. HAUCHART, N. ROUCHE, *Apprivoiser l'infini, un enseignement des débuts de l'analyse*, Ciaco, Louvain-la-Neuve, 1987.

D. HILBERT, *Foundations of geometry*, traduit par L. Unger, revu et complété par P. Bernays, The Open Court Publishing Company, La salle, Illinois, 2e éd., 1971.

E. HUSSERL, *Philosophie de l'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1972.

I.R.E.M. de Strasbourg, Mathématiques. Terminale D, I.R.E.M. de Srasbourg, 1986.

G. JAMES, R. C. JAMES, *Mathematics Dictionary*, D. Van Nostrand Company, Princeton, 1949.

B. JAULIN, Le modèle mathématique, in *Encyclopaedia Universalis*, vol. 11 : 121-122, Paris, 1980.

M. KLINE, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, 1972.

W. KOEHLER, *Psychologie de la forme*, Gallimard, Paris, 1964.

I. LAKATOS, *Preuves et réfutations, Essai sur la logique de la découverte mathématique*, traduit par N. Balacheff et J. M. Laborde, Hermann, Paris, 1984.

A. LALANDE, *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Libraire F. Alcan, Paris, 1932.

S. LORENT, R. LORENT, *Mathématique M 20*, A. De Boeck, Bruxelles, 1981.

S. LORENT, R. LORENT, *Mathématique M 63*, De Boeck-Wesmael, Bruxelles, 1988.

J. MAWHIN, *Présences des sommes de Riemann dans l'évolution du calcul intégral*, Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 4, 1983, 117-147.

J. M. NACHTERGAELE, M. VAN CUTSEM, A. LOUVIAUX, *Mathématique Moderne, cinquième livre AB*, Editions Erasme,Anvers, 1978.

J. M. NACHTERGAELE, M. VAN CUTSEM, A. LOUVIAUX, *Mathématique moderne, sixième livre AB*, Editions Erasme, Anvers, 1979.

NEWTON'S PRINCIPIA, Motte's translation revised by F. Cajori, Univ. of California Press, Berkeley, 1947.

K. M. PEDERSEN, Techniques of the calculus, 1630-1660, dans *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910; an Introductory History*, I. Grattan-Guinness, Duckworth, London, 1980.

M. J. PERRIN, R. DOUADY, Conceptions des élèves à propos d'aires de surfaces planes, *Actes du 1er colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Edns Pensée Sauvage, Grenoble, 1988.

J. PIAGET, Les courants de l'épistémologie scientifique contemporaine dans J. Piaget (éditeur), *Logique et connaissance scientifique*, Gallimard, Paris, 1967.

J. PIAGET, *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, Presses universitaires de France, Paris, 1972.

J. PIAGET, *Introduction à l'épistémologie génétique, tome 2, La pensée physique*, Presses universitaires de France, Paris, 1974.

J. PIAGET, B. INHELDER, *Le développement des quantités physiques chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, Paris, 1978.

J. QUINET, *cours élémentaire de mathématiques supérieures, tome 2, Fonctions usuelles*, Bordas, Paris, 1976.

P. RAYMOND, La philosophie dans tous ses états : De Platon à Hegel, dans *Philosophie et calcul de l'infini*, F. Maspero, Paris, 1976.

G. RICCO, G. VERGNAUD, A. ROUCHIER, *Représentation du volume et arithmétisation - entretiens individuels avec des élèves de 11 à 15 ans*, Rech. en Didactique des Mathématiques, Vol. 4.1.(1983), 27-70.

P. RICOEUR, Signe et sens, in *Encyclopaedia Universalis*, vol. 14 : 1011-1015, Paris, 1980.

A. ROBERT, *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*, thèse de doctorat d'état, Université Paris VII, 1982.

J. ROBINET, *Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction*, Rech. en Didactique des Mathématiques, vol. 4.3. (1983), 223-292.

J. ROGALSKI, *L'acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface)*, Rech. en Didactique des Mathématiques, Vol. 3.3. (1982), 343-396.

N. ROUCHE, *Point de vue sur les recherches relatives à l'apprentissage des mathématiques*, à paraître.

A. ROUCHIER, *Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs*, Rech. en Didactique des Mathématiques, Vol. 1.2. (1980), 225-275.

M. SCHNEIDER, *Les dysfonctionnements dans l'enseignement de l'analyse au cycle secondaire : repères et propositions*, Rapport interne F.N.D.P., 1983.

A. SIERPINSKA, *Représentation spontanée de la notion de limite chez des élèves polonais*, Laboratoire Imag 29 (1981-82), 78 107.

A. SIERPINSKA, *Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite*, Rech. en Didactique des Mathématiques, Vol. 6.1. (1985), 5-67.

A. SIERPINSKA, La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques, *Comptes-rendus de la 37e* *rencontre organisée par la C.I.E.A.E.M. (Mathématiques pour tous à l'âge de l'ordinateur)*, Leiden, 4-10 août 1985, 73-95.

D. J. STRUIK, *A Source book in mathematics 1200-1800*, Harvard University Press, Cambridge, M.A., 1969.

D. O. TALL, R. L. E. SCHWARTZENBERGER, *Conflicts in the learning of real numbers and limits*, Mathematics Teaching (1978), 44-49.

D. O. TALL, S. VINNER, *Concept Image and concept Definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 12 (1981), 151-169.

F. THOMAS-VAN DIEREN, N. ROUCHE, *Mesures, pavages et nombres irrationnels*, G. E. M., Louvain-la-Neuve, 1985.

G. THINES, Perception, in *Encyclopaedia Universalis*, vol.12 : 755-758, Paris, 1980.

O. TOEPLITZ, *The calculus, a genetic approach*, The University of Chigago Press, 1963. Première édition en allemand, Mayence, 1949.

J. ULLMO, Les concepts physiques, dans J. Piaget (éditeur), *Logique et connaissance scientifique*, Gallimard, Paris, 1967.

G. VERGNAUD, *Didactique et acquisition du concept de volume : introduction*, Rech. en Didactique des Mathématiques, Vol. 4.1. (1983), 6-25.

G. VERGNAUD, A. ROUCHIER, S. DESMOULIERES, C. LANDRE, P. MARTHE, G. RICCO, R. SAMURCAY, J. ROGALSKI, A. VIALA, *Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12 à 13 ans)*, Rech. en Didactique des Mathématiques, Vol. 4.1. (1983), 71-120.

P. VEYNE, *Comment on écrit l'histoire*, Seuil, Paris, 1979.

L. VIENNOT, *Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire*, Hermann, Paris, 1979.

M. WERTHEIMER, *Productive thinking*, Harper & Brothers, New York, 1945.