Ces nombres que l'on dit « imaginaires »

Hilda Rosseel, Maggy Schneider, Ladimath, Facultés universitaires de Namur

i = ionique, iguane, injection,
insecte, insulte …
Un élève

1. Un constat qui motive une autre approche de ces nombres

« Quand vous rencontrerez un nombre dont le carré est négatif, vous m'appellerez … J'aimerais bien voir à quoi ça ressemble ! » s'exclame avec véhémence Guillaume, étudiant en deuxième année de graduat informatique[1], lorsque nous l'interrogeons sur ses souvenirs relatifs aux nombres complexes. Cette réaction et d'autres semblables nous ont poussées à mener une réflexion sur les difficultés d'apprentissage inhérentes à ce contenu des programmes scolaires du Secondaire et sur des stratégies d'enseignement susceptibles d'y remédier. Nous en livrons ici une partie succincte travaillée une première fois dans le cadre d'un mémoire de licence réalisé par A. De Vriendt (1999) sous la direction de M. Schneider. Un développement plus ample de cette question fait l'objet d'une brochure éditée par le Ladimath dans le cadre d'un projet de formation continuée financé par les FuNDP et confié à H. Rosseel.

Ce premier article décrit et analyse les limites d'une approche de ces nombres essentiellement algébrique. Un second article, à paraître dans le prochain numéro de la même revue, expose une approche plus géométrique et ses retombées.

1.1. L'expression d'un malaise

Le propos d'étudiant relevé au début de l'introduction est-il anecdotique ? Nous ne le pensons pas. En effet, comme illustré ci-dessous, nous avons pu constater, qu'une fois l'étude des nombres complexes achevée, certains élèves expriment leur malaise et persistent à en affirmer le caractère abscons à leurs yeux.

Cette observation est à rapprocher d'une autre faite par G. T. Bagni (1997) : 2% seulement d'élèves du cycle secondaire acceptent la résolution de l'équation $x^2 = -1$ sous la forme $x = i$ et $x = -i$. Pour atténuer ces réserves, cet auteur propose la lecture d'un texte de Bombelli dans lequel, après avoir manipulé et simplifié des expressions contenant la racine carrée de -1, ce dernier trouve $x = 4$ comme racine de l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$. Les réserves des élèves

[1] Enseignement supérieur non universitaire

diminuent : la lecture préalable d'un tel texte leur fait plus facilement accepter la résolution de l'équation $x^2 = -1$. Cependant, malgré un tel dispositif didactique, 82 % d'entre eux demeurent encore sceptiques.

Nous reviendrons plus loin sur des faits qui corroborent ces observations et sur l'analyse que l'on peut en faire.

1.2. Des approches « classiques » essentiellement algébriques

Parmi les multiples approches possibles des nombres complexes, une des plus usuelles dans l'enseignement secondaire en Belgique consiste à postuler d'emblée l'existence d'un nombre i dont le carré vaut -1 dans le but d'étendre le nombre d'équations solubles. Un nombre complexe est alors défini comme un nombre de la forme $a + bi$, a étant nommé partie réelle du nombre et b sa partie imaginaire. L'addition de deux nombres complexes revient à additionner respectivement leurs parties réelles et imaginaires. Quant à leur produit, sa forme est dictée par la volonté de garder des propriétés des opérations usuelles sur les nombres réels, en particulier la double distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, ce qui donne :

$$(a + bi)\,(a' + b'i) = aa' - bb' + (ab' + a'b)i.$$

Une autre approche, plus fréquente dans l'enseignement supérieur belge, consiste à définir un nombre complexe comme un couple (a, b) de nombres réels, les couples étant munis des lois

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\text{et}$$

$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Une écriture trigonométrique fait suite à chacune de ces deux approches et débouche *in fine*, dans certains cas seulement, sur l'interprétation des nombres complexes et de leurs opérations en termes de transformations géométriques du plan.

1.3. Réactions d'élèves ayant eu un enseignement « classique »

Nous avons interviewé des élèves de l'enseignement secondaire ayant reçu un enseignement « classique » des nombres complexes, postulant d'entrée de jeu l'existence d'un nombre i dont le carré vaut -1, comme décrit plus haut. Voici une de ces interviews assez représentative de l'ensemble des réactions :

Qu'avez-vous appris dans le chapitre relatif aux nombres complexes et comment l'expliqueriez-vous à un élève de l'année précédente ?

El. 1 : C'était pour résoudre des équations. Il y avait déjà les réels, maintenant les complexes avec une partie imaginaire, inventée.
El. 2 : On nous a dit qu'il y avait un nombre imaginaire i dont le carré vaut – 1.
El. 3 : C'était suite à une équation où le réalisant était négatif. On a écrit – 9 sous la forme $9i^2$ et comme cela on avait deux racines.

Cela vous a-t-il étonnées ?

El. 1 : Non, c'est comme des x ou des y, cela ne change pas grand'chose : ici c'était le réalisant négatif qui nous dérangeait, on l'a remplacé par i^2 pour que ce soit plus facile à résoudre.
El. 2 : Non, ce n'est pas la première fois qu'on nous dit que c'est comme cela. Il faut pouvoir imaginer. C'est comme pour la géométrie de l'espace.
El. 1 : Sauf que là, on a la preuve que c'est bon. Ici, on ne saura jamais ; on va toujours tomber sur ce fameux i car les nombres complexes s'écrivent a + bi.

Et les exercices ?

El. 1 : Il faut résoudre des équations. Je ne trouve pas cela difficile.
El. 2 : Les exercices sont un peu plus difficiles que ceux qu'on faisait en 4ème avec le réalisant, mais ce n'est pas hyper compliqué ; c'est plus facile que les sinus et cosinus. Les exercices qu'on fait, c'est parfait.

Un professeur stagiaire présent à l'entretien : Moi aussi, j'ai du mal à m'imaginer un nombre complexe. Cela reste artificiel. Pourtant, je connais le plan de Gauss, mais on ne peut pas le comparer au plan R^2 où on repère des positions. Et même si les couples représentent des transformations, je ne vois pas pourquoi ça aide à représenter. Le couple (1, 2) je vois, mais il faut s'imaginer 1 + 2i et pour moi, ce n'est pas qu'un changement d'écriture… Si une théorie est féconde en applications, elle est bonne. Et puis, il faut respecter l'histoire dans l'enseignement.

Nous avons interrogé les élèves de deux classes ayant reçu cet enseignement classique. De manière générale, ceux-ci expriment un malaise vis-à-vis des nombres complexes, comme en attestent, à titre d'exemples, les quelques commentaires écrits qui suivent :

- ✓ *J'ai du mal à cerner cette idée que $i^2 = -1$. J'aime bien les choses bien concrètes, réelles et j'aime faire des schémas et des dessins. Ici c'est carrément le flou. Je ne comprends pas pourquoi on doit poser $i^2 = -1$. Pourquoi pas $i^2 = -0,97$? Pourquoi ça marche avec $i^2 = -1$?*
- ✓ *L'évocation de « nombre complexe » me fait penser à l'impossible, à des nombres sans doute compliqués et qui n'existent peut-être pas. Je pense aussi, en entendant ce groupe de mots résonner dans mes oreilles, que les hommes les ont inventés pour résoudre l'« irrésolvable », ce dont toute personne sensée dirait « c'est impossible » ou « cela n'existe pas ». D'ailleurs, les professeurs des années inférieures vous diront tous que la racine carrée d'un nombre*

négatif n'existe pas. Et pourtant, lorsqu'on voit cette symphonie de « i » mélangés avec des a et des b, des cosinus et autres logarithmes, on se rend bien vite compte, soit que les professeurs des années inférieures nous ont menti, soit que le professeur de rhéto[2] veut nous faire découvrir une nouvelle dimension des mathématiques inconnue de nous, élèves, jusqu'alors. La question que je me pose dès lors est la suivante : pourquoi les professeurs des années précédentes ont-ils agi de la sorte ?

- ✓ *Premièrement, la notion de nombre complexe est quelque chose de flou dont visiblement personne ne connaît la majeure partie de manière claire, quelque chose d'absurde et d'insignifiant puisqu'on ne peut se faire une idée réelle d'un fait imaginaire. Je ne vois pas l'intérêt de jouer avec des notions purement abstraites sans utilité et donc sans application. Il s'agit pour moi d'un truc pas drôle à apprendre, je n'y ai rien compris, absolument rien.*
- ✓ *Il me serait impossible de donner une signification à i et je ne cherche pas vraiment à connaître sa signification. Pour moi, i représente uniquement un outil de calcul.*
- ✓ *i est un nombre imaginaire qui permet de changer le signe d'un nombre qui nous dérange.*
- ✓ *La lettre « i » est un nombre inventé qui élevé au carré donne – 1. On peut le voir comme un nombre vu que tous les autres nombres ont été inventés aussi mais il change tout à fait ce que je pensais des maths avant.*
- ✓ *« i » est un nombre tellement difficile qu'on ne sait l'écrire que sous la forme d'une lettre.*

La question « quel intérêt à avoir inventé les nombres complexes ?» donne lieu à maintes réflexions exprimant le côté jugé absurde de ces nombres. Dans un des deux groupes, 12 élèves sur 25 n'y voient aucun intérêt. Ainsi,

- ✓ *Aucun intérêt à part pour les mathématiciens qui font ça de leur vie. Une prise de tête inutile.*
- ✓ *Eh bien, je ne sais pas trop à quoi ça sert, à quoi bon se compliquer la vie ? Je vote pour la simplicité.*

1.4. Interviews de professeurs stagiaires

Par ailleurs, nous avons également interrogé des professeurs stagiaires, d'abord par le biais d'interviews semi-structurées, ensuite au moyen d'un questionnaire. Voici une de ces interviews sur lesquelles notre analyse s'appuie.
L'étudiant interrogé a étudié les nombres complexes par lui-même pour les besoins de ses études supérieures.

Professeur : Si vous deviez expliquer à un non initié ce qu'est un nombre complexe, que lui diriez-vous ?

Etudiant : le sujet est délicat. D'abord, c'est une nouvelle classe de nombres, qui généralise l'espace des nombres réels. Je lui demanderais de faire appel à son pouvoir d'abstraction pour imaginer qu'il peut exister d'autres nombres plus généraux que les nombres réels.

P. : Mais imaginer quoi ? Cela élargit l'ensembles des réels, mais comment ?

---

[2] dernière année de l'enseignement secondaire

E. : Cela permet de trouver des racines de nombres négatifs, c'est l'exemple le plus concret.

P. : De tels nombres existent-ils vraiment ?

E. : C'est plutôt une vue (construction) de l'esprit et une notation commode pour aller plus au fond des choses, permettre entre autre de factoriser n'importe quel polynôme et trouver des nombres dont le carré est négatif.

P. : Les nombres complexes ont-ils une représentation concrète ?

E. : On peut les représenter dans un espace de dimension 2. La représentation est concrète mais la signification ne l'est pas tellement. Dans le plan complexe, ce qui est concret, c'est la norme du nombre, sa distance à l'origine.

P. : Cela vous met-il mal à l'aise de travailler avec un outil qui n'a pas beaucoup de sens mais qui répond à des problèmes ?

E. : Cela fait partie du jeu mathématique. Quand j'ai vu cette matière, j'ai accepté cette nouvelle classe de nombres. Je suis physicien et en physique cela sert énormément pour simplifier des calculs, donc en physique c'est assez concret.

P. : Les nombres complexes sont-ils de vrais nombres ?

E. : Pour moi, ce ne sont pas de vrais nombres parce que dans l'acception courante, un nombre est quelque chose que l'on peut « dénombrer ». Ce n'est pas le cas des complexes.

Le questionnaire, quant à lui, invitait les professeurs stagiaires à se positionner, en tant qu'enseignants, face aux difficultés des élèves. Voici les questions posées :

1. Les solutions des équations $x^2 = 2$; $3x + 5 = 0$; $x^2 = -1$ sont toutes appelées "nombres" par les mathématiciens. Ce vocable est-il approprié dans tous les cas ? Expliquez !
2. Après avoir soumis le texte de Bombelli à ses élèves (6ème année secondaire), le professeur explique que les écritures de racines carrées de nombres négatifs sont interdites actuellement mais que l'équation $x^2 = -1$ possède néanmoins deux solutions qui sont notées i et $-i$ et appelées "nombres imaginaires" et que par conséquent $i^2 = -1$. Il expose ensuite toute la théorie sur les nombres complexes. Au bout de plusieurs leçons, lors d'une séance d'exercices, un élève exprime son malaise par ce propos : « Je ne comprends pas comment le carré d'un nombre peut être négatif ». Si vous étiez le professeur, que répondriez-vous à cet élève ?

et quelques-unes des réponses et des réactions les plus significatives :

- ✓ *Vocable non approprié dans le troisième cas car il ne s'agit pas d'une entité « dénombrable ».*
- ✓ *Dans les deux premiers cas, je crois qu'il n'y a pas de problèmes. Mais pour le dernier, dire que i est un nombre …, alors qu'il s'agit d'une lettre, peut, je pense, perturber l'élève.*
- ✓ *Le carré d'un nombre ne peut pas être négatif ! Mais les mathématiciens n'aiment pas les interdits. Ils ont donc inventé un nombre i qu'ils ont appelé « nombre imaginaire » et tel que $i^2 = -1$. Donc $i = \sqrt{-1}$. Grâce à ce nouveau nombre, l'équation $x^2 = -1$ devient $x^2 = i^2$ et les solutions deviennent évidentes : $x = i$ et $x = -i$. Il devient dès lors possible de prendre la racine carrée d'un nombre négatif. Par exemple, $\sqrt{-16} = \sqrt{16.(-1)} = \sqrt{16}.\sqrt{-1} = 4i$.*
- ✓ *Cela peut être vu comme une construction mathématique, la définition même d'un tel nombre est que son carré est négatif. C'est comme les nombres négatifs, ils ont un statut à part des nombres positifs, et ils ont quand même une utilité pour résoudre des problèmes. Les mathématiciens inventent sans cesse de nouveaux objets mathématiques pour résoudre de nouveaux problèmes.*
- ✓ *Je pense que pour des élèves du secondaire, les nombres complexes restent un domaine fort calculatoire, que des élèves ayant choisi une option mathématique acceptent assez facilement mais sans en voir l'utilité. Je pense aussi que l'analogie avec les coordonnées dans le plan peut faire sentir aux élèves l'intérêt d'avoir deux nombres pour exprimer un point. Mais je ne vois pas comment y relier le fait que $i^2 = -1$.*

2. Analyse épistémologique et didactique

2.1. Un obstacle épistémologique observé dans l'histoire des mathématiques

Les réactions recueillies ici corroborent les réserves que G.T. Bagni a pu observer chez les élèves à l'encontre des nombres complexes, réserves que nous avons évoquées dans l'introduction. En effet, dans les interviews de professeurs stagiaires tout comme dans celles d'élèves ayant reçu un enseignement « classique » des nombres complexes, s'exprime un malaise certain, comme le montrent les propos repris plus haut. Dans cette section, nous tentons d'interpréter ce malaise à la lumière de l'histoire des mathématiques, laquelle peut s'avérer éclairante pourvu qu'on en fasse un usage suffisamment ample et contextualisé.

a) Un malaise observé dans l'histoire et résorbé dans un registre physico-géométrique

Les vicissitudes liées à l'émergence des nombres complexes dans l'histoire des mathématiques sont touffues. En l'espace restreint de cet article, nous en retiendrons d'abord les réserves exprimées à l'encontre de ces nombres, puis leur acceptation progressive au fur et à mesure de l'apparition de modèles qui les concrétisent.

Les nombres complexes font leur apparition vers le milieu du 16^e siècle dans la théorie des équations. En particulier, des algébristes italiens : del Ferro, Cardan, Tartaglia et Bombelli résolvent des équations de degré 3 et introduisent des racines carrées de nombres négatifs qui se simplifient pour aboutir à des racines entières. Encore appelées entités « imaginaires », ces écritures seront longtemps exploitées avant qu'on leur reconnaisse le statut de nombres. Les réserves exprimées à leur encontre sont nombreuses. Par exemple, Berkeley, au 17^e siècle, souligne la difficulté à leur octroyer un sens quelconque : « le signe algébrique qui dénote la racine carrée d'un négatif a son usage dans les opérations logiques, quoiqu'il soit impossible de former par lui une idée de quelque quantité que ce soit ». L'absence de modèle « tangible » des expressions imaginaires restera une préoccupation lancinante, malgré l'opérationnalité que plusieurs mathématiciens, tel Leibniz au 17^e siècle, leur reconnaissent dans les calculs : « Ces notions imaginaires ont ceci d'admirable que, dans le calcul, elles n'enveloppent rien d'absurde ou de contradictoire et que cependant elles ne peuvent être présentées dans la nature des choses ».

Mais, comme le développe J.-L. Verley (1998), cette efficacité dans le calcul algébrique ne suffit pas à les faire accepter. A cet égard, leur représentation par des modèles géométriques semble avoir joué un rôle tout aussi important : les segments orientés chez Wessel (fin du 17^e siècle) et la multiplication d'un segment par un autre qu'il interprète en termes de rotation et, bien sûr, le plan de Gauss (19^e siècle) : « De même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini, où, chaque point déterminé par son abscisse a et son ordonnée b, représente en même temps la quantité $a + bi$ ». Enfin, on doit à Cauchy (19^e siècle) une représentation des nombres complexes sous forme trigonométrique, en termes de rayons vecteurs définis par un module (leur longueur) et un argument (angle d'inclinaison par rapport à un axe), la multiplication dans les complexes s'interprétant alors comme un produit de modules et une somme d'arguments.

Sortis ainsi d'un univers algébrique, les nombres complexes ont acquis leurs lettres de noblesse dans un double registre alliant géométrie et physique. S'en est suivi une définition par Hamilton des nombres complexes en termes de couples de réels munis des deux opérations ad hoc, définition jugée enfin « propre », ainsi que le souligne P. Van Praag (2003).

b) Caractère problématique des extensions du concept de nombre

Les nombres complexes ne sont pas les seuls à avoir provoqué une crise dans l'histoire des mathématiques. On pense bien sûr aux irrationnels et au problème d'incommensurabilité des grandeurs. Mais, à un niveau plus élémentaire de l'emboîtement des ensembles de nombres, G. Glaeser (1981) développe les avatars historiques des entiers négatifs qui sont au moins aussi spectaculaires que ceux liés à l'émergence des irrationnels ou des complexes.

Ces crises historiques ont aujourd'hui leurs équivalents scolaires, bien que les difficultés s'expriment d'une toute autre manière en raison de différences notables dans la culture mathématique « ambiante ». Il n'empêche que, des naturels aux complexes, les diverses sortes de nombres constituent, pour les élèves, des connaissances qui, à un moment donné, font obstacle à l'apprentissage de nombres d'un type nouveau. C'est en ce sens que G. Brousseau (1998) parle à ce propos *d'obstacle épistémologique* : « Puisque le fait de plonger un ensemble dans une extension change ses « propriétés » et celles de ses éléments que l'on peut désormais utiliser, nous pouvons nous attendre à de grandes difficultés et à des résistances au changement d'emploi lorsque l'habitude jouera un rôle – qu'il s'agisse d'habitudes psychologiques ou culturelles. C'est un des principaux obstacles épistémologiques que l'on rencontre en mathématiques. » Nous ne nous étendrons pas ici sur le concept d'obstacle épistémologique, renvoyant à G. Brousseau (op. cit.) le lecteur qui souhaite approfondir ce concept. Contentons-nous de souligner le caractère quasiment inéluctable et la robustesse des obstacles épistémologiques qui, sous des formes diverses, se manifestent tant dans l'histoire des mathématiques que dans l'apprentissage des élèves d'aujourd'hui.

Notons, dans l'obstacle mentionné ici, l'effet d'écran créé par des habitudes mentales qui restreignent le champ de conscience des individus et les empêchent de penser autrement, comme l'ont montré les psychologues du comportement (voir e.a. P. Oleron, 1980). Il est possible que la seule évocation du mot « nombre » renvoie d'office les élèves aux propriétés qu'ils ont l'habitude de voir associer aux nombres qu'ils connaissent : de là leur difficulté à voir les choses autrement, à « penser à côté », c'est-à-dire à pouvoir englober dans ce vocable « nombre » des objets inattendus, dotés de propriétés autres, en contradiction avec celles des nombres qu'ils connaissent. C'est comme si on avait habitué des enfants à appeler « animaux » les chiens, seuls animaux qu'ils auraient rencontrés jusque là. Il ne faudrait pas s'étonner qu'ils refusent d'appeler « animal » le premier chat qu'ils verraient. Les obstacles épistémologiques rejoignent donc ici ce que M. Schneider (2002) appelle les *obstacles psychologiques*, par référence aux travaux de ce domaine de la psychologie. Toutefois, les premiers obstacles sont liés à des objets de savoir alors que les autres ne le sont pas forcément.

c) Une vision positiviste des mathématiques, attestée par ailleurs

Les obstacles épistémologiques liés aux extensions des ensembles de nombres pourraient relever, ainsi que développé par M. Schneider (notes de cours à paraître), d'une vision positiviste des mathématiques qui consiste à concevoir les concepts mathématiques comme le reflet des « objets » du monde « naturel ». En ce sens, les nombres se doivent d'être « concrétisés » par l'un ou l'autre de ces objets, tout comme le sont les nombres naturels par une collection d'objets de même nature que l'on cherche à dénombrer ou les nombres rationnels ou irrationnels par la mesure de grandeurs. A l'opposé, une vision socio-constructiviste considère les concepts mathématiques comme des produits imaginés par l'esprit humain, en fonction de projets bien déterminés, ces derniers pouvant être très spéculatifs. La manière dont s'est résorbée, dans l'histoire des mathématiques, la crise des relatifs est à cet égard particulièrement significative. Après avoir interprété cette crise et en particulier les réserves exprimées vis-à-vis de la fameuse règle « moins par moins donne plus » par la « difficulté de s'écarter d'un sens *concret* attribué aux êtres numériques », G. Glaeser situe le travail d'Hermann Hankel en 1867 comme un épilogue heureux de cette crise. Ce dernier « trivialise » ces nombres et leurs règles de multiplication en passant d'un point de vue *concret* à un point de vue « formel ». Il justifie en effet ces règles non pas par le biais d'un modèle concret mais par le respect d'un *principe de permanence* : la multiplication dans Z doit prolonger la multiplication dans N tout en gardant de « bonnes propriétés », entre autres, en respectant les règles de distributivité. Ainsi, 0 peut s'écrire, d'une part, sous la forme $a \times 0 = a \times (b + \text{opp } b) = ab + a \times (\text{opp } b)$ et, d'autre part, sous la forme $= 0 \times (\text{opp } b) = (\text{opp } a + a) \times (\text{opp } b) = (\text{opp } a) \times (\text{opp } b) + a \times (\text{opp } b)$. De là, on tire que $(\text{opp } a) \times (\text{opp } b) = ab$.

La vision positiviste des mathématiques décrite plus haut est probablement celle que partagent de nombreux élèves du cycle secondaire. Un argument en faveur de cette hypothèse est qu'une telle conception des mathématiques permet d'interpréter maintes réactions et erreurs d'élèves dans d'autres contenus mathématiques tels l'analyse et les probabilités, ainsi que l'a développé M. Schneider (1988, 1991 et notes de cours à paraître).

Dans le cas présent, il nous semble pouvoir interpréter, par cette analyse, plusieurs des propos recueillis soit à l'occasion de l'expérimentation du projet (cf. second article), soit lors des interviews. En effet, si les élèves ou les professeurs stagiaires sont mal à l'aise vis-à-vis des nombres complexes, c'est précisément parce qu'ils ne peuvent leur associer ni un modèle concret comme la longueur d'un segment, ni une écriture familière comme celle d'un nombre décimal, fût-il illimité, qui « raccrocherait » les nombres complexes à d'autres nombres auxquels ils ont pu déjà faire correspondre de tels modèles. Par exemple, les élèves ou professeurs stagiaires évoquent l'impossibilité d'écrire les nombres complexes en chiffres :

- ✓ *« Ça montre que c'est la partie imaginaire du nombre. Il s'agit bien d'un nombre qui s'explique par l'équation $x^2 = -1$. Mais ça reste quand même un nombre fort à part puisqu'il ne s'écrit pas en chiffres. »*

et c'est en ce sens que certains parlent de caractère non dénombrable, comme ils nous l'ont précisé par la suite :

- ✓ *Pour moi, ce ne sont pas de vrais nombres parce que dans l'acception courante, un nombre est quelque chose que l'on peut « dénombrer ». Ce n'est pas le cas des complexes.*
- ✓ *Vocable non approprié dans le troisième cas car il ne s'agit pas d'une entité « dénombrable ».*

Un autre évoque que le seul aspect concret d'un nombre complexe est sa norme, soit sa distance à l'origine :

- ✓ *On peut les représenter dans un espace de dimension 2. La représentation est concrète mais la signification ne l'est pas tellement. Dans le plan complexe, ce qui est concret, c'est la norme du nombre, sa distance à l'origine.*

Ainsi, les réserves liées aux entités imaginaires peuvent s'interpréter par cette difficulté à les penser comme concepts imaginés (le qualificatif est particulièrement pertinent ici) plutôt que comme abstraction qui prolonge une quelconque réalité sensible tout comme les figures géométriques peuvent être « abstraites » d'objets matériels.

2.2. Une solution formaliste à la crise, sujette à caution

a) Un acte de foi en l'existence du nombre *i* consenti par certains élèves

L'approche classique décrite à la section 1.2 peut apparaître *a priori* une première solution didactique à la crise provoquée par les nombres complexes. Rappelons qu'elle consiste à postuler l'existence d'un nombre dont le carré vaut -1, à définir alors tout nombre complexe comme un nombre de la forme $a + bi$ et à définir ensuite, dans l'ensemble de ces nombres, une addition et une multiplication de telle manière que la seconde opération soit distributive par rapport à la première. Cette approche n'est pas sans rappeler celle proposée par

Hankel pour les nombres relatifs, reposant sur un même principe de permanence, et suppose de la part des élèves une forme d'acceptation a priori, un véritable acte de foi même, en l'existence de ce fameux nombre *i* auquel on prête une propriété pour le moins surprenante.

Cette approche est formaliste en ce sens que « la non-contradiction est un critère suffisant d'existence » des objets mathématiques, ceux-ci existant par le truchement d'une définition voire d'une écriture : ainsi, c'est l'expression $i^2 = -1$ qui ferait exister *i*. La position sous-jacente est que la « pensée mathématique n'a d'existence que dans les systèmes d'écriture qui la manifestent », indépendamment de toute réalité ou de toute intuition (Encyclopædia Universalis, 1980).

Un tel développement est souvent prisé par les professeurs comme un bon entraînement à la démarche hypothético-déductive qui se met en place à partir de postulats initiaux et que la définition proposée par A. Bouvier et M. George (1979) des nombres complexes enclenche parfaitement : « Si *i* est une racine du polynôme $x^2 + 1$, pour tout nombre complexe z il existe un unique couple *(a, b)* de R^2 tel que $z = a + bi$ ». C'est bien à partir, entre autres, d'un tel postulat d'existence que peut être développée, sur le mode de la non-contradiction, la théorie des nombres complexes.

Plusieurs élèves dont certains se destinent à faire des mathématiques sont prêts à accepter une telle approche. Tel est le cas d'une des élèves interrogées à la suite d'un enseignement de ce type, nullement gênée par les propriétés des complexes :

- ✓ *C'était suite à une équation où le réalisant est négatif. On a écrit – 9 sous la forme* $9i^2$ *et comme cela on avait deux racines.*

C'est aussi le cas d'un des partenaires du dialogue suivant extrait du roman de Robert Musil, *Les désarrois de l'élève Törless*. Ce romancier met en scène deux adolescents qui, au delà de leurs premiers émois charnels, échangent des interrogations plus intellectuelles :

- Dis-moi, tu as tout compris dans cette histoire ?
- Quelle histoire ?
- Celle des nombres imaginaires.
- Oui. Ce n'est pas si compliqué que ça. Il suffit de se rappeler que l'unité de calcul, c'est la racine carrée de moins un.
- Justement, cette racine n'existe pas ! Tout nombre, qu'il soit positif ou négatif, donne, élevé au carré, un nombre positif. Il ne peut donc y avoir de nombre *réel* qui soit la racine carrée d'une quantité négative !

- D’accord. Mais pourquoi n’essaierait-on pas quand même d’appliquer à un nombre négatif le calcul de l’extraction d’une racine carrée ? L’opération ne peut donner, c’est entendu, aucune valeur réelle, et c’est bien pourquoi on qualifie le résultat d’imaginaire. [...]
- Mais comment le peut-on quand on sait en toute certitude, avec une certitude mathématique, que c’est impossible ?
- Précisément : on agit comme si ce n’était pas impossible, en dépit des apparences, en pensant que cela finira bien par donner un résultat quelconque. Après tout, en va-t-il autrement des nombres irrationnels ? Une division qui garde toujours un reste, une fraction dont la valeur ne sera jamais, jamais obtenue, aussi loin qu’on pousse le calcul ? Et comment vas-tu te *représenter* le fait que deux parallèles ne se rejoignent qu’à l’infini ? Je crois que si l’on voulait se montrer trop pointilleux, il n’y aurait pas de mathématiques du tout.

b) Un malaise réel chez les autres élèves, mais pas toujours exprimé eu égard au contrat didactique

Comme nos observations l’illustrent, nombreux sont les élèves, voire les professeurs stagiaires, qui sont loin de la perspective de Hankel ou de celle d’un des adolescents mis en scène par Robert Musil, en vertu de leur position positiviste des mathématiques telle que décrite plus haut.

Mais les élèves expriment-ils spontanément leurs réserves à l’encontre des nombres complexes, par exemple lors d’un enseignement « classique » de cette matière ? Cela ne semble pas si fréquent, d’après les échos ramenés par plusieurs enseignants. Cela contredit-il l’hypothèse formulée plus haut ? Rien n’est moins sûr. D’abord parce que les interviews de tels élèves après le cours font apparaître leur malaise. Ensuite, parce qu’une autre hypothèse nous semble tout aussi crédible. Elle repose sur le fonctionnement du *contrat didactique* dont G. Brousseau (1998) et Y. Chevallard (1999) montrent l’impact, en tout cas le pouvoir interprétatif, dans les phénomènes didactiques observés au sein des institutions scolaires. Pour être bref, nous dirions ceci dans le cas présent : la réussite scolaire, dans ce contenu particulier des programmes belges, s’obtient essentiellement au prix de résolutions d’équations algébriques, mise à part une demande plus anecdotique dans l’interprétation des racines nièmes de l’unité ; elle ne suppose donc ni recherche du sens, ni réflexion de type épistémologique. Toute question de fond de la part des élèves risque d’embarquer le professeur dans un niveau d’approfondissement plus difficile avec des « retombées » possibles en termes d’exigences supplémentaires lors des évaluations. Ayant supputé cela, les élèves ont intérêt à "se tenir à carreau" et à investir principalement dans la résolution algébrique d’équations. Le professeur acceptera de reconnaître dans cette activité le signe spécifique de l'apprentissage des nombres complexes. Et ce signe peut paraître significatif et faire illusion d'une réelle avancée, tant aux yeux des élèves qu'à ceux de l'enseignant : ne résout-on pas des équations nouvelles grâce aux nombres complexes ? Ne les a-t-on pas inventés pour cela, dans l'histoire des mathématiques ? L'honneur est donc sauf ! Cette interprétation illustre la conjugaison classique de l'effet Topaze et de l'effet Jourdain par laquelle se manifeste le contrat didactique : les élèves négocient implicitement leur apprentissage à la baisse, le professeur accepte de reconnaître un réel apprentissage de leur part dans de faux-semblants. C'est ce qui expliquerait que d'autres professeurs insistent tant sur la lutte qu'ils doivent mener vis-à-vis de certains élèves pour que ceux-ci acceptent de rentrer dans une problématique de recherche du sens.

Cette interprétation nous permet de prendre en compte plusieurs réactions d'élèves très peu gênés par les réserves qu'ils ont vis-à-vis des nombres complexes dans la mesure où elles ne les empêchent pas de résoudre les exercices proposés qui se réduisent à des résolutions d'équations et, par conséquent, de réussir les épreuves d'évaluation. Ainsi, cet élève qui, malgré « qu'on ne trouvera jamais *i* » est rassuré quant au déroulement des exercices :

- ✓ *Les exercices sont un peu plus difficiles que ceux qu'on faisait en 4ème avec le réalisant, mais ce n'est pas hyper compliqué ; c'est plus facile que les sinus et cosinus. Les exercices qu'on fait, c'est parfait.*

Lors de l'année précédente, l'élève devait répondre que telle équation du second degré n'avait pas de solution dès qu'il rencontrait la racine carrée d'un nombre négatif. Après le cours sur les nombres complexes, il doit poursuivre en remplaçant cette racine par *ai* et effectuer des calculs plutôt anodins : somme toute des règles du jeu qui changent mais qui ne sont pas difficiles à respecter.

Ces effets de contrat sont sans doute d'autant plus prégnants que les nombres complexes ne constituent, dans les programmes scolaires belges, ni un apprentissage ni un objet d'évaluation essentiels. La réussite des élèves et même la qualité de leur « score » n'en dépendent que pour une part fort ténue.

c) Une approche qui est source de non sens et des notations banalisées qui donnent lieu à des d'ambiguïtés

Revenons au malaise des élèves face au postulat d'existence du nombre *i*. Réalise-t-on assez que la démarche faite au cours pourrait leur apparaître magique, voire stupide, ainsi que l'exprime ce propos assez caustique :

- ✓ *Aucun intérêt à part pour les mathématiciens qui font ça de leur vie. Une prise de tête inutile.*

ou cet autre propos :

- ✓ *i = ionique, iguane, injection, insecte, insulte, …*

repris en exergue de l'article et pour le moins empreint d'une certaine dérision ? Et effectivement, en un sens, où est le gain : on ne peut résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$, mais on le peut à condition de remplacer la lettre x par la lettre i ? Est-ce cela résoudre alors qu'auparavant résoudre une équation revenait à trouver des solutions numériques, c'est-à-dire exprimables au moyen des chiffres de 0 à 9 par le biais d'une écriture décimale fût-elle ou non limitée ou périodique ? Qu'a-t-on gagné à remplacer une lettre par une autre ? N'est-ce pas cette difficulté que suppute un autre professeur stagiaire chez les élèves lorsqu'il dit à propos du nombre i ? :

- ✓ *Disons que c'est une lettre, donc quelque part, cela pourrait poser problème chez les élèves […]*

C'est peut-être aussi ce que veut dire l'élève, auteur du propos :

- ✓ *[…] c'est comme avec des x ou des y, cela ne change pas grand'chose […]*

ou une manière d'exprimer le malaise chez cet autre élève :

- ✓ *i est un nombre tellement difficile qu'on ne sait l'écrire que sous forme d'une lettre.*

D'où cette impression de tourner en rond que l'on retrouve dans le propos :

- ✓ *La théorie des nombres complexes est logique mais a-t-elle vraiment un intérêt car on dirait qu'elle se base sur des choses qu'elle est plutôt censée déterminer ?*

Ce dernier élève pose par ailleurs la question de l'intérêt de rendre solubles des équations qui ne le sont pas :

- ✓ *Est-ce vraiment utile ? Est-on obligé de trouver des solutions pour des équations insolubles ?*

Ceci nous renvoie aux applications des nombres complexes sur lesquelles nous reviendrons dans la conclusion du second article.

Outre le malaise à appeler « nombre » quelque chose qui ressemble peu à un nombre, au sens décrit plus haut, même si on le qualifie de complexe ou d'imaginaire, nous voyons une autre difficulté dans l'utilisation de notations devenues habituelles pour les élèves. Dans l'expression $i^2 = -1$, utilisée d'entrée de jeu dans une des approches classiques, rien n'avertit l'élève que le carré se réfère à une multiplication nouvelle. Et dans la notation $a + bi$, on utilise une lettre pour désigner indifféremment les réels *a* et *b* et l'imaginaire pur *i* : rien ne les distingue donc si ce n'est l'intervalle de l'alphabet dans lequel on puise la lettre. De plus, la nouvelle addition est désignée par le signe + comme l'addition entre deux réels et l'assemblage de deux lettres, soit *bi*, collées l'une à l'autre, désigne le produit d'un réel par un complexe comme il a représenté, précédemment, le produit de deux réels. On peut contraster cette façon de faire en imaginant l'utilisation de signes nouveaux, comme dans l'écriture $a \oplus b \otimes i$. La notation $a + bi$ nous paraît donc « dangereuse » dans le cas où elle est amenée trop tôt tant elle se prête à une lecture qui n'avertit en rien les élèves qu'on évolue dans un nouvel ensemble où il convient d'étendre les opérations connues jusque là. Elle peut donc déboucher sur une « banalisation » des nombres complexes qui peut rendre ces derniers abscons.

L'introduction prématurée de la lettre *i* risque aussi d'amener des confusions dans le chef des élèves. Notons qu'elle a été introduite, dans l'histoire des mathématiques dans une perspective essentiellement formaliste. C'est à Euler que l'on doit cette notation, non pas pour donner du sens, mais dans le but de mieux fixer le cadre d'utilisation des racines carrées de nombres. En effet, dans un texte publié en 1774, Euler écrit :

> « [...] De plus, comme $\sqrt{a}$ multipliée par $\sqrt{b}$ fait $\sqrt{ab}$, l'on aura $\sqrt{6}$ pour la valeur de $\sqrt{-2}$ multipliée par $\sqrt{-3}$. »

Appliquant cette règle qui se déduit du calcul ordinaire, on obtient à la fois :

$$\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{-1.-1} = \sqrt{1} = 1$$

et

$$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1.$$

C'est pour lever de telles contradictions qu'Euler décide de noter $\sqrt{-1}$ par la lettre *i* et de réserver le symbole $\sqrt{\ }$ uniquement aux nombres positifs.

d) Une approche classique qui mise peu sur l'interprétation géométrique

Dans l'approche classique analysée ci-dessus, la modélisation ultérieure des complexes en termes de couples, leur représentation dans le plan de Gauss et l'éventuelle interprétation de la multiplication par un complexe en termes de similitudes ne changent pas forcément ce doute des élèves à l'égard de l'existence du nombre *i*. Au cours des exercices qui clôturent le chapitre des nombres complexes, plusieurs continuent à s'étonner qu'un nombre puisse avoir un carré négatif, ce qui indique qu'ils continuent à décoder l'opération « carré » et donc la multiplication de nombres de manière habituelle sans se soucier qu'il y a eu extension à la fois des opérations et des objets sur lesquels elles portent. Et le passage par le géométrique semble ne rien y changer. On peut soupçonner une véritable schizophrénie, dans le chef des élèves, entre les objets du domaine algébrique ou numérique et leur modélisation géométrique. Cette schizophrénie serait le fruit d'une approche par trop linéaire, en Belgique du moins, qui n'oblige aucunement les élèves à brasser conjointement les deux univers, en même temps qu'une conséquence du contrat didactique, mentionné plus haut, à l'œuvre dans cette matière. D'ailleurs, ce passage par le géométrique est souvent fort modeste dans les classes belges : si la plupart des élèves rencontrent le plan de Gauss et l'écriture trigonométrique des couples, peu abordent l'interprétation de la multiplication en termes de similitudes.

e) Et les couples ? Sont-ils vraiment des nombres ?

Que penser de cette autre approche classique, fréquente dans l'enseignement supérieur, qui consiste à définir d'emblée des nombres complexes par des couples ? D'une certaine façon, elle rejoint le projet qui sera analysé dans le second article et qui « mise » sur les couples, à ceci près que les couples sont envisagés *a priori* de manière formelle dans la première approche, alors qu'ils sont des codages algébriques de similitudes dans notre projet. La différence est de taille nous semble-t-il. En effet, définir le champ des complexes suppose non seulement de préciser les objets sur lesquels on « opère » mais aussi le type d'opérations que l'on utilisera. Ainsi Hamilton définit-il les complexes non pas comme des couples de réels seulement mais bien comme des couples de réels munis des opérations d'addition et de multiplication que l'on connaît. Or, si la définition donnée pour l'addition est assez « naturelle », il n'en va pas de même pour la multiplication : pourquoi ne s'est-on pas contenté de multiplier entre elles les composantes respectives des couples, ainsi que le font parfois remarquer les élèves ? Il nous a semblé important de pouvoir « justifier » *a priori* la forme de la multiplication et c'est ce que nous avons cherché à faire à travers le projet qui sera décrit dans notre second article.

Ajoutons à cela quelques considérations liées à l'utilisation du mot « nombre » pour désigner un couple. Plusieurs élèves expriment la peine qu'ils éprouvent à accepter qu'un couple *(a, b)* soit dénommé comme un seul nombre ; pour eux, il y en a deux : *a* et *b*

- ✓ *Non, ils représentent des couples de nombres. Chaque nombre complexe représente le résultat d'une opération effectuée (une similitude) sur un réel a : ils ne sont donc pas des nombres.*
- ✓ *Non, ils sont composés d'une partie réelle et d'une partie irréelle alors que les vrais nombres sont les nombres réels qui déterminent une quantité précise de quelque chose.*

Avouons qu'il est effectivement cocasse d'appeler nombre au singulier un couple constitué de plusieurs nombres, même s'ils ne sont que deux et même si les qualificatifs réel et complexe permettent de différencier les deux situations. Une part de l'obstacle pourrait venir de là, ainsi que nous l'avons suggéré supra et comme l'affirme haut et fort A. Jacquard (2001) : « En fait, il s'agit d'un malentendu. Le trop fameux nombre *i* n'est pas **un nombre**. Tout devient facile si l'on admet que les manipulations auxquelles nous allons nous livrer à son propos concernent non pas des nombres mais **des couples de nombres**. La fantasmagorie alors disparaît et chacun peut suivre un cheminement qui n'a plus rien de mystérieux. » Demeure cependant, pensons-nous, l'ostensif $x^2 = -1$ et son pouvoir évocateur sur lequel nous reviendrons plus loin.

Les professeurs stagiaires ont, pour la plupart, rencontré la définition d'un nombre complexe comme couple. Cependant, ils éprouvent quelque peine à admettre qu'une telle définition puisse faire exister ces nombres, ainsi qu'en témoignent plusieurs propos. Ils en parlent comme d'une représentation connexe, d'une analogie,

- ✓ *Moi aussi, j'ai du mal à m'imaginer un nombre complexe. Cela reste artificiel. Pourtant, je connais le plan de Gauss, mais on ne peut pas le comparer au plan R^2 où on repère des positions. Et même si les couples représentent des transformations, je ne vois pas pourquoi ça aide à représenter. Le couple (1, 2) je vois, mais il faut s'imaginer 1 + 2i et pour moi, ce n'est pas qu'un changement d'écriture…*

en particulier par l'ajout d'une dimension :

- ✓ *Pour admettre leur existence et leur utilité, il faut accepter que notre vision des choses est limitée puisqu'on ajoute une dimension (y), […] ils ont l'air plus de s'ajouter à la théorie ancienne plutôt que de la compléter ou de l'expliquer mieux.*

Mais ils semblent continuer à situer les complexes dans un univers fantasmagorique, un au-delà imaginaire, sans forcément comprendre que les couples fournissent une concrétisation tangible des complexes, en même temps qu'un moyen de les définir et sans toujours parvenir à interpréter $i^2 = -1$ en termes de couples. Ce fait nous paraît un reflet tant des difficultés interprétées plus haut par l'usage du mot nombre que de l'obstacle à interpréter autrement des écritures algébriques banalisées par un usage antérieur.

f) D'un projet formaliste à la perte de sens

Les deux approches « classiques » analysées dans cette section : l'ajout aux réels d'un i tel que $i^2 = -1$ ou la définition par les couples peuvent illustrer une vision socio-constructiviste des mathématiques. En effet, elles s'inscrivent bien dans un projet humain qui consiste à reculer les frontières de ce qui paraît possible dans une recherche de *complétude* et de *cohérence*. Ainsi, les nombres complexes participent-ils de ce projet, comme le montre P. Van Praag (2003), en permettant le théorème fondamental de l'algèbre qui octroie aux polynômes un nombre de racines égal à leur degré. La cohérence s'accroît lorsqu'on établit après coup des liens avec la théorie des groupes d'automorphismes si importante en géométrie. Cependant, si l'on ne peut nier l'importance du courant formaliste en mathématiques dans l'établissement des fondements de cette discipline, on peut craindre les effets de sa transposition didactique dans certaines classes. Comme montré plus haut, il existe des élèves prêts à rentrer dans cette perspective. Encore faut-il qu'ils soient conscients de ses enjeux et qu'ils ne l'acceptent pas uniquement pour rentrer dans le jeu imposé par le professeur, en vertu du contrat didactique. Pour cette raison, nous pensons que de telles approches ne peuvent se concevoir sans une certaine épaisseur épistémologique : il s'agit alors de faire de l'épistémologie mathématique autant que des mathématiques.

Cependant, il existe d'autres élèves pour lesquels une approche formaliste est dangereuse dans la mesure où elle accentue chez eux la conviction que les mathématiques sont du *charabia* dans lequel il n'y a pas de sens à chercher. Et l'on sait que c'est le cas de plusieurs élèves arrivés au niveau qui nous intéresse, même dans les classes « fortes » en mathématiques. Et souvent, cette perte de sens remonte très loin dans le temps comme en témoigne ce dialogue entre deux adultes évoquant des souvenirs d'école à propos de leur cours de mathématique :

- « Là où j'ai commencé à décrocher en math., c'est quand on m'a dit que moins par moins donne plus. Je n'ai jamais compris que, par exemple, – 2 fois – 3 cela donne + 6. J'en ai conclu que les maths., c'était pas mon truc.
- C'est vrai que moi j'ai toujours appliqué cela parce qu'on me l'a dit, et ça marche dans les calculs, mais cela n'a pas vraiment de sens. »

Nous ne nous étendrons pas sur tous les moments du cursus mathématique où l'on rate l'occasion de donner un sens aux concepts mathématiques et à leurs propriétés. Contentons-nous de dire ici qu'une approche exclusivement formaliste et algébrique des nombres complexes risque d'accentuer cette impression de non sens que plusieurs élèves éprouvent vis-à-vis des mathématiques en leur faisant faire le « singe » une fois de plus dans une démarche qui n'est pas loin de leur apparaître comme une imposture voire de la mythomanie : on veut des racines à des équations qui n'en n'ont pas. En remplaçant $\sqrt{-1}$ par *i*, on fait comme si on en avait et c'est ce subterfuge qui fait dire au professeur que maintenant on les a. Nous renvoyons ici à l'analyse faite à la section 2.2. c).

Ajoutons qu'en matière de résolution d'équations, la question est posée en des termes nouveaux pour ce qui est des nombres complexes. En effet, assez couramment, le professeur « motive » l'introduction de ces derniers en évoquant les extensions successives des ensembles de nombres que nécessite la résolution d'équations telles que $x - 3 = 0$ soluble dans **N**, $x + 2$ soluble dans **Z**, $3x - 2 = 0$ soluble dans **Q**, $x^2 - 2 = 0$ soluble dans **R**. D'où l'intérêt de poursuivre l'extension de manière à pouvoir résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$. Mais, dans chacune des extensions précédentes et contrairement à ce qui est projeté pour les nombres complexes, les nombres solutions des diverses équations sont généralement construits dans d'autres contextes qui leur donnent du sens indépendamment de la résolution de ces équations. Citons par exemple : les graduations pour les entiers négatifs, les rapports d'agrandissement pour les rationnels, certaines hypoténuses de triangles rectangles pour les irrationnels.

3. Vers d'autres perspectives

Par rapport à cette crise provoquée par les nombres complexes il existe *a priori* des solutions didactiques autres que la solution formaliste décrite plus haut. Celles-ci s'inspireraient d'un courant plutôt intuitionniste misant sur la construction d'objets mathématiques au départ d'objets déjà construits. C'est une solution de ce type que nous présenterons dans le prochain article, à savoir un projet d'enseignement des complexes dans lequel ceux-ci apparaissent comme codages algébriques de transformations géométriques du plan.

BIBLIOGRAPHIE

BAGNI G.-T. (1997), *History and didactics of mathematics : an experimental research*, Nucleo di ricerca in didattica della matematica, Bologne

BALLIEU M., GUISSARD M.-F., (2002), *Nombres complexes et géométrie*, CREM, Nivelles

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19-1, pp. 77-123

BOUVIER A., GEORGE M. (1979), *Dictionnaire des mathématiques*, PUF, Paris

BROUSSEAU G. (1998), *La théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, Grenoble

BROUSSEAU N., BROUSSEAU G. (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Bordeaux, LADIST

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19/2, pp. 221-265

DE VRIENDT A. (1999), *L'enseignement des nombres complexes au troisième degré de l'enseignement secondaire : repères et propositions*, mémoire dirigé par M. Schneider, FuNDP, Namur

ENCYCLOPÆDIA UNIVERSALIS (1980), *Fondements des Mathématiques*, E.U. France S.A., Vol. 10

GLAESER G. (1981), Epistémologie des nombres relatifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 2-3, pp. 303-346

JACQUARD A. (2001), *La Science à l'usage des non-scientifiques*, Calmann-Lévy, Paris

KLINE M. (1972), *Mathematical thought from ancient to modern times*, University Press, Oxford

OLERON P. (3e éd. 1980), Les activités intellectuelles in FRAISSE P. et PIAGET J. *Traité de psychologie expérimentale*, tome VII L'intelligence, Presses universitaires de France, Paris

REY B. (1996), *Les compétences transversales en question*, ESF, Paris

SCHNEIDER M. (1988), *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*, Thèse de doctorat, Université catholique de Louvain

SCHNEIDER M. (1991), Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.11 n° 2.3, pp. 241-294

SCHNEIDER M. (2002), Problèmes et situations-problèmes : un regard pluraliste, *Mathématique et Pédagogie*, n° 137, pp. 13-48

SCHNEIDER M. (notes de cours à paraître), *N'y aurait-il qu'un seul obstacle épistémologique en mathématiques ?*

SCHUBAUER-LEONI M.L. (1988), Le contrat didactique dans une approche psycho-sociale des situations didactiques, *Interactions didactiques, 8,* XXX

VAN PRAAG P. (2003), Pourquoi des nombres complexes ? Pourquoi des groupes ?, *Mathématique et Pédagogie* n° 141, pp. 17-38

VERLEY J.-L. (1998), Présentation historique générale, *Images, Imaginaires, Imagination, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes*, Ellipses, Paris