Mathématiques enseignées au secondaire et mathématiques enseignées à l'université : quelle solidarité ?

Maggy Schneider

Après avoir expliqué ce que je pense être la principale finalité de l'enseignement des mathématiques en termes de posture rationnelle et d'intelligibilité, j'illustrerai ce que j'entends par deux niveaux d'intelligibilité. Enfin, je reposerai la question du titre sur la solidarité entre enseignement secondaire et enseignement universitaire à la lumière de l'analyse faite.

1. Un objectif majeur : favoriser l'intention rationnelle

J'affiche ici une valeur qui représente, à mes yeux, un présupposé incontournable en matière d'enseignement des mathématiques, quel que soit le niveau d'étude considéré. C'est que l'objectif majeur d'un tel enseignement est de favoriser, chez les élèves ou les étudiants, ce que Rey[1] appelle « l'intention rationnelle » et qu'il caractérise en ces termes : « Il faut que l'élève cesse de voir la vérité comme dépendante d'une forme de rapport à autrui. Il faut que, dans sa relation au savoir, il passe de l'obéissance à une règle saisie comme arbitraire à la compréhension de la nécessité […] tant que l'élève croit le maître parce que c'est le maître, c'est que l'intention rationnelle n'est pas établie. ». Comme le précise l'auteur, il s'agit bien, non d'une compétence, mais d'une intention, propre à la personne, et qui peut varier en fonction des circonstances. Ainsi un élève peut adopter une telle posture dans l'étude d'une discipline et non dans celle d'une autre.

Je pense qu'il y aurait consensus, chez les didacticiens des mathématiques, sur un tel présupposé tant on peut reconnaître dans cette caractérisation de l'intention rationnelle des échos des premiers textes écrits pour fonder la didactique des mathématiques[2]. Mais il semble que, sur le terrain, on soit encore loin du compte si l'on en juge par le nombre élevé de questions d'élèves commençant par : « Peut-on … ? » ou « doit-on … ? ». C'est que cette intention rationnelle a un prix qu'il n'est pas toujours nécessaire de payer pour réussir à l'école. Et quelques propos d'élèves interviewés à la suite d'un enseignement sur les nombres complexes vont me permettre de l'illustrer.

---

[1] Rey, B. (1996). *Les compétences transversales en question*, Paris : ESF.

[2] Voir entre autres Brousseau, G. (1973). La problématique et l'enseignement des mathématiques, *Actes de la 28ème rencontre de la CIEAEM à Louvain-la-Neuve*.

1.1. Le contrat didactique comme obstacle à cet objectif

Dans l'enseignement secondaire, on introduit souvent les nombres complexes en commençant par postuler l'existence d'un nombre dont le carré vaut -1 afin d'étendre le stock des équations que l'on peut résoudre. Cette entrée en matière choque la plupart des élèves habitués à ce que, précisément, un carré ne puisse pas être négatif. En témoignent des élèves interviewés[3] suite à un enseignement « classique » de ces nombres :

« Qu'avez-vous appris dans le chapitre relatif aux nombres complexes et comment l'expliqueriez-vous à un élève de l'année précédente ? »

E1 : « C'était pour résoudre des équations. Il y avait des réels, maintenant les complexes avec une partie imaginaire, inventée. »

E2 : « On nous a dit qu'il y avait un nombre imaginaire i dont le carré vaut -1. »

« Cela vous a-t-il étonnés ? »

E2 : « Non, ce n'est pas la première fois qu'on nous dit que c'est comme cela. Il faut pouvoir imaginer. C'est comme pour la géométrie dans l'espace. »

E1 : « Sauf que là, on a la preuve que c'est bon. Ici, on ne saura jamais ; on va toujours tomber sur ce fameux i car les nombres complexes s'écrivent $a + bi$. ».

E3 : « Quand vous rencontrerez un nombre donr le carré est négatif, vous m'appellerez … J'aimerais bien voir à quoi ça ressemble ».

E4 : « Il me serait impossible de donner une signification à i et je ne cherche pas vraiment à connaître sa signification »

Visiblement, le malaise existe chez les élèves quant à l'existence de ce fameux nombre mais, globalement, ces derniers ne cherchent pas à comprendre davantage n'étant pas vraiment animés, en l'occurrence, par une intention rationnelle. C'est que cette démarche leur coûte en ce sens qu'elle les engagera dans une étude approfondie et que, par ailleurs, elle n'est pas la clé de leur réussite. En effet, tous les élèves interrogés ont reconnu n'avoir pas exprimé leurs doutes en classe, attendant de voir s'il ne leur suffirait pas, pour satisfaire les exigences du professeur, de savoir résoudre les exercices. Ils expriment leur soulagement à ce propos :

« Et les exercices ? »

E1 : « Il faut résoudre des équations. Je ne trouve pas cela difficile. »

E2 : « Les exercices sont un peu plus difficiles que ceux qu'on faisait en quatrième avec le réalisant, mais ce n'est pas hyper compliqué; c'est plus facile que les sinus et cosinus. Les exercices qu'on fait, c'est parfait. »

De tels cas montrent à l'envi qu'il n'est pas toujours nécessaire de comprendre en mathématiques pour réussir. Savoir imiter des procédures pour faire les exercices suffit

---

[3] Rosseel, H. & Schneider, M. (2003).Ces nombres qu'on dit ``imaginaires", *Petit x*, n° 63, pp. 53-71.

souvent. Le concept de contrat didactique[4] permet d'éclairer cette situation. Il peut se manifester effectivement par des effets pervers qui relèvent du fait que, enseignant et élèves, négocient à la baisse le comportement attendu de part et d'autre, souvent au prix d'illusions sur ce que signifie vraiment une réussite scolaire.

1.2. A propos de l'intelligibilité en mathématiques

Cette question de l'intelligibilité est cruciale dans l'enseignement des mathématiques et ne peut être passée sous silence au regard de l'intention rationnelle visée pour les élèves. Elle semble être source récurrente de préoccupation au fil du temps. Ainsi, en 1989, la commission « Danblon »[5] évoque un « écueil majeur : la perte de sens », en se positionnant tant du point de vue de l'apprentissage que de celui de l'enseignement :

- du côté de l'apprentissage : « L'accident le plus fréquent dans l'apprentissage des mathématiques est la perte de sens et le repli sur la forme sans contenu : ne plus penser et se contenter d'exécuter des algorithmes selon l'unique procédé permis devient rapidement insoutenable. ».
- du côté de l'enseignement : « Le problème majeur de l'enseignement des mathématiques est sans aucun doute celui du sens. ».

Plus récemment, Chevallard[6] dénonce la « dérive monumentaliste » de l'enseignement actuel des mathématiques en France, dérive que l'on peut résumer en disant qu'on enseigne des réponses à des questions qui n'ont pas été posées :

> Les mathématiques, en tant que discipline scolaire, ont appartenu à une « aristocratie ». Mais, dans cet « âge des privilèges », « une discipline scolaire tend […] à prendre la forme d'une visite guidée de savoirs que l'on parcourt à la hâte, à l'instar de vestiges monumentaux autrefois vivants mais dont les raisons d'être, les fonctions vitales ont cessé d'être comprises.

Mais cette « question des questions » … est loin d'être nouvelle comme en témoignent ces quelques faits. En exergue d'une conférence donnée en 82, Bkouche cite une histoire juive parlante à cet égard : « Un matin Rabbi David parcourut les rues de la ville en criant : J'ai une réponse, j'ai une réponse, qui a une question ? ». Des livres ou manuels au titre significatif voient le jour : « Faire des mathématiques : le

---

[4] Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7-2, p. 33-115.
[5] Danblon, P. (1989). *Rapport de la Commission d'étude des Mathématiques et des Sciences*, Ministre de l'Éducation de la Communauté française de Belgique.
[6] Chevallard, Y. (2004). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire}, *3ème Université d'été Animath, Saint-Flour (Cantal), 22-27 août 2004*.

plaisir du sens »[7] et « De question en question », série de manuels belges dirigés par Rouche dans les années 90.

A supposer que l'intention rationnelle des élèves soit une visée prioritaire de l'enseignement des mathématiques, se pose la question du partage des responsabilités respectives, dans l'atteinte de cet objectif, entre professeurs du secondaire et professeurs de l'enseignement supérieur. Les quelques propos repris ci-dessous montrent les risques potentiels d'un malentendu et, je trouve, d'un certain manque de solidarité d'un niveau d'étude à l'autre :

> « Je crois que tout simplement dans le secondaire j'ai vu la limite et la dérivée comme des techniques. Je savais très bien dériver, je ne me trompais pas mais la signification profonde de la dérivée, je ne l'avais pas perçue. Je pense que la maturité de l'élève est telle que c'est une notion sur laquelle il faut revenir après. Je ne vois pas de problème à dire : on a donné la définition, on a surtout insisté sur la technique de calcul parce que c'est à la portée des élèves à cet âge-là et puis en premier bas, on revient sur la notion en disant : attention, voilà ce qu'il y a en plus. Même en bio, je reviens dessus en disant : c'est un taux de variation instantané particulier. Et ça, dans le secondaire, on ne l'a pas vu mais il ne fallait peut-être pas le voir. C'est à nous à le faire. » (professeur d'université)
>
> « Je pense que, dans le secondaire, les élèves n'ont aucun intérêt, aucun désir de maîtriser les dérivées. » (professeur d'université)
>
> « Les élèves qui arrivent du secondaire ne réfléchissent pas : ils appliquent des procédures. » (professeur d'université)
>
> « On nous dit qu'il faut évaluer selon trois compétences : connaître, appliquer et résoudre des problèmes. Mais, il vaut mieux mettre le maximum de points pour la deuxième rubrique si l'on veut ne pas avoir trop d'échecs. » (professeur du secondaire)
>
> « Tout ce qu'on nous demande, c'est de préparer les élèves à bien calculer pour la suite. » (professeur du secondaire)

En définitive, que devrait ou pourrait tout simplement faire un professeur du secondaire pour préparer ses élèves à l'enseignement supérieur : leur faire comprendre les mathématiques ou plus « bêtement » leur apprendre des techniques ?

Mais qu'est-ce que comprendre les mathématiques ? Un point de départ peut être la réponse d'un mathématicien dont la réputation n'est plus à faire, Henri Poincaré :

> « Comment se fait-il que tant de gens trouvent les mathématiques obscures alors qu'elles ne font appel qu'aux principes fondamentaux de la logique ? Qu'est-ce que comprendre ? Est-ce examiner successivement chacun des syllogismes et constater

[7] Bkouche, R., Charlot, B. & Rouche, N. (1991). *Faire des mathématiques : le plaisir du sens,* Paris : A. Colin.

> qu'il est correct ? Oui, pour quelques-uns; presque tous sont beaucoup plus exigeants, ils veulent savoir non seulement si tous les syllogismes sont corrects, mais pourquoi ils s'enchaînent dans tel ordre plutôt que dans tel autre. Tant qu'ils leur semblent engendrés par le caprice et non par une intelligence consciente du but à atteindre, ils ne croient pas avoir compris et dès lors sont insatisfaits. »

Je poursuivrais volontiers en disant que comprendre les mathématiques, c'est aussi appréhender pourquoi les concepts ou symboles mathématiques sont définis d'une façon plutôt que d'une autre. Et je me propose de montrer à présent que cette intelligibilité peut être déclinée à deux niveaux en prenant l'exemple de l'analyse mathématique, lequel me permettra d'illustrer qu'il existe une vie mathématique avant … celle des mathématiciens d'aujourd'hui.

2. Deux niveaux d'intelligibilité

La nécessité d'un premier niveau d'intelligibilité découle de l'existence d'obstacles d'apprentissage résistants. C'est ce que montrera la section 2.1. Les sections 2.2. et 2.3 illustreront respectivement chacun des deux niveaux annoncés.

2.1. Des obstacles qui nécessitent un premier niveau d'intelligibilité

Les obstacles d'apprentissage résistants sont souvent de nature épistémologique. L'un d'eux que j'ai nommé « l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions »[8] et dont je montrerai la portée concerne des comparaisons de grandeurs basées sur des « indivisibles », d'où son nom comme je vais l'expliquer. Le terme indivisible est emprunté à Cavalieri qui déduit, par exemple, un rapport entre les volumes de deux solides compris entre deux plans parallèles de la constance du rapport entre les mesures de leurs indivisibles, entendant par là les surfaces découpées respectivement dans les solides par des plans quelconques parallèles aux premiers. Cette comparaison est audacieuse en ce sens que l'on déduit une information sur des volumes à partir d'une autre sur des aires, changeant ainsi de dimension. Mais elle est correcte dans le découpage qui vient d'être évoqué (Fig. 1). L'obstacle se manifeste lorsque de mêmes comparaisons sont faites dans certains autres cas, par exemple lorsqu'on suppose que les volumes de deux solides de révolution sont entre eux comme les aires des surfaces qui les engendrent (Fig. 2).

---

[8] Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des ``découpages infinis" des surfaces et des solides, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 11, n° 2.3, pp. 241-294.

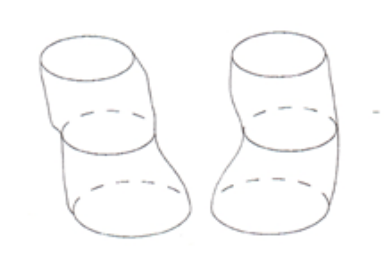

Figure 1

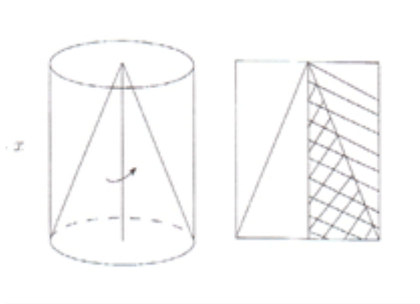

Figure 2

On observe alors que, pour justifier un tel résultat qui est faux, les élèves donnent des arguments dans le domaine des grandeurs en insistant, par exemple, sur le fait que les solides sont composés de leurs sections radiales, comme si les mesures de grandeurs, loin d'être des concepts ayant une vie propre, se doivent de traduire une façon de voir les grandeurs elles-mêmes. Cet obstacle de l'hétérogénéité des dimensions est une hypothèse qui permet d'interpréter de multiples erreurs d'élèves liées au calcul intégral non seulement dans le cadre d'une ingénierie qui intègre des découpages à la Cavalieri en guise de méthodologie de recherche mais aussi dans celui d'une transposition didactique plus standard. Il prend en compte également des réactions de personnes ayant une formation plus poussée en mathématiques, par exemple des professeurs en formation. On en trouve aussi des traces dans l'histoire.

Mais, au delà de sa « résistance » qui permettrait déjà d'argumenter son caractère épistémologique, cet obstacle m'intéresse surtout car il est significatif d'une position plus globale vis-à-vis des mathématiques et qui relève du positivisme empirique[9]. Je m'explique en repartant du domaine philosophique où l'empirisme est une théorie selon laquelle l'expérience serait l'origine de nos connaissances, a contrario du rationalisme qui les situe dans la raison humaine. En épistémologie des sciences, on parlera de positivisme empirique pour désigner une perception des concepts et des lois scientifiques comme un reflet exact des objets du monde « physique » au lieu d'être inventés par des humains pour réaliser un projet donné et il en résulterait une absence de distanciation entre les phénomènes « observés » et les concepts qui les modélisent.

Une telle vision des mathématiques, imprégnée de positivisme empirique, permet bien d'expliquer les erreurs liées à l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions

[9] Schneider, M. (1991). *Op. cit.*

qu'expliquent des glissements inconscients des grandeurs à leurs mesures censées en être le reflet. Mais, au delà de ce contexte sans doute étroit, cette vision positiviste permet d'interpréter des réactions relatives à des objets géométriques ou grandeurs définis par le biais du concept de limite. Ainsi la tangente peut-être perçue comme « limite » de sécantes sans qu'aucune topologie n'ait été définie sur l'ensemble des droites plutôt que comme droite définie à partir de sa pente, c'est-à-dire d'une limite de fonction au sens mathématique. C'est l'obstacle géométrique de la limite que j'ai étudié à la suite de Sierpinska[10]. En particulier, j'ai montré qu'il se manifestait aussi à propos des aires curvilignes dont on doute qu'elles puissent égaler exactement une suite d'aires rectilignes, le passage à la limite étant assez volontiers pensé en termes de rectangles qui finissent, « à la limite », par se réduire ou non en segments. N'est-ce pas le même phénomène qui dicte, encore au XIX[e] siècle, la définition erronée de l'aire d'une surface comme limite de la somme des aires des triangles d'une surface polyédrale inscrite et à laquelle Schwarz opposera en 1883 un contre-exemple assez sophistiqué (Fig. 3).

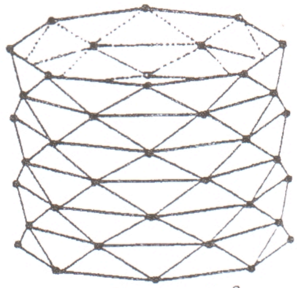

Figure 3

Quant à la vitesse instantanée, des élèves prétendent « qu'elle n'existe pas » se référant à l'impossibilité de la déterminer exactement par des observations et des mesures. Ils se situent donc dans un univers sensible en dehors du monde des concepts imaginés par l'être humain. Outre l'analyse mathématique, je note que Glaeser[11] interprète la fin des « difficultés » d'appréhension des nombres relatifs par le fait « qu'il ne s'agit plus de déterrer dans la Nature des exemples pratiques qui expliquent les nombres relatifs sur le mode métaphorique. Ces nombres ne sont plus découverts, mais inventés, imaginés ». De même, les conceptions causaliste et chronologiste du concept de probabilité

[10] Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 6.1, pp. 5-68.

[11] Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 2-3, pp. 303-346.

conditionnelle s'expliqueraient, d'après Gras et Totohasina[12], par la difficulté à raisonner sans référence à des exemples précis où souvent il y a un caractère d'antériorité-postériorité ou un lien de cause à effet entre événement conditionnant et événement conditionné. A chaque fois sont en jeu des concepts qui, au sein des mathématiques ou dans les sciences en général, ont une vie propre parce qu'ils y existent par le truchement d'une définition mais ils semblent plutôt perçus comme prolongements d'une première appréhension non questionnée.

Là aussi, l'enseignement secondaire a sa part de responsabilité. Souvent, l'enseignement est trop polarisé sur l'étude de techniques tout en conservant des éléments du formalisme de l'enseignement universitaire en des circonstances qui ne sont pas forcément appropriées. Mais la modélisation y semble négligée ou, en tout cas, traitée de manière trop allusive. Somme toute, on juxtapose l'étude de procédures et quelques éléments théoriques qui font « sérieux » en se donnant l'illusion qu'on prépare ainsi les élèves à l'enseignement supérieur. Une manière de problématiser les dysfonctionnements liés à cette situation consiste à distinguer deux types de projets mathématiques et à questionner leur répartition entre les niveaux d'enseignement. Je vais illustrer ceci à travers l'exemple de l'analyse mathématique qui, dans l'enseignement comme dans l'histoire des mathématiques, pourrait être organisée en deux phases correspondant à des projets différents et à deux niveaux d'intelligibilité.

2.2. Une intelligibilité axée sur la modélisation

Un premier projet « fondamental », celui qui a donné lieu à l'avènement du calcul infinitésimal est la détermination de grandeurs ou d'objets géométriques provenant de domaines mathématiques ou extra-mathématiques, en l'occurrence la géométrie et la cinématique principalement : aires et volumes curvilignes, vitesses variables, tangentes. Ce sont là des tâches « fondamentales » à l'origine du calcul infinitésimal auxquelles il faut ajouter des questions issues d'un certain « quotidien » telles que l'optimisation de grandeurs. Dans ce projet, les grandeurs ne sont pas vraiment définies, elles constituent une sorte de « préconstruit » pour reprendre une expression de Chevallard[13]. Et le calcul de limites s'y trouve dans un état embryonnaire comme techniques consistant à supprimer des éléments d'un calcul, sans jeu de compensations comme en algèbre, une fois faites certaines simplifications algébriques standard. Il se trouve d'ailleurs assez vite supplanté par des techniques plus performantes : celles relevant du calcul proprement

[12] Gras, R. & Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle, *Recherches en Didactique des Mathématique*, vol. 15.1, pp. 49-96.
[13] Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

dit des fonctions dérivées ou des fonctions primitives. Dans ce premier projet, le discours technologique prend une tournure particulière : il ne s'agit pas de « prouver » tel ou tel calcul de limites au sein d'une algèbre dont les propriétés sont soit admises soit démontrées, il s'agit de justifier qu'un tel calcul fournit la valeur « exacte » d'une aire curviligne ou d'une vitesse instantanée, ce qui suppose bien souvent de recourir à des arguments qui demeurent géométriques ou cinématiques et/ou à un mode de validation pragmatique consistant à mettre à l'épreuve les nouvelles techniques de calcul à propos de questions que l'on a déjà résolues par un autre biais. Ce premier projet, nous l'appellerons « modélisation de grandeurs ». Il devrait être articulé avec un projet de « modélisation fonctionnelle », une tâche majeure consistant à catégoriser des phénomènes divers, mathématiques ou non, à l'aide de modèles fonctionnels paramétrés, ce qui suppose bien sûr de savoir relier allures graphiques de fonctions et comportements asymptotiques précisés par des calculs de limites.

Illustration : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

Je montre ici un problème qui relève de la modélisation de grandeurs (Gantois et Schneider[14]). Il s'agit de déterminer l'instant auquel deux mobiles ont même vitesse, mobiles dont les lois de position respectives sont p1 et p2. Ils évoluent sur une trajectoire rectiligne, l'un à vitesse constante, de loi p2, et l'autre non. Leurs lois de position sont données graphiquement et analytiquement. La loi p1 du second mobile est d'abord une fonction du second degré et ensuite une fonction du 3ème degré. Les élèves auront été familiarisées auparavant avec les vitesses moyennes et les lois de position interprétées en termes de variation de vitesse, l'accélération ou la décélération étant rapportées à l'évolution qualitative de la « pente de la courbe » qui rend compte, comme disent les élèves, de l'évolution de la vitesse instantanée. Trois types de stratégies ont été observées chez ces derniers :

[14] Gantois, J.-Y. & Schneider, M. (2012). Une forme embryonnaire du concept de dérivée induite par un milieu graphico-cinématique dans une praxéologie 'modélisation'. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32/1, pp. 57-99.

1. Stratégie 1 : déterminer la valeur du temps pour laquelle l'écart est maximal

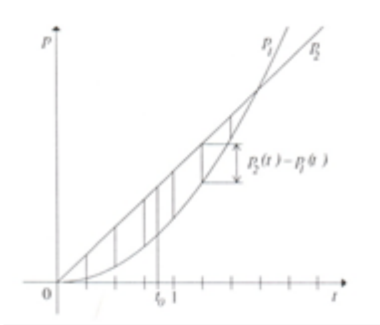

Figure 4

2. Stratégie 2 : déterminer l'instant en lequel une droite de même pente que le graphique de p_2 rencontre celui de p_1 en un seul point (Fig. 5)

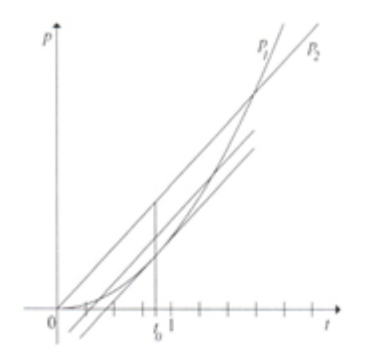

Figure 5

3. Stratégie 3 : déterminer l'intervalle de temps sur lequel les deux mobiles ont même vitesse moyenne et ce, pour des intervalles de temps de plus en plus petits (Fig. 6).

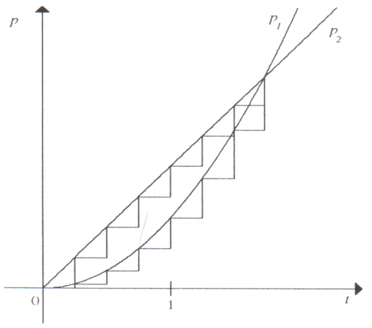

Figure 6

Cette dernière stratégie conduit les élèves, dans un premier temps, à égaler la vitesse constante d'un des mobiles à la vitesse moyenne de l'autre sur un intervalle de temps, $[t_1, t_2]$ ou $[t, t + \Delta t]$, c'est-à-dire, suivant les notations choisies :

$$t_1 + t_2 = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad 2t + \Delta t = \sqrt{3}.$$

Dans un second temps, se basant sur leurs intuitions liées au caractère qualitatif de la vitesse et à l'existence d'une réponse ainsi que guidés par le souci d'éliminer une variable, ils identifient un calcul possible consistant à réduire à 0 l'intervalle de temps :

- M1 : Donc $t_2 = \sqrt{3} - t_1$.
- E1 : Donc … Oui, et $t_1 = \sqrt{3} - t_2$.
- M1 : Oui. Et ça nous fait quoi ?
- E1 : Et ça, et ça … Oui, c'est ça le problème : une fois qu'on a ça, on n'a toujours pas l'instant t.
- N1 : Mais il faudrait trouver une autre façon … Enfin … encore un autre truc où tu as $t_1 + t_2$ et alors on saurait obtenir un système. Tu vois ce que je veux dire ? S'il y a deux inconnues, il faudrait trouver une autre manière …
- E1 : Oui, mais qu'est-ce que tu aurais d'autre comme équation à part ça ?
- N1 : Et si … A quel moment … On ne devrait pas juste prendre un seul t et dire : c'est une vitesse instantanée ? On pourrait prendre juste un t vu que c'est un seul moment.
- M1 : Oui, mais, limite, ils sont tellement proches, qu'on peut dire que $t_2 = t_1$.
- N1 : Oui, c'est ça, en fait.

Par ailleurs, ce calcul se prête à un débat qui n'est pas sans rappeler les palabres, dans l'histoire des mathématiques, sur le double statut de l'infinitésimal considéré tantôt non nul, tantôt nul :

- M1 : Parce qu'en fait, ils sont tellement proches … Tu mets t_2 égale plus ou moins t_1. Et donc, tu n'as qu'à dire $2t_1 = \sqrt{3}$. Donc $t_1 = \sqrt{3}/2$.

- E1 : Ca paraît bizarre d'égaliser t_1 et t_2.
- C1 : C'est un peu fac[ile] … Ca ne met pas vraiment en commun les deux équations.
- Prof : En fait, vous avez fait … Vous avez rendu votre différence de temps …
- E1 [qui coupe Prof et continue la phrase de Prof] : … tellement petite que t_2 à est égal à t_1.
- N1 : Infiniment petite.
- E1 : Enfin, presque égale.
- E1 : Mais ce n'est pas imprécis, à ce moment-là ?
- N1 : Ben non, c'est logique. Si tu réduis à fond l'intervalle de temps; ça deviendra égal.

Des trois stratégies décrites, seule la dernière préfigure le calcul des dérivées. A ce stade des connaissances des élèves, elle est la seule aussi à permettre de répondre à la question quand le mouvement non uniforme est modélisé par un polynôme du troisième degré et c'est ce qui justifie son enseignement. Cependant le passage par un premier cas où ce dernier mouvement correspond à un polynôme du second degré va permettre une validation pragmatique dans le sens où les élèves peuvent contrôler, dans ce cas, que les trois stratégies conduisent à la même réponse. Celle jugée « bizarre » pour les raisons évoquées plus haut, de nature infinitésimale, acquiert ainsi du crédit dans la mesure où elle est cohérente avec les deux autres qui, elles, sont jugées inattaquables par les élèves. Cette démarche de validation rappelle celle de Fermat qui teste sa méthode d'adégalité en montrant qu'elle permet de retrouver des résultats connus depuis l'Antiquité et déjà prouvés autrement. Ce travail va conduire à une définition de la vitesse instantanée comme résultat obtenu en supprimant Δt de l'expression de la vitesse moyenne une fois faites toutes les simplifications algébriques. En définitive, ce problème introduit la dérivée sous une forme embryonnaire, où la limite se définit comme le résultat d'un calcul, forme encore pratiquée par Lagrange à la fin du 18^{e} siècle.

2.3. Une intelligibilité axée sur la déduction

Un second projet correspond à la constitution de l'analyse proprement dite, comme discipline autonome, indépendante donc de la géométrie ou de la cinématique selon le souhait métaphysique de Bolzano, ce qui suppose un mode de validation dont tout argument de type géométrique ou physique est absent et qui n'a plus rien, évidemment, de pragmatique. Il s'agit essentiellement de couler le calculus dans un moule déductif en créant un système de validation nouveau basé sur des axiomes et des concepts premiers et tous les historiens reconnaissent Cauchy comme le père de l'analyse moderne pour avoir procédé à cette refonte sur base du concept de limite. En effet, bien que formulant ce dernier d'une manière encore éloignée de la formalisation actuelle, Cauchy lui fait jouer le rôle de ce que Lakatos[15] appellera plus tard un « proof generated concept », en ce sens qu'il le fait fonctionner pour créer un mode de preuve toujours discursif mais dans lequel on reconnaît bien les démonstrations en termes de quantificateurs et d'inégalités. Dans cette organisation déductive, les concepts de dérivée et d'intégrale sont définis à partir du concept de limite. Les grandeurs n'en sont pas absentes mais sont reléguées comme applications et sont définies elles aussi, d'entrée de jeu, par le biais du concept de limite. Il n'y a donc plus lieu de se demander si une vitesse instantanée et une aire curviligne peuvent être déterminées exactement par des limites puisque c'est comme cela qu'elles ont été définies. On assiste donc là à une sorte de renversement : des techniques permettant de déterminer des objets « préconstruits » deviennent, par le biais du concept formalisé de limite, des procédés de définition de ces mêmes objets qui n'existent plus que par le truchement des définitions ainsi produites.

On peut initier les élèves du secondaire à un tel univers par petites touches. Par exemple, en posant la question des conditions d'existence d'une asymptote verticale $x = a$ pour une quelconque fonction f ayant la forme d'un quotient : suffit-il, par exemple, que a soit racine de son dénominateur ? Non, car il ne faut pas alors que a soit aussi racine du numérateur. Oui, mais si la fonction est de la forme $1/g$? Cela ne suffit toujours pas … $1/g$ ne pouvant être aussi grand que l'on veut pour des valeurs de x suffisamment proches de a si g ne devient pas aussi proche de 0 que l'on veut pour de telles valeurs. De nouvelles hypothèses, telle la continuité, émergent ainsi de contre-exemples et d'un raisonnement dans lequel on manipule une forme discursive de la définition quantifiée du concept de limite. L'examen de la fonction $g(x) = x \sin 1/x$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ et de son inverse $f = 1/g$ fait ensuite ressortir une condition supplémentaire : pour que f ait une asymptote (év. semi) en $x = a$ il faut en plus que g garde un signe constant dans un voisinage de a (ou sur un intervalle d'extrémité a). Et en montrant que cet ensemble de conditions, jusque là nécessaires, suffit à assurer l'existence d'une telle asymptote pour f, le professeur peut « officialiser » la définition quantifiée du concept de limite comme point d'ancrage d'un nouveau système de preuves ainsi que la continuité, définie ponctuellement, comme hypothèse … bien « sympathique » dans pas mal de théorèmes !

Un tel travail, typiquement lakatosien, est d'autant plus utile qu'on observe (thèse de P. Job[16]) qu'un rapport non lakatosien des étudiants aux définitions est un obstacle majeur à l'entrée à l'université : pour eux, les définitions « décrivent » l'intuition qu'on

[15] Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations, Essai sur la logique de la découverte mathématique*, traduit par Balacheff , N. et Laborde, J.-M., Paris : Hermann.

[16] Job, P. (2011). *Etude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques.*Thèse, Université de Liège.

a des choses plutôt que d'être des outils de preuve. En bref, l'empirisme perdure jusque là. Et même plus loin : de futurs professeurs en formation initiale interprètent, dans l'ensemble des réels, l'expression qui définit un infiniment petit en analyse non standard non pas comme le réel 0 mais comme une « variable qui tend vers 0 ». Un beau malentendu propre à créer des illusions sur certaines approches de l'analyse non standard !

Pour conclure cette section 2, je décris schématiquement les deux niveaux d'intelligibilité que je viens d'illustrer longuement à travers l'analyse mathématique :

- Un premier niveau : comprendre en quoi les concepts mathématiques constituent des modèles pertinents « d'objets » extra ou intra-mathématiques, ce qui suppose une certaine forme de distanciation entre les objets « réels » et leur modélisation peu évidente étant donné un obstacle épistémologique persistant : le positivisme empirique.
- Un second niveau : comprendre que les « bonnes » définitions de ces concepts sont, à un moment donné, celles qui donnent prise au raisonnement déductif et qui permettent un agencement déductif « performant » ; à ce stade, ce sont elles qui définissent les objets du réel (aires, vitesses, …) et les formes pragmatiques de validation du niveau précédent n'ont plus aucun interêt.

3. Comment se partager ces niveaux d'intelligibité entre le secondaire et l'université ?

C'est en ces termes que je formulerais désormais la question de la solidarité entre ces deux niveaux d'enseignement. Et d'y répondre en faisant remarquer tout d'abord qu'il serait trop facile de cantonner le premier niveau d'intelligibilité dans l'enseignement secondaire pour réserver le second à l'enseignement universitaire. Bien évidemment, ce deuxième niveau n'est pas le monopole de l'enseignement supérieur, l'initiation à des organisations déductives, ne fût-ce que locales, étant prévue dès le secondaire inférieur dans le cadre de la géométrie synthétique. Pour d'autres matières, telle l'analyse mathématique, la question se pose dans d'autres termes : il n'est pas évident qu'une initiation aux démonstrations basées sur un concept de limite défini en termes de quantificateurs soit indispensable dès le cycle secondaire ; mais sans doute ne l'est-elle pas plus pour des étudiants universitaires qui sont de futurs utilisateurs potentiels de mathématiques en économie, en chimie, etc. Quoi qu'il en soit le plus important, me semble-t-il, est la visibilité, pour les étudiants, du projet dans lequel s'inscrit l'enseignement prodigué, que ce projet soit de l'ordre de la modélisation ou de celui de la mise en ordre déductive. Et un discours de type heuristique peut y participer.

3.1. Le discours heuristique

Le discours heuristique ou plutôt le style heuristique est décrit par Lakatos en ces termes : « Le style heuristique consiste à mettre à l'épreuve la conjecture primitive ou naïve, la preuve-mère, les contre-exemples qui la mettent à l'épreuve, la méthode des preuves et réfutations et les concepts-éprouvettes qui en découlent. ». C'est là qu'il parle du « proof generated concept » en donnant l'exemple du concept de convergence uniforme né de l'examen du théorème faux de Cauchy et des contre-exemples de Fourier : *Une série de fonctions continues converge vers une fonction continue*. A ce style, il oppose le style déductiviste contre lequel il s'insurge : « Dans le style déductiviste, on commence par une liste précautionneuse d'axiomes, de lemmes ou de définitions. Les axiomes et les définitions paraissent fréquemment artificiels et d'une complication déroutante. On ne dit jamais comment ces complications sont nées. La liste d'axiomes et de définitions est suivie de théorèmes soigneusement mis en mots, encombrés de conditions pesantes; il semble impossible que quiconque ait jamais pu les inventer ». Evidemment, ces définitions sont pertinentes pour le deuxième niveau d'intelligibilité ce qui me pousse à élargir le style heuristique de la manière suivante pour l'adapter à tout niveau : pour moi, le discours heuristique met en évidence le projet initial à l'origine des mathématiques enseignées, quel que soit le niveau d'étude mathématique envisagé, les tentatives a priori, les succès et les échecs et les raisons pour lesquelles on optera, en définitive, pour telle ou telle issue.

Mais, il faut le dire, on tient peu souvent un discours heuristique que ce soit dans l'enseignement secondaire ou à l'université. C'est dommage car seuls de très très bons élèves ou étudiants sont capables de saisir, dans l'implicite, les règles fondamentales du jeu mathématique en cours et leur évolution d'un niveau d'étude à l'autre.

3.2. Identifier et respecter les deux niveaux d'intelligibilité

Mais d'autres raisons peuvent expliquer les difficultés de transition entre le secondaire et l'université. Et je développerai un exemple pour me faire comprendre en partant d'erreurs et de difficultés d'élèves du secondaire observées soit de manière occasionnelle, soit à l'occasion de recherches en didactique (Lebeau et Schneider[17]).

Ces erreurs concernent la géométrie analytique 3D. L'interprétation d'équations cartésiennes de plans pose problème lorsque ces équations sont incomplètes : par exemple, $y - 2x + 1 = 0$ (ou pire $y = 2x + 1$) ou encore $z = 0$. Il semble qu'une première interprétation de ces équations en termes de droites, dans le cadre de la géométrie analytique plane, constitue une « expérience première » vis-à-vis de laquelle les élèves ont du mal à prendre du recul. Et c'est pourquoi ils continuent à les interpréter comme des équations de droites, le concept même d'équation étant sans

[17] Lebeau, C. & Schneider, M. (2010). Equations incomplètes de plans et obstacles à la nécessité épistémique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30/1, pp. 11-46.

doute considéré plus comme un mode d'étiquetage d'un objet géométrique que comme une contrainte caractérisant les points d'un lieu. D'autres réactions confirment une forme d'incompréhension des écritures algébriques dans le contexte de la géométrie analytique 3D, certains élèves s'étonnant de devoir associer à une droite deux équations cartésiennes et non une seule et pensent que $ax + by + cz + d = 0$ généralise à l'espace l'équation d'une droite dans un plan. De telles difficultés d'apprentissage ne semblent pas dépendre du niveau des élèves : elles ont pu être observées dans le secondaire, au niveau de l'enseignement universitaire et aussi chez des élèves-professeurs. Elles résistent également à tout discours théorique. Doit-on incriminer l'enseignement pour autant ou tout simplement supposer que les élèves n'ont pas suffisamment étudié ?

Regardons d'abord en quoi consiste l'enseignement concerné au niveau secondaire. Il s'inspire d'une organisation mathématique enseignée à l'université et qui consiste à subordonner la géométrie à l'algèbre linéaire. Les droites et plans y sont définis d'emblée comme variétés linéaires ou affines. Les vecteurs sont des éléments d'un espace vectoriel et des vecteurs multiples sont définis à partir de la notion de partie liée. L'entrée en matière relève donc du registre vectoriel et les registres paramétrique et cartésien en « découlent ». Dans cette théorie proprement mathématique, un théorème important va gérer le passage entre les écritures vectorielles, d'une part, et leur traduction en termes de coordonnées, d'autre part : « Tout espace vectoriel E de dimension finie sur un champ K est isomorphe à l'espace K^n des coordonnées (par rapport à une base donnée de E, n étant un naturel)». Personne ne contestera l'efficacité d'une telle organisation : l'algèbre linéaire est une théorie dont l'efficacité vient de son caractère multisens, ses théorèmes pouvant être spécifiés aussi bien dans l'étude des espaces fonctionnels qu'en géométrie. Et, par ailleurs, la géométrie va bien au delà d'une modélisation de l'espace physique et nécessite donc une formalisation plus abstraite.

La transposition didactique standardisée de la géométrie analytique 3D dans l'enseignement secondaire ressemble à une telle approche mais elle en gomme des aspects jugés trop difficiles pour les élèves. Ainsi, le théorème que nous venons de mentionner n'y est pas présent ce qui a pour effet de rabaisser au statut de « recette » le passage d'une écriture vectorielle de deux vecteurs multiples aux égalités correspondantes sur les composantes : « on barre les flèches et on déploie les égalités sur les composantes » comme le décrit un élève. Il manque donc un maillon important de l'édifice théorique, celui-là même qui permet de traduire des propriétés de vecteurs en termes de techniques propres à la géométrie analytique. La transposition didactique du secondaire est donc une organisation mathématique « à trous » au sens où l'entend Rouy[18] : cette transposition imite le discours universitaire dont elle emprunte des

[18] Rouy, E. (2007). *Formation initiale des professeurs de l'enseignement secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre l'institution secondaire et l'institution universitaire*, Thèse, Université de Liège.

éléments emblématiques, en l'occurrence des définitions du plan et de la droite en termes vectoriels, mais ne constitue pas vraiment une théorie déductive à cause des « omissions ». Par ailleurs, l'enseignement dispensé dans le secondaire ne prend pas en considération la modélisation même, vectorielle ou analytique, des objets « droite » et « plan » de l'espace « usuel ». Un fait divers me permettra de l'expliquer. Il s'agit de deux élèves forts qui mettent en cause la définition vectorielle d'un plan en arguant que la somme de deux vecteurs de l'espace ne donne pas forcément un vecteur « coplanaire » (sic !) avec les précédents parce que, dans l'espace, « le parallélogramme peut être gauche ». Qu'aurait pu répondre le professeur qui avait préalablement défini la somme de deux vecteurs par le biais des composantes ? Montrer que cette somme permet d'exprimer la coplanarité en s'appuyant sur une caractérisation synthétique du plan ? Et, s'il avait défini la somme vectorielle de deux vecteurs de « l'espace » par le biais de la règle du parallélogramme, les élèves auraient été obligés de s'incliner mais auraient peut-être demandé des comptes sur le passage d'une somme vectorielle à celles relatives aux composantes. Car, ces élèves posent là une question dont la portée épistémologique est consistante en questionnant la pertinence du modèle vectoriel pour rendre compte d'un objet, le plan, sur lequel ils briguent avoir quelque connaissance ne fût-ce qu'intuitive. Cette question se pose déjà pour la droite. Trois points alignés ont des différences de coordonnées proportionnelles. Dans la transposition habituelle, cette propriété n'a pas de nécessité liée au fait que des points alignés forment vraiment une droite au sens physique du terme, mais découle des définitions vectorielles. En se plaçant dans la perspective des deux élèves dont on vient de parler, on peut retourner la chose en disant : pour avoir le droit de définir la droite vectoriellement avec les conséquences que cela entraîne, il faudrait être certain que des points formant une ligne droite ont, dans un repère donné, des coordonnées dont les différences sont proportionnelles à moins que l'on ne se préoccupe pas de l'objet géométrique au sens commun du terme.

L'enseignement de la géométrie analytique 3D dans le secondaire est donc sujette à caution, que l'on se situe sur le plan théorique ou que l'on regarde comment les modèles algébriques d'objets géométriques sont « justifiés ». De manière générale, cet enseignement semble conduire à un « rabattement » de l'apprentissage sur des acquisitions procédurales, comme ont pu le mettre en évidence plusieurs interviews d'étudiants. Ne peut-on alors imaginer un autre type d'enseignement qui se polariserait d'entrée de jeu sur la construction même de cette modélisation d'objets géométriques ? Ne peut-on considérer que cette modélisation a un intérêt en soi, par exemple, pour constituer un formalisme qui permet de démontrer efficacement des propriétés de figures géométriques et, qu'en plus, elle constitue un marchepied intéressant pour accéder plus tard à l'algèbre linéaire. Après tout, un mathématicien qui fait des démonstrations en algèbre linéaire ne recoure-t-il pas en toute intimité, à des intuitions inspirées par des objets géométriques, même s'il ne les affiche pas ?

Là aussi, les deux types d'enseignement ont leur part de responsabilité : d'une part, les enseignants du secondaire devraient restaurer le premier niveau d'intelligibilité et, d'autre part, les enseignants universitaires devraient reconnaître l'intérêt d'un tel niveau sans exiger que les cours dispensés dans le secondaire soient une imitation de leurs propres cours. En effet, comme le montre l'exemple plus haut, cette imitation ne peut être que caduque et ne correspond à aucun niveau d'intelligibilité. Ainsi, l'absence d'identification du niveau 'modélisation' empêche une saine gestion du changement de niveau et maintient les élèves dans un no man's land mathématique où règne une absence … d'intelligibilité.