

# **Problèmes, situations-problèmes en mathématiques : un regard pluraliste**

paru dans *Mathématique et Pédagogie*, n°137, 13-48

Maggy Schneider,  
Facultés universitaires de Namur, Sedess de Liège

Thème récurrent dans les déclarations de principe sur l'enseignement des mathématiques, la résolution de problèmes est plus que jamais d'actualité dans la réforme des compétences. Dans la foulée, l'expression " situation-problème " envahit toutes les disciplines, après avoir constitué un emblème de renouveau dans l'enseignement des mathématiques depuis plus de vingt ans, sous l'impulsion, en Belgique, de Nicolas Rouche.

Le but de cet exposé est d'approfondir ces concepts de problème et de situation-problème au sein de l'enseignement des mathématiques, pour pouvoir en discriminer les enjeux didactiques respectifs, au delà d'une première distinction souvent faite entre problèmes d'introduction et problèmes d'application (cf. e.a. J.P. Cazzaro et al., 2001). Mon analyse prendra la forme d'une sorte de visite guidée de " lieux " divers, en particulier la psychologie cognitive et la didactique, où les regards portés sur les problèmes sont sensiblement différents. Cette confrontation permettra, me semble-t-il, de mieux discerner les contours de ce que ce qu'on pourrait appeler une situation-problème et d'en mieux appréhender le fonctionnement. De cette étude multidimensionnelle ressortira une manière d'articuler problèmes et situations-problèmes dans le cadre d'une évaluation tant formative que certificative.

## **1. De l'idée de difficulté aux obstacles psychologiques**

Un premier sentiment que l'on peut éprouver lorsqu'on pense à la résolution de problème est exprimé par Henri Poincaré en ces termes : " Ne dites pas : ce problème est difficile. Sinon, ce ne serait pas un problème ". Tel sentiment me semble souvent associé, dans les propos de personnes que j'ai interrogées, à l'idée que résoudre un problème, c'est penser à une solution qui ne s'impose pas d'elle-même, à laquelle on ne peut aboutir sans s'éloigner considérablement des sentiers battus et de ses propres habitudes mentales, une solution originale, peut-être " simpliste " lorsqu'on la considère a posteriori, mais à laquelle on ne songe pas d'instinct : l'œuf de Colomb en est une belle illustration.

Cette façon d'appréhender les problèmes, dans les deux sens du verbe, touche aux préoccupations des psychologues du comportement, ainsi nommés dans un traité de psychologie expérimentale des années 80 (P. Fraisse et al., 1980). Parmi eux, P. Oléron (1980) étudie l'impact des " attitudes et habitudes "

du sujet qui font obstacle à la résolution de problèmes. Par exemple, les restrictions mentales implicites que plusieurs expériences mettent à jour, telles celle réalisée par N.R.F. Maier à propos du problème des neuf points. Il s'agit de relier neuf points disposés en carré (Fig. 1) par quatre segments tracés sans lever le crayon du papier. La solution, illustrée par la Fig. 2, exige que l'on sorte des limites du carré. Or, de nombreuses personnes ne pensent pas à le faire, évoquant même à tort qu'on le leur a interdit, et éprouvent donc des difficultés à résoudre le problème. Un autre exemple classique est le problème des allumettes de K. Duncker qui consiste à construire quatre triangles

Fig. 1 Fig. 2

équilatéraux avec six allumettes sans chevauchement de celles-ci : la solution attendue est un tétraèdre, soit une figure de l'espace. Or, beaucoup de sujets se restreignent d'office au plan pour chercher la solution sans que personne ne leur ait imposé. Le blocage est tel qu'il peut subsister après une exploration combinatoire mettant en correspondance allumettes et triangles, ainsi qu'observé par J.P. Cazzaro et al. (2001). La question soulevée par ces exemples est bien celle des restrictions mentales implicites qui consistent à s'imaginer des interdits que l'énoncé du problème ne stipule pas.

Parmi les attitudes et habitudes de sujets confrontés à des problèmes, P. Oléron pointe également la propension à aborder et à traiter comme un vrai problème un problème-piège, c'est-à-dire une "attrape" qui a l'allure d'un problème comme l'énoncé suivant : Une échelle de corde longue de 10 pieds est accrochée au bordage d'un navire. Les échelons sont espacés d'un pied et l'échelon le plus bas touche la surface de la mer. La marée monte à la vitesse de six pouces par heure. Quand les trois premiers échelons seront-ils recouverts par l'eau ? Nous reviendrons plus loin sur ce phénomène pour en montrer une autre interprétation, liée au champ de la didactique et, par là, la relativité d'une lecture faite à l'intérieur d'un cadre de recherche trop peu systémique car n'incorporant pas d'aspects institutionnels.

Je termine la "visite" rapide chez les psychologues du comportement en évoquant les éventuels facteurs inhibiteurs ou facilitateurs d'un énoncé de problème ou de sa structure et leur possible impact sur sa résolution. Ainsi, P. Oléron incrimine la structure du carré des neuf points de N.R.F. Maier qui

induirait plus le tracé de lignes horizontales ou verticales que celui des lignes obliques nécessaires à sa résolution.

Dans le cadre de ce texte, j'utiliserai l'expression d'obstacle psychologique pour désigner de tels phénomènes d'abord par référence à la psychologie du comportement et puis aussi en raison d'une analogie naïve : lorsqu'on dit de quelqu'un qu'il a des problèmes psychologiques, c'est souvent pour dire qu'il en est " encombré ", c'est-à-dire que ses problèmes rétrécissent son champ de conscience tout comme le font les habitudes mentales. S'il me paraît important de pointer ici ce type d'obstacles, c'est parce que ces derniers font écran à d'autres perspectives d'utilisation des problèmes dans l'enseignement. On ne peut bien sûr exclure de tels obstacles au détour de certains contenus scolaires, comme nous le verrons ci-dessous, mais se polariser là-dessus pousse à croire que la résolution de problèmes ne peut être réservée qu'à quelques élèves particulièrement inventifs, capables de penser " à côté ". Cela empêche donc de concevoir que des organisations didactiques, prenant appui sur des résolutions de problèmes, puissent déboucher sur de réelles constructions de savoirs, à l'échelle d'une classe ordinaire. Et pourtant, un tel modèle d'enseignement peut fonctionner sous certaines conditions, comme développé à la section 3.

Il ne faudrait cependant pas négliger les obstacles psychologiques qui peuvent être renforcés en certaines circonstances. Les entreprises savent quel est le poids des habitudes mentales de leurs employés, elles qui, à l'occasion de " brainstorming ", soumettent l'un ou l'autre problème à des personnes étrangères à l'entreprise et donc " libres " de toute habitude dans la façon d'envisager les solutions. De même, dans le contexte scolaire, les élèves peuvent être confrontés à de tels obstacles. J'en donnerai deux exemples. Dans certains cas, tel que celui illustré par la Fig. 3, la construction de la section d'un cube par un plan dont on donne trois points suppose que l'on prolonge des segments en droites. Or, le contexte même du problème et sa solution font intervenir des figures géométriques limitées par essence : un polyèdre dont les faces sont des polygones et une solution polygonale composée de segments. La résolution suppose donc d'étendre ces figures au-delà de leurs limites, c'est-à-dire de passer outre une restriction induite par le problème lui-même. Et l'on peut observer précisément que certains futurs professeurs qui " sèchent " pour la première fois devant ce type de questions parviennent à résoudre le problème de manière autonome dès qu'on leur a spécifié que rien n'interdisait de prolonger des segments en droites.

Fig. 3

Un deuxième exemple a trait au caractère inhibiteur d'un énoncé de problème sur les intérêts composés où l'on explique aux élèves, qu'à la fin de l'année, on ajoute au capital les intérêts de l'année écoulée. Ainsi que l'ont observé C. Hauchart et N. Rouche (1987), cette formulation provoque chez eux un calcul à structure additive et retarde, voire bloque, la perception de la suite géométrique sous-jacente que seul un calcul à structure multiplicative peut faire apparaître.

## 2. Des " méthodes " de résolution de problèmes existentielles ?

Les questions soulevées supra, ainsi que d'autres, traitées par les psychologues du comportement, sont aujourd'hui relayées par les psychologues cognitivistes qui étudient " comment les humains perçoivent, comment ils dirigent leur attention, comment ils gèrent leurs interactions avec l'environnement, comment ils apprennent, comment ils comprennent, comment ils parviennent à réutiliser l'information qu'ils ont intégrée en mémoire à long terme, comment ils transfèrent leurs connaissances d'une situation à une autre ". (J. Tardif, 1992).

### 2.1. Différentes phases de la résolution d'un problème

En matière de résolution de problèmes, le champ d'investigation de la psychologie cognitive est large : cela va des stratégies de résolution de problèmes et de la métacognition à l'étude des conditions qui facilitent ou entravent le transfert des apprentissages d'un problème à un autre. En particulier, ce courant de recherches s'intéresse aux différentes phases de résolution de problèmes. Ainsi, A.H. Schoenfeld (1989) distingue six étapes importantes dans la résolution d'un problème, qu'il soit mathématique ou non : la lecture de l'énoncé, l'analyse du problème, l'exploration des solutions possibles, la planification d'une ou de plusieurs stratégies de solution, l'application de la ou des solutions, la vérification de la solution en regard des données initiales. Dans le cadre d'une réflexion sur la formation des concepts, A. Sfard (1991) identifie trois phases que l'on peut résumer très brièvement ainsi : **intériorisation** ou phase d'appropriation du problème, **condensation** ou phase d'éclaircissement, de maturation, **réification** ou phase de clarté. J.P. Cazzaro et al. (2001) exploitent ce découpage tant pour modéliser la résolution d'un problème que pour construire des séquences d'enseignement ou pour structurer des grilles d'évaluation de la

compétence de résolution de problèmes. Je reviendrai au fur et à mesure sur chacun de ces trois usages.

## **2.2. Stratégies spécifiques et stratégies générales**

En ce qui concerne les stratégies de résolution de problèmes, il y a lieu de distinguer stratégies spécifiques liées à un contenu disciplinaire et stratégies générales. On identifie facilement les premières en mathématiques : par exemple, la méthode de programmation linéaire ou celle des dérivées pour optimiser une grandeur variable. Les secondes sont indépendantes des contenus disciplinaires. Il s'agit, par exemple, du chaînage arrière, au sens de E. D. Gagné (1985), qui consiste à considérer d'abord, non l'état initial du problème comme dans le chaînage avant, mais le but désiré pour réduire progressivement l'écart entre ce but et l'état initial, ou encore le raisonnement par analogie sous-tendu par la question : " quel problème similaire ai-je déjà résolu ? Notons que le premier exemple s'exprime par des formes plus ou moins opérationnelles en mathématique, selon qu'on l'exploite pour prouver une identité trigonométrique ou pour établir le plan d'une démonstration géométrique. Quant au second, il nous ramène insensiblement aux stratégies spécifiques.

## **2.3. Comportement d'experts versus comportement de novices**

Au delà de la description de phases dans la résolution de problèmes ou du relevé de stratégies de résolution, je voudrais pointer ici les recherches qui mettent en évidence un comportement sensiblement différent entre les experts et les novices confrontés à un problème qui relève de la compétence des premiers. A.H. Schœnfeld (1989) observe que les uns et les autres exploitent différemment les étapes mentionnées plus haut : par exemple, les experts passent beaucoup plus de temps que les novices à analyser les données du problème. Cette observation, est à rapprocher d'une autre faite par plusieurs chercheurs (J. H. Larkin et al. 1980, M. T. H. Chi et al. 1982) à propos de problèmes de physique : les experts passent ce temps à situer le problème dans une classe bien identifiée, en se référant à une organisation fortement hiérarchisée de classes de problèmes qu'ils ont en mémoire.

## **2.4. De l'importance des stratégies spécifiques aux obstacles méthodologiques**

Somme toute, les faits décrits ci-dessus ne me paraissent pas étonnants. Le tout est de savoir ce qu'il faut en tirer comme conclusion sur l'apprentissage et sur l'enseignement : doit-on en conclure qu'une manière d'apprendre aux élèves à résoudre des problèmes est de leur apprendre à résoudre des classes successives et organisées de problèmes à l'intérieur des disciplines scolaires ?

Peut-on miser, comme certains programmes le prévoient, sur un enseignement de stratégies générales ? Après avoir fait écho de ce débat sensible au sein de la psychologie cognitive, J. Tardif (1992) souligne l'inefficacité des enseignements de stratégies générales, telle qu'éprouvée par plusieurs recherches, et rapporte la conclusion de plusieurs chercheurs : " l'enseignement de stratégies spécifiques de résolution de problèmes est une orientation qui rend le plus probable le transfert des apprentissages ". Il clôture son chapitre sur la résolution de problèmes et le transfert par une synthèse relative aux facteurs influant sur l'enseignement et l'apprentissage des stratégies de résolution de problèmes. Les deux premiers facteurs sont le développement d'une base de stratégies spécifiques et l'organisation de ces connaissances dans la mémoire à long terme et le troisième a trait à la métacognition, à savoir l'importance d'un enseignement explicite des stratégies et de leurs conditions d'utilisation.

Je ne conclurai pas personnellement à ce stade. Je reviendrai plus tard sur l'importance des classes de problèmes pour pouvoir croiser plusieurs approches de la question. Pour l'instant, je me contenterai de montrer, au moyen de deux exemples, l'importance d'un enseignement de stratégies spécifiques. Le premier exemple est le raisonnement par récurrence qui est, vis-à-vis d'une certaine classe de problèmes, une technique particulièrement opérationnelle en même temps que très inventive. Imaginez que l'on demande à des élèves de prouver l'écriture polynomiale de la somme des cubes des  $n$  premiers nombres entiers. S'ils ont appris la preuve par récurrence, cette tâche n'est plus pour eux un problème : elle se solde par un calcul numérique en ce qui concerne l'amorce de récurrence et une vérification algébrique pour ce qui est de la chaîne. Par ailleurs, on peut difficilement imaginer de " faire découvrir " aux élèves un tel mécanisme de preuve dont l'essence et la portée ont été mises en évidence par une réflexion de haut vol sur les fondements des mathématiques. Le deuxième exemple est la méthode des deux lieux exploitée pour résoudre des problèmes de constructions géométriques face auxquels beaucoup d'élèves se sentent complètement démunis. Le groupe COJEREM (1995) a montré qu'une telle méthode permet de structurer leur recherche et de les rendre relativement autonomes en mettant en évidence des questions-clés, des étapes incontournables qui ne sont pas liées à un seul problème, mais à toute une classe.

L'absence de telles méthodes dans le registre des connaissances spécifiques des élèves rend donc quasiment inabordable des classes entières de problèmes. J'utiliserai l'expression d'obstacles méthodologiques à la résolution de problèmes pour nommer ce manque de stratégies spécifiques. Par là, je voudrais souligner aussi que la modélisation d'une démarche de résolution d'un problème en phases d'intériorisation, de condensation et de réification me paraît bien insuffisante pour fournir à qui que ce soit une aide substantielle pour résoudre un problème. Si ce n'est - et c'est loin d'être négligeable - d'apprendre aux élèves à assumer un certain désarroi inéluctable au moment de la phase

d'appropriation du problème.

J'ajouterai encore que certaines stratégies spécifiques peuvent être l'embryon de démarches de pensée générales et productives. Ainsi, comme je l'ai développé dans M. Schneider (1997), les problèmes de constructions géométriques mobilisant la méthode des deux lieux habituent les élèves à trouver des objets, de quelque nature qu'ils soient, devant satisfaire plusieurs contraintes : l'idée est de faire jouer une contrainte à la fois pour déterminer non pas un objet mais toute une classe d'objets et de chercher ensuite l'objet inconnu à l'intersection des classes ainsi trouvées. Cette démarche peut être illustrée dans des contextes fort diversifiés. Par exemple, déterminer une fonction satisfaisant à des conditions particulières parmi toute une classe paramétrée de fonctions, les paramètres étant fixés en faisant intervenir les contraintes successivement. Ou encore, déterminer la signification d'un mot dans un texte de langue étrangère parmi une classe de significations possibles en recoupant d'autres considérations : la phrase dans laquelle ce mot est inséré, le thème du texte qui contient la phrase et même la portée de l'œuvre dont le texte est extrait.

### **3. Situations adidactiques comme modèles de situations-problèmes**

#### **3.1. Un enseignement et un apprentissage marqués du sceau de l'institution scolaire**

S'intéressant à la manière dont les humains raisonnent, ainsi que le dit J. Tardif (1992), la psychologie cognitive ne distingue nullement un humain-élève d'un humain rencontré dans la rue. La théorie anthropologique de Y. Chevallard (1992 et 1999) regarde au contraire les individus comme des êtres dont le comportement s'explique par leur assujettissement à une institution. En l'occurrence, l'école fait les enfants élèves pour reprendre l'expression d'A. Mercier (1992), ce qui n'est pas sans rappeler une plainte souvent formulée par les professeurs : les élèves sont scolaires. Mais plutôt que d'en faire un sujet de mécontentement, la didactique des mathématiques, telle qu'elle se définit dans une certaine école française, prend ce fait en considération autrement que dans le registre moral et s'intéresse à l'enseignement et à l'apprentissage de savoirs particuliers, les savoirs mathématiques, au sein de l'institution scolaire, c'est-à-dire sans négliger les dimensions institutionnelles de l'analyse. C'est ainsi que la didactique interprétera en termes de contrat didactique (concept sur lequel je reviendrai), la propension des élèves à tenter de résoudre des problèmes-pièges type "âge du capitaine" ou comme celui mentionné plus haut : les élèves s'attendent à ce que tout problème posé au sein de l'école ait une réponse et que cette réponse mobilise des opérations enseignées.

Plus généralement, les obstacles psychologiques apparaissent sous un jour nouveau à la lumière de la théorie anthropologique. Pensons à l'exemple des *brainstroming* : seraient-ils aussi indispensables si les personnes travaillant au sein d'une institution n'y étaient pas aussi " assujetties " ?

### 3.2. Dévoluer la construction des savoirs

C'est à l'intérieur de la problématique décrite ci-dessus qu'il convient de placer, me semble-t-il, une réflexion sur les situations-problèmes. Une incursion dans la théorie des situations didactiques de G. Brousseau (1998), à l'origine de ce courant de recherches en didactique, permet de le comprendre. Cette théorie constitue une grille de lecture des phénomènes d'enseignement, inspirée des théories constructivistes de l'apprentissage.

Commençons par décrire une situation extraite de cet ouvrage. Il s'agit de distinguer et de désigner 5 tas d'environ 200 feuilles de même format et de même couleur, les feuilles se différenciant par leur épaisseur seulement. L'instrument de mesure disponible (un pied à coulisse ou un double-décimètre) ne permet pas de mesurer l'épaisseur d'une quelconque de ces feuilles. On demande aux élèves d'imaginer un code qui permettrait à quelqu'un de reconnaître un tas de feuilles choisi parmi tous. Les codes sont éprouvés lors d'un jeu de communication : des équipes de 4 ou 5 enfants vont se séparer chacune en " émetteurs " et " récepteurs ". Les groupes d'émetteurs choisissent un tas de feuilles tandis que les groupes de récepteurs sont isolés derrière un rideau. Les premiers transmettent aux seconds un message qui doit leur permettre d'identifier le tas choisi. Les récepteurs disposent eux aussi des mêmes tas de feuilles et des mêmes instruments. Le professeur se contente de faire passer les messages dans un sens, les réponses dans l'autre et de constater avec les élèves les échecs et les réussites. Il les incite, au besoin en modifiant les équipes, à confronter les messages et à considérer que ce sont ces derniers plutôt que les élèves eux-mêmes qui sont " gagnants " ou " perdants ". Après une phase de découragement au cours de laquelle les élèves réalisent l'impossibilité de mesurer l'épaisseur d'une seule feuille de papier, certains suggèrent de prendre plusieurs feuilles à la fois et de mesurer l'épaisseur du tas prélevé : soit en choisissant au départ un nombre connu de feuilles dont ils mesurent l'épaisseur, soit en choisissant une épaisseur et en comptant le nombre de feuilles correspondantes, soit encore en misant sur le hasard. Ils réalisent ainsi qu'un code efficace doit comporter deux nombres dans un ordre précisé : par exemple, 60 pour le nombre de feuilles et 7 pour le nombre de millimètres mesurés. L'imprécision inhérente à l'expérience pousse les élèves à trouver des critères pour invalider certains messages et les achemine peu à peu d'une dialectique d'action vers une dialectique de formulation et de validation. Aux critiques personnelles : " tu as manqué de soin " et aux preuves pragmatiques : " tel type de message fonctionne " se substituent peu à peu des preuves



intellectuelles : " des tas composés d'un même nombre de feuilles de types différents ne peuvent conduire à de mêmes épaisseurs " ou " deux fois plus de feuilles pour un même tas ne peut que doubler l'épaisseur ". Sur base des contradictions relevées, le modèle d'action devient peu à peu explicite et fait l'objet d'une formulation : le couple (60, 7) est évidemment équivalent au couple (120, 14) et c'est là-dessus que le professeur tablera pour introduire in fine l'équivalence de couples, la représentation d'une classe d'équivalence par la fraction  $7/60$  comme notation conventionnelle et les rationnels en tant que mesures. Je reviendrai plus loin sur cette dernière phase.

Les dialectiques d'action, de formulation et de validation illustrées dans l'exemple ci-dessus cadrent ce que G. Brousseau appelle une **situation adidactique**. Ce dernier qualificatif renvoie à deux caractéristiques :

la situation adidactique comporte une question, un " problème " (au sens commun du terme) qui ne peuvent être résolus sans impliquer la construction d'un savoir, celui précisément visé par l'enseignement en cours; une situation adidactique est donc toujours spécifique d'un savoir donné;

la construction de ce savoir est " dévolue " à l'élève, le professeur se refusant à le transmettre et abdiquant, pour un temps, une part de son intention d'enseigner : d'où le " alpha privatif " qui débute le mot adidactique.

Dans l'exemple précédent, le professeur fait dévolution à l'élève de la mise au point d'un codage pour désigner un tas de feuilles parmi plusieurs. Il s'efface, se contentant de faciliter la réalisation matérielle des tâches ou les échanges entre élèves comme un " bon " animateur, au sens de la dynamique de groupes, s'en tient strictement à une directivité de procédure en évitant toute intervention de fond.

### 3.3. Le contrat didactique et le milieu

#### Le paradoxe de la dévolution, un " contrat " implicite

Le processus de dévolution est d'autant plus délicat qu'il s'inscrit dans une institution scolaire. Cela se traduit par un paradoxe identifié par G. Brousseau (1998) et ses conséquences : en substance, le maître cherche à faire construire un savoir par les élèves sans avoir à le leur présenter. Les élèves savent que le maître connaît ce savoir et cherchent à le lui faire dire, à deviner ses intentions, pour réaliser " à l'économie " le comportement souhaité par ce dernier. Il arrive, bien souvent, que le professeur souscrive à cette demande, vendant la mèche pour obtenir ce comportement à n'importe quel prix tout en faisant semblant de le reconnaître comme indice de l'apprentissage réalisé. Ce paradoxe est à l'origine du concept de **contrat didactique**, essentiellement implicite puisque l'objet de ce contrat est le savoir connu du maître seul. La dévolution propose un contrat en rupture par rapport au contrat didactique

classique selon lequel l'articulation entre l'enseignement et l'apprentissage est régulée par des règles implicites et perçues comme allant de soi, parmi lesquelles : le professeur explique la théorie et les exercices que l'élève doit savoir faire ; l'élève exécute ces exercices en imitant le professeur.

### **Un comportement négocié " à la baisse "**

L'exemple suivant, emprunté à C. Comiti et D. Grenier (1997) illustre les effets du contrat. Il s'agit d'un cours sur la racine carrée. L'objectif déclaré du professeur à l'adresse des expérimentateurs est " qu'on ait à notre disposition de nouveaux nombres ". Au cours de la leçon précédente, l'enseignant a révisé les propriétés des carrés et explicité la relation racine carrée/carré sur des exemples. Il espère ici faire formuler collectivement par le groupe-classe la définition de la racine carrée. Après bien des péripéties (dont nous ne parlerons pas ici dont une confusion entre carré et racine carrée partagée par plusieurs élèves), l'un d'eux exprime : " Un nombre que l'on a multiplié par lui-même pour obtenir Grand a ". Le professeur voit le parti qu'il peut tirer de cette intervention, mais le passé utilisé par l'élève l'embête. En effet, les fonctions " carré " et " racine carrée " étant réciproques, on trouve bien l'opération identique en les composant dans un ordre quelconque. Cependant le passé utilisé par l'élève induit un ordre qui l'empêche d'atteindre de nouveaux nombres puisqu'il n'obtiendra alors que des racines de carrés d'entiers ou de rationnels. Mais que peut dire le professeur sans déflorer lui-même l'existence de nouveaux nombres ? Il opte alors pour une argumentation qui n'a plus rien à voir avec le savoir concerné, soit l'esthétique de la formulation : " Un nombre que l'on a multiplié..., que l'on a multiplié..., cherche donc à formuler de manière élégante les choses. Multiplié, par lui-même, pour obtenir A. Qui nous propose autre chose ? Pourquoi est ce qu'il faut mettre au passé, là ? C'est indispensable de le mettre au passé ? " Et le même élève de répondre : " Au présent, Madame ! " au grand soulagement du professeur, du moins on l'imagine. Cet exemple illustre bien la difficulté du professeur à dévoluer véritablement à l'élève la formulation de la " racine carrée " : le contrat lié à cet objet de savoir ne va pas de soi. Le professeur se rabat alors sur une forme de contrat qui lui permet d'arriver à ses fins sans avoir à dire tout lui-même, mais sans vraiment faire réaliser aux élèves l'apprentissage visé. Le cas est classique.

### **Un milieu pour faire fonctionner la dévolution**

De tels effets de contrat sont d'autant plus à craindre que l'objet de la dévolution est gros, comme peut l'être la résolution d'un problème. D'où l'intérêt d'un milieu sur lequel peut s'appuyer le professeur pour dévoluer vraiment la situation sans biaiser en vendant finalement la mèche " au bas prix ". L'exemple décrit ci-dessous fait apparaître le logiciel " cabri-géomètre " comme milieu

d'apprentissage du concept de figure géométrique. Comme le développent C. Laborde et al. (1994), une figure géométrique, tel un parallélogramme, se distingue d'un dessin qui la représente par le fait que ce dernier ne rend pas compte du domaine de variation des éléments constitutifs de l'objet géométrique : seule une description discursive peut lever les ambiguïtés du dessin ou relever ses particularités. Une certaine confusion entre figure géométrique et dessin est parfois entretenue dans les manuels comme le montrent ces auteurs et la distinction entre les deux est loin d'être maîtrisée par les élèves du secondaire inférieur. C'est ainsi que ceux-ci décodent, en termes de dessin à tracer, une activité qui s'inscrit dans l'exploitation des figures géométriques. Une expérience observée par D. Grenier (1988) est, à cet égard, très significative. Un professeur demande à ses élèves de tracer l'axe de symétrie d'un trapèze isocèle en utilisant une règle non graduée et une équerre, attendant d'eux qu'ils se réfèrent à une figure géométrique dotée de propriétés sur lesquelles s'appuyer, en l'occurrence : les côtés opposés non parallèles du trapèze, segments homologues de la symétrie, se coupent sur l'axe cherché. Au lieu de répondre aux attentes du professeur, les élèves interprètent la tâche en termes de tracé de dessin qu'ils réalisent, soit au jugé, soit en détournant les instruments qu'ils transforment en instruments de mesure, par exemple, en se servant de la section de la règle comme unité de mesure. Pour les remettre sur le " droit chemin ", le professeur demande davantage de précision dans le tracé mais cette exigence ne conduit pas au comportement attendu, tant l'idée de précision est associée pour les élèves à celle de mesure. C. Laborde et al. (1994) commentent cette situation en se référant au paradoxe de la dévolution décrit plus haut : " Une situation voulue adidactique dans sa conception donne lieu à une réalisation en classe qui fonctionne essentiellement sur l'appel à deviner ce qu'attend l'enseignant ". Ils en concluent les limites des contraintes liées aux instruments, par exemple, le recours à une règle non graduée et proposent de pallier cette situation par la construction de " cabri-dessins ". Supposons par exemple, qu'il faille construire, par un point P, une droite parallèle à une droite d et décrivons une solution d'élève observée par les auteurs. L'élève crée le point de base A en utilisant une " primitive de dessin pur " du logiciel, puis le symétrique A' de A par rapport à P par le biais d'une " primitive géométrique " (Fig. 4). Pour lui, la droite AA' est la droite demandée et il croit avoir satisfait à la tâche car il ne réalise pas que le choix de A, au jugé pour que AP ait l'air parallèle à d, rend caduque au sens géométrique la construction faite. C'est là que le renvoi de l'élève au milieu cabri peut lui faire comprendre qu'il a réalisé un dessin et non une figure géométrique. En déplaçant le point P ou la droite d sur le logiciel, à l'invite du professeur, l'élève verra sa construction disqualifiée par le fait que la droite construite ne reste pas parallèle à d lors de ce déplacement (Fig. 5). Le logiciel fournissant cette rétroaction, le professeur peut vraiment dévoluer à l'élève des constructions de figures géométriques, pourvu qu'il exige, dans les consignes, que la construction résiste à de tels

déplacements.

Fig. 4

Fig. 5

De manière générale, le **milieu** est ce sur quoi peut s'appuyer le professeur pour dévoluer aux élèves une part du savoir visé. Les composantes de ce milieu sont multiples, tantôt plus cognitives, tantôt plus sociales. Un matériel utilisé, le cas échéant, tel le logiciel cabri-géomètre, le ou les problème(s) proposé(s) avec ses (leurs) caractéristiques en font partie. Mais le milieu est aussi fait des échanges entre élèves, comme clairement illustré par la situation des feuilles de papier, de même que de leurs expériences et acquis antérieurs. On ne peut cerner ce milieu, pour une situation déterminée, sans faire l'économie d'une analyse épistémologique et didactique. J'y reviendrai à la section 3.5.

### **Modèle théorique des situations adidactiques, idéologie des situations-problèmes**

Au terme des sections 3.1 à 3.3., je voudrais prendre position. Il me semble que les concepts de situation adidactique, de contrat et de milieu cadrent un fonctionnement possible de ce que j'ai envie d'appeler les situations-problèmes, étant consciente d'utiliser ce mot d'une manière plus précise que son usage habituel. Comme A. Robert (sans date), je ressens comme une ironie du sort le fait que l'expression situation-problème soit absente de la théorie des situations didactiques de G. Brousseau. Cette dernière en effet procure des outils d'analyse qui permettent au professeur de savoir si le comportement de ses élèves relève plus d'effets de contrat que d'interactions avec la situation proposée. C'est grâce au concept de contrat didactique, me semble-t-il, que le modèle des situations adidactiques est un vrai modèle théorique au sens de K. Popper (1973), c'est-à-dire un modèle falsifiable pour lequel on peut imaginer une situation où il est mis en défaut. Effectivement, c'est l'analyse du contrat qui permet de déterminer si les conditions d'enseignement et d'apprentissage sont bien celles des situations adidactiques. C'est pour cela d'ailleurs que le contrat didactique est un outil pertinent pour analyser des leçons " ordinaires " qui échappent à ce modèle, comme le montre l'exemple de la racine carrée.

Cela dit, la construction de situations didactiques ne va pas de soi, aux dires des chercheurs qui s'y sont attelés, surtout en ce qui concerne des concepts plus unificateurs, tel que celui de limite d'une fonction (cf. e.a. M. Legrand, 1997 et M. Schneider, 2001). Et à vouloir à tout prix enseigner dans ce cadre, on se contente trop souvent de situations qui ne peuvent fonctionner sans effets de contrat au risque de s'éloigner sensiblement du but cherché : organiser le face à face de l'élève avec le savoir, but qu'un exposé permet d'atteindre parfois mieux, pourvu qu'il comporte des aspects épistémologiques. C'est pourquoi, la "sacralisation" des situations-problèmes, la transformation de théories constructivistes en idéologie ne me paraissent pas sans danger, si l'on n'outille pas les professeurs de concepts de didactique.

### 3.4. Dépersonnaliser et décontextualiser les savoirs en vue de les institutionnaliser

A la dévolution fait pendant le processus d'institutionnalisation par lequel " Quelqu'un d'extérieur vient pointer les activités de l'élève et identifie celles qui ont un intérêt, un statut culturel " (G. Brousseau, 1998). En effet, Les situations didactiques doivent permettre aux élèves de réaliser des apprentissages sans apport extérieur de connaissances, le rôle du professeur se réduisant pratiquement à des actes logistiques . Il incombe cependant à ce dernier la conception ou, à tout le moins, le choix de la situation didactique susceptible de provoquer l'apprentissage souhaité. Dans cette tâche, il joue le rôle d'intermédiaire entre les élèves et le savoir qu'il doit enseigner sur mandat de l'institution scolaire et, à travers elle, de la société. Aux yeux des élèves, il apparaît comme le seul garant pouvant attester que l'apprentissage visé est bien réalisé et que, par conséquent, l'enseignement a été effectif. Lui seul peut fournir cette confirmation, les élèves ignorant le but qu'il leur est assigné, ne fût-ce qu'à cause des options didactiques prises. Les processus de dévolution et d'institutionnalisation apparaissent donc comme deux démarches symétriques qui forment ensemble une boucle partant des savoirs pour y revenir. Par le processus de dévolution, le professeur aménage les savoirs pour que leur construction soit à portée des élèves; par le processus d'institutionnalisation, il reconnaît certaines des connaissances engagées par les élèves comme des savoirs reconnus utiles pour la société.

Une bonne articulation des processus de dévolution et d'institutionnalisation suppose non seulement des apports d'information de la part du professeur mais aussi des " **mécanismes** " de **dépersonnalisation et de décontextualisation** chez l'élève que nous illustrons ci-dessous à travers l'exemple de la situation des feuilles de papier. Souvenons-nous que, pour tester les codages, les élèves sont mis en équipes : émetteurs d'un côté, récepteurs de l'autre. Ces équipes changent d'un moment à l'autre, ce qui empêche de déterminer des gagnants et des perdants. Par contre, le jeu de communication permet de déclarer quelles sont les stratégies gagnantes, c'est-à-dire les codages efficaces qui permettent aux récepteurs de déterminer le tas de feuilles choisi par les émetteurs. Ce ne sont donc pas les performances des individus qui sont sur la sellette, mais les connaissances elles-mêmes, ainsi " dépersonnalisées ".

Ce jeu de communication débouche sur l'identification de couples équivalents, la relation d'équivalence étant mise en évidence par les messages incohérents qui la transgressent. Chaque classe d'équivalence définit un rationnel qui correspond à la mesure d'une feuille de papier. Mais ce changement de regard est un apport du professeur qui " transforme " en savoirs institutionnalisés les connaissances des élèves en précisant le vocabulaire et les notations conventionnellement associés, notamment, l'écriture d'une fraction.

Pour institutionnaliser les rationnels en tant que mesures, le professeur doit pouvoir les dégager de situations diverses. Il le fait ici en les faisant travailler par les élèves comme mesures d'autres grandeurs dans des situations de communication assez semblables à celles des feuilles de papier : des émetteurs doivent désigner à l'adresse de récepteurs des clous choisis parmi des tas de clous de poids différents, des récipients choisis parmi des verres de diverses capacités, des baguettes prises parmi plusieurs de longueurs différentes. A chaque fois, l'objet unité est suffisamment grand par rapport aux mesures des objets à désigner pour que les élèves soient obligés de prendre plusieurs objets de la même sorte et de convertir à terme leur mode de désignation en mesure fractionnaire. Le professeur table alors sur une "décontextualisation" qui permettra à l'élève de dégager les mesures fractionnaires des situations rencontrées pour les percevoir comme des mesures d'objets quelconques rendues nécessaires parce que l'étalon de mesure est plus grand que les objets à mesurer.

### **3.5. La nécessité d'une analyse épistémologique et didactique**

#### **Une variété épistémologique ...**

Construire des situations adidactiques n'est pas chose aisée, comme déjà dit plus haut. D'autant, qu'à chaque savoir, est associé plusieurs sens, plusieurs emplois qui nécessitent, chacun, de faire l'objet de situations adidactiques différentes. Une analyse épistémologique a priori, confortée ou infirmée par une expérimentation sur le terrain, se révèle ici nécessaire. Ainsi, la situation des feuilles de papier fait partie d'une vaste ingénierie didactique relative aux rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire (G. et N. Brousseau, 1987). Si cette ingénierie est aussi vaste, c'est que leurs auteurs estiment que le sens de ces nombres et de leur représentation décimale est a priori multiple et fonction de la situation dans laquelle ils sont mobilisés. Nous n'en donnons ici qu'un aperçu très partiel. La situation des feuilles de papier conduit, on l'a vu, à une construction des rationnels qui s'appuie sur des équivalences de couples. Pour leur donner le statut de nombres, on les implique dans des problèmes d'épaisseur qui supposent des opérations : somme, différence, produit et division par un entier. Ensuite, comme dit plus haut, d'autres problèmes analogues, avec des clous, des verres et des bandelettes les font apparaître comme mesures incontournables dès que les unités de référence sont plus grandes que les objets à mesurer. A ce stade, le produit de deux rationnels n'est pas étudié, n'ayant pas de signification dans le contexte proposé. Suit une construction des décimaux dans un processus adidactique qui consiste, selon des modalités diverses et que nous ne précisons pas ici, à localiser des fractions dans des intervalles de plus en plus petits. Inspirées par l'usage de la règle, les fractions décimales sont privilégiées par les élèves comme bornes d'intervalles en raison de facilités de calcul et de repérage. Les nombres décimaux sont alors présentés comme une

réécriture commode de ces fractions, un " ostensif " qui se prête aux calculs. L'ingénierie comporte également l'étude de la similitude et des applications linéaires, par le biais, entre autres, d'un problème d'agrandissement d'un puzzle. Dans ce contexte, le produit de deux rationnels (éventuellement sous forme décimale) prend deux sens distincts : image d'une mesure rationnelle par un opérateur rationnel d'agrandissement ou de réduction, rationnel associé à une application linéaire composée de deux autres. Le sens du produit-mesure (par exemple, l'aire d'un rectangle aux dimensions rationnelles) doit être géré dans un autre contexte. De même, la division prend-elle, dans cette ingénierie didactique des sens variés dépassant l'idée de partage, Diviser, c'est bien sûr partager, encore que les conditions de partage peuvent considérablement différer d'une situation à l'autre (par exemple, la quantité à partager peut être répartie d'emblée en lots inégaux). Mais diviser, c'est aussi trouver une commune mesure à deux grandeurs, c'est trouver le terme manquant d'un produit (par exemple, trouver le prix d'une chemise sachant que 12 chemises identiques ont coûté 1020 francs), c'est trouver la réciproque d'une application linéaire multiplicative ...

### **... qui suppose des traitements didactiques diversifiés**

J'utiliserai l'expression " variété épistémologique " pour désigner cette multiplicité des sens associés à un concept, illustrée ci-dessus. Cette variété est telle, la plupart du temps, que la modélisation d'une séquence d'apprentissage d'un concept au moyen des trois étapes d'A. Sfard (1991) ne peut suffire et doit être complétée d'une analyse épistémologique. Prenons l'exemple de la modélisation du concept de limite d'une suite numérique, telle que développée par J.P. Cazzaro et al. (2001). Pour ces auteurs, l'étape d'intériorisation consiste à faire explorer le problème du flocon de Von Koch. D'autres exemples s'y ajoutent lors de la phase de condensation : exemples géométriques ou cinématiques, comme la carpe de Sierpinski et problèmes numériques comme l'écriture décimale des nombres rationnels. L'étape de réification est faite d'une synthèse et de la préparation de prolongements ultérieurs vers l'étude des limites de fonctions. Mais, pourquoi de tels exemples, en quoi les contextes particuliers choisis poussent-ils les élèves à conceptualiser, pourquoi commencer par le cas de limites de suites, les différents cas de limites de fonctions soulèvent-ils des difficultés spécifiques ? De telles questions ne semblent pas prises en compte ici. Et pourtant, elles permettent de prévoir les réactions des élèves observées par ces auteurs et de les interpréter a posteriori. Voici, de manière très allusive, quelques éléments propres à structurer une telle réflexion. I. Bloch (2000) analyse en quelles circonstances l'exemple du flocon de Von Koch favorise une conceptualisation de la limite chez les élèves. C. Hauchart et N. Rouche (1987) montrent, au cas par cas, comment le contexte des problèmes permet de faire travailler des résultats relatifs au concept de limite de suite, par exemple, sur quel type de situation les élèves apprennent à rectifier l'intuition fautive selon laquelle une suite positive



décroissante devrait tendre vers 0. Les auteurs du projet AHA (1999) analysent en quoi le comportement asymptotique d'une suite est plus naturel à concevoir que d'autres cas de limites de fonctions. Quant à moi (M. Schneider, 1988 à 1992), je mets en évidence que le concept de limite soulève des difficultés spécifiques lorsqu'il détermine la valeur exacte, en la définissant, de grandeurs telles que vitesses instantanées ou aires curvilignes. Pour ces raisons, il me semble que le concept de limite ne peut s'abstraire d'exemples divers, si riches et diversifiés soient-ils, sans traitements didactiques tellement spécifiques des situations proposées qu'ils ne peuvent se rabattre sur un cheminement structuré par les phases d'intériorisation, de condensation et de réification.

De même, l'apprentissage du concept d'intégrale définie comporte des aspects fort divers qui ne peuvent se réduire au schéma qu'en proposent G. Noël et al. (2001) en s'inspirant des mêmes étapes d'A. Sfard. En effet, la standardisation au moyen d'aires sous une courbe de problèmes divers de grandeurs : aires, volumes, travail d'une force, ... ainsi que l'approximation d'aires sous une courbe au moyen de sommes d'aires de rectangles ne vont pas de soi. Leur traduction (ou la tentative) en termes de situations adidactiques suppose toute une réflexion épistémologique et didactique qui prévoit les difficultés des élèves, les analyse et les prend en compte si l'on prétend leur dévoluer ces savoirs (sur des éléments d'une telle réflexion, voir M. Schneider, 1988 et projet AHA, 1999).

### **Un contexte aux antipodes des obstacles psychologiques et méthodologiques ; des situations qui font des élèves des analystes de savoirs plus que des résolveurs de problèmes**

L'analyse épistémologique et didactique comporte également l'étude des conditions d'émergence dans la classe des différents savoirs visés, Dans l'exemple détaillé plus haut, le fait de faire travailler les élèves sur des feuilles de papier dont l'épaisseur ne peut être mesurée avec l'instrument disponible joue un rôle déterminant : c'est en misant sur ce " dysfonctionnement " qu'on les pousse les élèves à dépasser le système des nombres entiers comme seul référent de mesures. On est loin ici des problèmes pensés avec le regard des obstacles psychologiques ou des obstacles méthodologiques. On n'attend pas des élèves qu'ils résolvent un problème en s'écartant des sentiers battus ou en exploitant des stratégies spécifiques ou générales de résolution de problèmes. L'intention est d'obliger la classe à tester des messages faits de deux nombres entiers de manière à faire apparaître une connaissance appropriée : l'équivalence de couples garantit la désignation d'un seul tas de feuilles. Pour cela, il faut avoir l'idée de prendre plusieurs feuilles à la fois pour les mesurer, mais le contexte même y pousse, puisqu'il n'autorise aucune autre stratégie. Et quand bien même, aucun élève ne la suggérerait, le professeur peut le faire lui-même sans empêcher que le jeu de communication, par sa structure tant que par son objet,

fasse éprouver aux élèves l'ambiguïté de certains messages et par là la nécessité de la relation d'équivalence. Il s'agit donc de favoriser entre les élèves une sorte de débat scientifique auquel une certaine réalité donne prise. Tous les élèves n'y jouent pas le même rôle. Ce sont donc les caractéristiques du problème proposé (ses variables didactiques diraient certains) qui mènent la classe vers le savoir visé.

Pour résumer cette perspective, je dirais que, dans la théorie des situations didactiques de G. Brousseau (1998), l'élève n'est pas un résolveur de problèmes mais, avec ses pairs, un analyste de savoirs. En insistant bien sûr sur le fait que c'est la situation, avec ses caractéristiques didactiques, qui font des élèves de tels constructeurs. Dans un tel cadre théorique, le problème des allumettes de K. Duncker par exemple, tel que formulé plus haut, n'a pas de sens. Il faudrait pouvoir l'inscrire dans un milieu qui lui en donne, tel que le milieu de la construction de modèles spatiaux au moyen d'appareils articulés. Mais sans doute, d'aucuns déploreraient alors la perte prévisible de l'obstacle psychologique sous-jacent.

### **Un contexte que peut inspirer l'histoire des mathématiques, un " concret " relatif**

Un certain regard sur l'histoire des mathématiques peut inspirer des contextes porteurs de situations didactiques, pourvu que ce regard soit confronté à des expérimentations en classe. Prenons l'exemple de la dérivée. Trois problématiques sont à l'origine de ce concept dans l'histoire des mathématiques : la détermination de tangentes, le calcul des extrémés et celui des vitesses. Comme j'ai pu l'observer (M. Schneider, 1988 et 1991a), des problèmes s'inscrivant dans les deux premiers contextes ne sont pas forcément pensés par les élèves en termes de taux de variation et a fortiori de dérivée. Ils ont de la tangente une conception statique et globale, héritée du cas du cercle : une tangente est une droite qui ne rencontre globalement la courbe qu'en un seul point. Quant aux extrémés, ils ne les perçoivent pas volontiers, ainsi qu'on peut l'imaginer chez Fermat, comme des points aux environs desquels le taux de variation est faible. Reste le contexte des vitesses ... pourvu que les élèves soient confrontés à une vitesse qu'ils ressentent variable d'un point de vue intuitif. Ces considérations nous amènent à certains problèmes de vitesses liées tel celui qui consiste à s'interroger sur la vitesse de variation de l'aire d'un disque dont le rayon croît à vitesse constante. (sur l'analyse de tels problèmes, cf. M. Schneider, 1988 et 1992 et AHA, 1999).

Mais, diront certains, un tel problème est-il suffisamment concret ? On peut certes le " contextualiser ", ainsi que fait dans AHA, en évoquant une onde circulaire dont le front progresse à vitesse constante. Cependant, il s'agit là d'un habillage relativement factice dans la mesure où les physiciens ne

s'intéressent pas aux ondes pour répondre à ce genre de questions. Cet exemple m'amène à incriminer une volonté par trop farouche de vouloir partir à tout prix de questions " concrètes ", entendez par là de questions issues de la vie courante ou d'autres disciplines, au prix soit d'une certaine dénaturaison du problème, soit d'un enrobage qui risque de parasiter la réflexion des élèves. Tant de questions simples, d'apparence anodine, sont à l'origine de grandes théories mathématiques tout en ayant a priori un sens pour les élèves. Tel est le cas du calcul d'une aire délimitée partiellement ou totalement par une courbe. Point n'est besoin d'en faire le profil d'une piste de skateboard à repeindre pour y intéresser les élèves. Notons qu'il n'est pas difficile d'insérer un tel calcul d'aire sous une courbe dans un contexte concret : c'est l'espace parcouru par un mobile si la courbe précise sa vitesse et c'est l'énergie consommée par une ville dans le cas où la courbe donne la puissance électrique. Cependant, comme observé par M. Schneider (1988) et J.P. Cassaro et al. (2001), le calcul de telles grandeurs n'est pas facilement interprété par les élèves en termes d'aire sous une courbe.

### **3.6. Des connaissances-obstacles aux obstacles épistémologiques comme opportunités inéluctables d'exploitation de situations-problèmes**

S'inspirant de l'épistémologie de G. Bachelard (1980) sur la construction des sciences, G. Brousseau (1998) défend l'idée que des savoirs nouveaux sont construits par l'élève contre des savoirs anciens. Un exemple significatif est fourni, me semble-t-il, par les procédures additives observées, d'une part, par B. Inhelder et al. (1970) et, d'autre part, par G. Brousseau chez des enfants qui tentent d'agrandir une figure géométrique. Par exemple, agrandir un puzzle de telle sorte qu'un de ses côtés qui mesure 4 cm en mesure 7 sur la version agrandie. Une procédure additive observée par G. Brousseau est la suivante : les enfants ajoutent 3 cm, soit la différence entre 7 et 4, à chacune des dimensions de chaque morceau. Comme relaté par A. Berté (1993), certains d'entre eux, devant l'impossibilité de recoller les morceaux obtenus, corrigent cette procédure en ajoutant à chaque dimension les  $\frac{3}{4}$  de celle-ci, c'est-à-dire en relativisant la différence 3 grâce au rapport de  $\frac{1}{4}$  qui ramène chaque dimension à l'unité. La situation d'agrandissement du puzzle les achemine ainsi peu à peu vers un calcul de structure multiplicative.

Quelle est l'origine de tels savoirs anciens qui font obstacle aux nouveaux savoirs à acquérir ? G. Brousseau (Ib.) en distingue trois. " **Les obstacles ontogéniques** sont ceux qui surviennent du fait des limitations neurophysiologiques e.a. du sujet à un moment donné de son développement : il développe des connaissances appropriées à ses moyens et à ses buts à cet âge-là ", dit cet auteur. En cela, il se réfère aux travaux de la psychologie génétique, en particulier à ceux de J. Piaget et de ses collaborateurs qui ont interprété les acquisitions intellectuelles des enfants en termes de stades de développement.

Je crois que les procédures additives dont il est question ci-dessus et d'autres sont de cet ordre, étant interprétées par J. Piaget lui-même comme précédant la formation du stade des opérations formelles qui se met en place entre 11-12 ans et 14-15 ans et dont le schème de proportionnalité constitue une des acquisitions caractéristiques.

**Les obstacles d'origine didactique et d'origine épistémologique** sont parents, d'après G. Brousseau. Les premiers " sont ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif ". Ainsi en serait-il de certaines erreurs relatives aux décimaux telles que  $1,3 + 2,9 = 3,12$ . Celles-ci, qui consistent à manipuler les décimaux comme des couples de naturels, seraient favorisées par une certaine présentation scolaire qui attache les décimaux à des mesures. Elle les identifie ainsi, et c'est là que le bât blesse, à des naturels munis d'une virgule qui expriment la mesure d'une grandeur dans une unité bien choisie : ainsi, 3,25 mètre, c'est 325 cm exprimé en mètres. Quant aux obstacles épistémologiques, importés des travaux de Bachelard en didactique des mathématiques, ils semblent incontournables, inhérents aux sciences elles-mêmes dont la construction, d'après G. Bachelard (1980), ne peut faire l'économie de tels obstacles : " [...] c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes, comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain : c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons des obstacles épistémologiques. " A titre d'exemple, je proposerais un obstacle dont j'ai argumenté ailleurs (M. Schneider, 1988 et 1991b) le caractère épistémologique : l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions. Il se manifeste par des glissements mentaux inconscients et indus du monde des grandeurs à celui de leurs nombres-mesures lorsque sont en jeu des grandeurs de dimensions distinctes. Un tel glissement est à l'origine d'une conviction partagée par plusieurs personnes : les volumes de deux solides de révolution sont entre eux comme les aires des surfaces qui les engendrent par rotation. Cette intuition et d'autres relevant du même obstacle ne semblent liées ni à l'âge des individus, ni même, pour certaines, à leur formation en mathématiques ; elles s'observent dans l'histoire des mathématiques ; elles sont récurrentes et persistantes : elles résistent aux mises en garde et ressurgissent sans crier gare. Elles sont de plus liées, ainsi que montré dans M. Schneider (à paraître), à d'autres réactions multiples, indices d'une vision trop exclusivement positiviste des sciences : conception géométrique de la limite, réserves exprimées vis-à-vis du concept de vitesse instantanée.

C'est ce caractère inextricable des obstacles épistémologiques, illustré sur l'exemple ci-dessus, qui les rend, à mon avis, incontournables et qui en fait de

belles opportunités d'emploi des situations-problèmes. En effet, la prise de conscience de tels obstacles est essentiellement personnelle. S'il y a quelque chose qui doit être dévolu aux élèves, c'est donc bien une telle prise de conscience sans laquelle les savoirs nouveaux ne peuvent être que juxtaposés dans leur mental, aux côtés de savoirs anciens qui leur font obstacle sans vraiment remettre ces derniers en question.

### **3.7. Des savoirs mis en texte, la progression du temps didactique**

Comme dit plus haut, la théorie anthropologique du didactique envisage l'acte d'enseignement à travers un prisme résolument institutionnel. Mais l'on ne peut cerner l'assujettissement à l'institution scolaire des principaux acteurs de l'enseignement sans tenir compte d'une réalité dont on perçoit mal les enjeux tant qu'on la considère comme allant de soi, à savoir que le propre des mathématiques enseignées à l'école est d'être figée dans des textes : les fameux programmes que tout professeur se doit d'honorer. Des phénomènes multiples, liés à cette réalité, sont étudiés en didactique. A commencer par les chances de viabilité d'un contenu d'enseignement dans les programmes : ainsi, un sujet isolé, qui ne peut s'accrocher à une organisation plus vaste a peu de chances de subsister, comme l'a montré L. Rajoson (1988). J'y reviens ci-dessous. Mais, au delà des programmes, Y. Chevallard et al. (1987), Y. Chevallard (1991) et A. Mercier (1992, 1999) montrent l'importance du temps didactique, c'est-à-dire de la progression dans ce texte du savoir. Cette importance est telle que le professeur se définit non seulement comme quelqu'un qui sait plus que l'élève, mais plus encore comme " quelqu'un qui sait avant " ce dernier. C'est une manière de souligner qu'a priori seul le professeur peut faire avancer le temps didactique en passant d'un sujet à l'autre ou le suspendre par des rappels ou des séances d'exercices répétitifs. Qui plus est, cela détermine le partage des responsabilités entre professeur et élèves : les véritables leviers de commande de l'enseignement sont aux mains de celui qui a le pouvoir de faire progresser le temps didactique.

De ceci découle que le processus de dévolution d'un problème ne peut être réel sans déboucher sur une progression effective dans le texte du savoir. Le problème dévolu doit donc apporter un écot non négligeable à la théorie mathématique en cours de construction pour qu'en prenant le problème à son compte avec ses pairs, l'élève puisse de lui-même faire progresser le temps didactique. Qui plus est, le pouvoir des élèves sur le temps didactique est d'autant plus grand que le professeur leur dévolue une responsabilité dans l'institutionnalisation des savoirs construits. C'est ce que réalise G. Sensevy (1996) par le biais d'un " journal des fractions ", texte émanant des élèves et témoignant de leur avancée dans l'exploration des propriétés des fractions.

Enfin, tout porte à privilégier les organisations globales et hiérarchisées dans lesquelles trouvent à se greffer les savoirs dévolus. Rapprochant les recherches de L. Rajoson (1988) de celles de J. Centeno (G. Brousseau et J. Centeno, 1992) sur la mémoire didactique, A. Mercier (1999) montre le double intérêt des problèmes qui s'intègrent dans une structure plus vaste : " Cet auteur [Rajoson] montre qu'un objet d'enseignement doit, au delà du texte dans lequel il s'insère, faire partie d'une organisation d'objets beaucoup plus vaste que le simple problème qu'il résout ou la question qu'il aide à poser précisément ; il nomme une telle organisation " un tout-structuré ", tandis que Centeno montre l'intérêt didactique d'une telle " structure ", qui est d'aider le professeur à créer une mémoire didactique forte en s'appuyant sur le système des objets du tout structuré, qui offrent de nombreuses occasions de s'appeler l'un l'autre ". Partant de là, A. Mercier invite les chercheurs qui observent l'acte d'enseignement à s'émanciper " des formes de questionnement issues de l'observation psychologique de la résolution de problèmes pour étudier, non plus la résolution d'UN problème, mais l'enseignement de suites de séquences : les passages d'une séquence à l'autre, les rappels, les interpellations d'élèves particuliers faisant référence à leur activité passée, les débats portant sur la reconstruction des savoirs antérieurement connus (ou l'absence de tels gestes d'enseignement) sont alors les indices de l'existence (ou de l'inexistence) de formes fortes d'adidacticité et de leur gestion explicite par le professeur ". Me plaçant du point de vue du professeur et de son enseignement, j'en tirerais volontiers une hypothèse d'action qu'il me paraît intéressant de mettre à l'épreuve : organiser son enseignement autour de classes de problèmes qui mobilisent tout un pan de théorie et penser la dévolution au niveau de chacune de ces classes. Je reviens sur une telle proposition à la section 4.3.

#### **4. Comment articuler résolution de problèmes et situations-problèmes de l'évaluation formative à l'évaluation certificative ?**

##### **4.1. Une compétence globale par excellence : la résolution de problèmes, la question de son articulation avec les situations-problèmes**

Comme dit dans l'introduction, si la résolution de problèmes est tant à l'ordre du jour dans l'enseignement de toutes les disciplines, c'est sous l'impulsion de la réforme des compétences. L'intention est d'articuler la formation et de l'évaluer sur base de la maîtrise de compétences choisies pour leur caractère intégrateur de savoirs et savoirs-faire multiples. De ce point de vue, la résolution de problèmes apparaît comme une compétence globale particulièrement intéressante parce qu'elle en mobilise bien d'autres. C'est au point que les mathématiques se voient disputer par les autres disciplines scolaires cette compétence royale qui pouvait apparaître jadis, à tort ou à raison, presque comme leur monopole. Cela n'empêche certains de souligner avec force

que la résolution de problèmes est une compétence globale qui trouve à s'exercer de manière particulièrement propice au sein du cours de mathématiques. C'est ce qu'illustrent e.a. J.P. Cassaro et al. (2001) au moyen d'une moisson d'exemples particulièrement riche. A l'appui de cette thèse, j'évoquerais, si besoin est, qu'une des caractéristiques prégnantes des mathématiques est d'avoir été constituées, au cours des siècles, comme méthodes de résolution de problèmes. Pensons, à titre d'illustration, au seul problème de l'évaluation des grandeurs et aux théories qui sont nées de là : des rapports de grandeurs aux mesures fractionnaires, du théorème de Pythagore et des grandeurs incommensurables aux nombres irrationnels, de l'évaluation des grandeurs inaccessibles à la trigonométrie, des aires curvilignes au calcul intégral, ...

Mais quel rôle jouent les situations-problèmes dans cette finalité du cours de mathématique jugée si importante, à savoir apprendre aux élèves à résoudre des problèmes ? La réponse à cette question ne va pas de soi tant sont différents, bien que non disjoints, les univers dans lesquels s'inscrivent les problèmes tels qu'on les perçoit en psychologie cognitive, d'une part, et les situations-problèmes issues de la didactique, d'autre part, comme j'ai tenté de le montrer par la typologie des obstacles détaillée au long de ce texte. Au risque d'un propos fort dichotomique, je dirais : d'un côté, la présence ou l'absence d'obstacles psychologiques ou méthodologiques conditionnent les performances d'individus-résolveurs de problèmes ; de l'autre, des situations adidactiques mobilisant des obstacles ontogéniques, didactiques et épistémologiques rendent les élèves, ensemble, analystes de savoirs en leur permettant ne fût-ce que d'éprouver les limites de savoirs anciens.

#### **4.2. Penser les situations-problèmes comme évaluation formative de la compétence " résolution de problèmes " ?**

Une première optique serait de considérer les situations-problèmes comme l'occasion d'une évaluation formative de la compétence " résolution de problème ". C'est celle défendue par J.P. Cassaro et al. (2001) qui, comme nous l'avons vu plus haut, jouent sur un outil commun, les phases d'A. Sfard, tant pour structurer le cours que l'évaluation. En effet, une des trois hypothèses de travail avancées par ces auteurs est, comme ils disent, d'intégrer l'évaluation dans l'enseignement par la problématisation du cours : " Cela signifie d'abord qu'on ne peut évaluer que ce qui a été enseigné. Dès lors, évaluer la résolution de problèmes postule l'existence d'un véritable enseignement de la méthode expérimentale en mathématique. C'est évidemment à cela que la problématisation du cours veut contribuer ! ".

Sans doute est-il vrai que les démarches engagées par les élèves à l'occasion des situations-problèmes qui leur sont proposées participent à un

entraînement à la résolution de problèmes. D'une certaine façon, c'est bien le moins. N'est-ce pas ce que souhaitent favoriser C. Hauchart et N. Rouche (1987) dans leur projet d'enseignement des limites de suites en ponctuant les solutions des fiches de travail d'acquis méthodologiques réinvestissables dans les activités mathématiques ultérieures tels que le passage du registre numérique au registre graphique ? Réciproquement, les démarches méthodologiques peuvent faciliter l'émergence des savoirs : par exemple, c'est en pensant le problème des intérêts composés sous forme multiplicative, sans effectuer les calculs, que les élèves prennent conscience de la présence d'une suite géométrique. Cependant, l'optique décrite plus haut ne me paraît pas sans risque. Elle requiert à tout le moins une négociation serrée, du moment que l'on envisage les situations-problèmes à la lumière du modèle des situations adidactiques, comme je le développe ci-dessous.

Un premier écueil est lié à la nécessaire " dépersonnalisation " que suppose une bonne articulation des processus de dévolution et de d'institutionnalisation des situations adidactiques (cf. section 3.4) : il importe que l'élève se polarise sur le savoir mis en jeu et son efficacité à résoudre le problème, quelle que soit la personne qui propose ce savoir : lui-même, un de ses pairs ou, pourquoi pas, le professeur. A contrario, avoir conscience que la situation-problème lui sert de piste d'essai pour s'entraîner à la résolution de futurs problèmes inédits risque de recentrer les préoccupations de l'élève sur sa propre créativité ou la pertinence de ses choix à lui, et ainsi de " repersonnaliser " le jeu. Et cela, même si, comme le proposent J.P. Cassaro (2001) très judicieusement par ailleurs, l'évaluation doit prendre en compte toutes les démarches de recherche, y compris celles qui n'aboutissent pas.

Je vois une deuxième difficulté dans le choix même des situations-problèmes conçues, comme on l'a vu, pour mettre en jeu un savoir donné et/ou éprouver les limites d'un savoir ancien. Elles sont donc choisies prioritairement en référence à des savoirs ou à des obstacles précis. Et non en fonction des stratégies de résolution de problèmes qu'elles permettraient de mettre en évidence. La situation des feuilles de papier décrite plus haut n'est pas forcément intéressante de ce dernier point de vue. Je n'exclus évidemment pas qu'une situation puisse être porteuse à ces deux égards. Cependant, certaines démarches de résolution de problèmes font à ce point obstacle, au sens d'obstacles psychologiques, qu'elles peuvent parasiter la dévolution du problème. De par leurs caractéristiques, les situations adidactiques devraient éviter de tels obstacles qui feraient impasse pour une partie des élèves si l'on veut pouvoir jouer la dévolution. De ce point de vue, le problème du tracé d'une section plane d'un cube qui implique le prolongement de segments en droites peut difficilement assumer le rôle de situation-problème, à moins de pouvoir en imaginer une transposition adidactique. Par contre, le procédé une fois décrit par le



professeur, ce dernier peut dévoluer aux élèves la formulation des propriétés géométriques qui le valident. Tôt ou tard, des choix s'imposeront : les tenants de la résolution de problèmes choisiront leurs énoncés en fonction des principes heuristiques qu'ils permettent de mettre en évidence et les partisans des situations-problèmes en fonction de l'analyse épistémologique des savoirs visés. Il n'est pas sûr qu'ils fassent souvent les mêmes choix. A cet égard, il est un phénomène qui m'apparaît intéressant à observer. Pour beaucoup de professeurs, n'est de " situation-problème " intéressante qu'une situation qui mobilise une traduction en langage mathématique d'un énoncé du langage véhiculaire. De tels problèmes seront privilégiés d'office, même si leur portée mathématique est insignifiante. Par contre, seront plus facilement discréditées des questions telles que : " Peut-on paver le plan avec un quadrilatère quelconque ? " parce qu'il n'y a pas de telle traduction à la clé, alors que cette question débouche, comme montré par C. Docq (1992), sur la construction d'un savoir relatif à la somme des angles d'un quadrilatère. Il me semble qu'on assiste là à une dérive méthodologique qui n'est pas sans rappeler celle observée par A. Robert et al. (1999) dans l'enseignement du premier degré en France : " L'apprentissage méthodologique de la résolution de problèmes vidait les mathématiques, au profit de la lecture de l'énoncé, du tri d'information, etc. ".

A cela s'ajoute des difficultés spécifiques soulevées par la dévolution de la résolution de problèmes, en tant que compétence, et analysées par G. Brousseau (1998) en termes de contrat didactique. Comme montré à la section 3.3, pour dévoluer un apprentissage aux élèves, le professeur doit pouvoir s'appuyer sur un milieu dont le problème proposé et les échanges entre élèves peuvent constituer des éléments essentiels. S'il peut rompre le contrat didactique classique c'est parce qu'il peut renvoyer les élèves au milieu pour juger par eux-mêmes de l'efficacité de leurs procédures, pourvu que ce dernier puisse procurer les rétroactions nécessaires pour cela. Mais sur quoi peut s'appuyer le professeur pour dévoluer la démarche de résolution de problèmes, si ce n'est sur des conseils heuristiques, à la manière de G. Polya (1967), tels que " Dessinez une figure, introduisez la notation appropriée, quelle est l'inconnue ... " ? Or, de tels conseils ne semblent pas fournir un appui suffisamment consistant, aux dires des psychologues cognitivistes eux-mêmes (cf. section 2). Pourtant, à la lumière du contrat didactique, l'élève est en droit d'espérer du professeur la donnée d'un milieu efficace pour qu'il puisse se guider lui-même. G. Brousseau en conclut : " On doit donc s'attendre à ce que l'élève reçoive toutes les indications du professeur sur le même mode : comme des moyens " efficaces " de résoudre des problèmes (tels que des algorithmes) et ceci même si le professeur les choisit de façon à ce qu'elles relancent la recherche de l'élève, l'encouragent, l'aident sans toucher à l'essentiel de ce qui doit rester à sa charge. Ainsi, les indications de type heuristique seront demandées, données et reçues au sein d'un malentendu, suggestions incertaines pour l'un, connaissances comparables aux algorithmes ou

aux théorèmes de mathématiques pour l'autre ”.

#### **4.3. Apprendre à résoudre des problèmes, classe de problèmes par classe de problèmes**

Compte tenu des difficultés décrites à la section précédente et de l'ensemble des éléments recueillis dans cet article, je voudrais défendre une autre manière d'articuler résolution de problèmes et situations-problèmes. Je la schématise comme suit. Des questions relevant d'une même problématique seraient exposées d'entrée de jeu aux élèves ; elles leur seraient ensuite dévolues pourvu qu'elles aient pu se traduire en situations adidactiques, ou, à défaut, explorées par le professeur devant les élèves (auquel cas, on ne parlera évidemment pas de situation-problème, ...). De cet examen qui ferait ressortir l'essence commune de ces questions devrait émerger une technique type de résolution. Les questions seraient alors cristallisées en une classe de problèmes et le discours technologique qui valide cette " technique " (au sens large du terme) déboucherait sur un embryon (ou un pan de théorie), lequel institutionnaliserait la technique comme répondant à cette classe de problèmes. Les élèves seraient alors entraînés à la résolution de problèmes de cette classe et invités à explorer le domaine d'opérationnalité de la technique de résolution jusqu'à en éprouver les limites. Ils seraient enfin évalués sur leur capacité à transférer la méthode de résolution à de nouveaux problèmes de la même classe (M. Schneider, 2001). Il me semble que ce scénario rejoint la lecture que fait J. Gascon (1998) des organisations praxéologiques d'Y. Chevillard (1999). Il a quelque parenté aussi, je crois, avec l'idée de famille de problèmes illustrée par les travaux du GEM (e.a. 1991), du COJEREM (1995) et de AHA (1999). Peut-être évoquera-t-il, pour certains, le concept de famille de situations de X. Roegiers (2000). Cependant, à regarder de plus près les exemples suggérés par cet auteur, je ne retrouve pas forcément dans les situations d'une même famille la proximité sémantique qui caractérise les problèmes d'une même classe fédérés par des questions semblables.

A la lumière des travaux de didactique exploités ici, un tel canevas se justifie pleinement pourvu qu'il satisfasse aux précautions méthodologiques décrites supra, principalement l'analyse épistémologique qui déterminera la classe, ou plutôt les classes de problèmes constitutives des différents sens du savoir visé. Par ailleurs, il est cohérent avec les résultats de la psychologie cognitive. Je reprendrai quatre arguments qui m'apparaissent essentiels.

Seule une classe entière de problèmes (et non pas un problème isolé) peut susciter le processus de décontextualisation sans lequel dévolution et institutionnalisation ne peuvent s'articuler convenablement (section 3.4). N'est-ce pas pour souligner l'appartenance à une même classe de divers problèmes faisant fonctionner le même sens d'un même savoir que G.

Brousseau (1998) parle de situation fondamentale associée à ce sens du savoir en question ?

Du point de vue de la progression du temps didactique, seule une classe de problèmes fait vivre une question dans la durée. L'organisation d'un cours autour de classes de problèmes dévolues aux élèves fait participer ceux-ci à l'institutionnalisation des savoirs dévolus, chaque classe débouchant sur un morceau suffisamment consistant de théorie et sur l'entraînement à une technique associée, c'est-à-dire sur une entité bien visible du cours. En leur donnant ainsi prise sur le temps didactique, le professeur modifie réellement le partage classique des responsabilités entre ses élèves et lui (section 3.7).

La dévolution aux élèves d'un premier problème de la classe, d'un second, etc. et d'une réflexion sur leur essence commune leur demande un certain investissement tant psychologique qu'intellectuel. Ce dernier est en quelque sorte "rentabilisé" par l'entraînement répétitif et l'évaluation portant sur des problèmes de la même classe. Il serait heureux de joindre à cette évaluation des questions de restitution portant sur "l'histoire" de la construction du savoir, telle que réalisée par la classe. Ce compromis scolaire, éprouvé d'une fois à l'autre, permet aux élèves d'accepter plus sereinement la rupture du contrat didactique classique que constitue la dévolution de problèmes. Il fait en quelque sorte partie du milieu (section 3.3).

Ce canevas favorise l'identification de classes de problèmes et, ce faisant, s'inspire du fonctionnement des experts - tel qu'observé par les psychologues cognitivistes - lorsqu'ils résolvent un problème qui relève de leur compétence en identifiant la classe à laquelle il appartient (section 2.3).

Dans une telle perspective, les savoirs construits outillent les élèves pour résoudre une classe particulière de problèmes, puis une autre et ainsi de proche en proche de sorte qu'ils disposent d'un arsenal de connaissances leur permettant de faire face à un nombre sans cesse croissant de types de problèmes. Cette optique bouleverse l'opposition classique entre savoirs et compétences, de même qu'elle permet de voir la "tête bien faite" et la "tête bien pleine" de Montaigne autrement qu'antagonistes : un individu armé pour résoudre des problèmes serait un individu dont la tête aurait engrangé de nombreuses classes de problèmes, ainsi que les méthodes appropriées. Encore faut-il, comme le souligne J. Tardif (1992 et 1999), que ces classes de problèmes fassent partie d'une organisation fortement hiérarchisée dans la mémoire à long terme des élèves. Sans doute est-ce sur cette organisation, évolutive en fonction du niveau des élèves évidemment, que devrait porter le discours métacognitif du professeur sur lequel insiste également le même auteur. Ce faisant, n'explique-t-on pas essentiellement les mathématiques, celles-ci étant par essence une telle organisation rationnelle ?

Peut-être que là-dessus pourrait se greffer un discours plus transversal

qui étudie les démarches de pensée telles que mises en évidence par G. Polya (1967), au delà de ses conseils heuristiques ? Encore faudrait-il analyser les conditions didactiques de cette greffe. Cependant, un tel discours ne me semble pas si vain a priori. Après tout, comprendre que la recherche d'un point à l'intersection de deux lieux, la construction d'un triangle à une similitude près et la recherche d'une fonction en passant par une classe paramétrée relève d'une seule et même idée : se donner des " degrés de liberté " en oubliant momentanément des contraintes m'a paru éclairer des démarches fort disparates et c'est une des raisons profondes qui m'a fait me pencher sur le modèle des deux lieux (M. Schneider, 1997).

Mais, on n'évalue pas la compétence " résolution de problèmes " dans le scénario décrit ci-dessus, objecteront certains. De fait, à force de faire explorer aux élèves le domaine de validité d'une technique de résolution associée à une classe de problèmes, on ne peut guère, au terme de l'apprentissage en cours, que tester leur capacité à exploiter cette même technique pour résoudre un problème qu'ils identifient d'office, contrat didactique oblige, comme faisant partie de la classe étudiée. Cependant, un enjeu de transfert non négligeable se profile dès que l'élève, susceptible de maîtriser plusieurs classes de problèmes, doit reconnaître à quelle classe appartient tel ou tel problème qui lui est proposé, tout comme un expert le ferait d'ailleurs. D'où l'intérêt de proposer des évaluations où, de manière affichée et effective, différentes classes de problèmes sont brassées d'une année à l'autre, afin d'éviter les effets de contrat poussant l'élève à adopter telle méthode ou telle autre en fonction des contenus de programmes travaillés pendant l'année en cours. Ainsi, si un problème doit être modélisé par une fonction, il y a des chances actuellement qu'il s'agisse d'une fonction exponentielle ou logarithme lorsque la question est posée en 6<sup>ème</sup>, puisque les autres types de fonctions font partie des programmes d'autres années.

De toute façon, on ne peut évaluer qu'une performance, à savoir l'exercice d'une compétence dans une situation donnée. Ce que nous pouvons observer, c'est que l'élève a résolu ou non, et comment, tel ou tel problème particulier. Il faut donc accepter que le reste nous échappe. La volonté de vouloir éprouver un quelconque " potentiel " de l'élève à transférer sa démarche à n'importe quel autre problème ne relève-elle pas de ce que dénonce J. Tardif (1999) par l'expression " la pierre philosophale du transfert " en citant, e.a. B. Rey : " L'idée de compétence transversale n'est qu'une idée de pédagogue ou de didacticien qui souhaite optimiser les effets de l'enseignement et qui voudrait que les acquis des élèves s'étendent bien au-delà de leur domaine d'apprentissage " ? Je trouve qu'un tel propos s'applique déjà à l'illusion d'une forme de transversalité, restreinte aux seules mathématiques, de la compétence " résolution de problème ". Et, sans être bien compétente pour en juger, je crains, dans les

autres disciplines, une formation articulée autour de grilles de compétences très " transversales " qui me font penser, mutatis mutandis, aux stratégies générales de résolution de problème dont l'efficacité, je le rappelle, n'est absolument pas établie.

Je conclurais cette section par une position relative à l'évaluation certificative. Au vu de ce qui précède, celle-ci doit être, me semble-t-il, principalement axée sur la capacité des élèves à transférer d'une situation à l'autre des stratégies spécifiques de résolution de problèmes enseignées au préalable. En insistant, comme fait plus haut, sur un brassage de ces stratégies d'une année à l'autre beaucoup plus important qu'à l'heure actuelle. Et, pour ne pas être plus puriste qu'il ne faut, je pense que rien n'empêche de réserver une petite part de l'évaluation à la résolution de problèmes plus inédits, en imaginant, comme J.P. Cassaro et al. (2001) le proposent, d'autres modalités d'évaluation que le seul test écrit en un temps limité.

## **Conclusion**

Un autre article serait nécessaire pour poser la question du choix des classes de problèmes en lesquels découper l'enseignement. Certains exemples sont faciles à imaginer que j'ai évoqué plus haut : l'évaluation de grandeurs inaccessibles, la détermination de vitesses variables. Encore faut-il négocier un enchevêtrement entre les classes de problèmes d'un côté et les contenus de programmes de l'autre. Ainsi, d'une part, l'évaluation des distances inaccessibles mobilise autant les triangles semblables et le théorème de Pythagore que la trigonométrie ; d'autre part, le calcul des dérivées ne sert pas qu'à déterminer des vitesses. En outre, d'autres contenus scolaires sont plus difficiles à " problématiser ", par le fait que les mathématiques constitue une organisation rationnelle revisitée au cours du temps, en fonction de projets intellectuels parfois plus spéculatifs. Ainsi, la relecture, en termes de transformations, de la géométrie euclidienne a-t-elle conduit à des problèmes scolaires dont la portée est insignifiante, comme la construction d'un point par une transformation donnée. Je renvoie sur ce sujet aux observations du COJEREM (1995), de même qu'à ses tentatives de rendre une certaine opérationnalité aux transformations du plan, par le biais de problèmes de constructions, et de donner un sens, à l'échelle du secondaire, à cette idée féconde qui consiste à travailler " à une transformation près ". Du pain reste donc sur la planche ...

## **Bibliographie**

- Bachelard G. (1980), *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, J. Vrin.  
Berte A. (1993), *Mathématique dynamique*, Paris, Nathan.  
Bloch I. (2000), *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée-université*.

- Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation, Thèse de l'Université de Bordeaux I.
- Brousseau G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4-2, 165-198.
- Brousseau G. (1998), *La théorie des situations didactiques*, Grenoble, La Pensée sauvage.
- Brousseau G., Centeno J. (1992), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11-2.3, 167-210.
- Brousseau N., Brousseau G. (1987), Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire, Bordeaux, LADIST.
- Chevallard Y. (1991), *Pour la didactique*, Marseille, IREM.
- Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12-1, 72-112.
- Chevallard Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19-2, 221-265.
- Chevallard Y., Mercier A. (1987), *Sur la formation du temps didactique*, Marseille, IREM.
- Chi M.T.H., Glaser R., Rees, E. (1982), Expertise in problem solving. In R.J. Sternberg (dir.), *Advances in the psychology of human intelligence*, Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, 161-183.
- COJEREM (1995), *Des situations pour enseigner la géométrie*, Guide méthodologique, Bruxelles, De Boeck et Larcier.
- COJEREM (1995), *Géométrie en situations*, Notions pour l'élève, Bruxelles, De Boeck et Larcier.
- Comiti C., Grenier D. (1997), Régulations didactiques et changements de contrat, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17-3, 55-80.
- Docq C. (1992), *Analyse épistémologique comparative de deux enseignements de la géométrie plane vers l'âge de douze ans*, Thèse de l'Université catholique de Louvain.
- Fraïsse P. et Piaget J. (3e éd. 1980), *Traité de psychologie expérimentale*, tome VII L'intelligence, Paris, Presses universitaires de France.
- Gagné E.D. (1985), *The cognitive psychology of school learning*, Boston, Little, Brown and Company.
- Gascon J. (1998), Evolution de la didactica de las matematicas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18-1, 7-34.
- GEM (1991), *Problèmes isopérimétriques élémentaires*, Bruxelles, Ciaco.
- Grenier D. (1988), *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale*, Thèse de l'Université Joseph Fourier de Grenoble.
- Groupe AHA (1999), *Vers l'infini pas à pas*, manuel pour l'élève, Bruxelles, De Boeck Wesmael.

- Groupe AHA (1999), *Vers l'infini pas à pas, guide méthodologique*, Bruxelles, De Boeck Wesmael.
- Hauchart C., Rouche N., (1987), *Apprivoiser l'infini*, Bruxelles, Ciaco.
- Inhelder B. et Piaget J. (2e éd. 1970), *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, Paris, Presses universitaires de France.
- Laborde C, Capponi B. (1994), *Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique*, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14-1.2, 165-209.
- Larkin J.H., McDermott J., Simon D.P., Simon, H.A. (1980), *Expert and novice performance in solving physics problems*, *Science*, 208, 1335-1442.
- Legrand M. (1997), *La problématique des situations fondamentales*, *Repères IREM*, 27, 81-125.
- Mercier A (1992), *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*, Thèse de Doctorat de l'Université de Bordeaux I.
- Mercier A. (1999), *Sur l'espace-temps didactique*, Note de Synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Provence.
- Noël G., Tilleuil P., Cazzaro J.-P., Pourbaix F. (2001a), *Structurer l'enseignement des mathématiques par des problèmes*, 1, *Mathématique et Pédagogie*, 130, 39-63.
- Noël G., Tilleuil P., Cazzaro J.-P., Pourbaix F. (2001b), *Structurer l'enseignement des mathématiques par des problèmes*, 2, *Mathématique et Pédagogie*, 131, 37-54.
- Oleron P. (3e éd. 1980), *Les activités intellectuelles* in FRAISSE P. et PIAGET J. *Traité de psychologie expérimentale, tome VII L'intelligence*, Paris, Presses universitaires de France.
- Polya G. (1967), *La découverte des mathématiques*, Paris, Dunod.
- Popper K. (1973), *La logique de la découverte scientifique*, Paris, Payot.
- Rajoson L. (1988), *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*, Thèse de Doctorat de l'Université d'Aix-Marseille II.
- Robert A. (sans date), *Situations-problèmes : théorie et pratique en classe de mathématiques - éléments du passage entre modélisation didactique et pratiques effectives en classe*, IUFM de Versailles.
- Robert A., Lattuati M., Penninckx J. (1999), *L'enseignement des Mathématiques au Lycée, Un point de vue didactique*, Paris, Ellipses.
- Roegiers X. (2000), *Une pédagogie de l'intégration*, Bruxelles, De Boeck Université.
- Schneider M. (1988), *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*, Thèse de l'Université catholique de Louvain.
- Schneider M. (1991a), *Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente*, *Repères IREM*, 5, 65-81.
- Schneider M. (1991b), *Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides*, *Recherches en Didactique des*

- Mathématiques, 11-2.3, 241-294.
- Schneider M. (1991c), Un fossé entre le concept d'intégrale définie et une première perception des aires et des volumes, *Mathématique et Pédagogie*, 81, 85-104.
- Schneider M. (1991d), D'une première perception des aires et des volumes au calcul des primitives, *Mathématique et Pédagogie*, 82, 29-50.
- Schneider M. (1992), A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané, *Educational Studies in Mathematics* 23, 317-350.
- Schneider M. (1997), Problèmes de lieux, Problèmes de construction résolus par la méthode des deux lieux, Document d'accompagnement du Programme de Mathématiques 1997/0279/075A, L1-L22.
- Schneider M. (2001), Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques, A propos d'un enseignement des limites au secondaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21-1.2, 7-56.
- Schœnfeld A.H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving, In L.B. Resnick et L.E. Klopfer (dir.), *Toward the thinking curriculum : Current cognitive research*, Alexandria, VA : Association for Supervision and Curriculum Development, 83-104.
- Sensevy G. (1996), Le temps didactique et la durée de l'élève. Etude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16-1, 7-46.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Tardif J. (1992), *Pour un enseignement stratégique*, Les Editions Logiques, Montréal.
- Tardif J. (1999), *Le transfert des apprentissages*, Les Editions Logiques, Montréal.



