PROBLEMES DE DENOMBREMENT ET EMERGENCE DE PREMIERS MODELES FONCTIONNELS

Marysa Krysinska[*], Alain Mercier[**], Maggy Schneider[*]

ENGLISH TITLE

Abstract – The works exposed here concern the teaching of the functional modelling in the sense of a categorization of diversified phenomena, extra or intra-mathematical, by means of parametrized functional models. After an analysis *a priori* showing the opportunity of such a crenel in the teaching of the functions, double algebrisation which this process of modelling supposes, the inherent obstacles to the 'temporal variables', the ambiguity of the notion of variable and the role played by the denotation, we examine in which conditions the study of suites of figurative numbers can constitute a first approach of the modelling so thought from the first years of the secondary education. The experimental device is a part of an innovative engineering relative to the emergence of models functional as tools of categorization of diverse phenomena. The experiments in the classes bring to light several didactic variables, among which the type of mobilized functional model, the arithmetical and geometrical progress having a particular status. It is about variables there which it is better not to ignore if we want to conceive, with some chance of success, games adidactiques of initiation into the process of modelling.

Key words:

TITRE EN ESPAGNOL

Resumen – Los trabajos expuestos aquí conciernen a la enseñanza de la modelización funcional en el sentido de una categorización de fenómenos diversificados, extra o intra-matemáticos, por el rodeo de modelos funcionales definidos parámetros. Después de un análisis a priori que muestra la oportunidad de tal almena en la enseñanza de las funciones, duplicado algébrisation que este proceso de modelización supone, los obstáculos inherentes a las 'variables temporales', la ambigüedad de la noción de variable y el papel jugado por la denotación, examinamos en cuales condiciones el

[*] Ladimath, Université de Liège, Belgique.
maria.krysinska@belgacom.net – mschneider@ulg.ac.be

[**] UMR ADEF, Université de Provence, INRP, IUFM d'Aix-Marseille.
mercier@inrp.fr

estudio de séquitos de números figurados puede constituir un primer enfoque de la modelización tan pensado desde los primeros años de la enseñanza secundaria. El dispositivo experimental forma parte de una ingeniería innovadora relativa a la emergencia de modelos funcionales como utensilios de categorización de fenómenos diversos. Las experimentaciones en las clases ponen en evidencia varias variables didácticas, entre los que están el mismo tipo de modelo funcional movilizado, las progresiones aritméticas y geométricas que tienen un estatuto particular. Se trata allí de variables que vale más no ignorar si se quiere concebir, con alguna posibilidad de éxito, juegos adidactiques de iniciación al proceso de modelización.

Palabras-claves:

RESUME

Les travaux exposés ici concernent l'enseignement de la modélisation fonctionnelle au sens d'une catégorisation de phénomènes diversifiés, extra ou intra-mathématiques, par le biais de modèles fonctionnels paramétrés. Après une analyse *a priori* montrant l'opportunité d'un tel créneau dans l'enseignement des fonctions, la double algébrisation que ce processus de modélisation suppose, les obstacles inhérents aux 'variables temporelles', l'ambiguïté de la notion de variable et le rôle joué par la dénotation, nous examinons dans quelles conditions l'étude de suites de nombres figurés peut constituer une première approche de la modélisation ainsi pensée dès les premières années de l'enseignement secondaire. Le dispositif expérimental fait partie d'une ingénierie innovante relative à l'émergence de modèles fonctionnels comme outils de catégorisation de phénomènes divers. Les expérimentations dans les classes mettent en évidence plusieurs variables didactiques, dont le type même de modèle fonctionnel mobilisé, les progressions arithmétiques et géométriques ayant un statut particulier. Il s'agit là de variables qu'il vaut mieux ne pas ignorer si l'on veut concevoir, avec quelque chance de succès, des jeux adidactiques d'initiation au processus de modélisation.

Mots-clés: Modélisation fonctionnelle intra-mathématique, covariation, variable, dénotation, formules, transformations algébriques, formules équivalentes, paramétrage, catégorisation, modèles fonctionnels.

INTRODUCTION

Nous cherchons ici à étudier la genèse d'une identification et d'une caractérisation de modèles algébriques au départ du système « tableaux numériques », correspondant aux problèmes dit 'de dénombrement', dans une perspective de construction des différents modèles fonctionnels. Bien qu'ainsi nommés, les problèmes de dénombrement dont nous traitons renvoient à des suites de nombres figurés et non pas aux groupements classiques de l'analyse combinatoire. Nous les décrivons plus amplement à la section 3.2. Ces problèmes ont fait leur apparition plus ou moins récemment dans les programmes scolaires en Belgique (programmes de la Communauté française de Belgique 2000), au début des années 90. On y précise que « dans l'étude des suites (nombres triangulaires, nombres carrés), on mettra l'accent sur l'élaboration de formules ». Mais on trouvait des problèmes analogues bien avant dans des manuels anglo-saxons surtout, tels que ceux de la série *School Mathematics Project*.

Plusieurs chercheurs portent un grand intérêt aux tableaux et aux suites numériques associées. Sierpinska (1992) suggère que les élèves rencontrent la variabilité et la recherche de la régularité dans le cadre de tableaux numériques bien avant l'étude des fonctions élémentaires définies mathématiquement. Confrey et Smith (1992), dans leur article sur le taux de variation dans le cas des fonctions exponentielles, examinent une entrée alternative à la pensée fonctionnelle par l'étude de la covariation présente dans un tableau de nombres, comme étant plus opérationnelle que l'approche 'par correspondance'. Ces auteurs attestent d'une forte compréhension intuitive de la relation fonctionnelle par les élèves dans le cas du taux de variation constant des y lorsque les x augmentent d'une unité : ce taux peut être additif ou multiplicatif. Ces auteurs estiment avoir montré que les phénomènes qui sont croissants exponentiellement constituent un contexte privilégié pour diagnostiquer chez un élève sa capacité à coordonner deux 'mondes' covariants, l'un construit additivement et l'autre construit multiplicativement. Vlassis et Demonty (2002) prêtent aux problèmes de dénombrement des vertus de « tremplin vers d'autres contenus algébriques » tels que les équations, les démonstrations algébriques et les fonctions. Pour Kahane (2002), il s'agit avec ces objets d'une « initiation à la pensée fonctionnelle » :

> Le travail de production de formules, associé par exemple à des situations de dénombrement, est sans doute nécessaire pour ressentir en quoi consiste cette démarche de généralisation par passage au littéral et la puissance que nous donne le calcul algébrique, une fois la

> formule établie. En fait, ce qui est en germe ici, c'est la pensée fonctionnelle et le calcul associé. (Kahane 2002, p. 235)

Notre recherche confirme l'intérêt des suites numériques comme contexte privilégié pour introduire la covariation et, à travers celle-ci, les premiers modèles fonctionnels. Notre apport consiste à tester ces suites dans une perspective de modélisation algébrique intra-mathématique que nous allons préciser. Nous allons au-delà des questions posées par nos prédécesseurs car nous analysons en quoi et jusqu'à quel point les ostensifs associés à ces problèmes, tableaux numériques et formules paramétrées, peuvent jouer le rôle d'instruments sémiotiques de la modélisation fonctionnelle. En particulier, nous justifierons et analyserons le rôle clé joué par les progressions arithmétiques et géométriques par rapport aux autres types de suites, dans une toute première approche des problèmes de dénombrement.

Quant à la modélisation mathématique évoquée ci-dessus, les recherches qui y sont consacrées concernent le plus souvent la modélisation extra-mathématique dans le sens par exemple de *Realistic Mathematics Education* émanant du Freudenthal Institute (1993) ou du groupe de chercheurs qui a créé le projet LEMA (2007) (L'Enseignement des mathématiques dans et à travers la Modélisation et les Application), dont l'un des objectifs est d'organiser l'enseignement des mathématiques autour des problèmes d'application à la vie réelle. La modélisation fonctionnelle dont il est question dans notre recherche est une modélisation essentiellement intra-mathématique au sens de Chevallard (1989) : même si l'évocation de contextes extra-mathématiques n'est pas exclue, nous ne prenons pas en compte des aspects proprement expérimentaux. Selon Chevallard, l'intérêt d'une modélisation intra-mathématique se situe dans le fait qu'elle permet d'avoir une vue d'ensemble sur l'activité mathématique, de l'école primaire à l'université. Dans le cas de notre recherche, la modélisation intra-mathématique algébrique poursuivie depuis le début jusqu'à la fin de l'enseignement secondaire permet de mettre en place un processus de genèse de la pensée fonctionnelle.

Nos cadres théoriques et méthodologiques sont ceux que constituent, en une sorte de continuum, la théorie des situations didactiques de Brousseau, d'une part, et la théorie anthropologique de Chevallard, d'autre part. De la théorie anthropologique, nous retenons la nécessité de situer les questions de didactique dans une dimension institutionnelle large : étude de la transposition didactique, des contraintes sociétales, de l'écologie des savoirs, …, et de penser la description de l'activité mathématique, non en termes d'acquisition de concepts, mais en termes de praxéologies : réalisation de tâches au moyen de techniques; élaboration d'un discours technologique qui justifie la technique et la rend intelligible ; rôle joué par les ostensifs qui sont les instruments sémiotiques des techniques en même temps qu'ils confèrent à celles-ci leur valence instrumentale. De la théorie des situations didactiques, nous retenons le projet de situer la recherche dans une dimension fondamentale du savoir : question ou tâche en regard de laquelle il procure une économie de pensée ; la nécessité d'un recueil d'informations qui permet de faire le tri entre les productions des élèves relevant de l'existence d'un milieu et celles obtenues par effets de contrat et les ingénieries didactiques conçues comme une méthodologie de recherche basée sur une validation interne de confrontation entre analyse a priori et déroulement effectif dans les classes.

Notre analyse a priori est à la fois historique et épistémologique. Elle prend en compte les difficultés d'apprentissage mises en évidence par d'autres recherches ou que nous avons supposées a priori, aussi bien que nos hypothèses sur l'interprétation de ces difficultés et sur les conditions de leur gestion didactique.

QUELQUES ELEMENTS D'UNE ANALYSE A PRIORI GLOBALE

Une analyse a priori assez ample (Krysinska, 2007 ou Krysinska et Schneider, à paraître), au sens où l'entendent Bessot et Comiti (1985) ou, plus récemment, Assude et Mercier (2007), nous a permis un « découpage et une réduction des faits à observer en fonction des questions posées par la recherche ». Dans le cadre de cet article, nous nous contentons de résumer quelques aspects de cette analyse, ceux auxquels nous faisons référence pour interpréter ce qui s'est passé dans les classes.

1. Les modèles paramétrés comme outil de catégorisation de phénomènes divers

A l'instar de Schneider (1988), nous considérerons la modélisation comme la standardisation et la catégorisation de phénomènes divers au moyen de quelques ostensifs, parfois spécifiques et relevant au mieux du symbolisme algébrique. Nous prenons ici le parti de considérer que cette catégorisation de phénomènes divers, qu'ils soient intra ou extra-mathématiques, est une des situations fondamentales, au sens de Brousseau, que l'on peut associer à l'apprentissage du concept de fonction et c'est sur cet aspect que nous focaliserons ce que nous entendons personnellement par 'pensée fonctionnelle'. Ainsi, c'est bien un même processus de modélisation qui va permettre d'unifier, dans la même classe des fonctions du second degré, le problème de la chute libre d'un corps et celui de l'aire de rectangles isopérimétriques ou encore, de reconnaître que deux suites de nombres figurés relèvent tous deux d'un même type de progression qu'elle soit arithmétique, géométrique ou autre.

La modélisation fonctionnelle ainsi entendue suppose une double algébrisation. D'abord celle des variables : c'est, en effet, l'identification d'une variable indépendante et d'une variable dépendante, leur standardisation autant que leur discrimination par les lettres conventionnelles respectives x et y qui permettent d'unifier des problèmes où a priori des grandeurs diverses sont représentées par des lettres qui abrègent les mots qu'elles désignent : t pour le temps, V pour un volume, etc. Mais la modélisation dont nous parlons suppose une deuxième algébrisation : celle des constantes numériques intervenant dans la formulation spécifique des problèmes considérés, constantes auxquelles on fera jouer le rôle de paramètre. Un paramètre peut changer de valeur d'un problème à l'autre mais il garde une valeur constante au sein d'un même problème. C'est précisément cette double algébrisation qui, d'après Desclé et Cheong (2003), rend si efficace la contribution de Viète. Dans l'étude concernée ici, c'est effectivement le paramétrage d'un modèle qui permet non seulement d'unifier des problèmes divers mais aussi d'introduire une marge de liberté autorisant l'oubli momentané de certaines contraintes spécifiques du problème auxquelles il s'agira d'ajuster *in fine* le modèle général. Aussi, comme le montre notre analyse a priori, cette modélisation est une démarche qui rencontre plusieurs difficultés : dans la reconnaissance du modèle fonctionnel approprié à partir de l'un ou l'autre des ostensifs numériques ou graphiques associés, dans le choix de son expression et de ses paramètres, dans la hiérarchisation et l'ordre de prise en compte des conditions qui permettent de les déterminer et dans l'ajustement des paramètres aux contraintes spécifiques du problème.

2. Variables temporelles, ambiguïté de la notion de variable et dénotation

En amont de la double algébrisation que nous venons de décrire se situe l'idée d'une variation ou plutôt celle d'une 'covariation' qui évolue vers une dépendance entre les variables nommées dépendante et indépendante. Comme il ne peut être question, à ce stade, de l'apprentissage de la fonction sous sa forme mathématique achevée (en termes de triplet d'ensembles (G,E,F) où E et F sont deux ensembles et G est une partie du produit cartésien $E\times F$), l'expression d'une covariation est tributaire d'un ensemble de connotations qui sont aujourd'hui étrangères au concept lui-même mais qui semblent inévitables dans le mouvement de sa construction et dont nous avons analysé les retombées en termes d'apprentissage.

Ayant étudié des difficultés d'apprentissage liées au concept de fonction au sein d'un champ conceptuel beaucoup plus vaste où les concepts de limite, de dérivée, d'intégrale définie et de primitive sont étudiés comme modèles mathématiques de grandeurs, Schneider (1988) a montré le rôle particulier que joue la 'variable temps' dans l'appréhension d'une covariation. Tout d'abord, parce que seules les grandeurs qui varient dans le temps semblent évoquer chez les élèves une quelconque idée de variation. L'auteur contraste, de ce point de vue, le calcul d'un débit dont la variabilité, induite par les variables didactiques du problème, est mise spontanément sur le tapis par des élèves du secondaire et le calcul de l'aire sous une courbe, difficilement considérée par eux comme fonction de l'abscisse alors que ce point de vue fournit la clé du théorème fondamental de l'analyse. Ensuite, ce même auteur a observé, chez les mêmes élèves, la propension à associer variation et références au temps même là où la variable temps est absente : par exemple, les rares élèves qui parviennent à interpréter pourquoi dériver l'aire d'un disque par rapport à son rayon conduit à l'expression de son périmètre, parlent de cercles ajoutés successivement comme « accroissement instantané » du disque. Dans ces cas de figures, le temps n'est pas le temps du physicien dont la mesure étalonnée est prise en compte dans le calcul, mais tout simplement cette variable transparente qui varie inéluctablement quoi qu'on fasse et qui s'apparente, plus ou moins consciemment, au temps du déroulement de la pensée (au sens de Hauchart et Rouche, 1987). Ainsi, de telles références temporelles, dont l'importance a été confirmée dans d'autres recherches : e.a. Sierpinska (1992) et Vitale (1994), peuvent servir de marchepied pour concevoir la variation d'une grandeur. Cependant, ces références 'spontanées' peuvent également faire obstacle au concept même de fonction, lequel suppose de dissocier et relier à la fois variable indépendante et variable dépendante et de les considérer toutes deux, fussent-elles ou non le temps, comme variables numériques dont les valeurs se doivent d'être 'respectées', en un sens que nous préciserons, par l'expression analytique de la fonction. Pour pointer cette difficulté d'apprentissage, nous désignerons par *variable temporelle* une grandeur que l'on perçoit intuitivement comme variable au cours d'un 'temps' non numérisé ; lequel ne peut, de ce fait, jouer le rôle d'une véritable variable indépendante d'une quelconque grandeur, fonction du temps. Ce pseudo 'temps' non numérisé n'est pas forcément un continu pouvant être constitué par la considération d'une succession d'étapes à l'occasion de l'étude d'une suite de nombres.

La notion de variable temporelle renvoie donc à l'ambiguïté dont la notion de variable a fait l'objet dans l'histoire des mathématiques. Pour Serfati (2005), la notion de variable introduite par Leibniz, avec des connotations cinématiques, est une réponse symptomatique à ce qu'il appelle la « contradiction inaugurale » soulevée par l'écriture symbolique de deux concepts « jusqu'alors (le moment de l'apparition des travaux de Viète) considérés comme opposés, l'arbitraire et le fixé ou, plus significativement, le quelconque et le singulier ». Cette contradiction se pose en des termes nouveaux depuis que le symbolisme algébrique introduit par Viète à la fin du XVIe siècle permet de représenter par des lettres non seulement des inconnues à déterminer, mais aussi des données, considérées ainsi comme arbitraires. Se formule alors la contradiction soulevée par le fait de représenter par une lettre quelque chose qui relève à la fois de l'ordre du « donné » et de celui du « générique » ou de « l'indéterminé », à l'instar des figures géométriques assorties d'un discours rhétorique. C'est là que Serfati situe l'introduction de la notion 'cinématique' de variable :

> […] la nature même de l'interprétation de la « lettre » comme indéterminé, ce que nous avons appelé supra l'assomption historique d'une contradiction, demeura problématique. Il arriva alors ceci : le concept (pseudo-concept ?) d'indéterminé fut simplement habillé d'un terme commode, mais ambigu, qui apparut à la fin du XVIIe siècle avec Leibniz, celui de 'la variable', un terme encore employé adjectivement dans une expression comme la grandeur 'variable' ; ainsi opposé à 'constante', le terme connut dès lors un succès considérable, sans doute lié au fait qu'il est accompagné d'une connotation cinématique intuitive forte, celle d'une quantité qui pourrait par hypothèse 'prendre toutes ses valeurs' à l'intérieur d'un certain champ. (Op. cité, p. 177)

Il est à noter que c'est précisément cette connotation cinématique qui rapproche la variable chez Leibniz de ce que nous avons nommé des variables temporelles, connotation que Bolzano incriminera comme étant étrangère aux mathématiques. À ceci près, et la différence est de taille, que seules les variables de Leibniz se prêtent à ce que Sackur et al. (1997) appellent la dénotation dans le contexte des apprentissages algébriques : une expression algébrique telle que $y(2x+y)$ dénote dans le sens où elle possède une valeur numérique dès que l'on remplace x et y par des valeurs numériques, que les valeurs de l'expression dépendent des valeurs des variables et que les premières ne sont pas modifiées par les transformations que peut subir cette expression, du moment que celles-ci sont conformes aux règles du calcul algébrique. Ces chercheurs ont mis en évidence, à la suite de Chevallard (1989), que l'écueil majeur de l'algèbre réside dans le fait que les élèves ignorent que les expressions algébriques dénotent. Si l'on ne peut douter que la dénotation n'échappe pas à Leibniz, il ne peut en être question dans les variables temporelles : en effet, si celles-ci peuvent renvoyer à des valeurs numériques, ces dernières ne dépendent en aucune manière d'une quelconque valeur attribuée au temps car, dans ce contexte, celui-ci constitue une variable transparente et non pas une variable indépendante explicite dont dépend la variable considérée.

3. Des modèles fonctionnels particuliers

Selon les programmes belges pour les deux premières années de l'enseignement secondaire (Programme de la Communauté française de Belgique 2000), l'initiation aux premiers modèles fonctionnels se fait par le biais des ostensifs « tableaux numériques ». Ces tableaux servent à introduire une forme algébrisée d'un modèle fonctionnel approprié suite à la recherche de leur régularité. Une telle recherche est facilitée lorsque les valeurs de la variable indépendante sont non seulement entières mais aussi situées en progression arithmétique. Or, de tels tableaux correspondent aux suites numériques, dont certaines peuvent être catégorisées en classes. L'algébrisation de ces classes permet d'introduire la notion de modèle fonctionnel et, à cette occasion, de traiter des statuts différents des lettres utilisées dans les formules : les unes seront les ostensifs des variables indépendantes, les autres seront ceux des paramètres.

Dans notre analyse a priori, nous allons étudier quelques critères relatifs aux tableaux numériques selon lesquels, du point de vue du but visé, les divers modèles fonctionnels se comportent de manières différentes. Nous reprenons ci-dessous quelques-uns d'entre eux qui font apparaître les modèles $a+bn$ et $a.b^n$ comme des modèles à privilégier dans un premier dispositif didactique axé sur les problèmes de dénombrement.

Des modèles qui se prêtent à une double lecture des tableaux : une lecture liée à la régularité itérative et une lecture liée à la régularité fonctionnelle

Les tableaux 1 et 2 correspondent à des suites numériques et offrent deux possibilités de lecture qui débouchent sur des formules-modèles. La première lecture, qui caractérise le regard fonctionnel, consiste à voir, dans chaque colonne, le lien entre le numéro de l'étape et le nombre lui correspondant : elle peut être basée sur une interprétation de calculs bruts en termes d'invariants et de variants: il s'agit de répéter un format de calcul dans lequel on multiplie 4 par un nombre inférieur d'une unité au rang dans le premier tableau ou dans lequel on exponentie par ce nombre dans le second tableau. La deuxième lecture, qui est itérative, consiste à interpréter un tableau comme description de la règle de passage d'un terme au suivant dans la suite qui y est décrite. Dans le tableau 1, il s'agit d'additionner un même nombre, 4, de manière répétée ; dans le tableau 2, il s'agit de multiplier par un même nombre, 3, de manière répétée. Dans chacun des deux tableaux, la lecture itérative conduit à la même formule que la lecture fonctionnelle, respectivement $5+(n-1).4$ et 2.3^n.

Étape	1	2	3	4	…
Nombre	5	5+4	5+2×4	5+3×4	…

Tableau 1

Étape	1	2	3	4	…
Nombre	2	2.3	2.3^2	2.3^3	…

Tableau 2

Cette possibilité de double lecture peut être retrouvée dans tous les tableaux correspondant aux fonctions dont on peut extraire des sous-suites de type arithmétique ou géométrique, mais on remarque que l'ignorance de l'exponentiation peut faire problème et que, sans doute, cette lecture sera bien plus difficile et plus rare.

Mais tous les tableaux ne se prêtent pas à une double lecture. Ainsi, en ce qui concerne le tableau 3, seule une lecture itérative est efficace a priori : elle s'appuie sur la remarque que, pour passer d'un terme à l'autre, on ajoute un nombre plus grand d'une unité à chaque fois.

Étape	0	1	2	3	4	…
Nombre	0	0+1	0+1+2	0+1+2+3	0+1+2+3+4	…

Tableau 3

Cette interprétation conduit à l'expression d'une somme : $1+2+\ldots+n$ qui n'est pas la forme fonctionnelle du terme général de la suite, soit $\frac{n(n+1)}{2}$. Cette dernière expression, de la forme an^2+bn, peut difficilement s'appréhender par une lecture verticale, que le tableau soit net ou brut. Elle se conjecture par une technique, 'classique' pour qui la connaît, mais dont l'invention requiert suffisamment d'ingéniosité pour qu'il soit préférable de l'enseigner et de l'apprendre : il s'agit, par exemple, d'additionner deux sommes du type $1+2+\ldots+n$ en couplant leurs termes respectifs 'équidistants' des extrémités dont la somme vaut chaque fois $1+n$. On peut également associer les nombres du tableau à des configurations triangulaires de points, mais là aussi, il faut y penser… Bref, ce tableau se prête mal a priori à une lecture fonctionnelle.

D'une manière générale, dans notre analyse faite dans Krysinska (2007) nous avons argumenté pourquoi les tableaux qui se modélisent par une expression de la forme an^2+bn sont difficilement accessibles aux élèves au début de l'enseignement secondaire.

Le tableau 4, correspondant à la suite n^3, se prête peu, quant à lui, à la recherche d'une régularité itérative. Par contre, la régularité fonctionnelle peut être assez immédiate à condition d'observer que les nombres 1, 8 ou 27 sont les cubes respectifs des numéros d'étape.

Étape	1	2	3	4	…
Nombre	1	8	27	64	…

Tableau 4

L'examen des tableaux précédents nous amène à distinguer la régularité itérative et la régularité fonctionnelle. Toutes les deux sont identifiables dans le cas des tableaux correspondant aux suites arithmétiques et aux suites géométriques, modulo, bien sûr, l'existence d'un procédé de calcul déjà identifié et maîtrisé qui permette de le faire ou, à défaut, d'un outil qui le fournisse. Expliquons cela en contrastant suite arithmétique et suite géométrique. Dans le premier cas, on dispose de la multiplication des entiers qui est apprise par la mémorisation des fameuses 'tables' ou autres procédures écrites et antérieurement travaillées comme opération qui permet de remplacer une addition répétée : $n.a$ renvoie au produit de n par a, substitut de l'addition de n termes égaux à a. Dans le cas d'une suite géométrique, c'est le calcul d'une puissance a^n qui permet de remplacer le produit de n facteurs égaux à a mais comment calculer cette puissance sans passer précisément par une multiplication itérative ? Resterait donc à apprendre des 'tables' de puissances ou, à défaut, d'appuyer sur une touche de calculatrice !

Des modèles fonctionnels auto-technologiques

Peut-on valider un modèle fonctionnel sur la base d'un tableau numérique ? Considérons cette question en un sens étroit et non pas en référence à un quelconque critère d'adéquation d'un modèle approché tel le critère des moindres carrés. La réponse à cette question est évidemment non. Un tableau, à cause de son caractère 'fini', peut en principe donner lieu à plusieurs modèles fonctionnels. Cependant, la fonction non linéaire qui coïnciderait avec les données serait, même du point de vue mathématique pur, d'une complexité improbable, pire encore du point de vue du phénomène modélisé. De plus, en supposant la permanence de la régularité observée sur l'ensemble fini des couples du tableau, il arrive que l'on puisse valider l'existence d'un modèle paramétré unique correspondant au tableau initial. Par exemple, un tableau où toutes les valeurs vérifient la relation $f(x_1+x_2) = f(x_1)f(x_2)$ caractérise bien le modèle exponentiel si l'on suppose que cette relation reste vraie pour toutes les valeurs réelles en dehors du tableau et qu'on fait une hypothèse de monotonie sur le modèle ; de même, la relation $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$ caractérise le modèle linéaire dans les mêmes conditions.

Dans les suites numériques, qu'elles soient figurées ou non, la seule régularité directement 'accessible' est la régularité itérative qui précise la manière dont on passe d'un terme au suivant : par exemple, en ajoutant un même nombre ou un nombre plus grand d'une unité à chaque fois ou encore son carré, en multipliant par un même nombre, etc. Le but est alors de trouver une formule qui lie directement un terme quelconque à son numéro d'étape devenu ainsi son indice, permettant d'éviter de calculer successivement les valeurs associées à chacune des étapes précédentes. Cette formule peut être validée par le principe de récurrence, si on travaille dans le modèle mathématique qu'elle représente. Ainsi établira-t-on que :

$1+4+9+...+n^2 = n(n+1)(2n+6)$ et que $1+8+27+...+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Pour la somme des n premiers nombres entiers, soit $\frac{n(n+1)}{2}$, nous avons évoqué plus haut deux procédés qui permettent d'éviter la récurrence mais qui demandent une certaine ingéniosité. Bref, la validation de tels modèles fonctionnels pour représenter des suites de nombres requiert des raisonnements qui ne sont pas les enjeux d'un premier enseignement de modélisation visé ici. En outre, les formules validées ainsi ne rappellent en rien ce qui est fait pour passer d'une étape à l'autre.

Cependant, les modèles $a+bn$ et ab^n échappent aux considérations précédentes. En effet, les formules qui modélisent ces suites conservent la mémoire des opérations effectuées d'une étape à l'autre : par exemple, dans les écritures respectives $5+(n–1).4$ et 2.3^{n-1}, on retrouve l'idée qu'on a « ajouté 4 à 5 ou multiplié 2 par 3 et cela $n-1$

fois de suite ». En outre, ces formules ont une valeur ajoutée 'technologique', en ce sens qu'elles sont en elles-mêmes des preuves : connaissant la régularité itérative du tableau, le n^e terme de la suite ne peut s'écrire qu'ainsi puisque la formule ne fait qu'exprimer comment le tableau se construit au départ de cette régularité. Les autres exemples de suites évoqués supra permettent, *a contrario*, de bien comprendre ce fait. En même temps, en fonction de ce qui a été dit plus haut, si les formules liées aux progressions arithmétiques ou géométriques donnent la manière de calculer directement le terme général à partir de son indice, c'est grâce à l'existence d'ostensifs qui permettent de 'condenser' l'itération d'une même opération : $(n–1).4$ exprime l'addition de $(n–1)$ termes égaux à 4 et 3^{n-1} signifie le produit de $(n–1)$ facteurs égaux à 3. Nous verrons plus loin que la disponibilité ou l'indisponibilité de tels ostensifs et des notions associées est une variable didactique importante dans la reconnaissance du modèle fonctionnel concerné.

Nous conclurons cette section en disant que les modèles fonctionnels $a+bn$ et ab^n jouissent de propriétés intéressantes dont ils ont le monopole : non seulement, ils se prêtent à une double lecture, mais ils constituent aussi des modèles dont l'expression rend compte et valide à la fois la régularité itérative et le principe de la construction du tableau numérique. Nous en tirerons l'hypothèse qu'ils constituent des modèles fonctionnels sans doute plus accessibles que d'autres lors d'une première approche des problèmes de dénombrement.

Par rapport aux travaux de Confrey et Smith (1994) qui ont privilégié la régularité itérative sous forme du taux de variation (additif ou multiplicatif), notre analyse montre l'intérêt et l'importance de la double régularité, aussi bien itérative que fonctionnelle.

L'EXPERIMENTATION : LE DISPOSITIF ET SES VARIABLES DIDACTIQUES, LES CONDITIONS

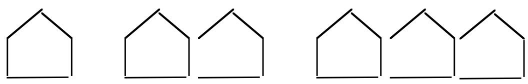
1. Les conditions institutionnelles et les questions posées

L'expérimentation dont il est question ici s'est déroulée en Belgique, dans les classes de la $1^{\text{ière}}$ année du secondaire. Imposés par le programme, les problèmes de dénombrement sont actuellement exploités par plusieurs professeurs, même si, comme le précise Schneider (à paraître), la perspective envisagée par ces derniers est plus celle d'une 'résolution de problèmes', une sorte de 'cerise sur le gâteau', que celle de l'identification institutionnalisée de certains modèles fonctionnels.

Vu ces conditions, nous avons pu intégrer notre expérimentation dans une pratique de terrain, tout en précisant aux professeurs concernés quelles étaient nos intentions. Cela nous a permis d'observer les gestes didactiques relevant d'une épistémologie spontanée et dont nous analysons le caractère mésogène en regard de la modélisation fonctionnelle telle qu'entendue ici.

Pour constituer un dispositif expérimental, nous avons puisé des exercices dans les programmes ou les manuels belges. Cela nous a semblé opportun dans la mesure où nous voulions travailler avec des enseignants intéressés par l'expérience mais soucieux de respecter le programme et de suivre les manuels utilisés dans leurs écoles respectives. A priori, nous avons sélectionné six exercices, même si nous avons laissé les professeurs libres d'en choisir d'autres. Nous en donnons ci-dessous les énoncés sous une forme plus ou moins proche de celle sous laquelle ils apparaissent dans les sources mentionnées, forme que nous commentons dans l'analyse qui suit les énoncés.

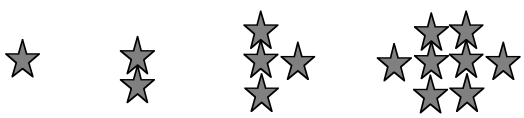
> Voici quelques suites d'objets. Dans chaque cas, on a une suite d'objets dont le nombre augmente à chaque étape. On cherche à, déterminer le nombre d'objets à n'importe quelle étape ultérieure, aussi éloignée soit-elle, la 10e étape ou la 37e étape, par exemple.



1e étape *2e étape* *3e étape*

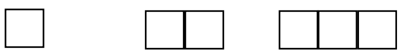
Figure 1. – Suite de maisons construites avec des allumettes

À quelle étape utilisez-vous exactement 117 allumettes ?



1e étape *2e étape* *3e étape* *4e étape*

Figure 2. – Suite d'étoiles



1e étape *2e étape* *3e étape*

Figure 3. – Suite de carrés construits avec des allumettes

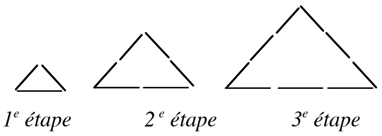


Figure 4. – Suite de triangles construits avec des allumettes

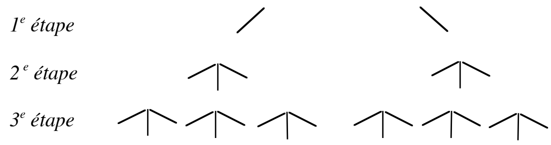


Figure 5. – Suite de segments formant un diagramme en arbre

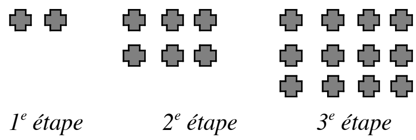


Figure 6. – Suite de croix

Selon quels critères peut-on classer ces six suites d'objets ?

2. Variables didactiques globales

Les énoncés repris dans la section précédente sont constitués d'une suite de figures (ou motifs) auxquelles sont associées des « étapes ». Ces figures sont formées par des assemblages d'objets dont le nombre augmente à chaque étape. La première question consiste à demander combien d'objets comportera la figure correspondant à une étape ultérieure. Il s'agit d'une formulation assez standard de tels problèmes de dénombrement. Souvent, les figures sont censées être suffisamment évocatrices, même s'il arrive qu'elles soient commentées par un discours explicatif tel que : « Observez bien la manière dont chacun des motifs suivants a été constitué : chaque extrémité du motif précédent donne naissance à un segment se terminant par deux nouvelles extrémités » (De Redon 2007). La première différence importante avec la présentation ordinaire de ces questions sous la forme d'exercices tient au fait qu'ici, ils sont présentés ensemble et constituent donc 'un grand problème' pour la classe. De ce fait, il ne s'agit plus d'en résoudre un mais d'imaginer comment les résoudre tous. Ils constituent ainsi un corps de problèmes dont l'étude nécessite la production de savoirs spécifiques. Nous retrouvons ici par exemple les questions d'ordinaire oubliées de ce qu'est une stratégie de dénombrement (Briand 1993 et 1999), qui suppose une description systématique de la collection d'objets à dénombrer, qui en donne soit une liste à mettre en bijection avec la liste des nombres. soit une décomposition en éléments de cardinal connu. Ce que montre bien la suite de l'analyse. C'est ce type de travail que l'on nomme d'ordinaire sans y penser un 'classement' et qui est le geste premier du travail combinatoire.

La constitution même des figures joue un rôle dans le dénombrement des objets. D'abord, ceux-ci peuvent former, par paquets, des figures intermédiaires représentant des configurations géométriques ou des objets identifiés par les élèves : les allumettes peuvent former des « maisons », des « carrés » ou des « triangles » ; les branches forment des 'ramifications' de l'arbre ; par contre, les étoiles semblent disposées de manière plutôt aléatoire modulo le fait que le logiciel graphique les 'aimante' l'une à l'autre d'une manière particulière.

De plus, dans le cas où les objets à dénombrer formeraient des objets intermédiaires, le nombre de ces derniers peut être ou non, à chaque étape, égal au numéro de celle-ci : ainsi, à la figure 1, il y a une maison à la première étape, deux maisons à la deuxième, et ainsi de suite. Mais, dans ce cas, le premier objet intermédiaire joue un rôle à part comportant plus d'objets à dénombrer que les objets intermédiaires ajoutés aux étapes suivantes. Par contre, dans le cas des triangles construits avec des allumettes, il n'y a qu'un seul triangle à chaque étape, la différence d'une étape à l'autre résidant dans le nombre d'allumettes nécessaires pour construire chacun d'eux.

Enfin, il arrive que ce soit la disposition des objets qui détermine la règle de passage d'une figure à l'autre ou qui dicte la régularité fonctionnelle. Ainsi, les croix du dernier exemple forment un rectangle à chaque étape, obtenu à partir du précédent en lui ajoutant une ligne et une colonne ou bien un rectangle dont le nombre de lignes est égal au numéro de l'étape et le nombre de colonnes est supérieur de une unité. La suite des figures de la figure 7 correspond au même nombre de croix que dans les configurations précédentes, mais ne se prête pas à la même lecture, ce qui montre le caractère non neutre de la disposition des objets.

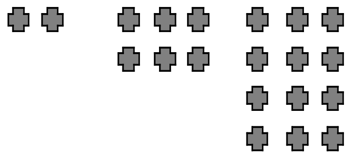


Figure 7. – Les croix

Il en serait de même de croix disposées aléatoirement. Outre la disposition en motifs, le nombre de motifs successifs peut aussi jouer un rôle : si les élèves n'interprètent pas la régularité des configurations de croix, il pourrait être utile de leur montrer le rectangle de l'étape suivante constitué de 5 colonnes et de 4 lignes. Car la formule exprime une règle de formation des éléments de la suite qui n'est pas décrite autrement que comme loi observable de production des configurations. Toute formule apparaît alors comme écriture de la relation fonctionnelle qui donne le nombre cherché. Deux écritures algébriques différentes doivent donc, par principe, correspondre à la même relation fonctionnelle. Autrement, il y aurait plusieurs relations fonctionnelles pouvant correspondre à une liste donnée. Nous avons constaté l'ambiguïté qui peut être inhérente à la donnée d'un nombre trop petit de motifs.

Ces quelques particularités qui favorisent, tantôt une lecture récurrente, tantôt une lecture fonctionnelle du tableau de valeurs, peuvent être ou non soulignées par le titre de l'énoncé : « Suite de maisons construites avec des allumettes » *versus* « Suite d'étoiles » : dans le premier, on mentionne à la fois les objets à dénombrer et les objets intermédiaires et, dans le second, on ne mentionne que les premiers. Dans les énoncés précédents, nous avions choisi des titres à l'adresse des professeurs, pour référer plus commodément aux divers problèmes, en leur laissant la liberté de les garder ou non pour leurs élèves. Les deux cas de figures se sont produits. On aurait pu être plus explicite encore en invitant l'élève à dénombrer des objets en référence au nombre d'objets intermédiaires qu'ils forment, égal au numéro de l'étape, comme c'est le cas dans l'énoncé suivant : « Trouve un moyen qui te permettra d'obtenir le nombre de chaises quel que soit le nombre de tables » (Vlassis et Demonty 2002) à propos d'une suite figurée de tables et de sièges :

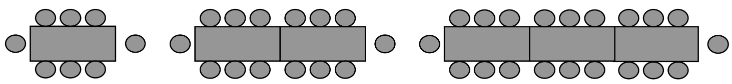


Figure 8. – Les tables et les chaises

Ces différences d'un problème à l'autre constituent autant de variables didactiques analysées a priori. Il est utile de les relever car elles peuvent expliquer que certaines configurations sont plus difficiles à décoder que d'autres, comme nous le verrons plus loin en analysant les énoncés séparément, même si le petit nombre d'expérimentations faites ne nous permet pas de trancher sur l'impact de chacune de ces variables.

Par ailleurs, il est d'autres variables didactiques qui nous paraissent tout aussi fondamentales pour notre propos.

Une premier choix de valeur d'une variable didactique, conforme à notre intention et notre analyse antérieure consiste à se limiter principalement à des suites soit arithmétiques, soit géométriques. Cependant, voulant éviter de confiner l'univers des suites à ces deux seuls types, nous avons introduit un 'intrus' : la suite des croix qui n'est ni arithmétique, ni géométrique. Nous attendons qu'elle apporte un contraste, favorisant l'abstraction autant par différenciation que par association et faisant prendre conscience aux élèves qu'une suite peut n'être ni arithmétique, ni géométrique.

Un deuxième choix de valeur d'une autre variable didactique porte sur la présence à la fois d'énoncés où les objets à dénombrer forment des objets intermédiaires et d'énoncés où ce n'est pas le cas. Des premiers, nous attendons des réponses multiples qui vont amener à poser la question des transformations algébriques – pour autant que les problèmes soient judicieusement choisis – et des seconds, nous attendons l'émergence d'une stratégie de dénombrement basée sur le comptage net d'objets à chaque étape et l'identification d'une régularité itérative, technique très efficace dans le cas des suites arithmétiques et géométriques pour lesquelles il suffit de contrôler que, pour passer d'un terme quelconque de la suite au suivant, on additionne le même nombre ou on multiplie par le même nombre.

Une troisième choix de valeur d'une variable didactique consiste à demander le nombre d'objets à des étapes lointaines pour que le dénombrement en extension ne soit plus possible et pour que les élèves soient obligés de formuler une procédure de calcul.

Enfin, nous avons complété cette dernière question par d'autres : d'abord, la question 'à l'envers' pour demander, par exemple, à quelle étape il y a autant d'allumettes ; ensuite, une question assez inhabituelle au début de l'école secondaire, celle du classement des suites en catégories. Notre intention est de voir dans quelle mesure ces questions favorisent la catégorisation fonctionnelle au sens décrit plus haut et l'identification des modèles fonctionnels en jeu. Si nous avons réuni les conditions pour que la découverte cartésienne relative au degré d'une expression se reproduise (Descartes 1931), cette identification devrait s'appuyer sur la forme algébrique d'une formule réduite.

En résumé, le choix des suites figurées a été guidé par les variables didactiques suivantes :

- la disposition des objets en figures intermédiaires dont le nombre est égal ou non au numéro d'étape (dans le cas de certaines suites) ;
- la disposition d'objets qui favorise soit la lecture fonctionnelle, soit la lecture itérative, soit les deux à la fois ;
- le choix des progressions arithmétiques et géométriques et d'un 'intrus' ;
- la question relative au nombre d'objets à une étape lointaine ;
- la question inverse : le nombre d'étapes pour un nombre d'objets donné ;
- les suites d'objets qui donnent lieu à des écritures multiples dont il va falloir examiner l'équivalence ;
- l'activité de classement avant et après la synthèse faite par le professeur.

Examinons à présent les situations dévolues aux élèves, une par une, pour voir comment les variables didactiques mentionnées supra se conjuguent dans chacune d'elles.

3. Analyse des questions, une à une

Suite de maisons

Nous avons choisi d'abord cette situation (figure 1) dont le modèle est une suite arithmétique de premier terme 5 et de raison 4 car elle se prête à des interprétations multiples, à cause de deux entités discernables : maisons et allumettes. Voici trois stratégies possibles.

On reconnaît la loi de passage d'une étape à l'autre qui consiste à ajouter toujours 4 allumettes. Ainsi, après un certain nombre d'étapes, le nombre d'allumettes ajoutées est un multiple de 4. À la première étape, il y a 5 allumettes. Aux suivantes, il faut ajouter 4 allumettes autant de fois qu'il y a d'étapes moins 1. Donc, à la n^e étape, on a $5+4(n-1)$ allumettes.

On regarde la première maison au même titre que les autres : le comptage des maisons dicte celui des allumettes, à ceci près que toutes les maisons sont construites avec 4 allumettes sauf la première qui en comporte 5. Ainsi, à la n^e étape, on a $1+4n$ allumettes.

On observe que le nombre de maisons correspond au nombre d'étapes et que chaque maison utilise 5 allumettes ; on multiplie donc le nombre d'étapes par 5. Mais comme deux maisons contiguës possèdent une allumette commune comptée ici deux fois, on doit la retirer autant de fois qu'il y a de passage d'une maison à l'autre. Ce raisonnement fournit une troisième formule : $5n–(n–1)$.

Comparons ces trois structures de calcul. La première formule suit le comptage net : 5, 9, 13, … . En effet, on y retrouve les cinq allumettes de la première maison et les quatre allumettes ajoutées autant de fois qu'il y a d'étapes supplémentaires. Ce comptage privilégie la lecture itérative de la suite. La deuxième formule s'appuie sur un artifice qui consiste à décomposer les allumettes de la première maison en la somme d'une allumette et de quatre autres, ce qui permet de suivre le comptage des maisons. La troisième procédure suit ce comptage, mais, à la place de l'artifice, consiste à retirer les allumettes comptées en double. Dans ces deux derniers cas, la lecture fonctionnelle du tableau correspondant est privilégiée : le nombre d'étapes est égal au nombre de maisons, le nombre d'allumettes dépend du nombre de maisons.

La question « À quelle étape utilisez-vous exactement cent dix-sept allumettes pour construire des maisons de cette suite ? » force les élèves à penser à la structure générale du calcul. En effet, pour obtenir la réponse, il faut penser 'à l'envers', c'est-à-dire, par exemple, soustraire 5 allumettes et diviser le nombre obtenu par 4 ce qui donne 28 étapes en plus de la première, soit 29 étapes, ou encore soustraire 1 allumette et diviser le nombre obtenu par 4 ce qui conduit à la même réponse.

Pour raisonner ainsi, les élèves n'ont pas besoin d'une formule algébrique mais seulement d'un programme de calcul. Ce programme peut s'exprimer par l'ostensif que nous appellerons *formule pré-algébrique* qui doit fournir le nombre d'allumettes en fonction du numéro d'étape. Dans le cas étudié ici, on peut prévoir trois variantes d'une telle formule :

5 + 4.(nombre d'étapes–1)

ou

1 + 4.nombre d'étapes

ou

5.nombre d'étapes – (nombre d'étapes–1)

Passage à l'écriture littérale

L'introduction d'une lettre à la place du 'nombre d'étapes' peut être légitimée par le besoin d'avoir des règles algébriques permettant de transformer un programme de calcul en un autre plus simple qui lui est équivalent. Ce passage à l'écriture littérale donne trois formules $5+4.(n–1)$, $1+4.n$ et $5n–(n–1)$ qui sont équivalentes. En effet, elles fournissent le même nombre d'objets parce qu'elles correspondent aux trois comptages différents d'une même collection d'objets, ce que les élèves peuvent vérifier pour plusieurs étapes. Pour faire une économie de pensée, on a besoin de règles algébriques qui permettent de simplifier certaines formules sans nécessairement passer par la recherche des programmes de calcul équivalents plus simples. Cela peut être réalisé par l'appui sur la dénotation de la manière suivante :

- Les formules $5+4.(n-1)$ ou $1+4.n$ ou $5n-(n-1)$ prennent, chacune, des valeurs numériques différentes.
- Ces valeurs dépendent de la valeur donnée à la variable n impliquée dans la formule.
- Les règles algébriques qui permettent de transformer $5+4.(n-1)$ en $1+4.n$ ou $5.n-(n-1)$ en $1+4.n$ sont choisies de telle manière qu'une valeur de la formule $5+4.(n-1)$ correspondant à une valeur de la variable n n'est pas modifiée par les transformations conformes à ces règles. Par exemple, à partir de l'égalité $5+4.(n-1) = 1+4.n$, on établit la règle de 'distribution' du facteur 4 sur chacun des termes de la parenthèse $5+4.(n-1) = 5+4.n-4$. On regroupe alors 5 et – 4 ce qui nous conduit à $1+4.n$. D'une manière analogue, l'égalité $5.n-(n-1) = 4.n+1$ permet d'établir la règle du changement de signe à l'ouverture d'une parenthèse précédée du signe moins : $5.n-(n-1) = 5.n-n+1$, et la règle du regroupement des termes semblables, $5.n-n+1 = 4.n+1$

Ainsi, en choisissant les transformations algébriques qui conservent l'équivalence des formules sur la base de la dénotation de ces dernières, on met en place deux idées majeures de l'algèbre :

- on utilise la lettre n dans le sens d'une variable.
- on instrumentalise la lettre comme ostensif qui réduit un programme de calcul en une formule aisément transformable en d'autres formules équivalentes.

On a là, grâce à la dénotation, une démarche qui ne se cantonne pas au modèle mais qui joue sur une dialectique entre système modélisé et modèle. Nous verrons plus loin que le système invalide plus les règles algébriques 'incorrectes' qu'il ne valide les autres.

Suite d'étoiles

Cette suite (figure 2) a été choisie pour sa structure multiplicative ; il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

La disposition des étoiles sur le dessin de la figure 2 est peu évocatrice. En effet, d'un premier regard, il est difficile de s'apercevoir que ce nombre double d'une étape à l'autre lorsque, comme nous l'avons dit plus haut, les étoiles sont disposées presque en quinconce. Reste le dénombrement net, assez parlant : 1, 2, 4, 8, …

Une autre disposition des étoiles (figure 9) suggèrerait immédiatement le doublement d'une étape à l'autre.

1^{e} étape 2^{e} étape 3^{e} étape 4^{e} étape

Figure 9.

Une 3^{e} disposition d'étoiles (figure 10) serait plus difficile à décoder, puisque l'assemblage d'étoiles est doublé tantôt horizontalement, tantôt verticalement.

1^{e} étape 2^{e} étape 3^{e} étape 4^{e} étape

Figure 10.

Si l'ostensif 'puissance' n'est pas disponible ou si les élèves ne réalisent pas que la suite des étoiles est la suite des puissances successives de 2, ils peuvent faire leur calcul pour la 10^{e} étape, à partir de la 4^{e} étape, et présenter les résultats dans un tableau net qui, cependant, ne permet pas de généraliser la démarche. De plus, lorsqu'il s'agit du calcul relatif à la 37^{e} étape, les élèves seront confrontés à la longueur et à la lourdeur de celui-ci.

Regardons de plus près les différentes manières d'envisager le calcul du nombre d'étoiles à la 4e étape :

- 8 étoiles c'est le double des 4 étoiles de l'étape précédente et l'on peut facilement imaginer le double de 8, c'est-à-dire 16 à l'étape suivante.
- Mais 8 étoiles, c'est aussi 2.2.2 ce qui s'écrit encore 2^3, dès lors à la cinquième étape, on aura 2^4, ce qui nous conduit à la formule 2^{n-1} étoiles à la n^{e} étape.
- Enfin, 8 c'est aussi $\frac{16}{2}$ ou $\frac{2^4}{2}$, de même 16 c'est $\frac{32}{2}$ ou $\frac{2^5}{2}$, ce qui se généralise sous la forme $\frac{2^5}{2}$.

Le premier calcul correspond à la lecture itérative de l'un ou l'autre tableau figuré avec les étoiles ou d'un tableau numérique correspondant tandis que les deux autres en traduisent la lecture fonctionnelle laquelle suppose la disponibilité de l'ostensif 'puissance'.

Comme les formules 2^{n-1} et $\frac{2^n}{2}$ donnent le même nombre d'étoiles à chaque étape, cela laisse supposer que $2^{n-1} = \frac{2^n}{2}$ quelle que soit la valeur de n.

Les deux formules sont donc équivalentes. Leur équivalence peut être validée par le raisonnement suivant : 2^n est le produit de n facteurs 2, si on divise par 2, on a n–1 facteurs 2 ce qu'on note par 2^{n-1}. Cette équivalence nous force à admettre que 2^0 est égal à 1. En effet, d'une part $\frac{2^1}{2} = 1$ et d'autre part $\frac{2}{2} = 1 = 2^{1-1} = 2^0$.

Suite de carrés

Nous avons choisi cette suite (figure 3) parce qu'il s'agit d'une deuxième suite arithmétique, de premier terme 4 et de raison 3. Rappelons que la première suite arithmétique était de premier terme 5 et de raison 4. Nous cherchons donc à faire varier ce qui deviendra deux paramètres : le premier terme de la suite et sa raison.

Suite de triangles

Comme le problème des maisons, celui des triangles (figure 4) se prête à deux regards.

Le premier regard est centré sur le fait que le nombre d'allumettes formant un côté est le même que le numéro de l'étape ; en triplant ce nombre, on obtient le nombre total d'allumettes. Ainsi, à la n^e étape, on a $3.n$ allumettes. Dans ce regard, on privilégie la régularité fonctionnelle.

Le second regard est porté sur le nombre d'allumettes ajoutées d'une étape à l'autre. En effet, à chaque fois, on ajoute une allumette à chaque côté du triangle, on ajoute donc au total trois allumettes : on trouve ainsi la ressemblance avec les situations des maisons et des carrés. On peut aussi décomposer, à chaque étape, le grand triangle en triangles « unités » et voir ainsi qu'on a un triangle de plus, donc trois allumettes de plus. À la n^e étape, on aura donc $3+3.(n-1)$ allumettes. Ce regard privilégie la régularité itérative.

Les deux formules donnent, chaque fois, un même nombre d'allumettes, donc elles sont équivalentes : $3+3.(n-1) = 3.n$ pour toutes les valeurs de n.

Cette suite est choisie parce que son premier terme et la raison sont les mêmes. Pour cette raison, nous pensons que les élèves établiront plus facilement la première formule plutôt que la seconde car le fait que le premier terme et la raison sont les mêmes empêchera peut-être un certain nombre d'élèves de reconnaître ici une suite arithmétique et rendra plus facile, sans doute, la perception de la régularité fonctionnelle.

Suite de branches formant un arbre

Il s'agit ici de faire rencontrer aux élèves une deuxième suite géométrique (figure 5); son premier terme est 2 et sa raison est 3. Ainsi varient les paramètres associés aux progressions géométriques.

On remarque, qu'au départ de 2, on multiplie par 3 chaque terme pour passer au suivant, ce qui nous suggère la formule 2.3^n.

Ce problème peut s'avérer assez perturbant : la figure 5 montre, à la première étape, deux branches qui ensuite triplent pour former des ramifications mais, aux étapes suivantes, ce sont les ramifications elles-mêmes qui sont multipliées par 3. On peut également diviser la figure 5 en deux parties : les branches de gauche et celles de droite ; dénombrer sur une parie et multiplier par 2 le résultat obtenu.

Suite de croix

Le choix de cette suite (figure 6) est dicté par le souhait de présenter un exemple d'une suite qui n'est ni arithmétique, ni géométrique. Le tableau associé à cette suite permet de tester si l'une des deux structures de suites déjà rencontrées est présente ici. Cela n'est pas le cas ; il ne s'agit ni d'une suite arithmétique, ni d'une suite géométrique.

Nous avons déjà commenté plus haut la disposition des croix.

Catégorisation des suites

Traitons maintenant les questions relatives à la catégorisation des suites étudiées :

> Selon quels critères peut-on classer ces six suites d'objets ?

ou

> Parmi les huit suites étudiées ci-dessus, y a-t-il des suites construites selon une même procédure ? Quelle est cette procédure ?

Pour répondre à ces questions, on a avantage à organiser le calcul des premiers termes des suites sous forme d'un tableau. Dans celui-ci, on peut présenter les résultats sous forme 'brute', c'est-à-dire avec les traces des calculs intermédiaires ou sous forme 'nette', c'est-à-dire sous forme d'une suite de nombres tels qu'ils se dénombrent directement à partir des figures. La présentation des résultats sous forme 'brute' facilite la tâche de la recherche de la formule : elles gardent la structure commune des calculs. La forme 'nette' est plus intéressante que la forme 'brute' lorsqu'on doit reconnaître la loi de passage d'une étape à l'autre. Cette loi permet plus facilement de reconnaître les structures communes éventuelles des suites considérées.

Dans cinq exemples sur six, on a rencontré deux structures : l'une additive, lorsqu'on passe d'une étape à la suivante en ajoutant un même nombre et l'autre multiplicative lorsqu'on passe d'une étape à la suivante en multipliant par un même nombre.

Le travail de catégorisation des suites à partir de leurs formules peut apporter les observations suivantes :

- dans les formules relatives à la structure additive, la variable n est au premier degré ;
- dans les formules relatives à la structure multiplicative la variable n est l'exposant d'une puissance ;
- lorsqu'on n'a aucune de ces deux structures, la variable n n'est ni au premier degré, ni un exposant.

Un enjeu de la catégorisation est de reconnaître dans une formule s'il s'agit d'une suite arithmétique ou géométrique ou autre et d'interpréter les paramètres caractérisant chacune d'elles : le premier terme et la raison.

Cette catégorisation des suites aide à dégager la stratégie gagnante pour arriver rapidement à une formule :

- condensation, fut-elle mentale, de la suite des figures en un tableau à deux lignes : l'une avec des nombres naturels ordinaux et l'autre avec des nombres naturels cardinaux ;
- utilisation des techniques décrites plus haut pour reconnaître le type de progression arithmétique, géométrique ou autre ;
- détermination du premier terme et de la raison lorsque la suite est arithmétique ou géométrique.

L'autre enjeu de la catégorisation est de fournir une technique permettant d'établir rapidement une formule modélisant une suite numérique : on vérifie d'abord si l'on additionne toujours la même chose ou si l'on multiplie toujours par un même nombre. C'est le premier élément dont on doit tenir compte pour établir la formule. Un autre élément à considérer est le premier terme. La formule pour le n^e terme prend, selon le cas, l'une des formes suivantes ; $b+a.(n-1)$ ou $b.a^{n-1}$, dans lesquelles le premier terme est noté b et la raison est notée a.

APERÇU ET ANALYSE DU TRAVAIL OBSERVE DANS LES CLASSES

1. Conditions de l'expérimentation

L'analyse précédente met en évidence quelques caractéristiques d'un public potentiel d'élèves auxquelles nous devrons prêter attention et qu'il nous faudrait décrire pour chaque classe concernée :

- le fait que les élèves aient déjà été ou non confrontés au calcul algébrique et en quelles circonstances. Dans un cas, on peut espérer une modélisation des suites sous forme de formules ; dans l'autre, des messages relevant plutôt de l'algèbre rhétorique ;
- la connaissance et la familiarité que les élèves auraient de la notation exponentielle dont la disponibilité est indispensable, ainsi que nous l'avons analysé plus haut, pour dépasser la régularité itérative des tableaux associés à des progressions géométriques ;
- un travail numérique préalable à l'occasion duquel les élèves auraient pu rencontrer la priorité des opérations, des écritures contenant des parenthèses et la règle de distributivité.

Le dispositif présenté et analysé dans la section précédente a été expérimenté dans six classes de la première année de l'école secondaire dirigées par trois professeurs (deux classes chez chacun), pendant trois années consécutives (2003/2004, 2004/2005, 2005/2006), dans deux écoles de l'enseignement général libre en Communauté Française de la Belgique, l'une, dans une ville de province et l'autre, à Bruxelles. Les classes étaient de taille moyenne de 25 élèves à peu près, des milieux sociaux assez variés mais plutôt bourgeois.

Au moment des expérimentations, tous ces élèves connaissaient déjà la notation exponentielle, ils avaient rencontré aussi l'usage des lettres dans les problèmes d'aire et de périmètre des figures planes, et ils maîtrisaient l'usage des parenthèses pour exprimer la priorité des opérations dans le calcul numérique.

Chez deux professeurs, désignés par H.D. et F.J., nous avons passé chaque fois une heure de cours dans la classe. Chez le troisième professeur désigné par F.D., nous avons passé chaque fois deux heures consécutives et, une fois, nous avons pu assister à la synthèse faite par le professeur en collaboration avec la classe.

Tous les professeurs avec lesquels nous avons collaboré ont organisé le travail des élèves de manière analogue.

Tous ont souhaité faire le choix des suites à soumettre aux élèves et formuler eux-mêmes les questions et les consignes. Les variantes relatives à leurs choix seront mentionnées au fur et à mesure de l'analyse qui suit dans la mesure où l'intelligibilité du propos le requiert.

Chez tous, le travail a été reparti en deux temps : un temps de travail autonome des élèves et un temps de mise en commun.

Dans toutes les classes observées, les élèves ont été groupés en équipes de quatre ou cinq.

Chaque professeur a précisé à la classe les consignes relatives à la prise des notes et a souligné l'importance de celles-ci. Chacun a insisté sur le caractère collectif du travail et a demandé aux élèves de désigner un rapporteur pour la mise en commun.

Dans chacune des classes soumises à notre expérimentation, nous avons filmé un groupe de 4 ou 5 élèves travaillant en autonomie. Les enregistrements ont fait l'objet d'une transcription chronologique et structurée par notre analyse a priori de façon à faire apparaître des *épisodes* au sens de Mercier (1995), c'est-à-dire des événements didactiques auxquels l'analyse a priori permet d'octroyer une signification eu égard à la question étudiée. Nous disposons également de l'enregistrement d'une séance de synthèse et de messages écrits des élèves obtenus dans des conditions que nous préciserons en temps opportun. Pour l'ensemble des données, nous renvoyons le lecteur à Krysinska (2007) ou Krysinska et Schneider (à paraître) et nous nous contentons ici d'une analyse a posteriori plus synthétique en ayant soin d'y reprendre les épisodes didactiques majeurs, dans un ordre non chronologique cette fois. Le choix des épisodes et leur analyse sont faits en accord avec l'analyse à priori présentée dans les chapitres précédents ; ils prennent en considération les phénomènes didactiques en relation avec l'idée de covariation, les conditions d'usage de la lettre, le rôle de la dénotation dans l'usage d'une lettre comme variable, la contribution de la catégorisation des suites à la formation des premiers modèles fonctionnels.

2. Les suites de nombres figurés sont des instruments sémiotiques porteurs jusqu'à un certain point de la 'pensée fonctionnelle'

Une première observation se doit d'être faite et commentée : la dévolution de ces problèmes de dénombrement est possible, même à des élèves du début de l'enseignement secondaire. Aucun groupe d'élèves n'a été mis *a quia*, tous s'engagent dans le dénombrement des objets et lors d'étapes ultérieures, la recherche d'une régularité, la formulation orale ou écrite d'un programme de calcul, etc. Et même si cela a pu parfois se produire suite à certaines consignes supplémentaires formulées par l'un ou l'autre des professeurs telles que « dessine l'étape suivante », il est à noter qu'aucune d'elles n'a soulevé de difficultés.

La perception d'une covariation ne fait aucune difficulté dans le cas des problèmes de dénombrement soumis lors de nos expérimentations, leur caractère adidactique se jaugeant aux réponses obtenues préalablement à toute phase proprement didactique : que ce soit les messages pré-algébriques pour modéliser les premiers tableaux, tels celui des maisons ou, une certaine forme de rapprochement ou de distinction des régularités itératives des tableaux. Nous reviendrons plus loin sur le détail de ces réponses. Contentons-nous ici d'avancer une raison majeure de cette adidacticité potentielle. Elle réside, d'après nous, dans le fait qu'une certaine idée de variation est inhérente au contexte même des problèmes de dénombrement tels que formulés à l'adresse des élèves : d'emblée, on y présente une 'succession' de figures formées avec une collection d'objets dont le nombre augmente à chaque étape, les suites envisagées étant strictement croissantes. Cette succession 'scande' en quelque sorte le temps du déroulement de la pensée au sein duquel on considère les figures les unes après les autres. Quant au nombre d'objets, il constitue la variable principale sur laquelle porte la première question : « combien d'objets à telle ou telle étape ? » Et, sans doute de par le contexte même d'une augmentation des objets à dénombrer d'une étape à l'autre, liée à un processus bien précis plutôt qu'aléatoire, les élèves n'expriment aucun doute, aucune interrogation quant au fait que le nombre d'objets à dénombrer varie en fonction de l'étape considérée. Aussi, n'ont-ils aucune peine à s'emparer ni de la question 'directe' : « combien d'objets y a-t-il à telle ou telle étape ? », ni de la question 'inverse' « à quelle étape y a-t-il tant d'objets ? »

Il est plus fréquent de commenter en quoi une situation peut constituer un milieu antagoniste mettant à l'épreuve des connaissances anciennes que d'évoquer ce qui rend la question de départ propre à être dévolue. Ainsi, on référera plus souvent à l'obstacle additif mis à mal dans la situation du puzzle qu'au simple fait que la tâche de départ est comprise des élèves tout simplement parce que les photos, les jeux et autres contextes quotidiens ont rendu l'idée d'agrandissement tout à fait disponible comme préconstruit permettant d'enclencher les premières stratégies. Dans le cas des problèmes de dénombrement, notre démarche permet d'expliquer l'engouement de la noosphère (e.a. Kahane 2002) aussi bien que de chercheurs (Vlassis et Demonty 2002) estimant que ces problèmes 'marchent' et appréciant leur portée dans l'émergence de ce qu'ils appellent la 'pensée fonctionnelle' : on peut effectivement expliquer ce 'succès' par le fait que le contexte même de ces problèmes est porteur d'une certaine idée de covariation, ce qui confirme les résultats obtenus par

Confrey et Smith (1994). Cela dit, nous sommes conscients qu'il s'agit là d'une 'idée' et non d'un concept proprement mathématique, bien que renvoyant à une certaine réalité mathématique dans une forme embryonnaire, telle qu'on peut la rencontrer avec le concept de variable temporelle de Leibniz ainsi qu'illustré dans notre analyse a priori.

Reste à se demander si ce nombre d'objets à dénombrer ne serait pas, pour les élèves, une variable temporelle au sens défini plus haut – le temps scandé par la succession des étapes étant une variable transparente – plutôt qu'une variable dépendant explicitement du numéro de l'étape identifiée comme variable indépendante. Autrement dit : vont-ils faire jouer au numéro d'étape ou au nombre d'étapes le rôle d'une variable numérique se prêtant au jeu de la dénotation ? Nous reviendrons plus loin sur cet aspect.

3. Une lecture tantôt verticale, tantôt horizontale des suites de nombres figurés : le rôle des objets intermédiaires éventuels et des tableaux nets

Dans toutes les expérimentations sauf une, un temps important a été consacré au problème des maisons et à l'équivalence des programmes de calcul trouvés par les élèves. Seul un groupe d'élèves est allé beaucoup plus loin, travaillant plutôt par comparaison des problèmes dans leur ensemble. Le contraste entre les différentes approches nous paraît éclairant.

Analysons d'abord le travail des premiers élèves (groupe d'élèves chez H.D.). Leur lecture des suites figurées a été essentiellement dictée par la considération des objets intermédiaires, les maisons en l'occurrence, que ces objets aient été ou non mentionnés dans un titre. Au début de leur travail organisé en groupes, les élèves ont été invités par le professeur à faire le dessin correspondant à l'étape suivante. Ensuite, ils sont passés au cadre numérique. Étant donné que pendant l'enregistrement nous nous sommes déplacés d'un groupe à l'autre, nous nous sommes contentés d'analyser les messages écrits de ces élèves. Ces messages ont été ébauchés spontanément par tous les groupes d'élèves en vue d'une mise en commun. Mais nous les livrons ici dans une 2^e^ version vraisemblablement inspirée par la synthèse du professeur : leur formulation ne laisse aucun doute là-dessus puisqu'ils font tous référence aux « maisons » alors qu'aucun titre ne le suggérait dans ce cas. Ils illustrent en outre la diversité des regards prévus dans notre analyse :

> Pour trouver le nombre d'allumettes, on soustrait 1 au nombre de maisons puis on multiplie par 4 le résultat obtenu et l'on ajoute 5.
>
> Pour trouver le nombre d'allumettes, on multiple 5 par le nombre de

> maisons et l'on retire 1 allumette chaque fois qu'elle se touchent.
>
> Pour trouver le nombre d'allumettes, on multiplie le nombre de maisons par 4 et l'on ajoute 1 pour le bord vertical droit de la dernière maison.

Ces trois messages relèvent plutôt d'une lecture fonctionnelle des suites de nombres figurés et donc de l'émergence de ce que nous avons appelé une régularité fonctionnelle, celle-ci étant justifiée, dans chacun des cas, par l'agencement des allumettes en maisons dont le nombre correspond au nombre d'étapes. La plupart du temps, cette régularité fonctionnelle émerge de calculs bruts, comme c'est le cas chez un élève de F.D. qui précise pendant la phase du travail autonome en groupe : « Dix fois quatre plus un, quarante et un » et qui reprécise, lors de la synthèse faite par F.D. en collaboration avec la classe : « Il y a dix maisons. Il y a une barre en plus. Ça fait dix fois quatre car il y a quatre allumettes dans chaque fois ». Ces calculs bruts semblent avoir été spontanés un certain nombre de fois. Mais ils peuvent avoir été induits, dans d'autres cas, par des consignes du professeur F.D. telles que : « Veille à faire apparaître ton raisonnement ».

Une lecture guidée par le nombre de maisons n'exclut pas ici une lecture horizontale débouchant sur la perception d'une régularité itérative : il suffit de penser « maisons ajoutées », chacune d'elles nécessitant l'ajout de 4 allumettes. L'extrait suivant est, de ce point de vue, assez éclairant :

> Élève : Il y a dix maisons. Il y a une barre en plus. Ça fait dix fois quatre car il y a quatre allumettes dans chaque fois.
>
> F.D : On a dix maisons, on multiplie par quatre, car on ajoute quatre allumettes pour chaque maison. Donc je peux considérer que chaque maison avait quatre allumettes, mais la première maison avait une allumette en plus. Donc je peux écrire dix maisons à quatre allumettes et j'ajoute une allumette en plus pour la première maison.

On y voit un élève parler en termes de « maisons en plus », le professeur y distinguer la 1e maison des autres et un élève évoquer « les quatre allumettes qu'on ajoute » pour constituer chacune des maisons suivantes. On peut conclure de ceci que des qualificatifs tels que « ajouté » ou des expressions langagières telles que « en plus » induisent un regard plutôt qu'un autre.

Cette lecture inspirée par la considération d'objets intermédiaires tourne court, comme nous l'avons prévue, dans le cas de la suite des étoiles. Le regard utile ici est exprimé par un autre élève de F.D. qui dit « Il faut faire par rapport à ce qu'on a, qu'est-ce qu'on a en plus » pensant d'abord à une structure additive pour corriger le tir en évoquant une structure multiplicative « Mais non, ça va par deux ». Il est suivi en cela par d'autres élèves qui découvrent la multiplication itérative par 2, après avoir toutefois étudié sans succès le passage d'une étape paire (resp. impaire) à l'étape paire (resp. impaire) suivante.

Le point de vue adopté par un autre groupe d'élèves de F.D. diffère sensiblement d'une lecture dictée par la considération d'objets intermédiaires. En effet, ces élèves passent très vite d'un problème à l'autre, en privilégiant une lecture itérative. Ils le font à propos des problèmes proposés.

Pour le premier, ils se réfèrent simplement au nombre d'allumettes ajoutées sans faire référence aux maisons : « A chaque étape, il faut ajouter quatre allumettes, sauf à la première étape ».

Pour le deuxième, ils évoquent un doublement, mais restent d'abord empêtrés dans les dimensions à considérer : « On double. On double la hauteur » et un autre : « Il faut doubler la hauteur et la longueur » (il faut préciser ici que les étoiles sont disposées en colonne à la 3ème étape et qu'elles forment un rectangle de 2 colonnes et 4 lignes à la 4ème, comme à la Fig.10). Ils terminent l'échange en se référant exclusivement au nombre d'étoiles : « A chaque étape, on double le nombre de l'étape précédente ».

Pour le problème des triangles, ils échouent à dénombrer le nombre total d'allumettes ajoutées à chaque étape en restant attachés à dénombrer les allumettes par côté plutôt que pour le triangle entier : « Une allumette par côté. Regardez ».

A propos du problème des croix, les élèves ne débouchent pas sur la formulation complète du modèle. Un élève dit : « On ajoute chaque fois une ligne pour la longueur et une colonne pour la largeur » en écrivant : « On ajoute chaque fois une croix en hauteur et une en longueur, à celles de l'étape précédente. Donc, on rajoute … »

Ensuite, ils achoppent dans un premier temps sur le problème des branches de l'arbre : « Qu'est ce que c'est, ça ? », « Je ne pige pas » pour se polariser ensuite sur le nombre de branches, à l'invite de l'observateur O :

> O : C'est les branches que vous devez compter. Une arête est un segment. Combien on ajoute ici ?
> Elève 1 : Chaque fois six en plus, … chaque fois trois.
> Elève 2 : Non, non, chaque fois tu doubles.
> Elève 3 : Tu triples.

Cet échange met en lumière que plusieurs des particularités des problèmes relevés dans l'analyse a priori peuvent jouer un rôle : la disposition des étoiles, la suite des triangles qui ne favorise pas le dénombrement de l'ensemble des allumettes ajoutées, le problème de l'arbre plus difficile car, partant de 2 « branches », on les multiplie par

3 d'abord pour tripler ensuite le nombre de 'ramifications' à chaque étape ultérieure… Il montre surtout que le détachement par rapport aux objets intermédiaires est payant dans le cas des suites arithmétiques et géométriques, mais l'est peu dans le problème des croix où peuvent se perdre des élèves qui, comme ceux-ci, ont tendance à se polariser plus sur le comptage net des objets à dénombrer que sur les configurations ou objets qu'ils forment par paquets.

Cette façon de procéder des élèves de ce groupe travaillant à classer l'ensemble des problèmes préfigure le classement des problèmes que nous avons prévu de proposer aux élèves. Aussi rend-elle crédible l'efficacité d'une stratégie que nous avions relevée dans notre analyse et qui consiste à se polariser sur le passage d'un terme de la suite au suivant, en observant un tableau net en ce qui concerne les progressions arithmétiques et géométriques sans trop s'attacher aux objets intermédiaires ou aux structures que forment ces objets et, au contraire, en se laissant guider par les configurations successives et leur mode de formation pour ce qui est des croix plutôt que de s'en tenir à leur nombre. L'activité de classement est censée provoquer ce regard rapide sur les suites arithmétiques et géométriques et c'est précisément le regard adopté par les élèves pour lesquels cette activité de classement fait sens. Nous y reviendrons dans la section 7 où nous parlerons des possibilités de paramétrage de ces modèles.

4. Des messages hybrides et des formules pré-algébriques ; une multiplication itérative qui ne s'exprime pas ; la question inverse traitée par opérations réciproques

Comme nous nous y attendions, la plupart des élèves modélisent les suites de nombres figurés ou tableaux numériques associés au moyen de formules pré-algébriques. Ainsi, dans les notes d'élèves relevées lors des expériences, nous trouvons des messages constitués uniquement de mots en français lesquels désignent tantôt les noms des objets à dénombrer, des objets intermédiaires et celui de la variable, tantôt des opérations : nous considérerons ces messages comme des embryons de formules. On trouve aussi des formules pré-algébriques dans le sens où les opérations sont déjà notées à l'aide de symboles mathématiques mais le nom de la variable ou celui des objets sont écrits en français, éventuellement en abréviation. Voici un échantillon constitué des uns et des autres, récoltés dans les classes de F.D. et H.D. :

> Le nombre de l'étape fois quatre plus un.
>
> Pour trouver le nombre d'allumettes, on soustrait 1 au nombre de

> maisons puis on multiplie par 4 le résultat obtenu et l'on ajoute 5.
>
> À une étape : nombre d'étapes.4 + 1
>
> Pour un calcul quelconque : (nombre d'étapes + 1).4 + 2
>
> À chaque étape, on doit rajouter 4 petits bonshommes et un rectangle : (nombre d'étapes + 1).4 + 2.
>
> Pour n'importe quel calcul, on ferait le nombre de l'étape trouvée, on multiplierait par 4 plus 2.
>
> Chaque fois c'est le double.
>
> À chaque étape, on multiple un nombre trouvé par deux, le nombre d'étoiles de l'étape précédente.
>
> (nbr étapes • 4) + 1

Remarquons le caractère hybride de ces messages et de ceux de la section précédente dans lesquels les élèves n'hésitent pas à additionner ou à multiplier des nombres d'objets hétérogènes : ils retirent une (allumette) du nombre de maisons, multiplient un nombre de maisons par un nombre d'allumettes… Ce caractère peut faire obstacle à l'algébrisation de ces messages, surtout dans les cas où une même lettre est mobilisée pour dénombrer des objets de natures différentes. Nous verrons une situation de ce type à la section 5.

Ces embryons de formules en langue naturelle ou ces formules pré-algébriques expriment tantôt une régularité fonctionnelle, tantôt une régularité itérative. Dans le cas des suites géométriques, ces messages n'expriment que le second type de régularité. L'épisode 1 de l'expérimentation chez F.D. nous en fournit une explication que nous avions déjà prévue dans l'analyse a priori. Il s'agit du problème des étoiles. Après avoir mis un certain temps à découvrir la structure multiplicative de la suite sous la forme : « Chaque fois, c'est le double », les élèves éprouvent des difficultés à poursuivre et ce, malgré des indices donnés par le professeur F.D. ou l'observateur O:

Épisode 1

> Élève 4 : Chaque fois c'est le double.
> Élève 1 : À la dixième étape, tu fais fois deux, fois deux, fois deux.
> Élève 3: Non, non, seize fois deux. On est à cinquième étape. fois deux ,.... cent vingt-huit, neuvième étape deux cent cinquante-quatre.
> Élève 4 : Non, deux cent cinquante-six. À la neuvième étape, cinq cent douze. À chaque étape, on multiple un nombre trouvé par deux, le nombre d'étoiles de l'étape précédente.
> Élève 1 : C'est débile. Deux fois deux fois deux fois deux, tout le temps.
> (silence)

O : On peut écrire d'une autre manière : « Deux fois deux fois deux fois deux, plusieurs fois » ?
Élève 4 : Cinq cent douze.... Non, il faut trouver un truc.
Élève 3 : Eh, mais, à chaque fois il y a un truc parce que... mais regarde, cinq cent douze divisé par huit, ça fait soixante-quatre.
(nouveau silence)
F.D. en aparté à l'observateur : Ils multiplient chaque fois par deux. Donc pour la trente septième étape, ils m'ont bien dit « il faut multiplier deux fois deux fois deux, trente-six ». Les puissances ne sortent pas alors qu'ils les connaissaient.
Élève 4 : Monsieur (en s'adressant à F.D.), on n'arrive pas à trouver. On sait que cela est chaque fois deux.
O (en s'adressant à l'élève 1) : Quel est le calcul pour la dixième étape?
Élève 1 : Huit pour la cinquième.
O : Pourquoi huit ?
Élève 1 : Ici (il montre la troisième étape de la figure 10.) le nombre d'étoiles est huit.
F.D. : Et par rapport à l'étape précédente ?
Élève 1 : Deux fois quatre.
F.D. : Et par rapport à la première étape?
Élève 1 : À la dixième étape ... cinq fois deux
F.D. : Voila, j'entends deux fois cinq. Donc ici Élève 1 me dit que pour la dixième étape, il fait faire cinq fois deux. Pourquoi?
Élève 1 : Six.
F.D. : Je ne sais pas (…)

Nous avons vu plus haut que la réduction d'une addition répétée d'un même nombre au produit de ce nombre par le nombre de termes est familière aux élèves de ce niveau. Ce n'est pas le cas d'une multiplication répétée par un même nombre laquelle ne fait pas écho pour eux à la notion de puissance. Dès lors, des expressions langagières telles que « 2 exposant 36 » ne sont pas plus disponibles que la notation exponentielle. C'est ce qui empêcherait ces élèves de formuler un message exprimant une quelconque régularité fonctionnelle et, par suite, d'écrire cette régularité au moyen d'un ostensif du type a^n. Ces élèves ont rencontré la notion de puissance et celle d'exposant dans le cas des entiers mais, au grand étonnement du professeur F.D., ces notions rencontrées dans un autre contexte numérique ne sont pas disponibles ici et leur indisponibilité rend difficile le contrôle des multiplications qui s'allongent et du nombre de facteurs à mobiliser. Seul un élève songe pour exprimer une réponse numérique : « La 10^e étape est égale à deux exposant six fois huit » et écrit : $2^6.8$. Comme si la multiplication avait bien été comprise comme une opération permettant l'activité matérielle de dénombrement d'une collection organisée, mais comme si l'opération d'exponentiation était interne aux mathématiques, absolument abstraite, c'est-à-dire par principe sans prise possible sur un réel quelconque. Cette observation semble montrer que chaque usage d'une notation comme modèle doit être enseigné et appris *per se*, tant qu'un travail épistémologique sur les nombres et les notations mathématiques n'a pas montré comment ce sont toujours des codages pour des objets, qui en permettent la manipulation en l'absence des dits objet « parce qu'ils les décrivent complètement » comme le disait Lebesgue (1935).

C'est peut-être aussi pour cela que les élèves semblent tarder à exprimer une structure multiplicative itérative : ils ressentiraient un embarras à comprendre où cela va les mener, dans la mesure où ils ne savent pas exprimer, comme pour la régularité additive, une règle de passage direct de la première étape à une autre qui n'est pas la suivante.

Les embryons de formules que constituent les messages formulés en français et les formules pré-algébriques semblent suffire pour traiter la question réciproque. Rappelons qu'il s'agit, dans le problème des maisons, de trouver l'étape à laquelle il y aura 117 allumettes. Deux épisodes venant chacun de l'une des deux expériences chez F.D. sont éclairants d'une pratique que nous avons observée plus généralement où des élèves répondent à cette question à partir d'un dénombrement des allumettes formulé par un message équivalent à celui-ci : « quatre allumettes par maison plus une pour la première maison ».

Épisode 2

Élève 4 : Cent dix-sept divisé par quatre.
Élève 2 : Moins un
Élève 3 : Cent dix-sept moins un et divisé par quatre.
Élève 4 : Il faut d'abord enlever un.
Élève 1 : Donc cent seize divisé par quatre....On fait le calcul à l'envers, quoi.
Élève 4 : Vingt-neuf.
O : C'est la réponse à la question c) ?
Élève 1 : Cent dix-sept moins un divisé par quatre, cela fait cent seize divisé par quatre.(Il écrit: 116/4). Cela fait combien ?
Élève 4 : Vingt-neuf.

Épisode 3

Élève 5 : A chaque étape, il faut ajouter quatre allumettes, sauf à la première étape
Élève 6 : Pour 117 allumettes, comment tu fais.

> Élève 5 : C'est la vingt neuvième étape. Tu enlèves une (allumette) pour la première, donc tu enlèves un de cent dix-sept et tu divises par quatre….. Mais oui, parce que chaque fois tu ajoutes quatre. Et tu obtiens vingt-neuvième étape
>
> Dans les notes de l'élève 5, on trouve :
> 117 – 1 = 116
> 116 :4 = (100 :4) + (16 :4)
> = 25 + 4
> = 29.

Pour cet élève, la soustraction 117–1 revient à retirer une allumette des 117 allumettes données. Il s'agit de l'allumette en plus qui est présente dans la première figure de la suite figurée et qui a dû être ajoutée dans le calcul 'à l'endroit'.

Dans l'épisode 2, une erreur est commise, le temps que les élèves réalisent que l'ordre des opérations n'est pas quelconque et qu'il convient de les composer dans l'ordre inverse de celui dans lequel ont été composées les opérations réciproques pour répondre à une question du nombre d'allumettes à telle ou telle étape : « le calcul à l'envers, quoi » dit un élève. Cela mis à part, ces deux épisodes mettent en scène des élèves qui parviennent à utiliser implicitement une structure générale de calcul dans leur raisonnement et à manipuler le nombre inconnu d'étapes comme s'il avait été connu. Sans que cette structure ne soit notée algébriquement par qui que ce soit. On rejoint là des observations faites par maints chercheurs (tel Bosch 2007) à propos des apprentissages algébriques : les équations arithmétiques, c'est-à-dire les équations dans lesquelles l'inconnue apparaît dans un seul membre se résolvent tout aussi bien avec des méthodes dites intuitives qu'avec des méthodes formelles. Dans les premières, définies par Vlassis et Demonty (2002) par le fait qu'elles nécessitent seulement « des changements locaux sur une même équation, et ne demandent donc pas d'utiliser le concept d'équations équivalentes, ni d'opérer sur une inconnue », se trouve la méthode par opérations réciproques qui consiste à partir de l'état final et à inverser les relations pour obtenir la valeur de l'inconnue. Par exemple : « Résoudre $3.x–6 = 48$ reviendra à effectuer $(48+6)\div 3 = 18$ » (Ibid.). Et c'est bien celle que l'on retrouve ici.

Par ailleurs, il semblerait que cette question réciproque ait servi de référence, pour au moins un élève, l'aidant à prendre conscience de la généralité d'un programme de calcul. En effet, pour calculer le nombre d'allumettes à la millième étape, l'élève de l'Épisode 3 précise dans la suite qu'« il faut faire à l'envers. On fait mille fois quatre plus un. Parce que là, on supprime un » en faisant allusion à la manière dont un camarade résout la question réciproque : « Regardez ici, de 117, on a retiré 1. Mais c'est le nombre d'étapes. Et on divise par 4 ».

Cette opérationnalité des messages et des formules pré-algébriques est propre, nous semble-t-il, à retarder l'émergence de formules proprement algébriques. Voyons donc comment elles surviennent dans les classes et le sens que lui octroient les professeurs, d'une part et les élèves, d'autre part.

5. L'obtention de la formule 'à l'arraché' ; le sens octroyé au littéral

Les élèves parvenant effectivement à répondre aux questions posées sans écriture proprement littérale, certains des professeurs observés provoquent délibérément l'écriture d'une lettre représentant 'l'étape', voire l'imposent. Plusieurs extraits des propos enregistrés chez F.J sont éclairants de ce point de vue. Avant de les transcrire, signalons aussi que le professeur F.D concerné par l'épisode 3 repris un peu plus loin ira même jusqu'à changer son organisation didactique initiale qui consistait à travailler en deux temps : un temps de recherche autonome des élèves et un temps de synthèse mené par le professeur au tableau en dialogue avec la classe, pour avoir remarqué les difficultés de la plupart de ses élèves à généraliser dans le cas de la première suite : « Ils bloquent complètement pour n'importe quelle étape » et « Les autres groupes ne travaillent plus, ils sont bloqués. Je pense qu'il faudra faire la synthèse pour le problème des suites ». Il entame alors un processus d'algébrisation qui ne s'appuie pas sur les messages fournis par les élèves ce qui est illustré dans l'épisode 4 :

Épisode 4

> F.D. : On arrive maintenant à la partie la plus intéressante. Certains avaient ici plus de difficultés. On demande maintenant pour n'importe quelle étape ?
> F.D. écrit « Le nombre d'allumettes pour n'importe quelle étape ».
> F.D. : Comment pourrais-je noter ça? J'ai vu des choses intéressantes dans certains groupes.
> Élève : x^e étape.
> F.D. : Tu vas employer quelque chose de nouveau. Tu vas employer une lettre. Qu'est-ce que va représenter ta lettre?
> Élève : Toutes les étapes.
> F.D. : Toutes les étapes?
> Élève : N'importe quelle étape.
> F.D. : N'importe quelle étape. On pourrait écrire : le nombre d'allumettes pour la x^e étape égale…. On peut employer parfois la lettre *n*, je l'ai vu chez certains On ne connaît pas à quelle étape on est, mais ici on sait qu'on est à l'étape numéro *x*. Cela représente

> n'importe quelle étape. Suivant le même raisonnement, qu'est-ce que je vais écrire ? Pour la première méthode, qu'est-ce que je vais écrire comme calcul ? Je t'écoute.
> Élève : x moins un.
> F.D. écrit : $= x–1$.
> Élève : Entre parenthèses.
> F.D. écrit : $(x–1)$ et il répète: « entre parenthèses ».
> Élève : Fois quatre.
> F.D. écrit : $= (x–1).4$ et il répète: « fois quatre ».
> Élève : Plus une fois cinq.
> F.D. écrit : $= (x–1).4 +1.5$ et il dit : « plus une fois cinq. Ok? Autres choses? Caroline? »
> Élève : Bah, x fois quatre plus un.
> F.D. écrit : $= x.4+1$.

On remarque, dans cet épisode, que la nécessité des parenthèses est mentionnée à bon escient par un élève. Il faut préciser que, peu de temps auparavant à l'épisode 4, le professeur avait introduit lui-même une écriture numérique entre parenthèses : (10 – 1) pour corriger une élève qui avait dit : « En fait, on fait le nombre d'étapes dix, on fait dix moins un, neuf fois quatre », obtenant ainsi de ce dernier la correction suivante : « deux parenthèses, dix moins un, fermer la parenthèse, fois quatre, plus, ouvrir la parenthèse, une fois cinq, fermer la parenthèse ». On peut donc supposer un transfert facile des écritures contenant des parenthèses du registre numérique au registre littéral lorsque le travail numérique sert lui aussi à noter un programme de calcul.

On remarquera également une évolution dans la manière de parler des étapes : interrogé par le professeur sur le sens qu'il donne à l'expression « toutes les étapes », un élève commence à parler de « n'importe quelle étape ». Nous reviendrons sur ceci lorsque nous analyserons si la lettre qui représente le numéro d'étape est bien perçue comme variable plutôt que comme indéterminée.

Un deuxième extrait montre aussi bien l'empressement du professeur F.J. à faire écrire une lettre et une formule par un élève que le désarroi de celui-ci. Cet élève avait trouvé 41 allumettes à l'étape 10 du problème des maisons en multipliant 5 (allumettes) par 10 (maisons), résultat duquel il avait soustrait 9 allumettes (celles qui font la jonction entre deux maisons) et le professeur voudrait qu'il généralise la démarche en écrivant une formule dont la structure est $5n – (n–1)$..

Épisode 5

> F.J. écrit dans le cahier de l'élève et dit : « Donc tu me dis (il écrit 10) puisque tu montes à la dixième étape ». Il écrit 10 fois 5.

Élève : Moins 9.
F.J.: Comment trouves-tu ce 9 ?
Élève : Comme j'ai expliqué.
F.J. : Et si tu essayes de lier ce neuf à l'étape 10 ? Tu comprends ce que je veux dire ? Comment obtenir ce que tu dois retirer (il indique 9) par rapport à l'étape que je t'ai donnée ?
Élève : On enlève une de l'étape qu'on doit trouver.
F.J. complète par écrit : 10.5 – (10 – 1)
F.J. :J'aimerais bien que tu me trouves une petite formule avec une lettre... . La lettre, qu'est-ce qu'elle va représenter, à ton avis ?
Élève : Une étape
F.J. : Ah, le numéro de l'étape...
F.J : Tu essayes maintenant la petite formule ?
Élève : Oui.
F.J. : On appelle une étape par une lettre ? Quoi comme lettre ?
Élève : b.
F.J. : Donc b ce sera dans ta formule le numéro de l'étape. C'est ce que tu m'as dit au départ. Je t'écris. Alors ? Je t'écoute.
Élève :...
F.J. : Quel est le but de ta formule ?
E : Aller jusqu'à la dixième étape et trouver ...
F.J. : Oui, mais si je t'avais dit la vingtième ? Donc $\underline{b}$ remplace... C'est pour parler d'une manière gé-né-rale.
Élève : L'étape une fois dix...
F.J. : Pour aller à dix. Mais si je t'avais dit d'aller à la b^e place ? ou la x^e place? Si tu m'avais dit x, j'aurais dit x^e étape.
E : On fait ... une fois b.
F.J. : Une fois b ?
F.J. écrit $1 \cdot b$, toujours dans le cahier de l'élève.
Élève : Non.
F.J. : N'oublie pas, tu m'as dit cinquante moins neuf égal quarante et un. Comment as-tu obtenu cinquante ?
Élève : En faisant cinq fois dix. Il y aura cinq fois b.
F.J. : Cinq fois dix pour la dixième étape. Il écrit $5 \cdot b$.
F.J. : Et après, qu'est-ce que je fais ?
Élève : Moins neuf.
F.J. : Moins neuf. C'est parce qu'on a pris l'exemple de la dixième étape. Et si on parle de manière générale ?
Élève : Moins le nombre d'étapes.
F.J : Le nombre d'étapes...
Élève : En commençant par le deuxième.
F.J : Oui, en commençant par la deuxième étape, donc c'est finalement le nombre d'étapes total.... ?
Élève : Moins l'étape b.
F.J : Moins une étape.
Élève : Eh, oui.
F.J. ajoute $-b-1$ à $10 \cdot b$ dans le cahier d'élève, et il répète: « moins une étape, d'accord ? ».

> F.J : On va essayer comme ça.
> F.J : Donc, pour la dixième étape, on remplace par..., Par combien ?... Si *b* c'est le numéro de l'étape d'une manière générale, à la dixième étape, je remplace *b* par ... ?
> Élève : Dix.
> F.J : Donc cela fait cinquante moins ... ?
> Élève : Cinq

La longueur de cet extrait illustre bien la pénibilité de la démarche du professeur. Cette pénibilité peut s'expliquer par le caractère hybride du programme de calcul que l'élève a en tête et dont nous avons avancé plus haut qu'il peut être un obstacle à l'algébrisation. Ce dernier multiplie en effet un nombre d'allumettes (5) par un nombre de maisons (10) et retire un nombre d'allumettes particulières (9) : celles qui sont communes à deux maisons. Alors que, dans la formule attendue par le professeur, soit $5n$-(n–1), n est une variable susceptible d'être remplacée par une valeur numérique et cela seul compte : peu importe que l'on se serve de la même lettre n pour représenter tantôt le numéro de l'étape ou le nombre de maisons, tantôt, à travers $n-1$, le nombre des allumettes faisant jonction d'une maison à l'autre. C'est pourquoi sans doute, les indices 'forts' donnés par le professeur restent lettre morte : d'abord, l'écriture d'un calcul brut : 10.5–(10–1); ensuite la signification de la lettre comme numéro d'étape ; enfin, le changement de lettre pour représenter ce numéro.

Nous reviendrons sur cet extrait dans la section 6, lorsque nous analyserons le statut de cette lettre. Terminons ici en évoquant les significations que peut avoir le passage au littéral tant aux yeux des professeurs qu'à ceux des élèves. Pour cela, nous nous rapporterons à deux épisodes : l'épisode 6 de l'expérience menée dans une des deux classes de F.D. et l'épisode 7 de l'expérience menée dans la deuxième classe de F.D.

Épisode 6

> F.D. : Certains parmi vous n'ont pas pu arriver à ceci, ce n'est pas grave, mais ils ont exprimé cela avec les mots. À la place de $4 \cdot x-1$, ils ont employé « le nombre d'étapes fois quatre moins un ». Est-ce que c'est intéressant à le représenter comme ça ? Pourquoi cela est-il intéressant utiliser cette écriture-là ?
> Élève M : On n'est pas obligé de calculer.
> F.D. : On n'est pas obligé de calculer ? Je pose autrement la question. Quel est l'intérêt de ce type d'écriture ?
> Élève M: C'est une sorte de règle.
> F.D. : C'est une sorte de règle. On peut appeler cela une règle ou bien ?
> Élève M: Une propriété.

F.D. : Ce n'est pas une propriété. Dans quel type d'exercices, utilise t-on des expressions avec des lettres? En géométrie, par exemple ? ... Pour calculer une aire par exemple. On parlera donc pas de règles, mais simplement de...
Élève M : D'une formule.
F.D. : Oui, d'une formule. Vous avez ici une formule. Pourquoi la formule est plus intéressante que ceci? (F.D. indique (10-1).4+5) ou ceci (F.D. indique (37–1).4+5) ?
Élève K : Ça reprend tout.
F.D : Ça reprend tout. Cela veut dire que, si le x je remplace par autre chose, est-ce que je peux facilement le calculer ?
Élèves K et M: Oui.

Épisode 7

O : Mais, cela prend beaucoup de place. C'est une longue phrase. Est-ce qu'il y a un moyen de le dire très brièvement ? Pour que cela soit tout court ?
Élève 5 écrit : (nbr. étapes×4) + 1.
(Quelques instants s'écoulent pendant lesquels les élèves s'occupent d'autres choses et perdent de vue la question posée)
O : Qu'est-ce qu'on fait d'une manière générale ?
Élève 6 : Le nombre d'étapes fois quatre plus un.
O : Encore plus court! Qu'est ce qu'on peut faire pour avoir plus court ? Pour ne pas écrire des mots ?
Élève 5 : x fois quatre plus un, où x est égal à l'étape. C'est comme la formule de l'aire d'un rectangle : l fois L. L'élève écrit $x \cdot 4 + 1$.

Interrogé plus tard par l'observateur sur l'utilisation antérieure de la lettre x, le professeur F.D a répondu ceci : « la lettre x fut employée dans un ou deux exercices dans le chapitre sur les angles où l'on demandait de trouver la valeur x sachant que x, $2x$ et $3x$ représentait l'amplitude d'angles faisant ensemble 90° ».

Dans l'épisode 6, le professeur justifie l'usage d'une lettre x essentiellement en référence aux formules d'aires ou de volumes utilisées en géométrie. Il rebondit sur la réponse d'un élève qui dit « Ca reprend tout » et suggère que la formule fournit un moyen de calcul facile quelle que soit la valeur numérique octroyée à la lettre. À cela s'ajoute un travail intéressant relatif à la dénotation – sur laquelle nous reviendrons à la section suivante – qui n'est pas anodin, le professeur faisant écho à un propos d'élève qui avait justifié l'usage d'une lettre ainsi : « On n'est pas obligé de calculer » évoquant le fait que reprendre tout signifie « que, si le x je remplace par autre chose, est–ce que je peux facilement le calculer ? ». Cependant, c'est là un propos dont on peut se demander s'il justifie bien l'usage d'une lettre aux yeux des élèves, l'expression « le nombre d'étapes fois quatre moins un » que le professeur cherche à faire disparaître dans cet épisode permettant tout aussi bien le calcul rapide du nombre d'allumettes dès que l'on suppose une valeur numérique pour ce nombre d'étapes.

Dans l'épisode 7, c'est l'observateur qui insiste sur la brièveté du message, obtenant d'un élève une référence à la formule de l'aire d'un rectangle, de même qu'une formule adaptée au problème de dénombrement concerné et dans laquelle la lettre x apparaît.

Dans les deux cas, l'écriture d'une formule est justifiée par des arguments qui ne sont pas convaincants pour tous les élèves. Ainsi, l'argument de brièveté est contesté par certains d'entre eux qui estiment, à juste titre, qu'une formule telle que $4x+1$ ne dit pas ce que x représente (épisode 8).

Épisode 8

> Élève 2 propose la formule $\text{nbr étapes}\cdot 4+1$, tandis que Élève 1 impose la formule $x\cdot 4+1$.
> Élève 2 : Pas d'accord. Les deux réponses sont bonnes.
> Élève 1 : C'est l'algèbre. Le but c'est trouver la formule mathématique, x ce sera le nombre, x étapes fois quatre plus un.
> (…)
> Élève 2 : Ma formule est claire car j'écris « le nombre d'étapes fois quatre plus un ». Dans la formule $x\cdot 4+1$, il faut préciser que x est le nombre d'étapes.

Mais, à ce stade, qu'est-ce qui peut convaincre un élève de l'intérêt de disposer d'une formule ? Serait-ce le travail de transformations de formules par le biais de manipulations algébriques permises, comme le suggère le professeur F.D lors de la synthèse à propos des formules x.4+1 et (x–1).4+1.5 : « Est-ce que tout de suite, je peux voir que ces deux calculs représentent bien la même chose ? » ? Il est vrai que, pour un œil exercé, c'est facile et que ce l'est moins pour les élèves lesquels ne seront pas convaincus. Mais on le serait encore moins s'il fallait, comme ci-dessous, procéder aux manipulations algébriques en s'empêchant de représenter la variable par une seule lettre :

(nbre étapes–1).4 + 5 = 4.nbre étapes – 4 + 5 = 4.nbre étapes + 1

Nous y reviendrons ci-dessous.

Par ailleurs, on peut se demander si l'algébrisation complète des formules, comme cela a été fait lors de l'une ou l'autre des expérimentations relatées ci-dessous, est nécessaire pour résoudre les problèmes de dénombrement considérées ici. D'un côté, les élèves répondent correctement aux questions qui leur sont posées avec des messages qui sont seulement des embryons de formules ou des formules pré-algébriques. De l'autre, il faut se garder de l'illusion que l'usage de la lettre amène le sens ipso facto. Les événements didactiques analysés dans la section ci-dessous nous le confirment.

6. La lettre représentant l'étape est-elle une variable explicite ou une variable transparente ? Le rôle de la dénotation. Aspect ordinal et aspect cardinal de la variable indépendante.

Dans notre analyse a priori globale, nous avions rapproché la notion de variable temporelle d'une ambiguïté liée à la notion de variable que Serfati (2005) situe comme réponse à une contradiction inaugurale soulevée par le fait de représenter par une seule lettre quelque chose qui relève à la fois du « donné » et du « générique » ou de « l'indéterminé ». La notion de variable, notion paramathématique au sens de Chevallard (1985), s'introduit par le biais de connotations cinématiques jugées irrecevables à un moment donné de l'histoire des mathématiques mais qui sont bien commodes lorsqu'il s'agit de rendre compte du fait qu'on attribue telle valeur numérique à telle lettre à un moment donné et telle ou telle autre valeur ensuite. Le risque majeur est d'occulter le temps dans lequel nous pensons ces substitutions numériques, temps qui s'écoule sans qu'on doive s'en occuper et qui, de ce fait, en devient une variable transparente qui n'intervient aucunement dans le calcul. Le risque existe donc, dans les problèmes de dénombrement, de considérer le numéro d'étape comme une variable temporelle, c'est-à-dire de prendre la lettre n qui représente ce numéro comme une simple 'étiquette' qui est accolée à toutes les étapes quelles qu'elles soient sans qu'il soit nécessaire de respecter la dénotation ou le fait qu'en remplaçant n par telle valeur particulière, le programme de calcul modélisé par la formule donne bien le nombre exact d'objets à dénombrer à cette étape-là et non pas à la suivante, à la précédente ou à toute autre (notons que les suites mobilisées sont injectives). Deux extraits vont nous permettre de mieux situer cette difficulté. Le premier est extrait d'une expérimentation chez F.D. ; c'est l'épisode 9. Des élèves y tentent de résoudre le problème des maisons et l'un d'eux propose la formule $a.4+1.5$ qui n'est pas correcte, la bonne réponse étant $(a–1).4+5$, puisque l'élève numérote les étapes à partir de 1 et non de 0 :

Episode 9

> Élève 8 : On a trouvé. On n'est pas sûr, on n'est pas sûr. L'observateur filme la formule de cet élève : $a \cdot 4 + 5$.
> Élève 8 : Donc a c'est n'importe quelle étape.
> Pendant ce temps, le professeur s'est approché de l'élève.
> F.D : Reprends pour la trente-septième étape… . Tu m'as dit tout à l'heure quelque chose d'intéressant.

F.D : Qu'est-ce que cette lettre ? C'est quoi ça ?
Élève 8 : C'est pour représenter tous les nombres.

L'élève semble avoir une difficulté pour comprendre son erreur. Peut-être a-t-il proposé une formule algébrique par respect de ce qu'il croit être le contrat à ce moment, sans forcément associer cette formule à un quelconque programme de calcul ? Quoi qu'il en soit, il ne manifeste aucune conscience de la nécessité d'obtenir le bon nombre d'objets pour une valeur de a particulière. Par contre, il précise que la lettre a sert « pour représenter tous les nombres » ou « n'importe quelle étape ». Mais le symbole (a–1) n'a-t-il pas exactement la même signification indéterminée : il serait alors le nom donné à toutes les étapes dans leur ensemble, un nom générique en quelque sorte, sans qu'il faille se préoccuper de remplacer (a–1) par un numéro particulier d'étape afin de déterminer un nombre correct d'objets à cette étape ? À la limite, on pourrait remplacer indifféremment (a–1) ou a par cette valeur d'étape sans que cela ne prête à conséquence. D'où la difficulté de l'élève à percevoir la différence entre les formules $(a–1).4+1.5$ et $a.4+1.5$. Cette hypothèse expliquerait aussi que l'élève ne cherche pas à vérifier si sa formule est correcte pour la trente-septième étape – pour autant que le professeur lui en ait laissé le temps – il n'aurait dès lors pas conscience qu'elle dénote.

D'autres observations sont à rapprocher de celle-là. Toujours pour le problème des maisons mais dans le cas où l'on compte d'abord 5 allumettes par maison pour retrancher ensuite les allumettes communes à 2 maisons. Ainsi, dans l'épisode 5, on voit F.J. insister sur l'utilisation d'une formule et demander à un élève d'en expliquer l'intérêt : « Quel est le but de ta formule ? ». L'élève ne comprend pas la question se contentant d'évoquer son calcul antérieur : « Aller jusqu'à la dixième étape et trouver ... ». Après plusieurs vaines relances à propos de la b^e étape, le professeur insiste à nouveau sur la structure du calcul : « N'oublie pas, tu m'as dit cinquante moins neuf égal quarante et un. Comment as-tu obtenu cinquante ? » et obtient une partie de la réponse : « En faisant cinq fois dix. Il y aura cinq fois b ». Mais l'élève échouera à exprimer, d'une manière générale le nombre d'allumettes à retrancher. Regardons la suite :

F.J : Et après, qu'est-ce que je fais ?
Élève : Moins neuf.
F.J : Moins neuf. C'est parce qu'on a pris l'exemple de la dixième étape. Et si on parle de manière générale ?
Élève : Moins le nombre d'étapes.
F.J : Le nombre d'étapes...
Élève : En commençant par le deuxième.
F.J : Oui, en commençant par la deuxième étape, donc c'est finalement le nombre d'étapes total ... ?

Élève : Moins l'étape *b*.
F.J : Moins une étape.

Ces réactions de l'élève montrent qu'il est conscient de la nécessité d'enlever une étape pour comptabiliser les allumettes à retrancher, l'exprime incorrectement en français, puis parle de commencer par la 2e étape et enfin propose d'enlever l'étape *b*. Pense-t-il à supprimer la dernière étape plutôt que la première, dernière étape qu'il « nommerait » alors l'étape *b* ? Ce n'est pas sûr, mais ce n'est pas exclu non plus. Il n'en est pas moins vrai que l'élève éprouve beaucoup plus de difficultés à formuler cette partie de la réponse globale – rappelons que cette réponse est $5b–(b–1)$ – dans laquelle, ce n'est pas *b* mais $b-1$ qui va permettre de dénombrer les allumettes à enlever. On peut imaginer que si les étapes avaient été numérotées à partir de la 2e, c'eût sans doute été le terme $5(b+1)$ qui aurait posé problème plutôt que le terme *b* à retrancher. Mais, de toute façon, si problème il y a, c'est peut-être parce que *b* rappelle plus une étape donnée qu'une simple variable numérique. Cela nous ramène à l'idée de dénotation sur laquelle nous reviendrons après voir analysé les expressions langagières associées à cette fameuse lettre par laquelle une formule pré-algébrique devient algébrique à 100%. Nous réinterprétons enfin la même difficulté en distinguant aspects « ordinal » et « cardinal » de la variable qui désigne l'étape.

Ce malaise attaché à la notion de variable pourrait également s'exprimer par une instabilité de la signification octroyée à la lettre et des locutions langagières utilisées pour en rendre compte. Dans un échange ci-dessus, on voit le même élève dire que la lettre représente n'importe quelle étape « Donc *a* c'est n'importe quelle étape » : pour préciser aussitôt après : « C'est pour représenter tous les nombres ». De même, dans l'épisode 4, on voit un même élève utiliser indifféremment l'expression : « x^e étape », « toutes les étapes » et « n'importe quelle étape » à quelques secondes d'intervalle. Même situation pour un autre élève à l'épisode 9. Du côté des professeurs, nous avons rencontré des expressions telles que « le nombre d'allumettes pour n'importe quelle étape », « l'étape n° *x* », « b^e place […] ou la x^e place ? Si tu m'avais dit *x*, j'aurais dit x^e étape » et « si *b* est le numéro de l'étape ». L'un d'entre eux reprend un élève qui avait répondu « une étape » à sa question : « La lettre, qu'est-ce qu'elle va représenter, à ton avis ? » et le corrige en disant : « Ah, le numéro de l'étape » (épisode 5). Et un autre semble ne pas apprécier l'expression « nombre d'étapes » :

E 2 : Ma formule est claire car j'écris le nombre d'étapes fois quatre plus un. Dans la formule *x* fois quatre plus un, il faut préciser que *x* est le nombre d'étapes.

P : Le nombre d'étapes est-ce correct ? Le nombre d'étapes, peut-on le dire ?
E 1 : Le numéro d'étape.

On peut se demander si l'une ou l'autre de ces locutions est plus associée à la conception d'une lettre comme véritable variable indépendante ou sa perception comme variable temporelle transparente. A priori, nous aurions pensé que des expressions telles que « nombre d'étapes », « numéro de l'étape », « n'importe quelle étape » ou « à la x^e étape » rendaient mieux compte de l'idée de variable que des expressions comme « toutes les étapes » ou « l'étape b » qui semblent plus renvoyer à l'ensemble des étapes comme à un ensemble de nombres indéterminés. Mais, vu l'instabilité du langage chez de mêmes élèves, que ceux-ci aient compris le sens de la lettre ou non, nous en doutons. En fait, nous ne pouvons trancher sans regarder si cette lettre joue un rôle réellement instrumental, comme chez ces élèves qui utilisent l'une ou l'autre de ces locutions au sein d'une stratégie calculatoire dans l'expression d'un programme de calcul : « nombre d'étapes fois quatre plus un » ou : « pour n'importe quel calcul, on ferait le nombre de l'étape trouvée, on multiplierait par 4 plus 2 ». En effet, même si ces élèves n'écrivent pas de lettre, ils ont le sens de la dénotation car ils utilisent « le nombre d'étapes » comme variable qui peut prendre les différentes valeurs dont dépendent les valeurs de leur formule.

A cela s'ajoute le fait que certaines expressions langagières, comme « n^e étape », renvoient plutôt à l'aspect ordinal de la variable indépendante alors que d'autres telles que « le nombre d'étapes » évoquent plus son aspect cardinal. Nous ne connaissons pas de raisons pour lesquelles les professeurs choisissent l'une ou l'autre de ces expressions, ainsi nous ne savons pas pourquoi F.J. privilégie l'aspect ordinal au détriment de l'aspect cardinal d'un nombre naturel. Nous pouvons cependant supposer que cette attitude est due au fait que, dans certains manuels (tels Castiaux et al. 2003), on associe aux problèmes de dénombrement des tableaux dont la première ligne représente les numéros des figures. Quoiqu'il en soit, cet aspect des choses fournit un élément d'analyse complémentaire. Par exemple, il permet d'interpréter autrement la difficulté d'un élève (décrite supra) à obtenir la formule correcte $5.b–(b–1)$ écrivant b au lieu de $b–1$ pour dénombrer les allumettes à enlever. On peut en effet considérer que l'élève ne parvient pas à coordonner les aspects cardinal et ordinal de la variable qui représente l'étape. D'un côté, il abandonne l'aspect ordinal présent dans l'expression « dixième étape » pour l'aspect cardinal lorsqu'il retranche « neuf » qui correspond chez lui au nombre d'étapes car retrancher la neuvième étape d'une dixième n'a pas de sens. D'un autre côté, la formulation même de l'énoncé dans lequel on demande le nombre d'allumettes en fonction du numéro d'étape plutôt que du nombre d'étapes et l'insistance du professeur à obtenir un calcul lié à la dixième étape l'obligent à considérer l'aspect ordinal. Et, de fait, pour établir la formule demandée dans ces circonstances, il faut coordonner les deux : penser que le nombre d'allumettes à retrancher est donné par le nombre d'étapes réalisées tout en regardant ce nombre comme le numéro de l'étape moins 1. D'où, sans doute, les difficultés à penser la dénotation dans ce cas.

De manière plus générale, on peut se demander si, pour utiliser une lettre comme variable, il ne vaut pas mieux qu'elle représente plutôt le nombre d'étapes que le numéro d'étape. C'est en effet surtout l'aspect cardinal qui donnerait sens aux opérations algébriques sur ces nombres comme c'est le cas de la formule pré-algébrique (nbr étapes.4+1) proposée par l'un des élèves de F.D. dans l'épisode 7.

Si la distinction entre aspects ordinal et cardinal de la variable indépendante nous paraît propre à fournir une interprétation dans certains cas, les concepts de dénotation et de variable temporelle nous paraissent fournir un pouvoir d'analyse plus large permettant de prendre en compte des difficultés plus nombreuses, ainsi que nous l'avons signalé plus haut.

Par ailleurs, les mêmes élèves dont nous venons de rapporter les difficultés utilisent des messages-embryons de formules ou des formules pré-algébriques sans que cela ne les empêche de leur conférer une vertu de dénotation. Ainsi en est-il lorsqu'ils manipulent correctement de telles expressions, par opérations réciproques, pour résoudre la question inverse du numéro d'étape correspondant à autant d'allumettes.

Comme nous l'avons déjà suggéré plus haut, l'idée de dénotation est peu présente dans les sollicitations des professeurs, malgré l'exception du professeur F.D. Et, quand elle l'est, il arrive qu'elle se conjugue avec un possible effet de contrat, à telle enseigne qu'on ne sait pas ce que l'élève a compris. C'est le cas dans le dialogue de l'épisode 5 où le professeur F.J. pose la question « Si *b* c'est le numéro de l'étape d'une manière générale, à la dixième étape, je remplace *b* par ...? » Il obtient la réponse correcte, mais, au vu de l'ensemble des circonstances, nous pensons que l'élève a deviné ses intentions plutôt que compris le sens de la formule.

Si la dénotation est l'indice d'un usage de la lettre en tant que variable, elle n'a pas forcément valeur de validation. Nous renvoyons ici le lecteur à notre analyse a priori où nous avions distingué les suites pour lesquelles l'expression d'une régularité fonctionnelle rendant compte d'une régularité itérative initiale ne pouvait être prouvée qu'au prix d'une démonstration par récurrence ou, à tout le moins, d'une astuce de calcul. Et nous avions vu aussi, à cette occasion, que, de ce point de vue, les suites arithmétiques et géométriques jouent un rôle particulier, le terme général de la suite exprimant à la fois une régularité fonctionnelle et une régularité itérative. En outre, cette dernière peut être, soit induite, soit validée par la disposition des objets à dénombrer ou le fait qu'ils forment, par paquets, des objets ou formes géométriques intermédiaires bien identifiés par les élèves. Nous craignons donc, qu'à ce stade, on induise en erreur les élèves en leur faisant croire que, hormis des circonstances très particulières, une vérification numérique de quelques valeurs peut suffire à justifier un modèle fonctionnel.

Mais la dénotation intervient aussi quand il s'agit de contrôler que deux modèles fonctionnels sont équivalents. Nous traitons de cela dans la section suivante.

7. Equivalence de modèles fonctionnels et dénotation

Comme nous l'avions montré dans notre analyse a priori, certains problèmes de dénombrement se prêtent à une multiplicité de réponses. C'est le cas de la suite des maisons et souvent le cas de problèmes où les objets à dénombrer forment des configurations intermédiaires. Dans les programmes belges, on voit là l'occasion d'initier les élèves aux manipulations algébriques standard, bien que, comme nous l'avons analysé ailleurs (Krysinska, 2007), le discours qui l'explique ne soit pas si clair que cela. C'est bien aussi dans cette optique que les professeurs enregistrés dans nos expérimentations comptaient gérer une potentielle multiplicité de réponses et nous allons analyser la manière dont ils s'y prennent.

Pour cela, situons leurs stratégies parmi diverses manières de procéder a priori. Les suites de nombres figurés constituent le système initial qui, à la suite d'une certaine réflexion, se trouve modélisé par trois formules différentes, $4x+1$ ou $5+4(x-1)$ ou encore $5x-(x-1)$. Pour traiter l'équivalence de ces trois formules, on peut travailler exclusivement dans le modèle, en évoquant des propriétés des écritures numériques contenant des parenthèses (en l'occurrence, la distributivité du produit par rapport à une somme et la réduction des termes semblables) comme étant des propriétés généralisables à des expressions littérales. C'est ce que fait le professeur F.D dans l'épisode 10.

Episode 10

> F.D. : Là, on suit les deux propositions qu'on a eues. Alors là, je peux reposer ma question : est-ce que, tout de suite, je peux voir que ces

deux calculs représentent bien la même chose ? Aurélie ?
Aurélie : Non
F.D. : Alors, vous me dites que d'un seul coup d'œil, on ne voit pas que c'est la même chose. Qu'est-ce qu'on peut faire ?
Aurélie : Un calcul
F.D. On pourra faire un calcul, là c'est un peu loin, on va voir si on se rappelle. Comment pourrais-je calculer ce genre de choses-là ? On a une somme, la parenthèse, le produit. Réfléchissez bien. Priorité des opérations ce sont d'abord les parenthèses. À l'intérieur, on a x moins un. Est-ce que tu peux calculer cela?
Aurélie : Non
F.D. : Et après, on a fois quatre.
Aurélie : Ah, oui, quatre x moins un.
F.D. : Presque. Est-ce que tu peux donner le nom à ce que tu as utilisé?
Aurélie : …
F.D. : Quelqu'un d'autre? Stéphanie ?
Stéphanie : La distributivité.
F.D. : Voilà, la distributivité. Je dois faire x fois quatre moins ...
Aurélie : Moins quatre.
F.D. : Moins un ou moins quatre? Donc ça, on a vu avec le calcul numérique qu'on n'a pas encore abordé avec des lettres. Il écrit $= 4 \cdot x - 4 + 5$.
F.D. : Ensuite, C'est fini ce calcul, ici ?
Aurélie : Non, quatre x plus un.
F.D. : Quatre x moins quatre plus cinq. Il écrit $4 \cdot x + 1$.

Selon nos informations, on assiste là à la première transformation de ce genre dans cette classe. Comme c'est habituel dans les pratiques enseignantes, le professeur s'appuie sur des règles algébriques de transformation des formules qui sont admises comme extensions des règles de calcul sur des nombres. Cette dernière stratégie s'insère bien sûr dans le paradigme de l'algèbre vue comme arithmétique généralisée. Elle semble faire partie d'une épistémologie spontanée et naturalisée du professeur qui interprète d'emblée la proposition de calcul de l'élève comme étant une manipulation algébrique.

Or, comme nous l'avons déjà écrit dans la section de l'analyse des questions se situant dans le chapitre relatif à l'expérimentation, l'équivalence de ces deux formules est assurée par le comptage différent d'un même ensemble d'objets. Le véritable enjeux ici est plutôt l'absence d'équivalence entre la formule proposée par l'élève 5 $5+4x$ et la formule correcte $5+4(x-1)$. On a là, grâce à la dénotation, une démarche qui ne se cantonne pas au modèle mais qui joue sur une dialectique entre système modélisé et modèle. Or, la vérification numérique de cette égalité pour quelques valeurs de x n'autorise pas à la déclarer vraie pour toutes les valeurs. En effet, comment pourrait-on transformer la formule 5+4(x–1) en supprimant les parenthèses ? La seule question, si l'on ne s'engage pas dans des voies trop tordues, est de savoir si le produit par 4 va 's'appliquer' à x, à –1 ou aux deux. Ainsi on pourrait proposer 5+4(x–1)=5+4.x–1 ou 5+4(x–1)=5+x–4 ou 5+4(x–1)=5+4.x–4. Il n'est pas difficile alors d'invalider les deux premières égalités, la première n'étant vraie pour aucune valeur de x et la seconde n'étant valide que pour $x = 0$. Ainsi, les tableaux de valeurs seraient des outils permettant surtout d'invalider des transformations 'simples' qui pourraient nous venir à l'esprit, s'insérant à nouveau dans une dialectique entre système modélisé et modèle. Il est dommage que ce ne soit pas souvent le rôle qu'on leur prête dans les classes, la conformité aux sacro–saintes règles algébriques étant plutôt la norme sur laquelle les professeurs insistent.

Le problème d'équivalence de programmes de calcul pourrait donc être envisagé comme lieu d'introduction de la lettre. En effet, pour vérifier formellement si deux programmes représentés ici par des formules pré-algébriques, 5+4.nbr étapes et 5+4.(nbr étapes–1), sont équivalents, il est avantageux de remplacer « nbr.étapes » par une lettre : les transformations algébriques nécessaires à cette vérification deviennent aisées, ce qui permet de réaliser une économie de pensée. L'ostensif 'formule' devient ainsi l'instrument sémiotique des techniques algébriques.

8. Catégorisation des suites par les élèves et paramétrisation

À la section 3 de ce chapitre, nous avions déjà mentionné le travail fait par un groupe d'élèves de F.D. qui préfigurait le travail de catégorisation que nous comptions proposer. Leur démarche était tournée essentiellement sur l'observation itérative de valeurs numériques nettes, ce qui les rendaient très performants pour répondre aux questions relatives aux suites arithmétiques ou géométriques.

En définitive, nous n'avons pu recueillir que les réponses de 50 élèves à la question relative au classement des différentes suites, ces élèves ayant été interrogés avant et après la synthèse faite par le professeur au cours de laquelle ce dernier a utilisé les tableaux bruts, ensuite les tableaux nets, pour établir finalement les formules correspondant à chacune des suites étudiées. Le nombre de réponses attestant de la non-compréhension de la consigne avant la synthèse témoigne de la difficulté des élèves à traiter des questions relatives à la catégorisation d'objets mathématiques. D'après le professeur des élèves observés, cela peut s'expliquer par le fait que les questions de catégorisation d'objets et de critères de catégorisation font rarement l'objet d'une activité proposée aux élèves : la seule activité de catégorisation étant située en géométrie, lorsqu'il s'agit de faire la classification des quadrilatères, mais étant habituellement à charge du seul professeur. Les réponses s'améliorent après la synthèse, comme on peut s'en douter car, à ce moment-là, la structure de chacune des suites est bien mise en évidence par le biais des formules. La question posée était : « Selon quels critères peut-on classer ces cinq suites d'objets ». Il est dommage que nous n'ayons pas eu l'occasion de la formuler en des termes peut-être plus compréhensibles a priori du genre : quelles sont les suites qui supposent des calculs semblables ?

Il n'empêche qu'il est très significatif d'observer les réponses des élèves qui réussissent complètement ou partiellement le travail de classement. Avant la synthèse, la plupart détectent une régularité itérative : on additionne un même nombre ou l'on multiplie par un même nombre, même si certaines suites, telles que celle des allumettes disposées en triangles ne s'exprime pas facilement en termes de sommes, ainsi que nous l'avions prévu a priori et que la suite des croix est jugée inclassable, et pour cause … Après la synthèse, les élèves repèrent des analogies de formes, telles que des formes exponentielles.

Nous considérons cette activité de classement comme un prélude à la paramétrisation des modèles fonctionnels impliqués, même si nous ne pouvons espérer une quelconque dévolution de cette démarche. En effet, les élèves concernés sont – rappelons-le – en première année de l'enseignement secondaire et n'ont pas d'expérience de paramétrage, sauf à considérer que certaines grandeurs peuvent jouer le rôle de paramètre dans les formules d'aires et de volumes, dans des circonstances fort éloignées de celles qui nous concernent et qui resteraient à discuter. Il est intéressant de faire ici écho à une observation réalisée à Marseille (de Redon 2007) à propos de problèmes semblables proposés à des élèves plus âgés lesquels auraient pu rencontrer préalablement des écritures paramétrées. Il s'agit du problème des maisons au moment où le professeur pose les questions suivantes : « Pouvez-vous trouver combien il faudra d'allumettes pour l'assemblage n°388 ? » et « pourriez-vous trouver combien il faudrait d'allumettes pour n'importe quel numéro d'assemblage ? » Comme prévu, certains groupes travaillent encore avec les phrases et d'autres choisissent des lettres. C'est alors que, dans un groupe, des élèves veulent utiliser deux lettres et demandent conseil à l'expérimentateur pour le choix de ces lettres parmi a, x et n. Ils expliquent qu'il faut a allumettes pour chaque maison et que, pour le n^e assemblage, il en faudra $n.a–(n–1)$. L'expérimentateur leur dit que c'est trop compliqué pour leurs camarades et qu'il vaut mieux qu'ils travaillent avec 5 plutôt que a : ces élèves protestent un peu car ils voient l'intérêt de cette écriture puisque ainsi le problème n°2 (des assemblages d'allumettes formant un, deux, trois, … carrés contigus) est déjà résolu ! Mais comme ils sont dociles (trop dociles !), ils s'exécutent et laissent tomber le paramètre a. Lorsque des élèves d'autres groupes présentent leur travail avec des phrases du type « on multiplie le nombre d'allumettes par maison par le nombre de maisons et on soustrait le nombre de maisons moins un », l'expérimentateur comprend qu'eux aussi avaient intégré le « nombre d'allumettes par maison » comme paramètre générique désignant le nombre d'allumettes par configuration intermédiaire.

Ce n'est pas à ces paramètres-là que nous avions songé, les nôtres étant, d'une part, le premier terme de la suite arithmétique ou géométrique et, d'autre part, sa raison. Mais le principe est le même et c'est celui que nous avions décrit dans notre analyse a priori : le paramétrage est un moyen de fédérer des problèmes a priori différents, la résolution de l'un facilitant la résolution des autres de la même catégorie, même si le rapprochement se fait, pour ces élèves marseillais, sur base des objets intermédiaires que forment les objets à dénombrer.

Si la catégorisation conduit au paramétrage, c'est que la fédération de problèmes parents oblige à regarder secondaires certaines différences au point d'en faire parfois abstraction. Ici, les valeurs numériques du premier terme et de la raison. Comme l'explique un des élèves interrogés, « les suites 1 et 3 [vont ensemble] car on fait +3 et +4 par rapport à l'étape précédente, les suites 2 et 5 car on fait .2 et .3 par rapport à l'étape précédente ». Il est à remarquer d'ailleurs que, dans les propos recueillis, les élèves mentionnent les raisons mais presque pas les premiers termes.

Dans le système d'enseignement actuel, les enseignants n'ont pas d'habitude de poser et d'autant plus de dévoluer aux élèves les questions relatives à la catégorisation d'objets mathématiques. Or, dans le cas de la catégorisation des suites, les critères de celle-ci peuvent donner lieu à des techniques efficaces pour associer rapidement une formule à certaines suites numériques particulières, techniques familières en Belgique aux professeurs du cycle supérieur (Lycée) qui, pour résoudre de tels problèmes lors de formations, ne s'encombrent guère des particularités des configurations formées par les objets à dénombrer, mais se polarisent sur le comptage numérique net.

CONCLUSIONS

Par rapport à l'ensemble des recherches relatives à l'apprentissage et à l'enseignement des fonctions, notre travail a confirmé certains résultats déjà connus, les a complétés et surtout interprétés de manière originale grâce à l'éclairage nouveau sur les apprentissages des élèves qu'a permis une ingénierie innovante relative aux problèmes de dénombrement dans le contexte des suites figurées.

D'abord, nous avons fait une analyse a priori de nature épistémologique sur ce que suppose la démarche de modélisation fonctionnelle en termes de perception d'une covariation, d'évolution d'une variable temporelle vers le concept de fonction d'une variable indépendante explicite, d'algébrisation de la variation, de dénotation comme indice de l'usage de la lettre comme variable et de paramétrisation de modèles fonctionnels.

Nous avons mis également en évidence un certain nombre de variables didactiques qui pouvaient jouer sur les stratégies des élèves et donc déterminer une certaine dose d'adidacticité, de même que des potentialités diverses en matière d'introduction à l'algèbre et à la modélisation fonctionnelle. En résumé, ces variables sont principalement : le fait que les objets à dénombrer forment ou non, par paquets, des formes ou des objets intermédiaires identifiés par les élèves ou le fait que ce soit leur disposition qui détermine la loi de formation des termes de la suite d'une étape à l'autre ; le mélange de telles suites et de suites pour lesquelles la lecture numérique est plus efficace ; la présence de questions relatives à des étapes éloignées, de questions 'inverses' et d'une exigence de généralisation pas trop précoce ; le fait de pouvoir valider une formule indépendamment d'une preuve par récurrence ou d'une astuce de calcul. Certaines de ces variables, comme la possibilité de lecture itérative ou fonctionnelle, l'existence de critères de reconnaissance et l'accessibilité d'une validation, nous ont permis de prendre conscience que tous les modèles ne sont pas sur un même pied d'égalité et ainsi d'identifier les modèles fonctionnels plus aisément accessibles, à savoir les progressions arithmétiques et géométriques. D'autres variables, comme la disposition des éléments dans une suite figurée, la présence ou l'absence de figures intermédiaires, favorisent l'obtention de programmes de calcul distincts en apparence mais modélisés algébriquement par les formules équivalentes. Quant au choix d'une activité de catégorisation des problèmes de dénombrement, il favorise l'introduction et l'usage des paramètres.

Ensuite, l'interprétation des réactions d'élèves et de professeurs récoltées lors de nos expérimentations a confirmé l'importance des problèmes de dénombrement dans l'introduction à la pensée fonctionnelle qui évolue, dans ce contexte, de la covariation vers les formules paramétrées :

- Les suites de nombres figurés constituent des instruments sémiotiques porteurs d'une idée de variation et forment donc un milieu permettant de dévoluer aux élèves des questions qui relèvent de la pensée fonctionnelle en lien avec l'étude de certaines équations et identités algébriques.

- Bien que l'expression algébrique de la covariation ne va pas de soi parce que l'usage de la lettre par les élèves n'est pas spontané, il est possible pour les élèves de formuler des messages hybrides ou des formules pré-algébriques comme ostensifs de programmes de calcul. Selon les cas, des messages sont les formes embryonnaires des formules algébriques auxquelles ils peuvent faire obstacle.
- L'obtention d'une formule chez un élève donné ne signifie pas que celui-ci a pris acte que la lettre représentant le numéro de l'étape (aspect ordinal du nombre) est une variable indépendante explicite dont dépend le nombre d'objets. Il peut, au contraire, la considérer comme variable transparente qui n'intervient pas vraiment dans le calcul. Par contre, le nombre d'étape (aspect cardinal du nombre) peut jouer le rôle de réelle variable lorsqu'il est impliqué dans des messages verbaux ou des formules pré-algébriques. Il joue ce rôle, entre autres, lorsque les élèves répondent, par opérations réciproques, à la question inverse : à quelle étape y a-t-il tant d'objets ? De telles questions précéderaient avantageusement la démarche de généralisation de la procédure de calcul car elles impliquent la dénotation qui est l'indice de l'usage de la lettre comme variable. La dénotation permet aussi de valider d'une manière formelle certains modèles pourvu qu'elle puisse se conjuguer avec le mode de formation des nombres figurés ; sinon elle permet surtout de les invalider.
- Le travail sur les suites permet de faire comprendre aux élèves la question d'une équivalence entre deux programmes de calcul et ensuite l'équivalence des formules. Cette dernière est surtout travaillée, dans les pratiques enseignantes actuelles, au niveau du modèle. La dénotation permettrait de la travailler dans une dialectique entre système modélisé et modèle et d'invalider des transformations de formules non conformes aux règles algébriques.
- Le classement des problèmes de dénombrement donne lieu à la catégorisation des formules et à leur paramétrage, ce qui permet d'obtenir les premiers modèles fonctionnels.

Finalement, le statut privilégié des suites arithmétiques et géométriques est dû principalement aux faits que ces suites se prêtent autant à une lecture fonctionnelle des tableaux qu'à une lecture itérative et que la validation des modèles algébriques correspondants est accessible au début de l'école secondaire. La lecture itérative qui peut s'effectuer sur base d'un tableau numérique 'net' (l'étude de la raison) est une stratégie très efficace pour distinguer ces deux types de suites entre elles, pour discriminer l'ensemble des deux parmi d'autres ou pour les classer. De plus, les suites géométriques sont aussi facilement identifiables que les suites arithmétiques mais ne peuvent conduire à l'écriture ou à la verbalisation d'une régularité fonctionnelle qu'au prix d'une disponibilité de la notion de puissance comme mode d'expression d'une multiplication répétée avec un même nombre.

Comme le font remarquer Vlassis et Demonty (2002), les suites arithmétiques peuvent servir de tremplin aux fonctions du premier degré. Pareillement pour des suites géométriques qui déboucheront sur les fonctions exponentielles selon l'observation de Confrey et Smith (1994). Mais, le saut n'en est pas moins énorme sauf à mésestimer les difficultés de passage des nombres naturels aux nombres réels et de passage du discret au continu. C'est là un autre aspect de la modélisation fonctionnelle que nous avons étudié ailleurs (Krysinska, 2007 ou Krysinska et Schneider, à paraître).

Notre conclusion ultime, assez brève, fait écho à l'introduction où nous avons montré que les problèmes de dénombrement jouissent a priori, dans la noosphère, d'un certain 'capital' de crédibilité didactique. Mais le discours associé, fort idéologique, ne précise en rien l'apprêt didactique dont ces problèmes devraient faire l'objet pour devenir des enjeux crédibles d'enseignement et d'apprentissage. Bien au contraire, on les présente, en Belgique du moins, comme des occasions de résolution de problèmes sans préciser s'il faut faire un choix de modèles fonctionnels parmi d'autres et lequel, ni parler de la nécessité d'une quelconque institutionnalisation des savoirs, ni dire quoi que ce soit sur le rôle que peut jouer le caractère figuré de ces problèmes. Cet article est de nature à éclairer, sur ce sujet, les professeurs qui souhaitent s'instruire avant de se lancer inconsidérément dans l'exploitation de ce dispositif didactique nouveau pour eux.

REFERENCES

ASSUDE T., MERCIER A. (2007), Décrire l'action conjointe du professeur et des élèves en mathématiques. In G. Sensevy, A. Mercier (eds.), *Agir ensemble* (pp. 153–185). Rennes : PUR.

BESSOT A., COMITI C. (1985), Un élargissement du champ de fonctionnement de la numération. Étude didactique du processus, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 6 (2/3), 305–346.

BOSCH M. (2007), *L'enseignement de la modélisation algébrique et fonctionnelle au secondaire. Apport de la TAD*, exposé aux FUNDP, Namur, Belgique, 18 mai 2007.

BRIAND J. (1993), *L'énumération dans le mesurage des collections: un dysfonctionnement dans la transposition didactique*. Thèse de l'université de Bordeaux I,

BRIAND J. (1999), Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Etude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 41–76.

CASTELNOUVO E. (1965), L'objet et l'action dans l'enseignement de la géométrie intuitive, L'enseignement des mathématiques, Tom II, *Etude du matériel*. Paris : Delachaux et Nestlé.

CASTIAUX M., CLOSE PH., JANSSENS R. (2003) *Mathématiques. Des situations pour apprendre*. Bruxelles : De Boeck.

CHEVALLARD Y. (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, *petit x*, 19, 43–72.

CONFREY J., SCHMITH E. (1994), Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unite. *Educational Studies in Mathematics,* 26(2), 135–164.

DESCARTES R. (1931), Règle VI, *Regulae ad directionem ingenii*, Paris, Vrin, (texte de l'éd. C. Adam et P. Tannery; notice par Henri Gouthier).

DE REDON M.-C. (2007), Projet AMPERES, Séminaire National du Didactique des Mathématiques, octobre 2007.

DESCLE J.P., CHEONG K.S. (2003), *Analyse critique de la notion de variable* (points de vue sémiotique et formel), article communiqué par Internet.

HAUCHART C., ROUCHE N. (1987), *Apprivoiser l'infini, un enseignement des débuts de l'analyse*. Louvain-la-Neuve : Ciaco.

KAHAN J.-P. (2002), *L'enseignement des sciences mathématiques*. Paris : CNDP et Odile Jacob.

KRYSINSKA M. (2007), *Emergence de modèles fonctionnels comme outil de catégorisation de phénomènes divers*, thèse, repères épistémologiques et didactiques. thèse de doctorat, FUNDP.

KRYSINSKA M., SCHNEIDER M. (à paraître), *Quelques aspects de la modélisation fonctionnelle depuis les problèmes de dénombrement au début du secondaire jusqu'aux fonctions exponentielles*, Liège : Presses Universitaires

LEBESGUE (1935), *Introduction à la mesure des grandeurs*. Paris

MERCIER A. (1995), Approche biographique de l'élève et des contraintes temporelles de l'enseignement : un cas en calcul algébrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 15(1), 97–142.

MERCIER A. (1995), L'algébrique, une dimension fondatrice des pratiques mathématiques scolaires. In M.J. Perrin et al. (eds.) *Actes de la VIIIe Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*. Paris : IREM

MINISTERE DE LA COMMUNAUTE FRANÇAISE (2000) *Programme d'étude du cours de mathématiques* 10/2000/240

SACKUR C. et al. (1997), Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? *Repères* 28 37–66,

SCHNEIDER M. (1988), Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives. Thèse de doctorat, UCL

SCHNEIDER M. (à paraître), Quand le courant pédagogique « des compétences » empêche une structuration des enseignement autour de l'étude et la classification de questions parentes, *Revue Française de Pédagogie,* 154,

SERFATI M. (2005), *La révolution symbolique*, Paris :Editions Petra.

SIERPINSKA A. (1992), On understanding the notion of fonction. In G. Harel, E. Dubinsky (eds.) *The concept of Function*., MAA Notes, Volume 256

VITALE B. et al. (1994) Activité de représentation et de modélisation dans une approche exploratoire de la mathématique et des sciences. Première partie : les activités de représentation, (C. Beguin, J-L. Gurtner , O. de Marcellus, M. Denzler, A. Trypho, B. Vitale) *petit x.* 38, 41–71.

VLASSIS J., DEMONTY I. (2000), *L'algèbre par des situations-problèmes*. Bruxelles : De Boeck