Interactions entre une praxéologie didactique et une praxéologie mathématique : les regards croisés de la théorie anthropologique de la didactique et de la théorie des situations sur un enseignement du calcul des limites au cycle secondaire.

Maggy Schneider, professeur aux Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix,
département de mathématique, 8, Rempart de la Vierge, 5000 Namur

L'approche anthropologique de la didactique (Chevallard, 1992 et 1999) entend étudier le fonctionnement des systèmes didactiques en considérant ces derniers comme des institutions conditionnées par d'autres : le système d'enseignement, sa noosphère et la société dans laquelle ils trouvent place. Elle veut casser « l'illusion de naturalité » de ces systèmes ainsi que de leur environnement dont on mésestime l'influence pour le percevoir comme « allant de soi ».

Cette approche regarde l'étude des mathématiques comme une activité humaine s'insérant parmi d'autres au sein des institutions sociales et se propose dès lors de l'analyser au travers du modèle général des praxéologies : organisations plus ou moins locales de tâches, techniques, technologies et théories. En particulier, la mise en évidence concomitante d'organisations praxéologiques mathématiques et d'organisations praxéologiques didactiques permet d'analyser et d'évaluer les pratiques enseignantes. Plusieurs didacticiens (Jullien et Tonnelle, Artaud, Cirade et Matheron, 1998) ont mis cette approche à profit pour rendre compte et juger de leçons, à partir de cahiers d'élèves et/ou de compte-rendus d'observation de classes. Peut-on le faire pour analyser des projets d'enseignement portant sur des apprentissages amples, sans préjuger de leur exploitation didactique, afin d'en mieux appréhender la spécificité et la portée potentielle ? Y a-t-il un sens à mener cette analyse en choisissant un cadrage « grand angle » qui met l'accent sur la structuration du projet plus que sur les tâches locales ? Je pense que oui et c'est ce que je me propose d'illustrer à propos d'une « approche heuristique de l'analyse » - appelée ainsi par ses auteurs (groupe AHA, 1999) - en me restreignant à une partie de celle-ci : l'étude des limites de fonctions réelles d'une variable réelle et leurs applications y compris celles liées aux dérivées et aux intégrales. En quoi cette analyse requiert-elle la théorie des situations didactiques intégrée jusqu'à un certain point dans la théorie anthropologique ? Cette interrogation se profilera également en filigrane de cet article.

Au delà de la description des praxéologies mathématique et didactique sous-jacentes à des leçons ou à des projets d'enseignement, c'est leur articulation qui devrait permettre de mettre en évidence les ressorts des pratiques enseignantes. Plusieurs scénarios sont imaginables a priori. Telle praxéologie mathématique, considérée comme allant de soi, peut inspirer des praxéologies didactiques qui la préservent. A contrario, une praxéologie didactique peut s'identifier par sa rupture délibérée vis-à-vis d'une praxéologie mathématique telle qu'identifiée dans une institution donnée. C'est le cas du projet analysé ici, le projet AHA, construit jusqu'à un certain point à rebours d'une « mise en texte » par trop fidèle à une présentation axiomatique de la théorie concernée selon la forme, allant de soi, d'une aide à l'ostention.

J'ai analysé ailleurs (Schneider, à paraître) quelques problèmes liées à la viabilité écologique de ce projet et à sa transmission auprès des professeurs. Je m'en tiendrai donc ici plus strictement à ses incidences du point de vue de l'élève et de son apprentissage.

Ce projet s'inspire, d'une part, des théories constructivistes de l'apprentissage et, d'autre part, d'une vision socio-constructiviste des sciences. La théorie des situations didactiques permet entre autres de jauger sa réelle filiation aux premières. Par ailleurs, ce projet soulève plus d'une question en tant que dispositif d'étude s'adressant à des apprenants en « position d'élève » dans un système « scolaire », questions qui peuvent être relayées par la théorie anthropologique de la didactique. De ce point de vue et par certains de ses aspects, il est sans doute représentatif de difficultés soulevées par des dispositifs s'inspirant d'un certaine idéologie des « situations-problèmes ». Au delà de l'analyse proprement dite du projet AHA, mais au travers de cet exemple, le présent article constitue ainsi une première approche d'une interrogation plus fondamentale située à l'articulation de la théorie des situations et de la théorie anthropologique : quel est le prix payé par la recherche d'adidacticité en termes d'organisations praxéologiques ?

La description et l'analyse du projet d'enseignement concerné et de ses enjeux sont adaptées, tant aux circonstances et à l'objet de l'article qu'à la spécificité du projet et ce, de plusieurs manières.

- Tout d'abord, il s'agit d'appréhender un enseignement par le biais de deux écrits : un manuel destiné aux élèves et un guide méthodologique adressé aux enseignants. Par conséquent, plusieurs éléments m'échappent. A commencer par le topos effectif de l'élève et la structuration temporelle, au sein de la classe, des différents moments de l'étude identifiés par la théorie anthropologique de la didactique. Cependant, le texte du manuel mime en quelque sorte un enseignement en construisant progressivement les techniques et, à terme la théorie, sur base de tâches souvent destinées à être « dévolues » aux élèves. Sans faire d'hypothèse sur la manière dont un professeur exploiterait ce projet, on peut donc décrire ce que ce dernier prévoit a priori comme « première(s) rencontre(s) » et comment il conçoit l'exploration de ces tâches ainsi que l'élaboration de techniques qui leur sont relatives.
- Le « taux » potentiel d'adidacticité de ces tâches fera l'objet d'un examen plus approfondi là où, selon toute vraisemblance, les auteurs du projet envisagent un processus de dévolution. Ailleurs, le projet sera décrit davantage dans les grandes lignes. L'échelle de description variera donc d'un endroit à l'autre, quitte à nuire à une certaine exhaustivité. Cette manière de négocier le choix de l'échelle de description d'une « ingénierie longue », délicat comme le fait remarquer Robert, 1992, pourra être appréciée en fonction de l'analyse qu'elle permet de faire.
- Bien sûr, attester d'une part d'adidacticité est plus délicat que de supposer son absence. Pour évaluer l'adidacticité des tâches proposées, je me référerai, suivant les cas, soit à une analyse a priori publiée ailleurs, soit aux relations que font les auteurs des événements qui se sont déroulés dans les classes. Tous mes propos ne sont donc pas contrôlables, si ce n'est au moyen d'expériences analogues. De plus, l'échelle de description peut laisser sur leur faim des lecteurs habitués à des observations plus fines. Je justifie ma position par l'objectif de mon analyse qui n'est pas tant de jauger le projet AHA à l'aune de l'adidacticité que de montrer, comme dit supra, par quels traits des organisations praxéologiques associées s'y solde une certaine recherche d'adidacticité.
- Les synthèses et les listes d'exercices que contient le manuel destiné aux élèves donnent une idée des formes d'institutionnalisation possibles. Cependant, comme ils l'expriment à propos de certains chapitres, les auteurs ont privilégié les exercices atypiques invitant les professeurs à se référer à d'autres ouvrages pour choisir des exercices plus classiques. Dans ces cas et quand cela me paraîtra utile, je m'en tiendrai donc à signaler à quels types de tâches répétitives possibles conduit le chapitre concerné.
- Pour organiser l'apprentissage des limites, le projet AHA table autant sur les ostensifs classiques : suites, asymptotes, que sur les grandeurs physiques ou objets définis par une limite : tangentes, vitesses et aires. Ces deux approches complémentaires donnent lieu à deux discours technologiques distincts bien que non disjoints. Pour les mettre en évidence plus

clairement, je distinguerai ces deux approches, par le biais de sections distinctes, quitte à ne pas respecter entièrement la chronologie des écrits étudiés.

- Les praxéologies mathématique et didactique sous-jacentes au projet AHA sont fort enchevêtrées : en particulier, les modes de validation, loin d'être stéréotypés, sont choisis en fonction des présupposés épistémologiques particuliers des auteurs. Je traiterai donc les deux praxéologies conjointement, du moins de manière locale, afin de mieux mettre en évidence ce qui les lie. La cohérence globale de la praxéologie didactique se dégagera progressivement et je la résumerai au moment d'en évaluer les incidences.
- Pour analyser le projet AHA du point de vue de la théorie et du calcul des limites, j'ai puisé dans l'ensemble des chapitres ce qui les concerne ne mentionnant de ce que je laisse dans l'ombre uniquement ce qui peut avoir un lien avec le thème choisi. En particulier, je ne m'attarderai pas sur un autre aspect du projet AHA qui est la constitution progressive d'un « atlas » de fonctions si ce n'est dans la mesure où sa structuration conditionne des choix relatifs au calcul des limites.

DESCRIPTION ET ANALYSE LOCALE

Comportements asymptotiques de suites et de fonctions

Suites contextualisées

Une première rencontre avec le concept de limite se fait à travers l'étude du comportement asymptotique de suites contextualisées : hauteurs obtenues en pliant une feuille de papier en deux, en quatre, en huit, ... ; évolution d'un capital placé à intérêt simple ou composé; suite des aires de polygones emboîtés ... Dans le livre destiné aux élèves, ces questions sont résolues de manière experte : on écrit le terme général de la suite, on exploite le fait que les polygones ont même apothème pour conclure qu'ils sont circonscrits à un même disque et que leurs aires sont ainsi minorées par l'aire non nulle de ce dernier ou, ailleurs, on repère une similitude qui fait passer d'un polygone au suivant ... Il est illusoire que ces résolutions soient à charge exclusive des élèves. Par exemple, comme en témoignent Hauchart et Rouche (1987), la structure additive est fort prégnante dans le calcul des intérêts composés : les élèves *ajoutent* les intérêts au capital précédent. Il faut les inviter expressément à réduire le nombre d'opérations pour qu'ils songent, « après un long temps parfois », à une écriture faisant apparaître une progression géométrique. De plus, le type de résolution proposée n'est pas toujours indispensable pour répondre à la question posée : on pourrait s'en tenir dans certains cas au calcul de plusieurs termes de la suite sans pour autant formuler le terme général : cette dernière tâche ne peut donc être identifiée par les élèves que grâce à des connaissances du contrat didactique (cf. Margolinas, 1998). Pour toutes ces raisons, la dévolution des questions posées dans cette partie du projet est a priori problématique.

Cependant, l'expérimentation numérique peut se situer dans le topos de l'élève et produire des interactions propres à favoriser son apprentissage. On peut imaginer en effet, et les auteurs du projet le relatent, que les renseignements fournis par la calculatrice sont probants dans un certain nombre de cas : ainsi, en pliant virtuellement une feuille de papier plusieurs fois, on atteint si vite des hauteurs vertigineuses comme la distance Terre-soleil que les élèves sont convaincus qu'on peut ainsi dépasser n'importe quel nombre donné; de même sont-ils persuadés qu'il est plus avantageux, au bout d'un certain temps, de placer un capital à intérêt composé au taux de 5% qu'à un intérêt simple au taux de 10%. Les auteurs profitent de ces questions et des intuitions qu'elles provoquent pour amener un premier résultat : la limite d'une suite géométrique de raison supérieure à 1 est infinie. Ils le justifient, dans un des exemples concernés, par la comparaison avec une suite arithmétique, annoncant ainsi à long terme une technique particulière que justifiera la théorie : démontrer la divergence d'une suite en la minorant par une autre suite divergente, ici une suite arithmétique. A cette occasion est introduite l'écriture canonique de la limite adaptée au cas étudié et définie ainsi : « le terme de la suite peut dépasser n'importe quel nombre pourvu que n soit suffisammment grand ».

Par contre, dans d'autres exemples, l'expérimentation numérique n'autorise qu'une conjecture encore bien incertaine : c'est le cas des aires de dodécagones emboîtés qui forment une suite géométrique de raison inférieure à 1 mais proche de 1. Les auteurs concluent : « Elles (les aires) s'approchent de zéro d'aussi près que l'on veut. Au moins est-ce bien l'impression que l'on a, et s'il devait y avoir un nombre plancher strictement positif, il serait bien petit ! ». Ils institutionnalisent cependant le résultat dans la synthèse. Beaucoup plus loin dans le projet, à propos d'une suite géométrique dont la raison est plus proche de 1 encore (des aires de polygones emboîtés à 1000 côtés), ils remettront ce résultat en doute pour rendre nécessaire une preuve formalisée.

Le chapitre au cours duquel se produit cette première rencontre contient d'autres éléments que la seule rencontre avec le concept de limite : entre autres, un exemple de suite définie par une formule de récurrence et le calcul de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

L'institutionalisation prend la forme d'une page de synthèse. Le concept de suite n'y est pas défini comme une fonction bien que deux modalités de définition soient précisées : par le terme général ou par récurrence. Les suites arithmétiques et les suites géométriques y sont définies et sont repris les deux résultats commentés ci-dessus à propos des limites de suites géométriques.

A la suite de ce premier chapitre, on peut imaginer une classe de tâches à laquelle on pourrait entraîner les élèves de manière répétitive : déceler parmi plusieurs énoncés en langage naturel, ceux qui mobilisent une suite géométrique et s'appuyer sur le résultat de sa limite pour répondre à la question posée.

Pour justifier cette première approche du concept de limite par le biais des suites, les auteurs avancent des arguments relatifs aux comportements « spontanés » des élèves et à la manière dont ils interagissent avec ce créneau particulier. En voici deux que je résume ainsi :

- L'étude des suites induit celle d'un comportement asymptotique, plus facile à envisager que d'autres : *que se passe-t-il tout au bout de la suite, lorsque n tend vers l'infini*. La variable indépendante est ici un entier (l'indice de la suite) qu'on n'a pas de peine à considérer de plus en plus grand, assez naturellement. Autre chose est, par exemple, d'envisager le comportement de 1/x autour de zéro, ce qui suppose de prendre délibérément des valeurs de la variable indépendante de plus en plus proches de zéro en freinant leur progression pour ne pas prendre zéro lui-même.
- L'étude de suites « contextualisées » et le type de questions posées favorisent une formulation « contravariante » du concept de limite qui commence par imposer une condition sur les images au lieu de partir de la variable (cf. Bloch, 1999, qui utilise ce qualificatif à la suite d'autres auteurs), poussant ainsi les élèves à « corriger » une forme d'énonciation que Hauchart et Rouche (1987) identifient comme spontanée : « plus n grandit, plus a_n se rapproche de ... ». En effet, les questions portent sur l'évolution de la feuille de papier, sur les aires des polygones, ..., bref sur les valeurs du terme général de la suite. D'emblée la question

de savoir après combien d'étapes on obtient telle ou telle valeur apparaît ainsi subordonnée aux précédentes.

A-t-on affaire dans cette première rencontre du concept de limite par le biais des suites à un milieu antagoniste au sens de la théorie des situations ou, au contraire, à un milieu allié tel qu'en parle Fregona (1995) ? Il me semble devoir apporter à cette question une réponse nuancée. D'une part, la formulation du concept est gratuite eu égard aux questions posées : elle devrait donc se situer dans le topos du professeur. Ainsi, cette première conceptualisation ne se construit pas comme moyen de contrôle d'un milieu a priori concurrent, elle n'est qu'un mode d'expression qui indique à l'élève ce qu'il doit voir et retenir dans les exemples traités. Globalement, le milieu serait donc allié. Cependant, certaines situations proposées procurent des rétroactions qui s'opposent aux intuitions a priori des élèves dont certaines ont la vie dure, ainsi qu'en témoigne la thèse de Robert (1982) : le fait de pouvoir dépasser n'importe que nombre en pliant une feuille de papier d'épaisseur infime, le fait de rencontrer une suite d'aires strictement décroissante dont la limite n'est cependant pas nulle ... Ces rétroactions contribuent donc à l'apprentissage des élèves, même s'il ne s'agit pas de rétroactions qui jouent un rôle effectif dans une dialectique d'action ou de formulation.

Asymptotes

L'étude du comportement asymptotique de quelques suites se prolonge et se diversifie par celle du comportement asymptotique des fonctions. Les ostensifs graphiques y jouent un rôle prédominant, couplés avec des ostensifs algébriques. Les premiers, des représentations classiques dans un repère cartésien, ont été « préfigurés », dans le chapitre sur les suites, par des diagrammes en bâtonnets et les seconds « préparés » par l'écriture du terme général de plusieurs suites. Quelques ostensifs numériques, sous la forme de tableaux, servent d'adjuvant, mais, la plupart du temps, ils ne participent à la conclusion que dans la mesure où ils sont rapprochés d'autres éléments, par exemple une expression analytique suggestive.

Cette première rencontre avec les asymptotes s'étend sur deux chapitres assez distants l'un de l'autre : le chapitre 2 et le chapitre 6. D'autres problèmes alimentent également ces chapitres, entre autres des problèmes d'optimisation. Une large part des tâches est réservée à la modélisation et à l'articulation entre différents cadres : langage naturel, cadres numérique, graphique, géométrique, algébrique. Plusieurs situations proposées requièrent la formulation d'une fonction qui exprime une dépendance entre deux grandeurs dans un contexte géométrique ou physique, en particulier les situations introduisant aux « transformés » de graphiques par des translations ou compressions. Un certain nombre de fois, le choix de la variable est à charge des élèves. Globalement, cette contextualisation n'est cependant pas propre à fournir de rétroaction constitutive des concepts de limite ou d'asymptote : le concept de limite est peu interprété dans le contexte même du problème et n'est pas indispensable à sa résolution. L'intention des auteurs se borne à montrer que les fonctions étudiées ne tombent pas du ciel et à choisir d'étudier celles que l'on rencontre dans des problèmes, quitte à déborder des aspects liés à la stricte résolution du problème. Par exemple, ils font étudier la classe des fonctions « racine carrée d'une fonction du second degré » ou celle des fonctions qui s'écrivent comme sommes de celles-là et de fonctions affines parce que ces fonctions sont mobilisées dans des problèmes d'optimisation impliquant des distances. En revanche, le comportement aux infinis de ces fonctions est analysé alors que la seule recherche d'un extrémum ne le requiert pas.

Dans cette approche polymorphe des fonctions où sont critiqués les différents modes d'appréhension des fonctions et où est privilégiée la traduction de l'un à l'autre, la recherche des graphiques associés à des expressions analytiques est une tâche aisément compréhensible et identifiable pour les élèves. Cependant, cette recherche est, selon les cas, déconnectée ou non de toute tâche de modélisation. A la réflexion relative aux graphiques se mêle donc parfois cette démarche de modélisation qui, comme on le sait, requiert beaucoup d'énergie mentale de la part de certains élèves.

La recherche de graphiques amène les élèves à côtoyer les asymptotes et à revenir sur le concept de limite, comme décrit ci-dessous. Au fur et à mesure des exemples rencontrés, leur topos s'élargit et se diversifie. Par exemple, on leur demande de dessiner les graphiques de fonctions du type $y = x^n$ et $y = 1/x^n$ dans le même système d'axes pour pouvoir les comparer les uns aux autres, de dessiner le graphique d'une fonction homographique qu'un travail préalable de modélisation aura permis d'écrire sous deux formes : $3x/(x-2) = 3 + 6/(x-2)$, d'appliquer au graphique de $y = 1/x$ des transformations appropriées de manière à obtenir un graphique voulu, de déterminer le graphique de $y = x + 1/x$ en exploitant les graphiques de $y = x$ et $y = 1/x$; de faire la « sommation graphique » de deux fonctions homographiques, de sélectionner les instruments les plus adéquats pour déterminer les caractéristiques graphiques de certaines fonctions. La progression peut être cependant vécue par les élèves assez peu sur le mode adidactique, dans la mesure où ils peuvent trouver des sources d'inspiration dans la résolution de problèmes antérieurs, outre le fait bien sûr que le professeur a le loisir de guider la résolution. C'est ainsi que les élèves peuvent apprendre, par frayage presque au fur et à mesure des problèmes rencontrés, à comparer des fonctions en choisissant une échelle judicieuse, à percevoir celles qui sont, localement, négligeables vis-à-vis d'autres, à écrire autrement une expression analytique afin dans repérer les « parties » localement négligeables, à coordonner plusieurs caractéristiques des graphiques et à discerner celles qui, pour une fonction donnée, sont les plus décisives, ...

Le choix des fonctions traitées et l'expression analytique sous la forme de laquelle elles sont proposées à l'étude se prêtent à cet apprentissage. L'intention des auteurs est d'initier les élèves à l'étude des fonctions en groupant celles-ci par classes pour leur apprendre à discerner, pour chaque classe, les outils d'investigation les plus pertinents permettant d'obtenir les graphiques associés avec leurs caractéristiques les plus saillantes. La résolution se fait de manière relativement peu experte privilégiant un discours de « bon sens » fondé sur une estimation numérique et la négligence locale de certains termes, comme décrit ci-dessous.

Au fur et à mesure des classes de fonctions rencontrées, les techniques d'obtention des asymptotes et leur validation se diversifient. Par ricochet, le concept d'asymptote et celui de limite s'affinent progressivement. Voici un aperçu de cette progression.

- Les fonctions $y = x^n$ et $y = 1/x^n$ donnent l'occasion de comparer des ordres de grandeurs dans certains voisinages de la variable : si x est suffisamment grand, $1/x$ peut être considéré comme négligeable et a fortiori $1/x^2$, $1/x^3$, ... Mais si x est proche de 0, x^2 peut être négligé par rapport à x, ... La fonction $1/x$ fait l'objet d'un examen plus approfondi qui permet de donner une signification géométrique à la limite : le graphique de la fonction se rapproche de plus en plus d'une droite asymptote au point que, vus de loin, les deux tracés finissent par se confondre. Des choix judicieux de fenêtres sur une calculatrice graphique mettent ce fait en évidence.
- Les graphiques des fonctions homographiques s'obtiennent comme images du graphique de $y = 1/x$ par une composée de transformations appropriées. Les asymptotes se déplacent donc.
- Une sommation graphique des fonctions $y = x$ et $y = 1/x$ fait apparaître une asymptote oblique comme « transformée » en quelque sorte d'une asymptote horizontale.

- A la suite de ces fonctions qui alimentent le chapitre 2, la notion d'asymptote est institutionnalisée en tant que guide graphique dans un langage fort géométrique : à la fois une droite qui, de loin, semble se confondre avec la courbe représentative de la fonction et une droite dont la courbe se rapproche localement d'aussi près que l'on veut. Dans la synthèse de ce chapitre figure l'écriture des asymptotes de la classe de toutes les fonctions homographiques, mais ce résultat n'est pas validé de manière littérale : il l'est uniquement pour des exemples, par recours à la fonction y = 1/x, comme précisé plus haut.
- Au chapitre 6, l'idée de sommation graphique est réinvestie pour inférer le comportement asymptotique d'une fonction qui se présente sous la forme d'une somme à partir des comportements asymptotiques de ses termes. De la pratique de cette technique graphique émerge une autre technique algébrique : l'écriture, par division, d'une fonction du type $(ax^2 + bx + c)/(dx + e)$ sous la forme $mx + p + k/(dx + e)$. Cette dernière forme est jugée « bonne » dans la mesure où elle fait apparaître les asymptotes, surtout l'asymptote oblique, la validation faisant intervenir un discours sur le caractère négligeable de $k/(dx + e)$ et sa limite nulle aux infinis. Cette technique n'est pas validée de manière littérale.
- L'étude d'autres fonctions rationnelles met l'accent sur une comparaison entre les degrés respectifs du numérateur et du dénominateur : des considérations sur les ordres de grandeurs permettent de pressentir le résultat lequel est ensuite validé par mise en évidence du terme du plus haut degré du dénominateur et négligence des termes de la forme $1/x^n$. Le choix de l'une ou l'autre fonction qui traverse son asymptote est délibéré : il permet d'insister sur le caractère local des renseignements fournis par la donnée d'une asymptote.
- Quant à la technique de recherche d'une asymptote verticale, par annulation du dénominateur, sa portée est soumise à la sagacité des élèves dans un ensemble de questions « vrai-faux » dont l'objectif est de faire le point sur la notion d'asymptote. Les indéterminations du type 0/0 ne sont donc rencontrées qu'occasionnellement dans cette ambiance des graphiques (elles le sont bien sûr dans l'approche des dérivées; j'y reviens).
- L'ensemble de ces résultats est institutionnalisé dans la synthèse sous la forme d'un exposé général concernant l'ensemble des fonctions rationnelles.
- Quelques fonctions irrationnelles sont étudiées au sein du même chapitre. Il s'agit principalement de racines carrées de fonctions du second degré et de sommes d'une telle fonction et d'une fonction affine. Comme dit plus haut, ces fonctions sont mises sur le tapis à propos de problèmes d'optimisation. Ici aussi, c'est la recherche d'une « bonne forme » qui est la technique mise en évidence pour déterminer les asymptotes obliques, technique consistant ici à compléter le radicand en carré parfait. Cependant, dans le cadre de ces fonctions, le discours sur les parties négligeables qui pourrait s'ensuivre devient scabreux : ainsi, lorsqu'on considère la fonction $(25\,t^2 - 8t + 1)^{1/2}$, on peut être tenté de négliger les termes - 8 t et 1 par rapport à $25\,t^2$ lorsque t devient grand et en conclure que les asymptotes obliques sont les droites d'équation y = 5 t et y = - 5 t mais un raisonnement analogue à partir d'une autre écriture de la même fonction, soit $((5t - 4/5)^2 + 9/25)^{1/2}$, conduira aux asymptotes y = ± (5t - 4/5). En épinglant cet exemple, les auteurs du projet mettent en évidence la nécessité d'un calcul de limite pour déterminer des asymptotes. De là, une nouvelle définition de l'asymptote qui sera institutionnalisée dans la synthèse par une phrase dans laquelle la connotation temporelle n'est pas absente : « la droite y = ax + b est asymptote au graphique de la fonction f(x) lorsque la différence f(x) - (ax+b), prise en valeur absolue, possède une limite nulle aux infinis, c'est-à-dire devient et reste aussi petite que l'on veut pourvu que x soit

suffisamment grand en valeur absolue ». L'asymptote horizontale apparaît dès lors comme cas particulier et l'asymptote verticale y est définie de manière analogue.

- Dans la synthèse, ce changement d'écriture des racines carrées de fonctions du second degré par complétion du carré est réalisé de manière littérale : les asymptotes en sont déduites de manière générale.
- Un exemple montre comment obtenir, par sommation graphique, la somme d'une fonction affine et de la racine d'un second degré.
- A propos d'un autre exemple, les auteurs insistent sur le fait que l'expression « Plus x est grand, plus f(x) se rapproche de b » ne suffit pas à assurer que y = b est une asymptote horizontale.

Aux yeux des auteurs du projet AHA, l'étude des asymptotes constitue une entrée en matière significative à celle des limites, tout comme l'étude des suites qu'elle poursuit et complète tout à la fois. D'un côté, les limites associées aux asymptotes font intervenir l'infini, soit au niveau de la variable indépendante, soit au niveau de l'image, soit au niveau des deux. De ce fait, elles possèdent plus de relief et mobilisent rapidement le vocabulaire habituellement associé à l'étude des limites, par exemple, l'expression « tendre vers ». Ainsi que les auteurs le commentent pour les asymptotes tant que pour les suites : « Comme dans l'histoire, l'infini est essentiel dans la constitution de l'analyse : c'est pourquoi, ce projet met d'emblée sur le tapis des problèmes impliquant l'infini ». A contrario, l'etude des limites finies en une abscisse réelle paraît plus arbitraire surtout si cette abscisse appartient au domaine de définition. Quant aux indéterminations 0/0, expliquent les auteurs, « les élèves poursuivent avec la fonction simplifiée, se demandant pourquoi il faut trouer son graphique en un point ». D'un autre côté, en comparant les différents ostensifs graphiques auxquels conduisent les divers cas d'asymptotes, les élèves apprennent à distinguer le comportement de x et celui de f(x) et ne plus se contenter de phrases telles que « ça tend vers l'infini ». Ce faisant, ils perçoivent l'aspect fonctionnel des limites plus nettement que dans le cas des suites.

Globalement, cet enseignement des asymptotes s'apparente plutôt à un enseignement par ostention. Les ostensifs choisis par les auteurs le sont en fonction d'une progression conceptuelle pensée a priori. Ils le sont aussi pour la variété des aspects qu'ils permettent de mettre en évidence : de là l'idée des problèmes d'optimisation qui sont aussi traités du point de vue des comportements asymptotiques. Le texte écrit contient peu de généralisations littérales, restant fort limité aux exemples traités qui ont, aux yeux des auteurs, un caractère paradigmatique. Les techniques demeurent volontairement diversifiées pour conserver une certaine vertu technologique en ce sens qu'elles intègrent leur propre validation. Ceci suppose que les élèves puissent justifier leur résultat en évoquant le caractère négligeable de certains éléments de la fonction, une fois celle-ci convertie sous la « bonne forme ». C'est volontairement, disent les auteurs du projet AHA, que les formules générales donnant la pente et le terme indépendant d'une asymptote oblique ne sont pas utilisées, préférant « adapter à chaque classe de fonctions la façon de chercher les asymptotes afin de maintenir davantage de sens à la notion même d'asymptote ».

Mise au point simultanée des concepts de limite et de nombre

Le concept de limite est également travaillé sous la forme de nombre dérivé et celle d'intégrale définie. Pour la raison donnée dans l'introduction, ces approches sont décrites dans la section suivante. Suite à l'ensemble des situations rencontrées : comportements aymptotiques de suites et de fonctions, dérivées, intégrales, le concept de limite est institutionnalisé comme concept unificateur par le biais de phrases « contravariantes » dans lesquelles les quantificateurs sont préfigurés par des expressions telles que « aussi proche que l'on veut » et « suffisamment proche ». Les auteurs du projet estiment que cette forme d'institutionnalisation est suffisante pour beaucoup d'élèves (y compris pour des futurs utilisateurs de mathématiques, tels des futurs chimistes, ...). Dans les trois derniers chapitres de leur ouvrage, ils exhibent cependant les raisons qu'il y a à formaliser et à structurer davantage l'analyse mathématique. Voici quelques aperçus de ce discours lequel est ponctué de questions susceptibles, à leurs yeux, au moins d'interpeller des élèves plus « avancés » à défaut de pouvoir leur être dévolues.

La construction de preuves de limites non évidentes fournit l'occasion de formaliser le concept de limite par un agencement judicieux d'expressions quantifiées et d'inégalités. Par exemple, que la limite d'une suite a^n ($a < 1$) soit 0 est intuitivement évident lorsque a est compris entre 0 et 1/2; ce n'est plus le cas lorsque a est proche de 1 (cas des polygones à 1000 côtés) . On entreprend donc la construction d'une preuve discursive en montrant qu'elle ne peut s'appuyer que sur une définition, elle-même discursive, du concept de limite et non plus sur une idée intuitive de limite : les quantificateurs et inégalités s'adaptent à la démonstration. Ce point illustre le “ proof-generated concept ” de Lakatos (1984).

Dans la suite du projet AHA, le concept formalisé de limite est encore mobilisé dans les démonstrations des théorèmes généraux sur l'algèbre des limites de suites (limite de somme, ...). Toutes ces démonstrations reposent implicitement sur une propriété incontournable que les auteurs dégagent afin de lui donner le statut d'axiome : l'axiome d'Archimède. La démonstration, comme discours technologique, débouche donc sur les piliers théoriques.

Un autre axiome des réels incontournable en analyse est l'axiome des intervalles emboîtés. Dans ce projet, il permet, avec l'axiome d'Archimède, de donner le statut de nombre à des décimaux illimités périodiques ou non qui souffrent d'une crise d'identité, comme analysé par Hauchart et Rouche, 1987.

Quelques démonstrations et contre-exemples bien choisis montrent que les principaux résultats d'analyse ne tiennent que si les fonctions sont définies sur des intervalles de réels. Par exemple, les auteurs exhibent une fonction définie sur les rationnels d'un intervalle, qui n'y est pas croissante bien que sa dérivée y soit positive, ainsi qu'une démonstration du lien entre la croissance d'une fonction sur un intervalle et la positivité de sa dérivée qui repose sur l'axiome des intervalles emboîtés, non satisfait pour l'ensemble des rationnels.

Ce contre-exemple montre aussi le danger qu'il y a à établir des résultats d'analyse en se basant sur des intuitions géométriques ou physiques. Le projet métaphysique de Bolzano de couper l'analyse de ces intuitions est évoqué dans le guide méthodologique.

Sur le mode de l'ostention, les auteurs du projet clôturent ainsi l'organisation mathématique en exposant les problèmes sur lesquels elle débouche. Dans ce cas, il s'agit d'une ostention complètement assumée, son objet étant l'évolution d'une œuvre mathématique et les raisons culturelles qui l'ont suscitée.

Des grandeurs physiques et des objets géométriques définis par des limites

Le concept de limite permet de définir cet objet géométrique qu'est la tangente, ainsi que de multiples grandeurs physiques : aire, volume, travail d'une force, ... par le biais des dérivées et intégrales. Le projet AHA ménage une première rencontre avec ces objets et grandeurs avant de les définir comme tels.

Première approche des tangentes via les approximations affines

La toute première rencontre avec l'objet tangente ne fait pas explicitement intervenir le concept de limite. Elle joue cependant un rôle différé pour valider la définition de la tangente par le biais de la limite.

Sur base d'une représentation à l'échelle, les élèves sont de prime abord invités à repérer la partie invisible d'un mât planté au sommet d'une colline, pour quelqu'un situé au pied de celle-ci. Ce milieu matériel rend optimales les stratégies de dessin et, comme en témoignent les auteurs du projet, les élèves tracent « à vue » une droite qui « frôle la courbe en un point » et qu'on appellera « tangente » à la suite de quelques-uns d'entre eux. L'imprécision du dessin est soulevée, de même qu'est annoncée la recherche d'un procédé plus précis qui justifie le passage aux expressions analytiques des courbes. Suit alors la recherche de candidates-tangentes au point d'abscisse 0 à plusieurs courbes : $y = x^2$, $y = kx^2$, $y = 1 + x + x^2$, $y = x^3$, $y = x^3 + x^2$, $y = 1 - x + x^2 + x^3$. Les moyens d'investigation utilisés pour tester telle ou telle candidate-tangente évoluent avec les fonctions : résolution d'un système d'équation $y = ax$ et $y = x^2$ pour montrer que, si petite que soit la valeur de a, aucune droite d'équation $y = ax$ ne peut se glisser entre $y = x^2$ et $y = 0$ sans rencontrer la courbe une seconde fois; zooms graphiques pour illustrer le fait précédent et pour montrer que le graphique de $y = x^2$ peut représenter n'importe quelle fonction du type $y = kx^2$, sommation graphique pour montrer que la droite $y = 1 + x$ frôle la courbe $y = 1 + x + x^2$ tout comme $y = 0$ frôle $y = x^2$, ce qui signifie non seulement que *la courbe atterrit en douceur sur la droite*, mais aussi qu'il n'y pas moyen de glisser entre elles deux une autre droite; « coinçage » du graphique de $y = x^3$ entre $y = \pm x^2$ et $y = 0$, majoration de $x^2 + x^3$ par $2x^2$, ...

On peut imaginer une part d'autonomie des élèves lors de cette recherche dans la mesure où ils ont intégré des expériences vécues en amont dans le projet AHA ou dans leur apprentissage : comparaison des fonctions $y = x^n$, sommation graphique, négligence de termes, résolution de systèmes, mais là n'est pas l'essentiel au regard de la théorie des situations. Je voudrais plutôt épingler les faits suivants.

- Les moyens d'investigation décrits plus haut jouent également un rôle de validation mais, en cela, ils sont complétés par d'autres arguments que le texte ajoute sans que la situation ne le requiert véritablement. Ainsi, à propos de la fonction $y = 1 + x + x^2$ voit-on apparaître une nouvelle signification du verbe « frôler » : « Frôler signifie qu'autour du point d'abscisse 0, la fonction $1 + x + x^2$ se comporte pratiquement comme $1 + x$ [...]. Numériquement, l'erreur commise est négligeable pour des x proches de 0 et correspond à l'écart entre la courbe et sa tangente en $x = 0$ ». C'est à cet endroit du texte qu'est introduite l'expression *approximation affine*. Assez tardivement dans la suite, juste avant les applications, on annonce pour la première fois l'intention de remplacer localement une fonction par une fonction du premier degré plus simple qui l'approxime convenablement. Ainsi, le texte change-t-il subrepticement le contrat faisant passer les élèves au « contrat de l'approximation numérique » sans qu'aucune des variables des situations ne le nécessite. On ne peut évidemment parler de dévolution dans ces circonstances, eu égard bien sûr à l'enjeu didactique majeur : les connaissances liées au contrat sont ici bien nécessaires à l'élève pour comprendre là où le professeur veut en venir. Cela dit, l'enjeu de l'approximation numérique n'est pas le seul présent dans les applications comme je l'explique ci-dessous.

- A ce stade de leur apprentissage, les élèves ont rencontré la tangente au cercle. De cette première et unique expérience, ils ont gardé une conception de la tangente qui a la vie dure, ainsi que l'a montré Castela (1995) : celle d'une droite qui rencontre la courbe en seul point sans la traverser. Le choix des fonctions traitées dans le projet AHA permet d'organiser progressivement le conflit entre cette conception et celle d'une droite qui frôle la courbe. Ainsi, pour valider que $y = 1 + x$ est tangente à $y = 1 + x + x^2$ à l'origine, le texte s'appuie avec raison conjointement sur les deux conceptions : la droite non seulement frôle la courbe mais encore la rencontre en un seul point sans la traverser. Par contre, les deux conceptions sont en opposition, par exemple, à propos de la droite $y = 1 - x$ qui frôle $y = 1 - x + x^2 + x^3$ au point (0, 1) mais qui la traverse autre part. Plus loin, juste avant les applications, le texte marque le coup par le biais d'une section intitulée « Mais qu'est-ce donc qu'une tangente ? » en avançant l'intention de remplacer localement une fonction par une fonction du premier degré pour justifier le fait de privilégier la conception « droite qui frôle la courbe ».

Pour cette dernière raison, les exemples traités jouent, ici également, le rôle de milieu antagoniste même si celui-ci n'implique pas de dialectique d'action, de formulation ou de validation. Il est antagoniste dans la mesure où il fait prendre conscience aux élèves de deux conceptions distinctes de la tangente et de leur incompatibilité dans certains cas : des rétroactions obligent donc l'élève à faire le deuil d'une première conception pour en adopter une autre.

Cette progression débouche sur une définition algébrique de la tangente à une fonction polynomiale, directement porteuse d'une technique d'obtention de cette tangente : la tangente est la droite dont l'équation est obtenue en gardant la partie affine du polynôme. Par l'entremise d'une translation et de sa réciproque, cette définition permet également de déterminer la tangente à une courbe polynomiale en un point d'abscisse non nulle.

Les applications qui clôturent ce chapitre sont de deux types :

- Le tracé de courbes polynomiales qui serait malaisé sans la connaissance de quelques tangentes qui servent de guide graphique, par exemple aux extrémés ou aux points d'inflexion. Ce savoir-faire ne fait pas l'objet d'une étude systématique, mais est mis en œuvre dans le cas d'exemples choisis pour se prêter à une investigation ad hoc réinvestissant des démarches déjà rencontrées : sommation graphique, comparaison des ordres de grandeur des différents termes du polynôme.
- La recherche des racines d'une fonction polynomiale par la méthode de Newton qui montre l'intérêt de remplacer localement une fonction par son approximation du premier degré.

Dans le guide méthodologique réservé aux enseignants, les auteurs du projet AHA complètent ces applications par quelques exemples d'approximations dans le calcul de grandeurs; dans le même ouvrage, ils évoqueront aussi quelques approximations standard de fonctions non polynomiales, en liaison avec le calcul des dérivées.

Comme je l'ai dit plus haut, le concept de limite est absent de cette première rencontre avec les tangentes. Cette position est délibérée et les raisons avancées par les auteurs seront précisées plus loin. Il n'empêche que le chapitre qui vient d'être analysé permet d'engranger quelques résultats de tangente qui serviront de référence lorsqu'il s'agira de valider le calcul de limite sous la forme d'un nombre dérivé.

Vitesses et limites

Des problèmes de vitesses liées constituent, dans le projet AHA, une autre première rencontre avec le concept de limite. Voici le premier énoncé proposé aux élèves :*Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1 cm par minute. L'angle au sommet du cône vaut 90°. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à 100 cm³/min ?* Ce problème constitue un milieu « matériel », sous forme d'une expérience de pensée, paradigmatique d'une classe particulière de problèmes de vitesses liées qui se caractérise comme suit : deux grandeurs y sont mobilisées (ici le volume d'eau et sa hauteur dans le vase). Elles varient toutes deux en fonction du temps, la vitesse de variation de l'une est constante et la vitesse de l'autre, sur laquelle porte la question, est variable. Ces deux grandeurs dépendent l'une de l'autre, ce qui fait que leurs vitesses sont liées. Là sont les variables a priori dépendant de la structure mathématique du problème. Il en est une autre qui ne peut être testée que lors d'une analyse didactique a posteriori : le contexte du problème induit l'intuition que, si la vitesse d'une des deux grandeurs est constante, la vitesse de l'autre ne peut être que variable (c'est le cas de l'énoncé ci-dessus, mais ce n'est pas le cas de tous les problèmes de vitesses liées). L'énoncé ci-dessus se prête en outre à une validation particulière sur laquelle je reviendrai.

J'ai déjà analysé les enjeux didactiques de ce problème autre part (Schneider, 1992 et à paraître). Je me contenterai donc ici de résumer cette analyse. Ce problème suscite plusieurs stratégies de base dont la plus « primitive », sans être la plus fréquente, consiste à diviser l'expression du volume versé au temps t par cette même valeur de t avant d'égaler à 100. L'intuition effective que le débit croît constamment et les vérifications numériques contredisent le résultat trouvé par cette première stratégie. Elles poussent tous les élèves, y compris ceux qui avaient d'emblée évalué des débits sur de plus petits laps de temps, à procéder à un découpage du temps de plus en plus fin. Cette description n'est pas sans rappeler les arguments que donne Artigue (1998) pour attester du caractère fondamental d'une situation proposée par Legrand pour introduire la procédure intégrale : la situation dite « du barreau ». Là s'arrête cependant l'analogie, les étudiants auxquels la situation du barreau a été proposée disposant déjà du concept de limite. Ce n'est pas le cas du problème du vase conique qui représente une autre « première rencontre » avec le concept de limite, soit que ce problème soit proposé d'entrée de jeu à des élèves qui n'ont reçu aucun enseignement préalable d'analyse (Schneider, 1988), soit qu'il suive l'étude du comportement asymptotique des suites et fonctions, telle que décrite supra, et dans ce cas, la limite y apparaît sous une toute autre facette comme je vais le montrer. L'investigation qui vient d'être décrite ainsi que l'algébrisation du temps t et de l'incrément de temps Δt dans l'expression du débit moyen (qu'elle soit spontanément proposée par les élèves ou obtenue à l'invite du professeur pour alléger la recherche) débouchent sur l'identification d'un passage à la limite : rendre nul Δt avant d'égaler à 100 l'expression du débit . C'est l'occasion d'un débat sur la validité de ce calcul, sur le sens de l'indétermination 0/0, au cours duquel s'expriment des réserves analogues à celles observées par Schneider (1988 et 1992) à propos des concepts de vitesse et de débit instantané. Ces réactions sont interprétées par cet auteur comme obstacle épistémologique, à savoir une vision positiviste des concepts mathématiques, supposés être un reflet exact du monde tel qu'on peut l'appréhender par les sens et les mesures plutôt que des modèles inventés par les humains pour le comprendre.

Le problème décrit plus haut se prête à une autre expérience de pensée qui vise à les convaincre que la réponse obtenue ainsi est bien exacte. Il s'agit de poser un vase cylindrique de base 100 cm² à côté du vase conique et de les alimenter tous deux au moyen de pompes respectives de sorte que les niveaux d'eau montent régulièrement et simultanément de 1 cm / min. La pompe qui alimente le cylindre a évidemment un débit constant de 100 cm^3 / min. L'autre pompe devra verser moins vite que la première tant que le cône est plus étroit que le cylindre, et plus vite après. Les deux pompes auront donc un débit de 100 cm^3 / min. à l'instant précis où la superficie de l'eau dans le cône vaut 100 cm^2, ce qui revient à égaler à 100 l'expression du débit dans laquelle on a annulé Δt. Cette expérience transcende une intuition exprimée par plusieurs élèves : à force de considérer des tranches de volumes de plus en plus petites, on prend des surfaces. Cette intuition conduit à la réponse exacte uniquement dans le cas où la vitesse de la montée de l'eau est unitaire (autre variable didactique délibérée). L'expérience de pensée, elle, est adaptable dans le cas contraire.

Les élèves sont ensuite invités à lire des propos de Berkeley exprimant à l'encontre du concept d'ultima ratio des réserves comparables à celles des élèves sur l'annulation de Δt et son interprétation en termes d'« instantané ». S'ensuit un débat sur le statut des concepts mathématiques, produit de l'esprit humain plus que prolongement de l'expérience sensible.

Schneider (à paraître) analyse plus à fond l'adidacticité potentielle de ce problème et en conclut qu'il se prête à des moments de dévolution lesquels « s'appuient sur un milieu hybride : le problème lui-même et ses variables, un obstacle épistémologique, l'expérience antérieure des élèves, tant au niveau du contrat didactique qu'au niveau des acquis scolaires, en particulier la technicité algébrique, sa signification et ses interdits, les échanges avec les pairs et l'habileté du professeur tant comme animateur pour favoriser les échanges que comme comédien capable de faire revivre une certaine « dramatisation » à propos du côté scandaleux du nouveau calcul identifié. ». On retrouve dans de tels propos les composantes cognitive et sociale par lesquelles Perrin (1999) complète le milieu matériel. Il est utile, en outre, d'évoquer ici la distinction que fait cet auteur entre la situation proposée par l'enseignant et celle effectivement rencontrée par l'élève. Ainsi, l'absence dans le milieu effectif d'un rapport conforme au calcul algébrique hypothèque les capacités adidactiques du problème analysé.

A la suite de la résolution de ce problème, le concept de débit instantané est défini comme l'expression obtenue en annulant Δt dans l'expression du débit moyen sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$, une fois faites toutes les simplifications algébriques. L'expression « limite du débit moyen pour Δt tendant vers 0 » est utilisée pour décrire ce calcul. Après l'étude d'autres problèmes de vitesses liées par une démarche analogue complétée de tableaux numériques, la synthèse définit la vitesse de variation instantanée d'une grandeur qui varie en fonction du temps comme « la limite du taux moyen de variation de cette grandeur pour des intervalles de temps qui diminuent indéfiniment. » induisant ainsi un changement de point de vue par rapport à la première définition.

Ce chapitre débouche sur un entraînement plus répétitif aux problèmes de vitesses liées. Manquent cependant, à ce stade, les règles de calcul des dérivées dont le projet AHA reporte l'étude au chapitre suivant. Les élèves doivent donc recourir, comme montré dans le chapitre, à l'écriture du taux moyen, sa simplification et la suppression de Δt (la simplification passe dans certains cas par la « technique du binôme conjugué » exhibée à l'occasion de deux problèmes résolus dans le chapitre). Ce choix des auteurs est délibéré. Ils l'argumentent par référence à la quête du sens : « D'autres problèmes de vitesses liées sont ensuite résolus de manière *artisanale*, c'est-à-dire sans mise au point préalable du calcul proprement dit des dérivées, afin que les élèves s'imprègnent du sens du quotient différentiel. »

Rencontre entre vitesses et pentes de tangente

Au début du chapitre suivant, est fait, sur le mode de l'ostention, le lien entre les vitesses instantanées et les pentes de tangente. Ce lien est conjecturé sur base de la constatation d'une similitude formelle dans la résolution de problèmes issus de contextes différents et qui mobilisent la même fonction : la détermination de la tangente en un point quelconque à $y = x^2$ (respectivement $y = x^3$, etc, ...) et le calcul de la vitesse instantanée d'un mobile dont la position e sur une trajectoire rectiligne est donnée par la loi $e(t) = t^2$ (respectivement $e(t) = t^3$, etc, ...). En se basant sur cette similitude formelle des résultats, les auteurs interprètent le taux de variation moyen d'une fonction comme pente de sécante et le taux de variation instantané comme pente de tangente : la vitesse instantanée et la pente de tangente, différenciées au départ, apparaissent désormais comme deux facettes d'un même concept. C'est à ce moment que le texte, soutenu par des ostensifs graphiques classiques, fait apparaître la tangente comme droite dont la pente est la limite d'un quotient différentiel.

Le calcul de taux de variation instantané sert ensuite à déterminer des pentes de tangentes à des courbes de fonctions non polynomiales, telle que la fonction racine carrée, sans recourir cette fois à l'approximation affine. Autant que possible, une argumentation géométrique complète le calcul.

Une fois mis en évidence le concept de fonction dérivée dans le cadre d'autres problèmes qui requièrent un processus de modélisation et dont je ne parlerai pas ici, les auteurs développent les règles du calcul de dérivation. Ils recourent pour cela tantôt à l'approximation affine, tantôt à la limite du quotient différentiel, pour rendre la preuve de chaque cas plus « parlante », plus intuitive. Le lien entre, d'une part, les extrema et la croissance d'une fonction et, d'autre part, les racines et le signe de sa dérivée est exploré à l'occasion de questions « vrai-faux » qui requièrent des élèves la production d'ostensifs graphiques.

L'organisation didactique menant globalement aux dérivées peut être résumé et interprété comme suit.

Premièrement, le projet fait travailler spécifiquement les tangentes et les vitesses avant d'en dégager l'essence commune. Ce choix est délibéré, les auteurs du projet s'appuyant, pour le justifier, sur des expériences qui montrent que les élèves ne transfèrent pas aisément le concept de dérivée d'un contexte à l'autre. En effet, si une vitesse, un taux de variation instantané et une pente de tangente sont équivalents d'un point de vue mathématique, ils ne le sont pas d'un point de vue épistémologique : par exemple, Schneider (1988) montre qu'il n'est pas indifférent pour l'apprenant que, dans le calcul d'une dérivée, la variable indépendante soit le temps ou non et que savoir interpréter la dérivée comme pente de tangente n'est pas savoir interpréter par exemple pourquoi la dérivée de l'aire du disque, par rapport à son rayon, donne son périmètre, ...

Deuxièmement, le concept de tangente est travaillé en deux temps pour sérier les difficultés : tout d'abord, faire accéder les élèves, via l'approximation affine, à une conception locale de la tangente qui n'est pas encore dynamique; dans un second temps, la rendre dynamique en la faisant percevoir comme « limite » de sécantes (droite dont la pente est la limite de quotients différentiels). Ce travail en deux temps du concept de tangente est motivé, aux yeux du groupe AHA, par certaines difficultés d'apprentissage que des recherches en didactique ont permis de mettre en évidence : une difficulté à associer la pente d'une tangente à la limite d'une suite de quotients différentiels que l'on peut interpréter en convoquant l'obstacle géométrique de la limite (Cornu (1983), Sierpinska (1985), Schneider (1988)) et la persistance d'une conception globale et statique de la tangente, héritée du cas du cercle et dont nous avons parlé plus haut.

Lors de la seconde étape, les résultats de tangentes engrangés lors de la première phase doivent servir de référents pour tester la validité de la méthode utilisant les quotients différentiels : cette dernière méthode étant sujette à caution aux yeux de certains élèves, autant montrer qu'elle peut donner des résultats obtenus « par ailleurs » sur base d'autres arguments. Cependant, si cette intention est explicite dans le guide méthodologique, elle est peu présente dans le livre destiné aux élèves.

Troisièmement, le projet AHA amène le concept de taux instantané dans l'ambiance des problèmes de vitesses liées, parce que ce contexte, plus que tout autre, est porteur de l'idée de variation, cette dernière étant peu présente a priori ni dans la recherche des tangentes, ni dans le calcul d'aires. Le projet s'inspire aussi de ce contexte cinématique pour tenter une certaine dévolution du théorème fondamental du calcul intégral, une aire curviligne étant interprétée comme une tache en formation, induite par le déplacement d'une droite parallèle à l'axe Oy et dont on demande la vitesse de variation.

Les aires curvilignes

Le calcul de l'aire sous $y = x^3$ entre les bornes 0 et 1 constitue la première rencontre avec le calcul intégral. Comme en témoigne un récit fait par les auteurs du projet AHA dans le guide méthodologique, une première phase de cette recherche peut être dévolue aux élèves. Des découpages de la surface curviligne, inspirés par la forme de celle-ci, sont d'emblée mis à l'épreuve. Ils sont progressivement remplacés par des découpages plus organisés, en rectangles ou trapèzes, jugés plus efficaces, plus « algorithmisables ». Les échanges entre élèves jouent un rôle non négligeable dans cette évolution. L'algébrisation d'un tel découpage laminaire, tantôt spontanée, tantôt sollicitée par le professeur, suppose l'écriture, sous forme polynomiale, de la somme des cubes des n premiers nombres entiers. Ce travail est guidé par le professeur (éventuellement il a pu être préparé par des exercices relatifs aux suites). Il débouche sur la formulation des termes généraux de suites, par exemple $(1 - 2/n + 1/n^2)/4$ et $(1 + 2/n + 1/n^2)/4$ qui représentent des approximations de l'aire cherchée sous la forme de sommes d'aires de rectangles, respectivement par défaut et par excès.

La question de savoir que dire de l'aire cherchée, sur base des calculs faits, fait alors partie du topos des élèves, le professeur leur dévoluant ainsi non seulement la suggestion d'un calcul de limite, mais aussi l'éventuel doute sur l'exactitude du résultat trouvé et le débat relatif sur la possibilité d'obtenir une aire curviligne au départ d'aires rectilignes. De fait, l'idée du passage à la limite s'impose massivement, cette technique ayant déjà été institutionnalisée auparavant (elle peut l'être aussi chez des élèves pour lesquels cette situation est une toute première rencontre avec un processus infini); quant au doute évoqué, il ne tarde ni à s'exprimer, ni à se propager dans la classe. Il se traduit par des réactions que Schneider (1991 ??) interprète comme des manifestations de l'obstacle géométrique de la limite ou celles d'un obstacle épistémologique plus global encore : l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions.

Le fait de traiter un calcul d'aire curviligne, jusqu'au bout, c'est-à-dire jusqu'au passage à la limite, sans se contenter d'approximations numériques, est un choix délibéré des auteurs du projet AHA, en ce qu'il permet précisément de laisser place à ce doute et au débat qu'il suscite. Leur réponse est un discours technologique, sous la forme d'une preuve qui s'inspire de la méthode d'exhaustion des Anciens et qui s'appuie sur des évidences intuitives, en particulier le fait que l'aire cherchée est encadrée par ses approximations : l'aire sous $y = x^3$ entre les bornes 0 et 1 ne peut valoir *1/4* + ε , aussi petit que soit ε , car en prenant suffisamment de rectangles, on peut intercaler entre *1/4* et *1/4* + ε, l'approximation par excès correspondante. D'où la contradiction : l'aire cherchée est supérieure à une de ses approximations par excès. De façon analogue, on montre que cette aire ne peut valoir *1/4* - ε. Comme analysé par Schneider (1988), cette preuve amorce le concept formalisé de limite. En bref, elle renverse l'ordre d'énonciation du comportement asymptotique utilisé spontanément par les élèves : “ plus nombreux sont les rectangles, meilleure est l'approximation ”. Elle contient de plus des ingrédients qui préfigurent les quantificateurs : la contradiction doit subsister quel que soit ε et découle de l'existence d'un nombre donné de rectangles. Et surtout, cette preuve repose sur la possibilité de rendre les approximations aussi proches de 1/4 qu'on le souhaite pour autant qu'on prenne suffisamment de rectangles, ce qui permet de mettre au point, dans ce contexte précis, ce qu'on entend par le mot « limite ».

Un travail analogue pour déterminer l'aire sous $y = x^2$ et l'écriture de l'aire sous $y = x$, débouchent sur une conjecture : l'aire sous $y = x^n$, entre les bornes 0 et b vaut b^n/n. Cette conjecture sera établie dans le chapitre suivant sur base du théorème fondamental de l'analyse.

Ces calculs de limites sont complétés, au sein du même chapitre, par des comparaisons de grandeurs basées sur le découpage de celles-ci en grandeurs ayant une dimension de moins : des segments ou lignes-indivisibles découpés dans des surfaces, des surfaces-indivisibles découpées dans des solides. Ces comparaisons prennent la forme des principes de Cavalieri ou d'autres formes plus audacieuses que je ne préciserai pas ici.

Le choix de telles techniques est motivé par les auteurs pour des raisons d'ordres divers. D'abord par référence aux intuitions « premières » des élèves. Des intuitions correctes d'une part : ainsi de tels découpages font écho à l'intuition que partagent plusieurs élèves lorsqu'ils disent que le volume d'un parallélépipède vaut le produit de la base par la hauteur parce que « un volume est une superposition de surfaces » ou est engendré par « le coulissement de la base le long de la hauteur ». Des intuitions fausses d'autre part : ainsi celle qui consiste à extrapoler aux volumes de deux solides de révolution le rapport des aires de leurs sections radiales respectives et qui, comme bien d'autres intuitions, est interprétée par l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions. Les principes de Cavalieri constituent une sorte de garde-fou en énonçant des conditions dans lesquelles on peut comparer sans risque les solides ou surfaces section par section, afin de corriger des comparaisons plus hasardeuses et indues. Ensuite, en évoquant le champ des applications auquel donnent accès ces comparaisons, complétées de quelques limites. L'intention est de proposer aux élèves les applications classiques de calculs d'aires et de volumes de « section connue » sans devoir attendre le théorème fondamental de l'analyse et le calcul des primitives auquel ce théorème ramène les aires et les volumes.

L'organisation mathématique sous-jacente est faite d'un enchevêtrement de techniques et de technologies assez complexe. Après avoir été éprouvés, les principes de Cavalieri jouent le rôle d'axiomes. Ils permettent de justifier la linéarité de l'intégrale, interprétée en termes d'aires. Moyennant la conjecture de l'aire sous $y = x^n$, on a donc accès à l'aire sous une courbe polynomiale. L'aire du disque est identifiée à celle d'un triangle car les cercles concentriques qui « composent » le premier ont même longueur, deux à deux, que les segments qui « composent » le second. De l'aire du disque à celle de l'ellipse on passe par les principes de Cavalieri. Une autre technique consiste à modéliser les sections planes d'un solide par des segments ayant même mesure pour réduire la comparaison de volumes à celles d'aires. Cette technique fait apparaître l'aire sous une courbe comme un problème « standard » qui en modélise d'autres dont l'unité réside dans le fait qu'une même fonction exprime la loi de variation des sections découpées. Ainsi, l'aire sous une fonction du deuxième degré « standardise » à la fois le volume d'une pyramide, celui d'un cône, celui d'une sphère et l'aire d'un segment de parabole. Cette technique est éprouvée, dans des exemples jugés suffisamment paradigmatiques pour constituer une forme de validation, laquelle est complétée, dans un cas, par un calcul de limite : celui de la somme des volumes de cylindres inscrits dans un paraboloïde de révolution, interprétée aussi comme la somme d'aires de rectangles. De plus, un raisonnement par l'absurde, comparable à celui fait plus haut, montre que ce calcul donne la valeur exacte du volume du paraboloïde.

Des sommes de Riemann généralisées

A la fin du manuel, le concept d'intégrale est élargi. En effet, lors d'une première approche, des aires sous une courbe ont été obtenues grâce à des sommes de Riemann particulières : la subdivision de l'intervalle d'intégration était régulière et les hauteurs des rectangles étaient les images soit des origines, soit des extrémités des intervalles de la subdivision. Le projet montre que, si de telles limitations sont efficaces pour calculer des aires, la deuxième doit être abandonnée dans le cas de rectification d'arcs de courbe et que toutes deux deviennent encombrantes dès qu'il s'agit de démontrer des propriétés de l'intégrale définie qui font écho aux propriétés intuitives de l'aire.

Analyse et évaluation globales

Premières rencontres et existence d'une situation fondamentale pour le concept de limite

La théorie anthropologique de la didactique distingue deux formes de première rencontre avec le savoir : la rencontre « culturelle-mimétique » où l'objet de savoir, « existant par ailleurs, en certaines pratiques sociales » se révèle par le « truchement d'un récit » et la rencontre par le biais d'un « système de situations dites fondamentales » dont la résolution suppose une (re)création de cet objet de savoir par l'élève lui-même, « seul ou en équipe ». Elle ne se prononce pas en faveur de l'une ou l'autre de ces rencontres. Tout au plus, suggère-t-elle qu'il existe une version « plus exigeante » de la rencontre culturelle-mimétique qui explicite les raisons d'être de l'objet étudié. En traquant davantage d'éventuels critères d'évaluation dans les propos de Chevallard (1999), je note qu'il mentionne une tension possible, sur laquelle je reviendrai, entre la mise en évidence des raisons d'être et une organisation didactique basée sur un système de situations fondamentales. Il évoque également des conditions plus ou moins bonnes de réalisation d'une de ces rencontres ou d'une de leurs multiples combinaisons par le biais d'expressions telles que « référence culturelle incomplètement assumée » et « introduction *en situation* plus ou moins adéquate aux plans épistémologique et cognitif ».

La rencontre au travers d'un système de situations fondamentales renvoie à la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998) par rapport à laquelle je tente ci-dessous de situer le projet AHA. A cette fin, il me semble opportun d'interroger au préalable les concepts de situation fondamentale et d'adidacticité et ce qui les relie. Dans Brousseau (1998), on peut lire : « Chaque connaissance peut se caractériser par une (ou des) situation adidactique qui en préserve le sens et que nous appellerons situation fondamentale », ce qui laisse supposer que, pour être qualifiée de fondamentale, une situation doit pouvoir produire des situations adidactiques, c'est-à-dire être porteuse, en fin de compte d'adidacticité. Et, c'est bien une potentialité de dévolution que Chevallard associe aux situations fondamentales, lorsqu'il évoque à leur propos l'image de « l'élève qui, seul ou en équipe, est l'acteur principal, sinon unique ». Nul ne niera qu'un des ressorts et non des moindres du concept de situation fondamentale est qu'il est créateur de situations didactiques : l'ingénierie mise au point par Brousseau sur les rationnels et décimaux en témoigne clairement. Cependant, au delà de telles réalisations, la question de l'existence d'un système de situations fondamentales associé à un champ de problèmes donné taraude plus d'un chercheur, surtout s'il considère, à l'instar de Legrand (1997), cette existence comme un postulat de la théorie des situations. Il n'est pas inutile de rappeler ici que Brousseau distingue situation fondamentale et réalisation de celle-ci. D'autres chercheurs insistent sur cette distinction parmi lesquels Bloch (1999) et Perrin-Glorian (1999), cette dernière estimant que les chercheurs lient trop étroitement l'existence d'une situation fondamentale à des possibilités de dévolution : « Il me semble cependant que l'existence d'une situation fondamentale représentative d'un savoir n'implique pas l'existence d'une situation adidactique d'introduction à ce savoir à un niveau donné car cela supposerait aussi l'existence d'un contrat didactique permettant la dévolution et le fonctionnement de cette situation, ce qui est beaucoup plus fort. L'identification abusive entre situation adidactique (J'AURAIS MIEUX COMPRIS FONDAMENTALE ICI) représentative d'un savoir et situation adidactique permettant une première rencontre avec ce savoir, dans une institution donnée, me paraît une cause de malentendu à l'intérieur de la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques, y compris en France, et une difficulté dans l'articulation des divers cadres théoriques ».

Cette question d'existence d'une situation fondamentale est particulièrement cruciale en ce qui concerne le concept de limite. Je retiendrai deux des raisons avancées. La première, invoquée par Bloch (1999), est la « non-nécessité du système de validation de l'analyse classique : historiquement, les mathématiciens ont longtemps hésité, comme on sait, entre des validations de type « classique » (inégalités, majorations) et des validations par les indivisibles, avant de se fixer sur une théorie ». Notons que, chez cet auteur, le choix de cette raison est révélateur d'un présupposé théorique : une situation fondamentale de la limite doit faire intervenir le système de validation propre à l'analyse. J'y reviendrai. Une deuxième raison, donnée par Artigue (1998) a trait au rôle unificateur que joue le concept de limite dans la théorie : « [...] ce qui est en jeu, épistémologiquement, à travers la définition et la formalisation, c'est la réponse à des besoins d'unification, de généralisation, de structuration du savoir dont la dévolution est beaucoup plus délicate ».

Sans se référer à la théorie des situations et à ses concepts, les auteurs du projet AHA ont partagé implicitement de semblables préoccupations. Au vu de leur production et de ses justifications, on peut aisément imaginer quel serait leur avis sur la question.

A leurs yeux, la question d'existence d'une situation fondamentale de la limite s'évalue à l'aune de la globalité de leur projet plutôt que par référence à l'une ou l'autre situation de ce dernier, et ceci, pour plusieurs raisons.

Premièrement, la question d'existence d'une situation fondamentale de la limite ne peut être dissocié de questions analogues à propos d'autres objets traditionnellement jugés sensibles (au sens de Mercier, 1998) dans l'enseignement des débuts de l'analyse : les suites et fonctions, les dérivées, les intégrales. J'y ajouterai les objets ou grandeurs que la limite permet de définir. Ainsi, le concept de fonction entretient-il une interaction à double sens avec celui de limite : des fonctions bien choisies sous la forme d'ostensifs graphiques aident les élèves à discriminer les rôles de x et de y dans la formulation d'un comportement asymptotique; en revanche, certaines questions sur les comportements asymptotiques de suites font travailler la loi de dépendance entre l'indice et le terme général. Quant à l'intégrale de Riemann, définie comme une limite, sa formulation et sa standardisation en termes d'aires font apparaître f(x) comme la mesure d'une grandeur, au signe près, et mettent en évidence le rôle unificateur que jouent les fonctions dans la classification des intégrales. On peut évoquer ici la notion de « champ conceptuel » de Vergnaud (1990).

Deuxièmement, si une situation fondamentale de la limite existait, sa réalisation sous la forme de situations adidactiques devrait être résolument plurielle. Ce qualificatif est à entendre ici autrement que par la classe de situations adidactiques engendrées par ce modèle générique qu'est une situation fondamentale. Il renvoie plutôt aux deux points de vue développés ci-dessous. Tout d'abord, en se référant au développement historique de l'analyse, les auteurs du projet AHA conçoivent un apprentissage en deux boucles qui n'est pas sans rappeler la dialectique outil-objet de Douady (1986). Dans la première boucle, la limite se présente surtout comme outil de résolution de problèmes liés entre autres à la détermination de grandeurs. Dans la seconde boucle, elle est construite comme un outil de preuve mais devient objet dans la mesure où l'on explore les mécanismes et la cohérence du système de preuve qu'elle permet. La validation est présente dans chacune de ces boucles mais change de forme de l'une à l'autre. J'y reviendrai. L'ensemble des situations adidactiques « préservant le sens » de la limite devrait donc prendre en compte cette évolution du sens en fonction du projet visé : d'abord construire des outils pour répondre à des questions issues de la géométrie et de la physique, ensuite asseoir les fondements d'une théorie indépendamment de toute intution géométrique ou cinématique. Il me semble que Bloch et Artigue posent la question de l'existence d'une situation fondamentale surtout à ce dernier niveau, ce qui apparaîtrait vraisemblablement sujet à caution aux auteurs du projet AHA aux yeux desquels chacun des deux niveaux est incontournable. Le sens se réfère donc ici au projet mathématique. Ensuite, se basant sur certaines difficultés et réactions d'élèves, les auteurs du projet AHA considéreraient une autre pluralité des situations adidactiques relatives à la limite. Cette autre pluralité devrait prendre en considération le fait que l'outil limite change de « sens », du point de vue des élèves, suivant le problème dans lequel il est mobilisé. Ce pluriel renvoie, mutatis mutandis, à celui évoqué par les Brousseau (1987) à propos des conceptions des rationnels : commensuration, fractionnement, opérateur d'agrandissement, ... Cependant, il s'agirait ici tant « d'impressions différentes » causées par le passage à la limite, d'après les situations considérées, que d'emplois divers de la limite suivant qu'elle impliquée dans un processus de différentiation ou d'intégration. Voici quelques exemples significatifs. Soit la fonction $y = (3x + 1) / (x - 2)$ dont la courbe ne traverse pas son asymptote horizontale $y = 3$. Cette valeur 3 est obtenue comme limite aux infinis de la fonction, c'est-à-dire par négligence de termes de la forme a/x qui apparaissent lorsqu'on met x en évidence au numérateur et au dénominateur. Cette négligence s'accompagne du sentiment d'avoir commis quelques erreurs, sentiment bien légitimé dans la mesure où le calcul opéré sur la fonction produit un objet proche de la courbe, mais qui lui reste cependant extérieur, donc distinct. Par contre, le même sentiment d'erreur suscite des réactions plus vives lorsque, en dépit de la négligence de termes, le calcul d'une limite donne la valeur exacte d'une grandeur cherchée : vitesse intantanée ou aire curviligne. L'apprentissage des limites définissant des grandeurs soulève donc des problèmes autres que ceux posés par les limites de suites ou fonctions fussent-elles contextualisées ou illustrées par des ostensifs. Pluralité aussi par le fait que, dans un contexte comme dans l'autre, les divers cas de limite posent des problèmes spécifiques : un cas d'indétermination 0/0 n'est pas un cas d'asymptote dans la mesure où l'infini n'est pas mobilisé. La validation introduite à la suite d'un calcul de débit instantané n'empêche pas des réserves de s'exprimer, sauf par effet de contrat, à propos des aires curvilignes car, pour les élèves, rendre Δt nul ne revient pas au même que de négliger un terme d'allure discrète tel que $1/n$. Investir la limite dans un calcul d'aire curviligne pour le ramener à la recherche d'une primitive suppose une contorsion mentale bien plus grande que d'exploiter la limite dans un processus de sommation d'aires rectilignes. Comme déjà dit plus haut, derrière l'unité mathématique, les auteurs du projet AHA voient donc une variété épistémologique.

Considérant cette double pluralité, les auteurs du projet AHA pourraient s'étonner, par exemple, qu'on puisse qualifier de situation fondamentale, la situation classique dite du « barreau » que Legrand (1997) propose comme introduction à la procédure intégrale. Sans nier la robustesse de cette situation, ni sa pertinence eu égard du public visé, ils argueraient sans doute que l'intégrale de Riemann doit, pour les élèves du secondaire, faire l'objet d'une approche plus diversifiée nécessitant plusieurs situations (adidactiques) : détermination de grandeurs diverses mobilisant des sommes de Riemann particulières (par exemple, avec des subdivisions régulières); modélisation de sommes de produits « élémentaires » par des sommes de rectangles « élémentaires »; construction d'un concept qui se prête à une théorisation efficace et « rigoureuse » à la fois.

La perspective décrite ici rend évidemment périlleuse la formulation en termes de jeux d'une situation fondamentale. Tout au plus peut-on s'interroger, comme le fait Bloch (1999), sur l'existence de milieux candidats propres à favoriser l'apprentissage de la limite. Parmi les milieux que cet auteur répertorie, le projet AHA en combine trois : le milieu de l'infini, celui de la modélisation et le milieu « méta ». Le premier est pris en compte principalement par l'étude de comportements asymptotiques de suites et de fonctions. J'ai repris plus haut les raisons avancées par les auteurs du projet AHA en faveur de ce milieu. Je ne m'attarde donc pas. En ce qui concerne le milieu de la modélisation, je distinguerais les situations où la modélisation suppose la construction du concept de limite ou, du moins, un aspect de cette construction : c'est le cas, me semble-t-il, du problème du vase conique et du calcul de l'aire sous $y = x^3$. Dans les autres cas, je préfère parler de contextualisation sans péjorer l'importance de celle-ci : j'ai montré plus haut les intuitions porteuses que peut induire l'étude d'une suite contextualisée. Quant au milieu « méta », il a un double visage dans le projet AHA. Tout d'abord, il s'agit de faire prendre conscience aux élèves des origines possibles de leurs propres erreurs et réactions, par exemple, lorsqu'on leur fait confronter et interpréter leurs réserves à l'égard de la vitesse instantanée à des réserves analogues exprimées par Berkeley. Ensuite, le projet participe à un certain discours sur l'activité mathématique et les enjeux qui lui sont sous-jacents, particulièrement lorsqu'il s'agit de décortiquer le système de preuve spécifique à l'analyse en relation avec la volonté de s'affranchir des intuitions géométriques et physiques. On n'est pas loin d'un discours socio-épistémologique (au sens de Fourez, 1992) qui prétend décrire comment les humains raisonnent sans porter de jugement, un peu comme un anthropologue observe les mœurs d'une peuplade. Tel que rédigé, le texte du manuel se prête à un tel discours, pourvu qu'on le complète d'éléments comme les réflexions de Bolzano sur le théorème des valeurs intermédiaires, reprises dans le guide méthodologique.

Adidacticité et enjeu majeur : le face à face de l'élève avec un milieu et avec ses propres connaissances

Jusqu'à quel point le projet AHA est-il porteur d'adidacticité ? L'analyse locale faite supra montre une alternance de milieux antagonistes et de milieux alliés et la présence de situations qui se prêtent à certains moments de dévolution seulement, même si certaines ont pu fonctionner totalement, pour quelques élèves, dans un scénario de type adidactique. L'adidacticité potentielle présente dans le projet est donc saupoudrée.

Face aux difficultés d'imaginer des situations adidactiques, il est devenu coutumier de se référer à Mercier (1995 et 1998) qui dissocie la notion d'adidacticité de celle de situation, pour avoir observé dans des biographies didactiques d'élèves, des épisodes au cours desquels l'élève rencontre l'adidacticité dont la source n'est pas une situation, mais le fonctionnement temporel de l'enseignement. Si, comme cet auteur, je fais l'hypothèse que « l'adidacticité est au principe de tout apprentissage », l'examen du projet AHA me pousse à réfléchir, comme lui, à d'autres dimensions adidactiques. Je les souhaiterais contrôlées. Une première forme d'adidacticité pourrait être rencontrée par les élèves dans la gestion de la mémoire des expériences nombreuses que le projet AHA leur fournit. Elle sera examinée plus loin. Je préfère ici considérer une autre dimension plus diffuse qui se dégage dès que l'on pense à l'enjeu majeur de l'adidacticité, à savoir l'organisation d'un face à face direct de l'élève avec un milieu et avec ses propres connaissances. Dans le projet étudié, au-delà des moments auxquels on accorderait sans hésiter le label « adidactique », ce face à face existe, ou est facilité à tout le moins, de plusieurs manières.

- Tout d'abord, par la structure globale du projet qui prévoit une phase préalable à caractère expérimental avant d'aborder des aspects plus formalisés de la théorie. Au cours de cette phase, les élèves sont confrontés tant à leurs propres intuitions et connaissances qu'aux « phénomènes » liés à l'apparition de l'infini et des limites. En effet, comme on l'a vu, le milieu des suites permet des rétroactions vis-à-vis de certaines intuitions et engage à une formulation contravariante de la limite, d'autres situations favorisent la mise à l'épreuve de connaissances ou de conceptions antérieures telles que la tangente au cercle et le débit constant ou encore permettent aux élèves d'expérimenter les limites de procédures « primitives » telles que les découpages de figures curvilignes inspirés par leur forme. Certaines situations relatives aux vitesses et aux aires favorisent aussi l'expression de doutes révélateurs d'obstacles épistémologiques, même si, au milieu de référence, doivent s'ajouter d'autres éléments : la lecture du texte de Berkeley, un métadiscours du professeur pour expliquer la nature de ces doutes. En outre, ce frayage long avec le concept de limite, en contextes, permet aux élèves d'engranger des métaphores fondamentales (cf. Legrand, 1997) comme autant de points d'anchrage sur lesquels la théorie peut se greffer.
- Non seulement le choix d'ostensifs se porte, autant que possible, sur des exemples propres à démentir certains a priori ou des connaissances antérieures mais il privilégie les exemples qui se prêtent à un traitement non expert. Ainsi, l'étude des asymptotes se fait d'abord sur des fonctions désignées par des ostensifs analytiques suggestifs. Cette étude détaillée, faite « comme si c'était l'élève qui la faisait », débouche sur l'identification d'une méthode ad hoc : la recherche d'une bonne forme qui, en quelque sorte, garde mémoire de l'investigation première.
- Certains modes de validation sémantiques proches du contexte étudié complètent et précèdent le mode de validation syntaxique propre à l'analyse mathématique. Ils caractérisent ce que j'ai appelé la première boucle du projet AHA, alors que la validation syntaxique est propre à la seconde boucle. Ce point mérite d'être développé plus longuement. Comme l'épingle Legrand (1997) le système de validation propre à l'analyse mathématique diffère considérablement des procédures de l'algèbre et de l'ordre : par exemple, montrer que $B \geq A$ revient à montrer que $B \geq A + \varepsilon$, quel que soit $\varepsilon > 0$. On peut s'en convaincre par un raisonnement par l'absurde en supposant que $A = B + \varepsilon'$ et en montrant que cette hypothèse conduit à la contradiction $1/2 \geq 1$ si l'on choisit $\varepsilon = \varepsilon'/2$. De même, prouver que $A = B$ revient à prouver que $\varepsilon \geq / A - B /$, quel que soit $\varepsilon > 0$. Cependant, si un tel raisonnement permet de se persuader que telle suite ou telle fonction possède tel nombre comme limite, il ne permet pas de se convaincre que cette limite donne bien la valeur exacte de la grandeur cherchée avec ses évidences perceptives : je pense, en particulier aux aires et aux volumes qui sont des objets mentaux (au sens de Freudenthal, 1973) ayant une existence propre aux yeux des élèves et dotés de propriétés d'additivité et d'ordre faisant pendant au partionnement et à l'emboîtement des surfaces. Se convaincre de cela relève d'un discours technologique assumant la fonction de justification, c'est-à-dire consistant « à assurer que la technique (de calcul d'une limite) donne bien ce qui est prétendu » (Chevallard, 1999). Un tel discours est absent de la théorie formalisée dans laquelle ces grandeurs sont, d'entrée de jeu, définies comme des limites. Or, pour les élèves, il s'agit a priori, non de les définir, mais de les déterminer. Dans le projet AHA, le double raisonnement par l'absurde fait pour prouver que l'aire sous $y = x^3$ vaut 1/4 tient lieu de tel discours. Un même raisonnement est utilisé pour prouver l'exactitude du volume d'un solide de révolution obtenu comme limite d'une somme de volumes de cylindres. Bien sûr, on ne peut multipler à l'envi ce genre de raisonnement

sans alourdir exagérément le discours. De plus, en ce qui concerne les tangentes ou les vitesses, un tel raisonnement par l'absurde se solde par des contradictions moins « évidentes » du style : telle vitesse instantanée en t est supérieure à telle vitesse moyenne calculée à partir de t alors que le mobile accélère ou telle pente de tangente est supérieure à telle pente de sécante passant par le point de tangence et un point d'abscisse supérieure alors que la concavité de la courbe est tournée vers le haut. Dans le projet AHA, c'est une expérience de pensée « physique » (problème du vase conique) qui justifie qu'un calcul de limite conduit bien à la réponse exacte d'une question qui relève de l'instantané. Mais tous les problèmes de vitesses liées ne se prêtent pas, loin s'en faut, à la formulation d'une telle preuve. Ces preuves, si anecdotiques qu'elles soient, ont cependant un caractère suffisamment paradigmatique que pour impressionner les élèves et les convaincre, de manière plus globale, de la validité du calcul de limite. Ainsi du moins en témoignent les auteurs du projet.

Un autre mode de justification de la technique des limites consiste à montrer que cette dernière fournit les mêmes résultats que ceux obtenus par un autre biais. Ainsi, dans le guide méthodologique, les auteurs du projet insistent-ils sur l'intérêt d'engranger des résultats relatifs à des tangentes par le biais de l'approximation affine pour pouvoir ultérieurement mettre à l'épreuve la méthode des quotients différentiels, résultats validés, eux, par un autre discours technologique : celui de la négligence de termes. N'est-ce pas cette autre forme de validation sémantique que Fermat met en œuvre lorsqu'il engage sa méthode d'adégalité pour retrouver des résultats connus depuis longtemps : le rectangle de périmètre donné et d'aire maximale, la tangente à la parabole ?

Quant aux principes de Cavalieri, ils participent également à cette validation sémantique autant parce qu'ils font écho à certaines intuitions des élèves que parce qu'ils permettent de retrouver des formules d'aires et de volumes connues ou identifiées comme vraies, dans le dictionnaire par exemple.

Ce mode de validation sémantique renvoie donc l'élève tant au milieu qu'à ses propres connaissances même si l'on ne peut parler d'adidacticité à proprement parler, le professeur jouant un rôle important dans la formulation de ces preuves. En outre, par certains de ses aspects, il prépare le mode de validation propre à l'analyse puisque, comme on l'a vu, le double raisonnement par l'absurde fait à propos des aires et des volumes préfigure un agencement canonique d'inégalités et de quantificateurs.

- Enfin, il ne faudrait pas négliger non plus, dans ce face à face de l'élève avec le savoir, la portée d'un discours socio-épistémologique. Dans une certaine mesure, il participe à l'effacement du professeur censé présenter telle pratique mathématique, non comme bonne ou idéale mais comme une façon de procéder, parmi d'autres possibles, choisie par un groupe de personnes en fonction d'un projet visé.

Bien sûr, cette dimension adidactique ne correspond pas à une adidacticité avérée que l'on peut observer lorsque des élèves construisent seuls leurs propres solutions à un problème donné. On ne peut cependant exclure qu'il se produit, dans les circonstances décrites plus haut, un apprentissage par adaptation, l'élève étant fréquemment renvoyé au milieu qui interagit avec ses propres intuitions. De toute façon, seule compte une adidacticité différée, celle qui se concrétise par les transferts de connaissances, en l'absence de sollicitation et en dehors du contexte scolaire (ce que d'Hainaut, 1983 appelle le « transfert intégral »). Or, l'évaluation de tels transfert pose des problèmes méthodologiques si grands qu'il est difficile de jauger l'influence que peut avoir, de ce point de vue, tel ou tel type d'enseignement. En outre, ces quelques considérations relativisent, me semble-t-il, l'opposition souvent faite entre l'apprentissage par adaptation et l'apprentissage dans le cadre d'un enseignement par ostention : le choix même des ostensifs exploités dans une telle perspective n'est pas neutre puisque certains sont susceptibles de provoquer une adaptation.

Tension entre adidacticité et vraies raison d'être

La part d'adidacticité du projet AHA entre-t-elle en concurrence avec les vraies raisons d'être de la théorie, comme cela arrive dans un certain nombre de cas, ainsi que le suggère Chevallard (1999) : « En bien des cas, la définition de l'objet par un système de situations fondamentales se trouve subrepticement écartée au profit d'une mise en scène de l'objet dans des « activités » qui, en dépit de quelques traits culturels conservés, n'ont qu'une relation assez relâchée avec ses raisons d'être les plus essentielles ».

En ce qui concerne les raisons d'être, les auteurs du projet AHA se sont partiellement inspirés de l'histoire en mobilisant « quelque chose » du concept de limite dans des problèmes variés a priori non connectés les uns aux autres et qui ont donné naissance au calcul infinitésimal: problèmes de tangentes, de vitesses, d'optimisation, d'aires et de volumes. Les liens deviennent peu à peu explicites, faisant apparaître des besoins de formalisation et de structuration. Cependant, la manière dont les fonctions apparaissent dans ce projet échappe à ce parallèle avec l'histoire. En effet, elles sont massivement présentes dès le début du projet, les élèves en étant déjà familiers au moment où ils abordent l'analyse. Alors que, lors du développement de l'analyse dans l'histoire, l'idée même de fonction émerge plus progressivement, son importance et sa portée dans cette discipline ne devenant explicites qu'avec Euler au XVIII^{e} s. Comme on l'a vu, ces raisons d'être d'ordre historique favorisent des moments de dévolution, surtout en ce qui concerne les vitesses et les aires. Le cas des tangentes est plus problématique et significatif tant de la tension dont parle Chevallard que d'une nécessaire adaptation des raisons d'être par rapport au déroulement historique. En cela, il mérite qu'on s'y attarde. La recherche de tangentes, en particulier à des coniques, a interpellé les mathématiciens depuis l'Antiquité et a été une des raisons d'être du calcul infinitésimal. Mais que peut être, aujourd'hui, la vraie raison d'être des tangentes ? On pense bien sûr aux approximations affines que les tangentes étoffent d'une image géométrique parlante susceptible d'être généralisée à l'espace sous la forme du plan tangent. Mais rien ne dit a priori si le milieu des approximations est un milieu dans lequel les élèves pourraient être amenés à considérer des tangentes dans le cadre d'un processus adidactique. Le milieu des graphiques serait-il plus prometteur ? L'expérience suivante, fort limitée, apporte quelques éléments de réponse à cette question tout en illustrant la difficile négociation entre le choix d'une situation adidactique et la mise en évidence des raisons d'être dans des conditions authentiques. Il s'agit d'élèves ayant appris les vitesses instantanées mais non l'interprétation graphique des dérivées. On leur fait interpréter des graphiques donnant la loi de position d'un mobile sur une trajectoire rectiligne, de même que les vitesses dans ce cadre graphique. Beaucoup évoquent les pentes de sécantes à propos des vitesses moyennes, mais aucun ne parle de tangente. Par contre, pour certains, la vitesse instantanée est la pente instantanée de la courbe. Cette image suffit à faire sentir le lien entre le signe de la dérivée et la croissance de la fonction ce qui laisse supposer que l'enseignement pourrait, pour certains élèves, faire l'économie des tangentes. Cependant, à partir de là, on peut aussi imaginer de faire dessiner aux élèves le graphique de la loi de position d'un mobile sur le mouvement duquel on donne des renseignements très précis du style : sa vitesse instantanée en $t = 2$ vaut 6,7. Des exigences de précision pourraient les amener alors à s'aider spontanément d'une droite tangente pour arriver à tracer une courbe ayant la bonne pente. A supposer que cela inspire un scénario véritablement adidactique, on peut s'interroger sur le caractère factice de cette activité fort éloignée des pratiques des physiciens lorsqu'ils étudient des mouvements. D'un autre côté, cette activité annonce la résolution graphique d'équations différentielles par le tracé de champ de tangentes. Il est vrai toutefois que la quête de l'adidacticité amène parfois à « tordre » la réalité des choses. Sans doute devrait-on se donner les moyens d'apprécier le coût de la nécessaire décontextualisation que cette torsion aura rendue nécessaire, à commencer par l'évaluation du phénomène de surinvestissement didactique dont parle Brousseau (1998). Et sans doute vaut-il mieux renoncer à l'adidacticité lorsque ce coût s'avère prohibitif et qu'on n'a pas trouvé meilleur scénario adidactique. Mais la théorie anthropologique se prononce-t-elle là-dessus ? (????Sans doute faut-il regarder du côté des travaux mobilisant le concept d'ingénierie curriculaire qui remettent en question l'existence de certains objets d'enseignement, et expliquent peut-être par le fait qu'ils « tournent à vide » la difficulté de les insérer dans un processus adidactique ????).

Globalement, ces raisons d'être motivent, de manière explicite, les tâches que le projet AHA propose comme premières rencontres. De plus, ces dernières fournissent, je crois, « *un bon découpage* relativement aux situations mathématiques les plus souvent rencontrées » (Chevallard, 1999). En particulier, en ce qui concerne les dérivées, elles revalorisent l'idée de taux instantané souvent laissée pour compte au profit de celle de pente de tangente et pourtant si utile dans les applications de l'analyse à d'autres disciplines. Par conséquent, les tâches du projet rencontrent tant le « critère des raisons d'être » que le « critère de la pertinence » de la théorie anthropologique. Quant au « critère d'identification », il a été exploité lors de l'analyse locale du projet : selon les cas, les tâches sont plus ou moins bien identifiées d'entrée de jeu; cependant, elles se dégagent assez clairement au terme de chaque chapitre dans la synthèse associée.

Une praxéologie didactique en rupture par rapport à un exposé déductif de l'analyse

Au fur et à mesure de ce texte, se dégagent les caractéristiques de la praxéologie didactique que constitue le projet AHA et la praxéologie mathématique associée. Pour situer au mieux la première, il me semble utile de décrire au préalable une praxéologie mathématique qui, d'une manière qui sera précisée ci-dessous, a servi de référent aux auteurs du projet AHA. Cette organisation débute par la théorie dont les principiaux ingrédients sont : axiomatisation des réels intégrant non seulement les axiomes liés à sa structure algébrique et sa structure d'ordre mais surtout les axiomes d'ordre topologique : axiome d'Archimède et axiome des intervalles emboîtés; définition quantifiée de la limite d'une fonction en termes d'intervalles (ou plus généralement, de voisinages), définition qui se particularise différemment suivant les types d'intervalles considérés tant pour la variable que pour son image; théorèmes relatifs à l'algèbre des limites; techniques de calcul de limites validées par les axiomes relatifs aux réels et par l'algèbre des limites; définition de la dérivée d'une fonction et de l'intégrale définie en termes de limites; définition de grandeurs ou d'objets géométriques par le biais des intégrales et de dérivées : aires, volumes, tangentes; techniques de calcul des dérivées validées par l'algèbre des limites; théorème fondamental de l'analyse qui ramène le calcul des intégrales définies au calcul des primitives; applications. Sur cette organisation mathématique se sont calquées et se calquent encore des praxéologies didactiques, à l'université mais aussi au cycle secondaire, du moins sous une forme édulcorée qui néglige quelques maillons de l'exposé déductif. Ces praxélogies respectent en général la chronogénèse et la topogénèse classiques : des exposés qui sont du ressort du professeur suivis des applications (les tâches) qui incombent aux étudiants. Pour un initié, ces tâches classiques sont faciles à identifier, de même que les techniques liées au calcul des limites, des dérivées et des intégrales. Je ne m'étendrai donc pas là-dessus. Il n'en va pas de même de la théorie et de la technologie. Mais, avant d'y venir, je voudrais préciser deux choses. D'abord, le mot « technologie » n'est pas exempt d'ambiguïté si l'on pense au glissement de sens dont il fait l'objet aujourd'hui : « A l'origine, le terme « technologie » désignait la science de la technique. Mais, de plus en plus, il est utilisé pour indiquer une appoche globale d'un problème technique comme la technologie du chemin de fer, celle du FAX, celles du génie génétique, celles de gestion, etc. » (Fourez *et al*., 1997). Pour garder la signification étymologique initiale, je m'en tiendrai à l'expression « discours technologique », compte tenu que ce discours peut prendre la forme d'une science telle que définie par ses paradigmes, avec ses concepts et ses notations. Par ailleurs, ce qui est appelé technologie dans une praxéologie est a priori relatif. Comme le dit Chevallard (1999), la théorie est à la technologie ce que la technologie est à la technique. Tout dépend donc du niveau où l'on se place. Prenons un exemple évoqué par cet auteur : celui de l'axiome d'Archimède perçu comme élément théorique qui justifie un résultat technologique : la limite de la suite 1/n égale 0. C'est bien comme cela sans doute que des mathématiciens verraient les choses mais on peut imaginer que le résultat technologique évoqué soit, pour quelqu'un qui n'entendra jamais parler d'axiomes des réels, un présupposé évident et incontournable en amont duquel n'existe rien qui le justifie, un axiome théorique en quelque sorte. A moins qu'il ne soit perçu comme faisant partie intégrante de la technique. L'intérêt du regard anthropologique n'est-il pas précisément d'appréhender ce que telle personne (ou tel groupe de personne) appelle technique, technologie ou théorie, en tant que personne assujettie à une institution ? On pourrait aller jusqu'à dire que c'est une institution donnée qui accorde le label « technologique » à tel ou tel discours. Vue de l'institution « AHA », la praxéologie décrite ci-dessus contient bien une théorie et des techniques, mais, comme déjà évoqué supra, fait l'économie d'un discours technologique intermédiaire qui assurerait une « fonction de justification » : les grandeurs et objets géométriques y étant d'emblée définis par des limites, il n'y a pas lieu de justifier que le calcul d'une limite fournit bien ce qu'on attend. Quant à la théorie, les auteurs du projet AHA y verraient une recherche de cohérence, de fondements plus qu'une « fonction d'explication » au sens de Chevallard. En effet, cette dernière doit s'exercer, à leurs yeux, à un niveau plus intuitif, les élèves accordant crédit aux observations et perceptions sensorielles sur lesquelles ils imaginent que la théorie se calque. On peut dire aussi que la théorie répond plus à un critère de non-contradiction qu'à un critère de « vérité », se situant, dans l'histoire des mathématiques, à un changement de paradigme provoqué, entre autres, par l'avénement des géométries non-euclidiennes.

Lorsqu'il ne s'inspire pas de la praxéologie mathématique décrite plus haut, un enseignement de l'analyse au cycle secondaire est souvent axé trop exclusivement sur les manipulations techniques déconnectées de tout contexte et néglige donc la modélisation du monde « sensible » par le calcul formel. C'est, en tout cas, ce que les auteurs du projet AHA disent observer dans les manuels belges et dans certains cahiers d'élèves. Constatant ainsi une distorsion entre, d'une part, ce type d'enseignement faisant la part belle aux techniques et, d'autre part, le niveau théorique requis dans l'enseignement supérieur, le projet AHA a voulu jouer le rôle d'interface entre les deux. Comme déjà dit dans l'introduction, ses présupposés théoriques sont, d'une part, les théories constructivistes de l'apprentissage, et d'autre part une vision socioconstructiviste des sciences qui voit celles-ci « comme des constructions humaines et comme une production de société » (Fourez et al., 1997). En particulier, les auteurs se réfèrent aux travaux de Polya (1967) et de Lakatos (1984) qui ont mis en évidence le rôle de l'heuristique dans la contruction des mathématiques. Sur ces bases et sur une analyse historico-épistémologique des savoirs en jeu, ces auteurs ont élaboré une progression didactique aménageant le face à face des apprenants avec ces savoirs de manière à prendre en compte leurs « intuitions premières », correctes ou non, dont certaines se structurent en obstacles épistémologiques. En cela, le projet AHA se situe résolument dans une perspective de « quête du sens ».

Ces référents théoriques inspirent des techniques particulières d'enseignement que je résumerais comme suit. Le projet AHA procède à un éclatement délibéré de la praxéologie mathématique décrite plus haut en organisations praxéologiques plus ponctuelles pour les enchâsser progressivement les unes aux autres : la classe des problèmes de tangentes et leur résolution via ou non les dérivées, les problèmes de vitesses liées, la recherche d'aires curvilignes via les limites ou par le biais des primitives, ... Des liens apparaissent peu à peu : les pentes de tangentes et les vitesses sont deux facettes du concept de dérivée; certains calculs d'aire et de volume se ramènent à des calculs de limites de suites; ils apparaissent ensuite comme réciproques des calculs de dérivées pour autant qu'on y introduise l'idée de variation; l'expression "tendre vers" apparaît de manière récurrente. En définitive, l'unité globale des problèmes se réalise autour du concept de limite d'une fonction. En étudiant les propriétés de ce concept, les auteurs sont amenés à préciser la nature des nombres sur lesquels on travaille et ceux de leurs axiomes qui sont incontournables pour élaborer une théorie des limites. Restaurant ainsi un certain ordre historique, comme montré supra, cette progression va en sens inverse du cursus classique d'enseignement de l'analyse décrit plus haut, qui débute par l'axiomatique des réels et qui étudie le concept fondateur de limite avant ceux de dérivée et d'intégrale et leurs applications. Cette position se traduit par :

- Un discours structuré à partir de questions « concrètes » dont certaines peuvent être traitées, jusqu'à un certain point, dans un scénario de type adidactique. Ces questions sont inspirées, comme on l'a vu, des vraies raisons d'être de l'analyse dans l'histoire.
- Un propos longtemps axé sur le particulier et qui se défend de systématiser et d'unifier gratuitement : par exemple, les indéterminations 0/0 ne sont pas projetées sur le même plan graphique que les autres, mais restent cantonnées au contexte des dérivées jugé porteur de sens.
- Un exposé qui reste fort proche des exemples traités choisis pour leur caractère paradigmatique et qui fait l'économie de certains développements littéraux : par exemple, la détermination des asymptotes des fonctions homographiques se traite sur un exemple auquel on octroye « valeur de généralité ».
- Une grande spécificité des connaissances et des techniques par rapport aux exemples rencontrés : la technique de l'approximation affine pour déterminer des tangentes à des courbes polynomiales, des comparaisons via les principes de Cavalieri pour déterminer quelques aires et volumes s'y prêtant particulièrement bien.
- Le choix momentané de techniques dont la portée est limitée mais qui conservent le sens de la démarche : des modes de détermination d'asymptote adaptés aux classes de fonctions traitées, des calculs « artisanaux » de nombres dérivés, des calculs de limites couplés avec des comparaisons via des indivisibles qui requièrent une certaine ingéniosité pour déterminer des aires et des volumes; corollairement, le report délibéré de techniques plus performantes dont la portée est plus large, suivi d'un abandon progressif des premières au profit des secondes : le calcul proprement dit des dérivées, celui des primitives.

- Une progression lente des connaissances au savoir avec de multiples aller-retour : la limite y est définie tantôt par la suppression de termes, tantôt par des phrases dont les connotations temporelles ne sont pas absentes avant d'être formulées par le biais d'inégalités et de quantificateurs.
- La coexistence de deux discours technologiques distincts sans être disjoints : l'un conduisant au système classique de preuves de l'analyse, l'autre misant sur d'autres types de validation plus sémantiques, entre autres des validations par les indivisibles.

En définitive, la référence au socio-constructivisme au sens large se solde, dans le projet AHA, par une praxéologie mathématique éclatée en îlots plus proches d'un traitement d'exemples que d'une théorie. Cette dernière se profile à l'horizon, pour certains élèves, mais l'enchâssement des îlots les uns aux autres dans un « design » qui les intègre suppose une grande mémoire didactique tant de la part du professeur que de celle de l'élève, car cet horizon est bien lointain.

De tels référents épistémologiques et didactiques conduisent-ils inéluctablement à de telles techniques didactiques ? Je n'ai guère les moyens de répondre à cette question. Elle mérite cependant d'être posée. Je ferais a priori l'hypothèse d'une certaine relation entre des visées constructivistes et plusieurs des techniques décrites. Ainsi, tel document officiel lie, dans le cadre d'un enseignement en spirale, la construction des connaissances à une théorisation progressive prenant en considération les multiples facettes d'un concept : « Dans l'enseignement dit « en spirale », chaque notion, chaque théorie vue une première fois à un niveau élémentaire et dans un contexte peu étendu est reprise et approfondie plus tard dans un contexte élargi, et ainsi plusieurs fois jusqu'à ce que, d'approfondissement en approfon-dissement et de généralisation en généralisation, elle arrive à maturité en établissant des connexions naturelles avec les notions et théories voisines » (Danblon, 1990). Je gage que de tels propos se traduisent par une longue « chaîne de conversion des connaissances en savoirs » pour reprendre une expression de Rouchier (1991), avec ce qu'elle suppose de techniques provisoires et de préconceptions de concepts. En cela, les pratiques du projet AHA sont sans doute représentatives d'un courant d'enseignement axé sur la résolution de « situations-problèmes ».

La théorie anthropologique se réfère-t-elle à une théorie de l'apprentissage ?
Une praxéologie mathématique sujette à caution

A la suite de Rouchier, Perrin-Glorian (1999) souligne que la théorie anthropologique de la didactique, ne parlant pas d'apprentissage mais d'étude, évite toute référence à une théorie de l'apprentissage. Est-ce bien vrai ? En spécifiant quels sont les moments de l'étude, cette théorie n'indique-t-elle pas des « phases » dont on ne peut faire l'économie sans risquer de nuire à l'apprentissage ? De la sorte, elle pourrait servir en quelque sorte de « repoussoir », au sens premier du terme, faisant apparaître les dysfonctionnements de certains enseignements qui ne sont pas sous le contrôle de la recherche. Par exemple, ceux qui sont exclusivement polarisés sur le travail de la technique, négligeant ainsi tout discours de nature technologique; ou encore des enseignements qui, sous couvert d'une idéologie aux relents de constructivisme, évacuent tout systématisme et négligent de ce fait un aspect du travail de la technique. Je note, à l'appui de cette hypothèse, qu'au moment d'aborder, de manière assez succincte d'ailleurs, l'évaluation des organisations didactiques, Chevallard (1999) pointe deux aspects seulement dont précisément « la prise en charge des différents moments de l'étude ».

Une autre phrase de Chevallard (1999) semble avoir frappé les esprits : « On notera que, contre une certaine vision héroïque de l'activité mathématique, regardée comme une suite erratique d'affrontements singuliers avec des difficultés toujours nouvelles, c'est bien *l'élaboration de techniques* qui est au cœur de l'activité mathématique. Au fantasme moderne de l'élève-héros triomphant sans coup férir de toute difficulté possible s'oppose ainsi la réalité indépassable de l'élève artisan-laborieux, qui, avec ses condisciples, sous la conduite avisée du professeur, élabore patiemment ses techniques mathématiques ». Faut-il interpréter ce propos, comme le fait Perrin-Glorian (1999) en opposition aux scénarios adidactiques de la théorie des situations ? Il ne me semble pas. D'abord, parce que l'auteur ne cite pas cette phrase au moment où il parle de la « première rencontre », ensuite parce qu'il envisage, comme on l'a vu, la rencontre « en situation » (fondamentale) comme une des modalités possibles de première rencontre. Ne peut-on pas lire ce propos plutôt comme participant à une revalorisation de « moments » d'étude, minorés dans certains cas, tels que l'entraînement plus systématique à l'usage d'une technique qui participe à une sédimentation des savoirs-faire, même si le « moment de l'exploration des tâches et d'élaboration de la technique » ne se réduit pas à cela. Au moins du point de vue qui vient d'être décrit, se profilerait une théorie de l'apprentissage en filigrane de la théorie anthropologique de la didactique. De toute façon, dès que l'on prétend évaluer un enseignement, on ne peut choisir les critères d'évaluation que par référence à une théorie d'apprentissage, fût-elle implicite et spécifique de l'apprentissage visé par cet enseignement.

Mais y a-t-il de « bonnes » praxéologies mathématiques qui favorisent l'existence de tous ces moments de l'étude ? La définition que donne Gascon (1998) d'une organisation praxéologique peut éclairer, ce me semble, cette question : « une réponse à un ensemble de questions et de tâches problématiques qui se cristallisent en types de problèmes » (traduit par Perrin, 1999 qui précise « un type de problème étant caractérisé par une technique qui permet de résoudre tous les problèmes de ce type »). A partir de là on peut imaginer un « bon » enseignement : des questions (ou tâches) seraient proposées, d'entrée de jeu, que cela s'accompagne ou non d'un processus de dévolution; elles seraient ensuite explorées et d'un examen qui ferait ressortir leur essence commune émergerait une technique-type de résolution : les questions seraient alors « cristallisées » en problèmes; le discours technologique qui valide cette technique déboucherait sur un embryon (ou un pan) de théorie lequel institutionnaliserait la technique comme réponse à cette classe de problèmes; les élèves seraient entraînés à la résolution de problèmes de cette classe et seraient évalués sur cette compétence.

Certains chapitres du projet AHA tel le chapitre de vitesses liées correspondent à un tel patron ; d'autres moins : c'est le cas du premier chapitre qui étudie les comportements asymptotiques de suites, parmi d'autres choses. Cela dit, un tel modèle peut apparaître réducteur. Par exemple, j'avais relevé, dans le cas du premier chapitre, une classe de problèmes qui se prête à un entraînement systématique : déceler parmi plusieurs énoncés dans le langage naturel ceux qui mobilisent une suite géométrique et s'appuyer sur le résultat de sa limite pour répondre à la question posée. Le fait que cette classe de problèmes doive être « isolée » du reste du chapitre n'en accroît-il pas la « visibilité » : ne comprend-on pas mieux la spécificité d'une suite géométrique lorsqu'on peut la contraster avec des suites qui ne le sont pas ? De ce point de vue, aucun décor ne permet de faire ressortir la particularité des problèmes de vitesses liées tant qu'on ne les a pas distingués, par exemple, des problèmes d'optimisation avec lesquels les élèves les confondent car, disent-ils, les uns et les autres sont des problèmes « concrets » nécessitant au départ de mêmes démarches.

Reste encore à savoir comment les élèves réagissent à un tel modèle de praxéologie locale si celle-ci se répète d'un chapitre à l'autre : sentent-ils un amortissement de l'énergie engagée du fait que les problèmes travaillés en fin de chapitre appartiennent à la même classe qu'une éventuelle situation adidactique proposée d'entrée de jeu ou, au contraire, se sentent-ils démobilisés, attendant la prise en charge ultime du déroulement didactique par le professeur ?

Ces chapitres du projet AHA constituent des praxéologies locales. Qu'en est-il de l'évaluation lorsqu'on regarde la manière dont ces praxéologies s'insèrent dans une étude plus globale ? Par le biais de questions, Chevallard (1999) pointe quelques critères possibles tant pour les tâches que pour les techniques et technologies. J'ai déjà évoqué et exploité les critères relatifs aux tâches. En ce qui concerne les techniques et technologies, je relève, parmi d'autres, les questions suivantes : « La portée des techniques est-elle satisfaisante ? Ont-elles un avenir, et pourront-elles évoluer de manière convenable ? Les formes de justification utilisées sont-elles proches des formes canoniques en mathématique ? » Si je m'en tiens à ces critères, pris isolément, je me dois de juger assez sévèrement le projet AHA. En effet, non seulement il institutionnalise des techniques dont la portée est fort limitée et qui sont remplacées à terme par d'autres : la technique de l'approximation affine, les calculs « artisanaux » de nombres dérivés, les calculs d'aires combinant limites et principes de Cavalieri, mais, en plus, il adopte des modes de justification que d'aucuns jugeraient obsolètes, ou peu rigoureux : la négligence de termes, la comparaison de grandeurs par le biais de leurs indivisibles. Attardons-nous quelque temps sur ce dernier exemple, significatif de choix cruciaux auxquels est acculé tout praticien. Cette méthode des indivisibles n'est-elle pas un des points de vue périmés dont parle Brousseau (1998) à propos d'un enseignement historique : « Il y a un équilibre à trouver entre un enseignement « historique » qui restaurerait une forêt de distinctions et des points de vue périmés dans laquelle se perdrait l'enfant, et un enseignement direct de ce que l'on sait aujourd'hui être une structure unique et générale, sans se soucier d'unifier les conceptions de l'enfant, nécessairement et naturellement différentes. La recherche des conditions d'un tel équilibre est un des grands problèmes qui se pose actuellement à la didactique […] Il ne s'agit pas de reproduire le processus historique mais de produire des effets similaires par d'autres moyens. ». Par ailleurs, ne peut-on invoquer ici le choix constructiviste et ce qu'il suppose comme franchissements d'obstacles épistémologiques ? Voici une expérience significative à cet égard. Une erreur liée à une conception géométrique de la limite consiste à intégrer la fonction 2π f(x) pour déterminer l'aire latérale d'un solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des x du graphique de la fonction f(x). Les élèves la justifient en se référant à l'intégrale de $\pi\ [f(x)]^2$ qui donne le volume du même solide avec des arguments tels que : « les cercles 2π f(x) remplissent la surface latérale tout comme les disques $\pi\ [f(x)]^2$ remplissent le solide » (Schneider, 1988). Cette erreur est particulièrement tenace : après avoir interrogé des mathématiciens et des physiciens de la première année d'université à la maîtrise, Artigue (1989) atteste de leur « incapacité massive » à expliquer l'inadéquation d'une telle procédure dans le calcul de l'aire de la sphère. Mais que veut dire ici « expliquer » ? Ainsi que le décrit Schneider (1988), des élèves du cycle secondaire et des professeurs stagiaires arrivent à corriger une telle erreur en comparant des aires par le biais d'indivisibles : ils comprennent qu'il faut prendre en compte un autre facteur en réalisant une certaine disparité « d'espacement » ou « d'épaisseur » entre les indivisibles d'une grandeur à l'autre, comme l'avaient compris avant eux Cavalieri et Torricelli analysant des paradoxes causés par un usage abusif d'indivisibles. La correction se situe alors sur le même plan perceptif que l'erreur initiale. Peut-on espérer que la théorie de l'intégration joue une fonction d'explication avec la même efficacité ? Je ne le pense pas. Par conséquent, bien que considérée comme un « cul-de-sac » (si l'on excepte sa version rigoureuse sous la forme de l'analyse non-standard) par les mathématiciens d'aujourd'hui, la méthode des indivisibles jouerait là un rôle précieux. Cet exemple montre que, au moins pour les auteurs du projet AHA, le poids du contructivisme peut contrebalancer les inconvénients d'une praxéologie mathématique.

Dans le cas qui vient d'être décrit, le projet AHA organise le « franchissement » d'un obstacle épistémologique en le « payant » du choix d'une technique peu performante. Dans le cas des tangentes, il opte pour une autre technique dont la portée est limitée (l'approximation affine), mais, cette fois, pour permettre aux élèves de contourner un obstacle, du moins dans un premier temps.

Modifier la topogénèse en agissant sur la chronogénèse ?
Dispositifs d'aide à l'étude

Outre quelques moments de dévolution, le projet AHA suppose une autre forme d'adidacticité déjà évoquée : la gestion mentale de l'ensemble du projet, du moins des parties décrites ici, comme milieu de référence constitutif du concept de limite. Ce milieu s'étend presque sur l'ensemble des chapitres et suppose donc un apprentissage de deux ans. La mémoire de l'enseignant étant souvent limitée aux interventions de l'année en cours, ainsi que l'ont montré Brousseau et Centeno (1991), cette gestion doit être dévolue à l'élève, du moins partiellement, surtout si celui-ci change de professeur d'une année à l'autre. En outre, deux publics sont ciblés par ce projet : des élèves ayant peu d'heures de mathématiques par semaine et les autres dont certains auront maille à partir avec un cours d'analyse à l'université. A ces derniers, le projet AHA présente les constituants d'un tel exposé déductif : l'axiome d'Archimède, la définition des grandeurs en termes de limite, ..., un peu comme un conteur présente les personnages d'une pièce de théâtre en prologue de celle-ci. Seulement la pièce n'est pas jouée dans le projet lui-même, elle est différée d'un an et, qui plus est, elle est jouée dans une autre institution. La part de synthèse dévolue à ces élèves s'accroît d'autant.

En dépit d'un nombre restreint de situations adidactiques, ce projet bouleverse donc globalement la topogénèse et la chronogénèse telles que vécues, voire attendues par un élève, dans le cadre d'un contrat didactique « usuel ». En effet, dans un tel contrat, la théorie et la réflexion épistémologique sont du ressort exclusif du professeur, les élèves ayant à charge la résolution des exercices sur lesquels le professeur ne peut tabler pour faire progresser le temps didactique. Dans le projet AHA, au contraire, la plupart des exemples traités à propos desquels les élèves sont invités à une certaine activité jouent le rôle d'un référent incontournable apportant chacun son obole à cette progression. Il est de plus demandé aux élèves une attitude réflexive par rapport à ces exemples.

Le projet AHA est un projet long, non seulement à cause de la durée de l'apprentissage en jeu, mais aussi parce que la progression dans le texte du savoir se fait avec des va-et-vient, suppose de nombreuses reprises et postpose la réponse à des questions qui demeurent donc momentanément en suspens. C'est donc une organisation qui fait violence à l'épistémologie spontanée des élèves laquelle suppose que le temps d'apprentissage d'un objet d'enseignement doit être court et leur fait préférer un nouveau cours à une reprise (Mercier, 1992). De plus, rien n'est acquis définitivement, certaines techniques ayant une durée de vie brève car destinées à être remplacées par d'autres. Or, pour l'élève, « chaque unité du temps du savoir, [...] doit constituer une totalité de sens fermée sur soi [...] Ainsi, ce qui se passe au segment s du temps du savoir ne doit pas dépendre de ce qui se passera au temps s + N. Les tranches de temps successives du temps didactique doivent s'enchaîner sans « contamination ». Ce qu'en langage imagé on pourrait rendre par : ce qui est acquis est acquis et ne sera pas remis en cause par une acquisition ultérieure » (Chevallard, 1981, 83). Le projet AHA aggrave cette distorsion en freinant la progression didactique, en la stoppant au segment s pour préserver le sens, en retardant, par exemple, le calcul proprement dit des dérivées et celui des primitives. Comme en témoignent les auteurs, plusieurs élèves souhaitent anticiper la chronogénèse, subodorant l'existence de techniques plus performantes et le projet AHA la retarde pour que les élèves gardent à leur charge, le plus longtemps possible, la question du sens. A cela s'ajoute la question suivante. Les élèves perçoivent-ils chronogènes ou anecdotiques, certains modes de validation tels que l'expérience physique dans le problème du vase conique ou le double raisonnement par l'absurde dans le calcul de l'aire curviligne ? Comment ressentent-ils, de ce point de vue, la mise à l'épreuve de conceptions antérieures (la conception globale et statique de la tangente) et le retour sur des conjectures anciennes de résultats ayant déjà été exploités (l'aire sous $y = x^n$ par exemple) ?

Comment agir pour changer la topogénèse et la chronogénèse ? Chevallard (1981) souligne l'étroite dépendance des deux et le primat de la chronogénèse que seul le professeur peut créer a priori : « Il serait faux de dire : ce qui compte d'abord pour l'enseignant, c'est son rôle; ce qui compte d'abord pour l'enseigné, c'est son rôle. Mais il faut dire : ce qui compte d'abord pour l'enseignant et pour l'enseigné, c'est de faire aller le temps du savoir ! C'est là, avons-nous noté, le souci premier de l'enseignant : c'est aussi le premier souci de l'enseigné. Il n'y a pas, dans le fonctionnement didactique, un simple partage des tâches : ce partage ne prend son sens que par la communion autour de la valeur fondamentale, consubstancielle à l'idée même de projet, celle du progrès temporel. ». Ceci semble suggérer qu'on ne peut modifier la topogénèse sans modifier la chronogénèse. Mais peut-on effectivement modifier la première en jouant sur la deuxième ? C'est ce que montre Sensevy (1996) avec son « journal des fractions ». Ce dernier contient l'énonciation de propos d'élèves relevant d'un discours de type technologique et conférant à l'apprentissage des fractions une certaine « épaisseur épistémologique » au sens de Johsua et Dupin, 1993. Il rend chronogènes les interrogations des élèves, car renvoyées à l'ensemble de la classe pour faire avancer le temps didactique. De ce fait, ce journal participe à la dévolution du processus d'institutionnalisation, ce qui modifie considérablement la topogénèse. Par ricochet, les élèves sont amenés à remanier leur rapport au temps didactique, ne fût-ce qu'en s'interrogeant sur les avancées réalisées. Sensevy (1996) en conclut : « Modifier la chronogénèse modifie la topogénèse » et « [...] modifier la topogénèse par la chronogénèse permettra de modifier ensuite en retour la chronogénèse elle-même ». En bas de page, cet auteur note que « cette relation circulaire n'est pas au départ nécessairement réversible » car, en substance, la proposition d'une activité qui modifie la topogénèse, comme la production d'énoncés de problèmes par les élèves, peut être perçue comme un exercice, donc non chronogène. Ceci rejoint l'idée émise par Chevallard (1981) selon laquelle, aux yeux des enseignants et des enseignés, les exercices doivent se contenter de ne pas retarder la progression didactique.

L'exemple du journal des fractions fait apparaître un manque à propos du projet AHA. En effet, tout comme l'enseignement des fractions tel que le conçoit Sensevy, ce projet vise une certaine « épaisseur épistémologique » à propos de laquelle les auteurs souhaitent mobiliser la réflexivité des élèves. Cependant, conçu exclusivement sur la base de thèses constructivistes et d'une analyse historico-épistémologique, ce projet se situe à l'extrémité de l'axe « généricité-spécificité » au pôle « spécificité » et souffre ainsi de défauts propres à certains travaux de didactique trop éloignés de l'approche anthropologique : « L'approche classique en didactique des mathématiques a en général ignoré les aspects les plus *génériques* de l'organisation de l'étude au sein d'un type donné de systèmes didactiques […] les problèmes *spécifiques* de l'étude d'une organisation mathématique locale particulière restent en général mal posés tant qu'on analyse pas les « choix » didactiques, conscients ou non, faits à des niveaux organisationnels de *moindre spécificité*. En conséquence, l'approche anthropologique fait droit à des aspects de l'organisation de l'étude généralement regardés comme relevant de choix « pédagogiques », voire « politiques », extérieurs au champ de questionnement de la didactique des mathématiques. » (Chevallard, 1999). Peut-on compléter le projet AHA a posteriori de dispositifs d'étude génériques du type « journal des fractions » ? Pourquoi pas ? Je pense cependant qu'il faudrait adapter de tels dispositifs à l'âge des élèves concernés et tenir compte du fait que leur rapport à l'institution scolaire diffère considérablement de celui d'élèves de l'école élémentaire. En particulier, l'intégration d'un tel dispositif dans l'évaluation me paraît essentielle. Les membres enseignant du groupe AHA ont d'ailleurs tenté d'incorporer une dimension épistémologique dans l'évaluation en proposant aux élèves de disserter à propos de l'évolution de tel ou tel concept.

Dans le registre des dispositifs génériques d'étude, il en est un autre qu'inspire la notion de milieu, telle qu'elle apparaît dans la théorie anthropologique. Pour Chevallard (1992), le milieu institutionnel relatif à une institution I au temps t est l'ensemble des éléments « stables », soit « ceux qui, subjectivement, c'est-à-dire pour les sujets de l'institution I, apparaissent comme *allant de soi, transparents, non problématiques* ». A propos de la notion de sujet, il précise : « Une personne X se révèle être un bon sujet de I relativement à l'objet institutionnel O lorsque son rapport personnel R (X,O) est jugé *conforme* au rapport institutionnel R_I (O). ». Cette définition met en lumière, aux cotés des objets sensibles qui sont la cible de l'enseignement en cours, les objets pertinents vis-à-vis desquels une personne doit entretenir un rapport conforme (on dira idoine) sans lequel elle ne peut prétendre réaliser un rapport « adéquat » à l'objet de l'enseignement (Mercier, 1998). Nul ne me contredira pour dire qu'un rapport idoine au calcul algébrique est indispensable à tout élève qui aborde l'analyse. Il suppose non seulement une connaissance de ses règles mais aussi une appréhension de ce calcul en tant que modèle de situations géométriques et physiques. Or, on peut observer de sérieuses lacunes des élèves à ce sujet. Comment les combler sans « ennuyer » les élèves par d'interminables révisions et sans les déresponsabiliser ? Quelles contraintes relatives au temps didactique devrait respecter un dispositif d'aide à l'étude adéquat et susceptible de favoriser la pérennité de certains apprentissages ? Je ne m'attarderai pas à ces questions qui ne sont pas propres à la mise en œuvre du projet AHA me contentant de renvoyer à Mercier (1995) pour étayer la réflexion à ce sujet.

En guise de conclusion

L'étude présente exploite conjointement la théorie des situations didactiques et la théorie anthropologique de la didactique. De la première elle emprunte principalement la notion d'adidacticité qui permet de situer la filiation aux théories contructivistes dont se réclame le projet AHA. Quant à la deuxième, elle permet d'imaginer comment ce que suppose cette filiation interagit avec les habitus des élèves en tant que sujets d'une institution scolaire. D'autres didacticiens avaient joué de cette complémentarité dans d'autres circonstances ou l'avaient soulignée à tout le moins. Ainsi Mercier (1998) pour montrer, à travers des biographies didactiques, comment l'institution peut créer des épisodes didactiques : « [...] la description de l'espace didactique que permet une approche anthropologique s'avère incomplète sans la notion d'adidacticité, qui s'y avère tout aussi centrale que dans le cadre de la théorie des situations ». Quant à Perrin-Glorian (1999), elle fait remarquer que la théorie anthropologique de la didactique se prête particulièrement bien à l'analyse de séquences dans les classes ordinaires alors que « la notion de situation adidactique, en revanche, permet de s'interroger sur la part laissée à l'élève et contrôlée par l'enseignant, dans la construction de ses connaissances, mais est souvent difficile à mettre en œuvre dans l'anayse de séquences « ordinaires ». ». Cette position peut être nuancée : les concepts de milieu et de contrat de la théorie des situations didactiques ne sont-ils pas propres à débusquer les véritables enjeux de savoir des leçons ordinaires ? Quant à la théorie anthropologique de la didactique, ne prétend-elle pas décrire aussi des enseignements ménageant une première rencontre avec le savoir par le biais de situations fondamentales ? Il n'empêche que, d'une théorie à l'autre, l'accent se déplace de manière perceptible, tantôt sur la construction des connaissances par l'élève, tantôt sur les conditions institutionnelles qui favorisent ou entravent cette construction.

Nonobstant cette complémentarité, tôt ou tard, des choix drastiques, voire douloureux se posent au praticien, comme ils se sont posés aux auteurs du projet AHA. Faute de trouver une solution qui rencontre tous les critères, faut-il, par exemple, préserver l'adidacticité ou au moins le face à face des élèves avec le savoir, quitte à reporter la description des vraies raisons d'être et quitte à laisser vivre des techniques jugées peu optimales, au vu de la théorie anthropologique de la didactique ? Quel poids accorder au constructivisme ? Le prix peut-il en être des praxéologies mathématiques non canoniques où les connaissances priment sur les savoirs et qui laissent vivre, de manière éphémère, des techniques « artisanales » ? Concevoir un enseignement en misant plus sur la variété épistémologique que sur l'unité mathématique, n'est-ce pas risquer de « perdre » l'élève dans une organisation mathématique aux ramifications trop tard intégrées dans un même « design » ? Y a-t-il un sens à s'inspirer des théories constructivistes en cherchant seulement à faire rencontrer aux élèves un « manque de savoirs », c'est-à-dire en leur faisant prendre conscience des limites de leurs savoirs antérieurs sans avoir l'ambition de leur faire « inventer » un savoir nouveau. Jusqu'où tenir compte des obstacles épistémologiques ? Quel prix payer ? Faut-il en organiser le « franchissement » ou, au contraire, le faire contourner aux élèves ? En quelles circonstances ? Comment organiser l'enseignement d'un concept unificateur comme celui de limite en respectant les contraintes temporelles de l'enseignement ? Peut-on faire assumer par les élèves une praxéologie didactique à géométrie variable, misant par moments sur une ostension assumée pour montrer le fonctionnement culturel d'un outil mathématique et fluctuant à d'autres moments entre une ostention non voulue et des temps d'adidacticité ? Par quels types d'aide à l'étude assurer la pérennité d'objets d'enseignement pertinents pour un apprentissage donné ? Faut-il découper l'enseignement en praxéologies mathématiques locales correspondant chacune à une classe-type de problèmes ou doit-on privilégier les problèmes plus riches, porteurs de plusieurs savoirs à la fois ?

Plusieurs de ces questions laissent supposer une tension plus globale entre la théorie des situations et la théorie anthropologique, comme s'il fallait presque choisir l'une contre l'autre.

Cette tension s'observe-t-elle dans d'autres produits du génie didactique ? Sous quelle(s) forme(s) ? Est-elle inscrite dans les théories elles-mêmes ou plutôt liée à l'incapacité des personnes à imaginer les « bonnes » ingénieries didactiques satisfaisant les critères de l'une et de l'autre ? Cette question me ramène évidemment, entre autres, à ce fameux axiome d'existence des situations fondamentales associées à un savoir donné. Mais au delà, elle appelle un examen d'autres projets du même type qui analyse les relations entre praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. Cette question renvoie aussi au concept d'ingénierie curriculaire et aux travaux afférents qui permettraient peut-être de concilier les deux théories.

Qu'on le veuille ou non, on n'échappera pas, il me semble, aux questions plus normatives que se posent les enseignants acculés à faire des choix avant d'agir. Jusqu'à quel point la théorie anthropologique peut-elle opérationnaliser ces questions ? Le veut-elle ou évite-t-elle de prendre position, ainsi que certains propos de Chevallard (1992) pourraient le laisser entendre : « Guy Brousseau me paraît « obsédé » par les conditions du *bon* fonctionnement des systèmes didactiques; je suis, quant à moi, davantage fasciné par l'étude des conditions de possibilité de leur fonctionnement, tout court - bon ou moins bon » ? L'article sur les pratiques enseignantes à la lumière de la théorie anthropologique (Chevallard, 1999) représente une avancée importante de ce point de vue. Nul doute cependant que les didacticiens attendent impatiemment de plus longs développements sur l'évaluation d'une organisation didactique.

Artaud M. (1998), Les nombres relatifs : étude d'un compte-rendu d'observation d'une classe de cinquième, In Noirfalise R. (ed) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, (pp. 183-198), Actes de l'Université d'été de La Rochelle.

Artigue M. *et al*. (1989), *Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire*, Rapport de recherche, IREM Paris 7.

Artigue M. (1998), L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, *Recherches en didactique des mathématiques*, 18 (2), 231-261.

Bloch I. (2000), *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*, Thèse, Université Bordeaux I

Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, [Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield], Grenoble: La pensée sauvage, coll. Recherches en didactique des mathématiques.

Brousseau N., Brousseau G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux: LADIST, Université Bordeaux 1.

Brousseau G., Centeno J. (1992). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques, 11 (2-3)*. 167-210.

Castela C. (1995), Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures, *Recherches en didactique des mathématiques*, 15 (1), 7-48.

Chevallard Y. (1981), *Pour la didactique*, IREM de Marseille.

Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 12 (1), 73-112.

Chevallard Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19 (2), 221-265.

Cirade G., Matheron Y. (1998), Equation du premier degré et modélisation algébrique, In Noirfalise R. (ed) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, (pp.199-250), Actes de l'Université d'été de La Rochelle.

Cornu B. (1983), *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*, Thèse de 3ème cycle, Université de Grenoble.

Danblon P., coord. (1990), *Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté Française de Belgique, Rapport de la Commission scientifique d'étude de l'enseignement des mathématiques et des sciences*, Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation, Bruxelles.

D'Hainaut L. (1983), *Des fins aux objectifs de l'éducation*, Labor Nathan, Bruxelles-Paris.

Douady R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques,* 7 (2). 5-31.

Fourez G. (1992), Un point de vue socio-épistémologique sur la démonstration, In Schneider M. (ed) *Qu'est ce que démontrer ?* Publication interne, Namur: FNDP.

Fourez G., Englebert V., Mathy P. (1997), *Nos savoirs sur nos savoirs*, De Boeck université, Louvain-la-Neuve.

Fregona D. (1995), *Les figures planes comme « milieu » dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques*, Thèse, Université Bordeaux I

Freudenthal H. (1973), *Mathematics as an educational task*, D. Reidel, Dordrecht.

Groupe AHA, (Bolly, P., Chevalier, A., Citta, M., Hauchart, C., Krysinska, M., Legrand, D., Rouche, N., Schneider, M.) (1999). *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse, manuel pour l'élève.*, Bruxelles, De Boeck.

Groupe AHA, (1999). *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse, guide méthodologique*. Bruxelles, De Boeck.

Hauchart C., Rouche N. (1987), *Apprivoiser l'infini, un enseignement des débuts de l'analyse*, Ciaco, Louvain-la-Neuve.

Johsua S., Dupin J.-J., (1993). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques.* Paris: Presses Universitaires de France.

Jullien M., Tonnelle J. (1998), Ecritures fractionnaires : étude de traces écrites de l'activité d'une classe de cinquième, In Noirfalise R. (ed) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, (pp. 121-182), Actes de l'Université d'été de La Rochelle.

Lakatos I. (1976), *Proofs and refutations, the logic of mathematical discovery*, Cambridge University Press.

Legrand M. (1997). La problématique des situations fondamentales. *Repères-IREM, 27*, 81-125.

Margolinas C. (1998), Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'aalyse de situations d'enseignement, In Noirfalise R. (ed) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, (pp.3-16), Actes de l'Université d'été de La Rochelle.

Mercier A. (1995), La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, *Recherches en didactique des mathématiques*, 15 (1), 97-142.

Mercier A. (1998), La participation des élèves à l'enseignement, *Recherches en didactique des mathématiques*, 18 (3), 279-310.

Perrin-Glorian M.-J. (1999), Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19 (3), 279-322.

Polya G. (1967), *La découverte des mathématiques*, Dunod, Paris.

Robert A. (1982), *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*r, Thèse de doctorat d'Etat, Université Paris VII.

Robert A. (1992), Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement annuel de licence en formation continue, *Recherches en didactique des mathématiques*, 12 (2.3), 181-220.

Rouchier A. (1991), *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itéro-récursives, institutionnalisation*, Thèse de doctorat d'Etat, Université d'Orléans.

Schneider M. (1988), *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*, thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve.

Schneider M. (1991b), Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides, *Recherches en didactique des mathématiques*, 11 (2.3), 241-294.

Schneider M. (1992), A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané, *Educational Studies in Mathematics* 23, 317-350.

Schneider M. (à paraître), Une ingénierie didactique passée au crible de concepts de didactique, In Mercier A., Rouchier A., Lemoyne G. (eds), *Sur le génie didactique : usages et mésusages des théories de l'enseignement*, De Boeck, Louvain-la-Neuve.

Sensevy G. (1996), Le temps didactique et la durée de l'élève. Etude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions, *Recherches en didactique des mathématiques*, 16 (1), 7-46.

Sierpinska A. (1985), Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en didactique des mathématiques*, 6 (1), 5-67.

Vergnaud G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, 10 (2-3), 133-170.