MAGGY SCHNEIDER[44]

INGENIERIES DIDACTIQUES ET SITUATIONS FONDAMENTALES QUEL NIVEAU PRAXEOLOGIQUE ?

RESUME

Mes présupposés sur les mathématiques, leur apprentissage et leur enseignement m'amènent à considérer le concept de situation fondamentale, au sens d'une modélisation du savoir, comme un passage obligé pour structurer toute ingénierie didactique. Et ce, pour autant que la détermination de situations fondamentales prenne en compte la relativité institutionnelle telle qu'inscrite dans le concept de praxéologie et soit pensée à un niveau praxéologique pertinent axé soit sur un projet de modélisation, soit sur l'élaboration d'un parcours déductif. Je déduis aussi de ces présupposés l'intérêt d'articuler discours *ex cathedra*, d'une part, et situations adidactiques, d'autre part, pourvu que le discours soit heuristique au sens de Lakatos. Les situations adidactiques, elles, restent particulièrement adéquates en cas de difficultés a priori qui se structurent en obstacles résistants à une variabilité potentielle de la transposition, en raison soit d'une approche empiriste des phénomènes, soit d'un attachement excessif au contrat didactique déjà installé à leur propos.
Par ailleurs se pose la question du caractère scientifique de recherches articulées autour d'une ingénierie conçue comme genèse artificielle d'un concept. Dans une perspective poppérienne, en un sens large, les ingénieries concernées se doivent de mettre à distance la transposition dans laquelle elles s'inscrivent et permettent essentiellement de falsifier les certitudes pédagogiques sous-jacentes à la transposition a contrario de laquelle elles se définissent.
Enfin, la question de la diffusion des ingénieries m'engage à plaider en faveur d'une formation initiale et continuée conséquente en matière tant d'épistémologie que de didactique.

INTRODUCTION

Derrière ce titre que j'ai choisi bref mais qui peut paraître quelque peu énigmatique, j'annonce mon intention de montrer en quoi le concept de situation fondamentale reste, à mes yeux, un référent incontournable dans la construction et l'analyse d'ingénieries didactiques pour autant qu'on porte sur les situations fondamentales un regard plus praxéologique que conceptuel et, qui plus est, un regard situé à un niveau praxéologique adéquat. Tout cela en un sens que je préciserai au fur et à mesure.

Le titre affiche aussi le choix de mes cadres théoriques bien que ce choix lui-même soit dicté par des références antérieures liées à mon histoire personnelle.

Comme cela a été rappelé dans plusieurs cours, le concept d'ingénierie didactique était initialement pensé dans un contexte de recherche, comme méthodologie à portée essentiellement phénoménotechnique, que ce soit au niveau micro des genèses artificielles de concepts ou à un niveau plus macro de phénomènes transverses par rapport aux contenus comme la mise en évidence du contrat didactique. Ce qui n'a pas empêché, dans les faits, que ces dispositifs méthodologiques soient utilisés à des fins d'enseignement. Aujourd'hui, j'ai parfois l'impression que l'expression « ingénierie didactique » désigne n'importe quel dispositif expérimental impliquant un quelconque enseignement, outre le fait qu'elle est utilisée, de plus en plus, dans des perspectives de développement sans forcément faire l'objet d'un questionnement et bénéficier d'un supplément de signification. Ce constat me suggère de partir du point de vue du développement pour afficher mes choix épistémologiques, psychologiques, philosophiques mais aussi, ce qui peut peut-être paraître plus surprenant, pour en arriver *in fine* à préciser le point de vue de la recherche. Je m'en explique.

[44] Université de Liège, Belgique

Comme Crahay (2002), je me réfèrerai à la distinction faite par Durkheim entre démarche descriptive des phénomènes d'apprentissage et d'enseignement axée sur une recherche d'intelligibilité et une démarche prescriptive vis-à-vis de l'enseignement par laquelle on ambitionne d'améliorer le fonctionnement de l'école. Crahay (*op. cit.*) plaide, lui, pour l'existence et l'autonomie de chacune de ces démarches, les deux ayant des légitimités propres, complémentaires et non réductibles l'une à l'autre. Je pose, moi, la question d'une possible autonomie, ce qui ne m'empêche pas de souligner le risque d'un mélange des genres particulièrement en matière d'ingénieries didactiques et d'insister sur une vigilance constante pour l'éviter autant que faire se peut. Mais il est vrai que faire la part des choses entre le « scientifique » et « l'idéologique » est une entreprise presqu'illusoire, les travaux d'Althusser, de Bourdieu et de Chevallard concordant à nous montrer que toute pratique humaine s'inscrit inéluctablement dans un « appareil idéologique » que partagent souvent, sans en être forcément conscients, les « sujets » d'une même « institution ». En effet, la démarche scientifique ne peut faire l'économie d'un choix de valeurs, ne fût-ce que dans la sélection même des thèmes de recherche que l'on se propose de mener ou pour lesquels on octroie des crédits. Cependant, la mise à plat de ces choix permet un « pas de côté » de nature plus scientifique tout en constituant une condition *sine qua non* de l'élucidation des phénomènes d'apprentissage et d'enseignement ou en en permettant, en tout cas, l'une ou l'autre lecture plus distanciée. Et l'entrée « développement » se prête particulièrement bien, à mes yeux, à l'explicitation de ces choix. C'est donc celle que j'emprunte, d'autant qu'elle me paraît correspondre à la nécessité nouvelle d'une posture plus prescriptive ne fût-ce que pour pointer comme tels les dysfonctionnements actuels dans l'enseignement des mathématiques, par exemple la perspective essentiellement monumentaliste dénoncée par Chevallard.

Mon cours sera structuré en cinq parties : dans la première, j'y expose mes présupposés sur les mathématiques ainsi que sur leur apprentissage et leur enseignement et j'en déduis l'intérêt d'articuler discours *ex cathedra*, d'une part, et situations adidactiques d'autre part, pourvu que le discours soit heuristique et traite de questions ayant un caractère fondamental par rapport au savoir visé. Dans la deuxième partie, je caractérise, en termes d'obstacle lié à l'expérience première, les occasions privilégiées d'exploitation de situations adidactiques. Ensuite, dans une troisième partie, j'explique sous quel regard praxéologique il convient de regarder les situations fondamentales et j'y développe deux niveaux praxéologiques possibles, ainsi que des questions liées à leur articulation. Une quatrième partie aborde les questions de formation et les questions curriculaires associées. Dans une cinquième partie, je développe mon point de vue sur les ingénieries dans une perspective de recherche et j'en tire quelques conclusions sur les types de recherche qu'il conviendrait d'intensifier.

MES PRESUPPOSES SUR LES MATHEMATIQUES, LEUR APPRENTISSAGE ET LEUR ENSEIGNEMENT

Ma référence première est empruntée à l'épistémologie des sciences et dicte ma vision des mathématiques, de leur apprentissage et de leur enseignement. Pour des raisons liées à mon parcours personnel, l'épistémologie socio-constructiviste m'a servi initialement de bagage théorique minimal pour amorcer une réflexion sur les phénomènes d'apprentissage et d'enseignement. Il convient de préciser que je prends ce terme au sens des épistémologues des sciences, en particulier Popper (1973), et non au sens des psychologues, les premiers ne se préoccupant pas *a priori* ni d'enseignement, ni même d'apprentissage. On peut décrire brièvement le socio-constructivisme en ces termes : « Mouvement contemporain de l'épistémologie selon lequel les scientifiques inventent et/ou utilisent des théories pour donner du sens à ce qui les entoure et pour agir » (Fourez et al., 1997). Je vais à présent spécifier les emprunts que je fais à ce courant et les conséquences que j'en tire, d'abord en matière de développement et, plus loin dans mon exposé, sur la recherche en didactique.

1.1. Des concepts qui répondent à une recherche d'efficacité

A propos des concepts mathématiques ou scientifiques en général, il peut être éclairant de contraster positivisme empirique et constructivisme. Je m'explique en repartant du domaine philosophique où l'empirisme est une théorie selon laquelle l'expérience serait l'origine de nos connaissances, *a contrario* du rationalisme qui les situe dans la raison humaine. En épistémologie des sciences, on parlera de positivisme empirique pour désigner une perception des phénomènes imprégnée de l'illusion qu'un bon observateur n'interprète en rien ce qu'il voit, qu'il existe des « faits » objectifs et une « vraie vision scientifique » de ces faits. Il en découlerait que les concepts et lois scientifiques sont un reflet exact du monde, des « émanations de la nature », voire des « révélations divines », et il en résulterait une absence de distanciation entre les phénomènes « observés » et les concepts qui les modélisent. Au contraire, selon l'épistémologie socio-constructiviste, les concepts sont des créations de l'esprit humain, adoptées provisoirement pour leur efficacité à réaliser un projet donné ou à interpréter des phénomènes. Mais les mêmes concepts sont rejetés ou modifiés lorsque cette efficacité est mise à mal. Il ne s'agit donc pas d'y croire mais d'en tester les limites.

1.2. Une économie de pensée à envisager à deux niveaux

De cette référence première, je déduis une certaine vision des mathématiques d'abord, de leur apprentissage et enseignement ensuite. Pour ce qui est des mathématiques, je situe leur fonction première dans une « économie de pensée » et d'action pour reprendre et étendre une expression de Mach (1925). Il y a là une dynamique dont rend compte la modélisation de l'activité mathématique en termes de praxéologies, pourvu que les tâches aient « un caractère fondamental » au sens de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) : les mathématiques ont pour fonction de « tuer » les problèmes en les catégorisant et en créant des techniques pour les résoudre d'une manière « performante », le prix à payer étant le discours technologique ou théorique qui justifie ces dernières.

Mais sans doute faut-il envisager cette économie de pensée à plusieurs niveaux. Je vais l'illustrer à propos du concept de fonction, exemple sur lequel je pourrai m'appuyer ultérieurement pour définir ce que j'appelle niveau praxéologique.

Le concept de fonction fait partie des concepts dont plusieurs chercheurs (Robert & Robinet, 1996 ; Dorier, 1997) soulignent le caractère unificateur, généralisateur et porteur d'un nouveau formalisme qui semble d'ailleurs justifier, à leurs yeux, la difficulté à construire des situations fondamentales associées. Mais le caractère unificateur du concept de fonction tel qu'évoqué dans la plupart des recherches renvoie plutôt à la perspective d'une recherche de fondements des mathématiques engagée au milieu du XX^e^ siècle, à partir des ensembles et des relations, et qui a conduit à la définition générale d'une relation fonctionnelle en termes de triplets englobant aussi bien des transformations géométriques que les fonctions de l'analyse mathématique ou des opérateurs qui agissent sur ces fonctions. C'est souvent ce point de vue conceptuel qui est implicitement en ligne de mire dans l'enseignement secondaire et qui conduit à des insistances fort peu motivées à l'adresse des élèves, en particulier sur l'unicité de l'image d'un élément.

Mais, il existe un autre caractère unificateur que j'illustrerai à partir de l'histoire du calcul intégral. Pour Archimède, la quadrature du segment de parabole et la cubature de la pyramide sont des problèmes *a priori* différents bien que leurs validations respectives relèvent d'une méthode commune : celle dite d'exhaustion caractérisée par un double raisonnement par l'absurde. L'idée est d'épuiser (d'où le mot « exhaustion ») le segment de parabole, d'une part, et la pyramide, d'autre part, en lui enlevant à chaque étape plus de la moitié de ce qui reste : des triangles sont ôtés du premier et des prismes le sont de la seconde. Ainsi que l'illustrent les Fig. 1 et 2, cela conduit à des découpages qui semblent n'avoir rien à voir l'un avec l'autre et qui supposent que tout le travail est à refaire pour un des deux problèmes, une fois l'autre résolu.

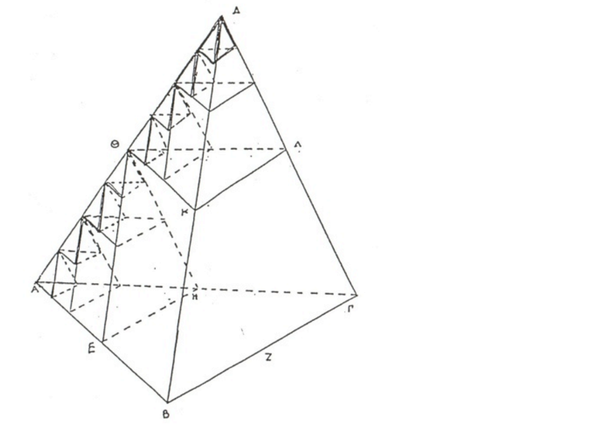

Figure 1 : la cubature de la pyramide

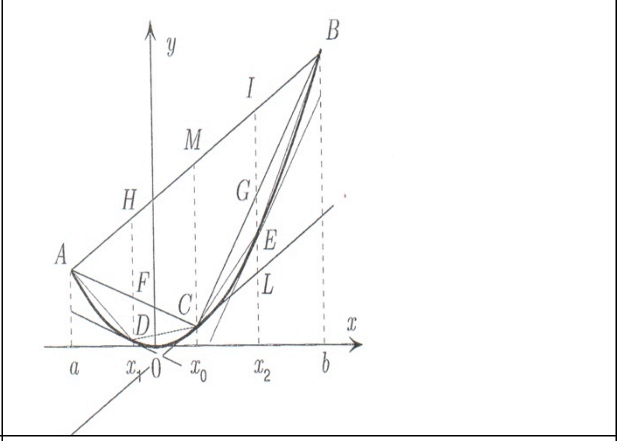

Figure 2 : la quadrature de la parabole

Cependant, au sens moderne du calcul intégral, il s'agit du même problème car ces situations se modélisent toutes deux par l'intégrale définie d'une fonction du second degré et se résolvent par la primitivation d'une telle fonction ou la limite d'une « même » somme de Riemann. Mais ce regard n'est pas celui d'Archimède pour qui le concept de fonction est inconnu (il est à remarquer d'ailleurs que la Fig. 2 constitue un anachronisme par la présence du système d'axes qui ne peut être le fait de cet auteur à son époque). Aux dires des Bourbakistes, cela empêche de considérer Archimède comme l'inventeur du Calcul intégral :

> « Mais pour qu'on ait le droit de voir là un "calcul intégral", il faudrait y mettre en évidence, à travers la multiplicité des apparences géométriques, quelque ébauche de classification des problèmes suivant la nature de " l'intégrand " sous-jacent. Au XVII[e] siècle, nous allons le voir, la recherche d'une telle classification devient peu à peu l'un des principaux soucis des géomètres » (Bourbaki, 1960).

Cet exemple montre l'intérêt d'une classification algébrique où des problèmes *a priori* différents sont fédérés en catégories selon le type de fonction qu'ils mobilisent. Sans aller jusqu'au calcul intégral, pensons que le problème de la chute libre d'un corps dans le champ de la pesanteur et celui des aires de rectangles isopérimétriques mobilisent tous deux une fonction du second degré. Ce classement « fonctionnel » relève du 3[e] degré d'algébrisation tel que défini par Bolea et al. (2001) : il s'agit d'unifier et de réduire à quelques catégories les problèmes, les techniques qui permettent de les résoudre et les discours technologiques associés. Dans le cas des problèmes du calcul intégral, les techniques sont celles de primitivation, de calculs de limites ou d'intégration numérique mais, en plus, on les unifie par le biais du type de fonctions mobilisées : trigonométrique, exponentielle, polynomiale de degré 2, etc. Comme je le montre ailleurs (Schneider, 1988), c'est une telle unification algébrique qui permet de voir le problème de l'aire « sous une courbe » comme « standardisation » de tous les problèmes se ramenant à l'intégration d'une fonction d'une variable dont cette courbe est le graphique, qu'ils concernent le travail d'une force variable, le volume d'un solide ou le calcul de la distance parcourue par un mobile à partir de sa vitesse ou n'importe quel autre contexte.

Cette catégorisation est tributaire d'une double algébrisation : d'abord la standardisation des variables indépendante et dépendante sous la forme x et y, indépendamment de la nature des grandeurs concernées, ensuite la généralisation de données numériques sous forme de paramètres laquelle permet d'adapter ultérieurement un modèle fonctionnel donné aux contraintes particulières de tout problème traité. Elle peut être travaillée dès le début du collège où les élèves sont capables de classer des suites de nombres figurés selon qu'elles mobilisent des progressions arithmétiques, géométriques ou « autres » (Krysinska, 2007). C'est l'objet du texte de Krysinska (volume 2).

On voit là l'économie de pensée apportée par les ostensifs algébriques, même si le concept de fonction dans sa généralité dépasse ces aspects. Par ailleurs, ce point de vue s'étend à des expressions qui ne sont pas, elles, de nature fonctionnelle. Par exemple, l'ostensif $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ représente l'ensemble des coniques dont il permet des classifications projective, affine et métrique, ainsi que des techniques générales de détermination de tangentes par exemple. L'aspect unificateur auquel je m'intéresse ici ne m'amène donc pas à privilégier le fait qu'une relation est fonctionnelle lorsqu'il n'existe pas deux couples de même origine. Il se situe en amont d'un projet de fondement des mathématiques.

Mais ce projet lui-même est, à son tour et à un autre niveau, source d'une économie de pensée. Je me contenterai, pour le décrire, d'un propos plus qu'éclairant des Bourbakistes sur le caractère « outil » des structures mathématiques :

> « Une structure est un outil pour le mathématicien. Une fois qu'il a discerné, entre les éléments qu'il étudie, des relations satisfaisant aux axiomes d'une structure de type connu, il dispose aussitôt de tout l'arsenal des théorèmes généraux relatifs aux structures de ce type, là où, auparavant, il devait péniblement se forger lui-même des moyens d'attache dont la puissance dépendait de son talent personnel, et qui s'encombraient souvent d'hypothèses inutilement restrictives, provenant des particularités du problème étudié » (Bourbaki, 1960)

1.3. Une économie de pensée au principe du choix de situations fondamentales

C'est une économie de pensée telle que décrite plus haut qui doit dicter, à mon avis, le choix de situations fondamentales susceptibles de structurer un enseignement donné. J'illustrerai mon point de vue à propos du concept de fonction en le rapprochant et en le contrastant à la fois avec celui de Falcade (2006), non pas dans le but de critiquer son travail que je trouve fort riche et circonstancié mais tout simplement dans une visée méthodologique. Cette chercheuse évoque le caractère unificateur du concept de fonction pour faire l'hypothèse

> « que, pour certaines notions comme celle de fonction, il n'existe pas une suite de situations fondamentales capables, toutes seules, de façon opérationnelle, de les faire émerger, dans toute leur complexité, comme outil de solution d'un problème, au moins, dans un temps raisonnable, dans l'institution scolaire concernée » *(op. cit.)*

Elle adopte alors une position hybride misant à la fois sur la rencontre avec des problèmes qui permettent « de donner du sens aux objets en jeu » à la manière de Brousseau et sur des « activités socialement significatives permettant le fonctionnement de certains outils et leur interprétation comme instruments de médiation sémiotique », en référence à la théorie de Vygotski. Attardons-nous quelque temps à ce travail pour en comprendre les ressorts.

L'analyse *a priori* qui est proposée s'appuie sur plusieurs recherches dont le relevé des obstacles cités par Sierpinska (2002) à propos du concept de fonction - et dont il conviendrait d'analyser de plus près le caractère épistémologique présumé. Quoi qu'il en soit, Falcade (*op. cit.*) en tire des critères de construction d'une séquence expérimentale. Les activités proposées doivent confronter les élèves aux changements, leur permettre d'identifier ce qui change, de discriminer variable indépendante et variable dépendante et de percevoir, parmi les changements, des régularités qui permettent de contrôler des situations problématiques. Elles doivent permettre de contraster fonctions constantes et fonctions non constantes et d'approfondir les signifiés de domaine et d'image. Elles doivent favoriser une interprétation dynamique du graphe, fonder l'apprentissage du graphe sur le signifié de courbe géométrique et celui de trajectoire, offrir la possibilité de travailler avec des variables géométriques pour développer une certaine appréhension spatio-temporelle de la variation et favoriser l'articulation entre plusieurs registres au sens de Duval. Insistant sur le signifié co-variationnel du concept de fonction et sur une interprétation cinématique du graphe, Falcade postule le rôle décisif d'un environnement de géométrie dynamique, tel que Cabri-géomètre. Elle analyse alors le rôle joué par des outils de Cabri en tant qu'instruments de médiation sémiotique tel que l'outil Trace où l'utilisateur déplace un point libre A, qui laisse une trace rouge, et bouge ainsi indirectement le point dépendant H, qui laisse une trace verte. Un autre élément de médiation sémiotique est un texte d'Euler où celui-ci décrit la manière de représenter le graphique d'une fonction par un tracé où la mesure d'un segment [AP] qui relie l'origine A à un point variable P représente la variable x tandis que y est figuré par la mesure d'un segment [PM] perpendiculaire à [AP], le point variable M décrivant le graphe.

Les activités proposées aux élèves sont multiples : un premier groupe d'activités permet aux élèves d'explorer et de construire des fonctions géométriques au travers de fonctionnalités « Cabri » grâce auxquelles on peut associer un point géométrique mobile dépendant d'un autre mobile également : l'idée est d'introduire la « co-variation de deux variables, l'une dépendant de l'autre, les deux en fonction du temps ». Une 2e partie d'activités « met en jeu un problème-charnière entre le géométrique et le numérique : celui d'étudier les fonctions associées à un rectangle variable de périmètre constant ». Les élèves, cette fois, ne peuvent plus bouger les sommets du rectangle qu'en modifiant des valeurs numériques apparaissant dans des fenêtres sur l'écran : respectivement la mesure d'un côté du rectangle et la mesure du demi-périmètre. On leur demande de décoder la propriété géométrique cachée qui a été utilisée pour construire le rectangle mobile et, dans une activité ultérieure, d'exprimer son aire au moyen d'une formule algébrique. L'auteur espère par là que « la métaphore fondamentale du mouvement liée aux fonctions géométriques, puisse être récupérée et réinvestie aussi dans des fonctions numériques ». Un 3e groupe d'activités est constitué de discussions collectives visant à faire produire par les élèves des définitions relatives aux fonctions géométriques et aux fonctions numériques. Enfin, les dernières activités portent sur les différentes représentations possibles d'une fonction géométrique : grâce aux outils de Cabri, « Nombre », « Calculatrice » et « Trace » ou à l'aide de la description d'Euler. Il s'agit ici d'inviter les élèves à un travail d'écriture et de discussion pour construire le signifié de fonction au travers de signifiants divers. Un problème de modélisation dans une situation qualifiée de « pseudo-concrète » par Falcade vise à faire approfondir par les élèves le signifié de graphe d'une fonction en lien avec les signifiés de variables indépendante et dépendante, de domaine, d'image et de paramètre. Mais, l'ensemble des questions de l'ingénierie porte plus sur l'identification des variables en jeu, le domaine et l'image que sur la modélisation proprement dite.

Globalement, Falcade étudie le fonctionnement de l'ingénierie didactique ainsi construite en croisant la Théorie des Situations Didactiques et la Théorie de la Médiation Sémiotique et analyse le rôle qu'y jouent les outils Cabri et le texte d'Euler comme instruments de médiation sémiotique. En particulier, elle analyse finement les mécanismes langagiers de constitution et de fonctionnement des signes au principe de la construction des signifiés, que ce soit dans les échanges entre élèves lors des discussions collectives ou dans les actions conjointes de l'enseignant et des élèves qu'elles soient de nature topogénétique, chronogénétique ou mésogénétique. Ce n'est pas sur ces derniers aspects que je me polariserai mais sur les critères historico-épistémologiques et cognitifs qu'elle considère pour construire son ingénierie.

Mes travaux antérieurs (Schneider, 1988) m'incitent à adopter plusieurs des critères mis en avant par Falcade (2006) : principalement, le signifié co-variationnel du concept de fonction et l'interprétation cinématique de signes graphiques. A partir de là, nos positions divergent. Au lieu de me polariser sur des aspects conceptuels des fonctions et de leurs constituants : domaine, image, variables en jeu, je préfère adopter le regard praxéologique de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), dans toute sa dimension dynamique, en cherchant à mettre en évidence l'économie de pensée que les fonctions ont pu apporter dans le traitement de questions intra ou extra-mathématiques. Et cela m'amène à privilégier le point de vue de la modélisation fonctionnelle outillée entre autres d'ostensifs algébriques, telle que je l'ai développée à la section précédente. Pour rappel, il s'agit de regarder les fonctions, ou plutôt les modèles fonctionnels paramétrés, comme des ostensifs permettant une classification de problèmes divers se posant en mathématiques ou dans d'autres disciplines et leur traitement par des techniques fédératrices et conviviales : le calcul des limites, celui des dérivées ou des primitives.

Quant à la métaphore du mouvement que les fonctions géométriques de Cabri sont susceptibles d'installer, elle me paraît intéressante mais surtout lorsque le contexte à modéliser est *a priori* peu porteur de l'idée de variation. Ainsi, autant l'étude de l'évolution de grandeurs (taille d'un enfant, …) dans le temps se pense spontanément en termes co-variationnel (pour autant que le temps n'y soit pas une variable « transparente »), autant la covariation dans le contexte de détermination de mesures de surfaces curvilignes suppose un pas de côté important pour aller dans ce sens. En effet, remplir de telles surfaces de morceaux rectilignes de plus en plus nombreux et petits est une idée à la portée du premier élève venu et même celle d'y mobiliser le concept de limite. Il n'en va pas de même du détour que constitue la recherche de la fonction « aire » dont la mesure cherchée initialement est une image. Ce détour peut par contre être facilité par une représentation du problème en termes de mouvement que Newton traduit en ces termes :

> « Je considère ici les quantités mathématiques décrites non par des parties constantes toutes petites mais par un mouvement continu. Les lignes sont décrites et engendrées par la description non de parties juxtaposées mais par le mouvement continu de points, les surfaces par le mouvement de lignes, les solides par le mouvement de surfaces, … » (Newton, 1947 ed.).

C'est donc une imagerie cinématique qui conduit Newton au théorème fondamental de l'analyse même s'il doit s'en affranchir en expliquant que ce n'est pas le temps en lui-même auquel il se réfère mais une quantité quelconque qui croît d'un mouvement uniforme. A nouveau, ce qui me paraît important dans ce regard cinématique, c'est le fait qu'il donne accès à une nouvelle technique, celle de primitivation, qui permet d'éviter des sommations fastidieuses dans le calcul d'aires et de volumes. Et s'il y a lieu de choisir un texte comme vecteur sémiotique de l'idée de mouvement, ce serait à mes yeux un texte qui, à l'instar de celui de Newton, permet de montrer la portée de cette idée dans l'émergence de nouvelles techniques.

Par conséquent, mon regard est orienté vers l'économie de pensée qu'autorise la fédération de problèmes qui relèvent d'une même technique ou l'accès à de nouvelles techniques que ce soit à propos du signifié co-variationnel du concept de fonction ou de la métaphore du mouvement. Et il détermine, pour moi, le choix de situations fondamentales associées à ce concept, même si je n'associe pas forcément une dimension adidactique à de telles situations, ainsi que je m'en explique dans la section suivante. Bien sûr, mes analyses ne recouvrent pas tous les aspects du concept de fonction, car j'ai privilégié le point de vue algébrique et peu explicité le rôle d'un travail graphique que supposerait l'absence d'une expression analytique associée à la fonction alors que cet aspect est fort présent dans la thèse de Falcade.

1.4. Ma vision corollaire de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques

De ma vision socio-constructiviste des mathématiques, décrite plus haut, je déduis quelques aspects fondamentaux de leur apprentissage et de leur enseignement.

Un premier but de l'enseignement est de favoriser, chez les élèves, la mise à distance par rapport aux « faux objets empiriques » nés de l'illusion que les faits et les observations sont des donnés et non des construits. Il s'agirait, si l'on se réfère à la modélisation que fait Popper (1973) de la rationalité humaine, de faire passer les élèves du monde 1 des réalités physiques au monde 2 des états de conscience. N'est-ce pas la visée d'une telle distanciation intellectuelle dans l'apprentissage que met en avant Bachelard (1949) lorsqu'il dit qu'un « éducateur devra donc toujours penser à détacher l'observateur de son objet, à défendre l'élève contre la masse d'affectivité qui se concentre sur certains phénomènes trop rapidement symbolisés […] ». De même Piaget (1974) insiste-t-il sur la décentration psychologique que suppose, chez les enfants, la lecture d'une expérience : il ne « tombe pas sous le sens » que du sucre dissous dans l'eau a disparu sous prétexte qu'on ne le voit plus !

Au-delà de ce premier objectif, il s'agit aussi de faire comprendre aux élèves que les théories et concepts créés nous échappent en acquérant une existence autonome qui soulève de nouveaux problèmes : c'est l'accès au monde 3 des concepts de Popper qui contient « plus que ce que nous y avons mis ». En ce sens, je rejoindrais Firode (2009) dans sa lecture de la notion de problème chez Popper et les implications pédagogiques qu'il en tire :

> « Faire apparaître une situation comme un problème, par conséquent, ce n'est pas seulement proposer à l'élève une difficulté censée produire un effet psychologique, comme on le pense ordinairement, c'est avant tout le faire passer du plan subjectif au plan objectif, du mental au linguistique, du psychologique au logique. Ce qui ne peut arriver sans que l'attention de l'élève se détourne en quelque façon de la considération des états mentaux pour se tourner vers celle des objets théoriques dans leur réalité logique autonome » (*op.cit.*, p. 39)

Ces deux moments-clés de l'apprentissage mathématique, que je rapprocherai plus loin de deux processus praxéologiques majeurs, concernent plutôt des aspects conceptuels et ne rendent pas entièrement compte de ma vision sur ce qu'est apprendre les mathématiques. Un autre aspect, plus praxéologique, est lié à une visée de l'enseignement des mathématiques qui revient sur le devant de la scène, d'une manière pressante, dans le cadre de la mouvance des compétences : il s'agit de la résolution de problèmes. Voici comment je formulerais les choses. D'un point de vue plus praxéologique, apprendre les mathématiques c'est savoir utiliser les techniques pour tuer les problèmes, ce qui suppose, d'une part, d'avoir une intelligibilité des problèmes étudiés, des techniques qui permettent de les catégoriser et de les traiter, de leur champ d'opérationnalité et donc de leurs limites et, d'autre part, de savoir justifier le choix d'une technique et de son usage par rapport à une tâche donnée. La compétence à résoudre des problèmes s'exerce alors en brassant des classes de problèmes sans cesse plus nombreuses, sans indice sur le choix de la technique, et non en s'attaquant à des « problèmes inédits et complexes ». Je n'ai pas la place ici pour justifier ma position mais j'ai montré, dans Schneider (2006a), les risques inhérents aux organisations didactiques dont je prends ici le contrepied et au principe desquelles se situe la « résolution de problèmes » comme compétence-phare à entraîner et à évaluer : principalement, on se retient d'enseigner pour pouvoir vraiment évaluer cette compétence. Et par ailleurs, dans Schneider (2006b), j'ai montré en quoi les travaux de psychologie cognitive et ceux de didactique pouvaient justifier mon point de vue dans le but de favoriser le transfert des connaissances d'une situation à l'autre et ce, même si le concept de transfert semble un interdit de parole dans certains milieux didactiques.

1.5. Articuler discours heuristique axé sur des situations fondamentales et moments adidactiques

Les dispositifs d'enseignement sont nombreux et il ne peut être question ici de les envisager tous. Il me semble cependant primordial de rapprocher deux dispositifs extrêmes : les situations adidactiques, d'une part, et le discours *ex cathedra*, d'autre part. Non seulement en fonction de ce j'ai dit plus haut de ma vision des mathématiques et de leur apprentissage, mais aussi par rapport à mes observations des pratiques enseignantes, en particulier l'existence de « situations-problèmes » qui n'ont aucun caractère fondamental par rapport au savoir visé ou qui ne s'insèrent dans aucun projet d'étude mathématique plus globale.

Commençons par le discours *ex cathedra* qui me semble pâtir d'un sérieux discrédit en raison de malentendus que je vais tenter d'éclaircir. Chevallard (1999) distingue deux formes de première rencontre des élèves avec un savoir nouveau : les situations adidactiques en constituent une, la rencontre culturelle-mimétique en est une autre dont je considérerais ici la forme la plus exigeante qui conduit à rechercher et à expliciter - sur le mode discursif - les raisons d'être de l'objet ainsi rencontré, c'est-à-dire les motifs pour lesquels cet objet a été construit, ou pour lesquels, du moins, il persiste dans la culture. C'est dans cette optique que je situe ce que j'entends par discours *ex cathedra*, le but étant de rendre intelligible pour les élèves le projet global à l'étude. Évidemment, si étymologiquement le professeur parle bien du haut de sa chaire, son discours se doit, à mes yeux, d'avoir une teneur et une forme particulières que je vais expliquer. Il s'agit en bref d'un exposé, non pas déductif mais heuristique au sens de Lakatos (1984).

L'exposé déductiviste commence par une liste d'axiomes, de définitions et gomme les raisons de leur choix et de leur formulation. Il laisse peu de place au travail d'analyse inhérent à toute élaboration de preuve. Au contraire, le style heuristique met l'accent, d'après Lakatos, sur une dialectique entre preuves et réfutations, montrant comment se forgent les définitions pour donner prise au raisonnement déductif. Vu plus globalement, le discours heuristique met en évidence le projet initial à l'origine des mathématiques enseignées, quel que soit le niveau d'étude mathématique envisagé, les tentatives *a priori*, les succès et les échecs et les raisons pour lesquelles on optera, en définitive, pour telle ou telle issue.

Ce discours magistral se doit de relever du discours « socio-épistémologique » qui essaie de décrire comment les humains raisonnent, au lieu de prétendre dire comment ils devraient raisonner comme dans une conception normative de l'épistémologie. Au contraire, il convient d'examiner « comment les scientifiques travaillent sans présupposer que leurs pratiques sont nécessairement plus valables que d'autres pratiques cognitives » (Fourez, 1988).

C'est là pour le professeur une manière de favoriser le face à face direct de l'élève avec le savoir et de lui faire éprouver la nécessité de ce dernier sans recourir à un argument d'autorité venant de quiconque. Ce discours s'accommode d'ailleurs très bien de media tels que des documents historiques grâce auxquels peuvent être favorisés une sorte d'effacement du professeur et une mise à distance du savoir.

C'est d'ailleurs ce face-à-face direct de l'élève avec le savoir que visent les situations adidactiques. Je reviendrai plus loin sur l'intérêt de ces dernières mais je voudrais dire ici que, si le discours peut laisser place, par moments, à de telles situations, ce ne peut être au prix de l'intelligibilité du projet aux yeux des élèves. Il convient dès lors de leur expliquer en quoi certaines tâches qui leur sont proposées relèvent d'un artifice didactique (je pense, par exemple, à des situations de communication par téléphone dont l'enjeu est la découverte des cas d'isométrie des triangles mais qui ne rendent pas compte de leurs conditions d'emploi …).

Cette insertion des moments adidactiques dans un discours qui en situe la portée dans un projet plus global me pousse à distinguer le caractère fondamental d'une question et le caractère adidactique d'une situation organisée autour de la dévolution de cette question aux élèves, dévolution qui suppose, non seulement le caractère fondamental de cette question, mais aussi l'existence d'un milieu adidactique et celle d'un contrat. Je rejoins là Perrin-Glorian (1999) pour laquelle il pourrait ne pas exister, dans une institution donnée, une situation adidactique d'introduction à ce savoir. Comme Bosch et Chevallard également (1999), je regarde donc les situations fondamentales avant tout comme des modélisations des savoirs mathématiques par les questions auxquelles ils apportent une réponse efficace ou par les projets humains qu'ils permettent de réaliser. Et c'est la visibilité de ces questions ou de ces projets que je privilégierais avant tout que ce soit dans la définition des organisations mathématiques visées par l'enseignement ou d'organisations didactiques conçues à cette fin.

Je pourrais rapprocher ma volonté de revaloriser le discours *ex cathedra*, pourvu qu'il soit heuristique, des travaux de Robert et Robinet (1996) sur le discours « méta », de la dialectique des media et des milieux de Chevallard, ou encore de la théorie de la médiation sémiotique se fondant sur les travaux de Vygotski relatifs au développement social de l'intelligence. Cependant, il s'agit là, pour moi, essentiellement d'un savoir d'expérience. En effet, en raison de choix didactiques, mais aussi de contraintes ergonomiques, j'ai souvent, dans ma carrière de professeur de Lycée, combiné des dispositifs de situations adidactiques à un discours du type décrit plus haut. Et j'en ai retiré une impression d'efficacité. Bien sûr, il s'agit là d'une hypothèse d'action dont il conviendrait d'analyser, dans une perspective poppérienne, les conditions minimales de fonctionnement sans lesquelles le modèle n'est plus opérant. Par exemple, il doit exister des signes langagiers typiques d'un discours socio-constructiviste par lesquels se crée une certaine mise à distance : il ne revient pas au même de dire « Tel concept, c'est… » que de dire « Pour telle ou telle raison, un groupe de personnes a décidé de définir tel concept comme… ». De même, je pense à des contraintes relatives à l'évaluation qui devraient permettre d'impliquer les élèves dans l'écoute et la rétention du discours sur les raisons d'être d'un savoir mathématique.

L'OBSTACLE DE L'EXPERIENCE PREMIERE COMME OPPORTUNITE MAJEURE D'USAGE DE SITUATIONS ADIDACTIQUES

Malgré l'insistance que je fais ici sur l'intérêt d'exposés *ex cathedra* pourvu qu'ils relèvent d'une perspective socio-constructiviste je pense que des dispositifs s'apparentant à des situations adidactiques demeurent utiles en certaines circonstances que je précise en remontant aux sources des obstacles épistémologiques caractéristiques, d'après Bachelard (1938), de la pensée pré-scientifique et qui s'articulent autour de ce qu'il nomme l'obstacle de l'expérience première. Pour rappel, l'extension abusive des images familières ou l'obstacle substantialiste consiste à faire référence à une substance dotée de propriétés quasi magiques pour expliquer les phénomènes observés : par exemple, l'attraction de poussières sur une paroi électrisée sera expliquée par l'existence d'un fluide électrique. Bachelard explique bien que l'obstacle naît du fait qu'il s'agit là non d'une métaphore mais bien d'une explication de la situation induite par ce que les sens nous en livrent :

> « On pense comme on voit, on pense ce qu'on voit : une poussière colle à la paroi électrisée, donc l'électricité est une colle, une glu. On est alors engagé dans une mauvaise voie où les faux

> problèmes vont susciter des expériences sans valeur, dont le résultat négatif manquera le rôle d'avertisseur, tant est aveuglante l'image première […] » (*op.cit.*, p. 103)

Et, dans un autre de ses ouvrages, Bachelard (1949) estime que le positivisme doit laisser place à ce qu'il appelle le « rationalisme appliqué », soit une « mentalité abstraite-concrète » qui intègre « la réciprocité des dialectiques qui vont sans fin, et dans les deux sens, de l'esprit aux choses ». On retrouve donc ici un enjeu d'apprentissage déjà formulé plus haut en référence à Popper et Piaget.

2.1. Une expérience première envisagée en un sens très général

Cette référence à l'expérience première de Bachelard nous amène au débat sur le caractère culturel ou spontané des obstacles épistémologiques et sur la distinction entre obstacles épistémologiques et obstacles didactiques. Je rends compte de ces débats dans Schneider (2008) et me contenterai ici de dire qu'on ne peut trancher qu'au cas par cas et qu'il convient d'envisager l'obstacle de l'expérience première en un sens très général. En effet, une telle expérience peut relever d'une vision empirique des phénomènes relativement « spontanée » bien que possiblement aggravée par des pratiques enseignantes comme l'ostension, signe d'une épistémologie empiriste-sensualiste. Mais l'obstacle de l'expérience première peut provenir aussi de connaissances acquises lors d'une scolarité antérieure ou d'un contrat particulier qui leur est lié. Dans les sections qui suivent, j'illustre ces deux points de vue qui montrent des origines diverses d'un obstacle épistémologique, entre « inné » et « acquis », pour reprendre une expression souvent galvaudée mais qui a le mérite de la sobriété. Les exemples décrits me serviront ensuite à situer les enjeux d'ingénieries didactiques qui font l'objet des textes de Matheron & Noirfalise (dans cet ouvrage) ainsi que de Krysinska (dans cet ouvrage).

2.2 Exemple d'expériences premières relevant du positivisme

Mes premiers exemples sont des manifestations du positivisme. Je partirai d'obstacles que j'ai travaillé il y a longtemps (Schneider, 1988, 1991), à commencer par ce que j'ai nommé « l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions ». Il concerne des comparaisons de grandeurs basées sur des « indivisibles », d'où son nom. Le terme indivisible est emprunté à Cavalieri qui déduit, par exemple, un rapport entre les volumes de deux solides compris entre deux plans parallèles de la constance du rapport entre les mesures de leurs indivisibles, entendant par là les surfaces découpées respectivement dans les solides par des plans quelconques parallèles aux premiers. Cette comparaison est audacieuse en ce sens que l'on déduit une information sur des volumes à partir d'une autre sur des aires, changeant ainsi de dimension. Mais elle est correcte dans le découpage qui vient d'être évoqué. L'obstacle se manifeste lorsque de mêmes comparaisons sont faites dans certains autres cas, par exemple lorsqu'on suppose que les volumes de deux solides de révolution sont entre eux comme les aires des surfaces qui les engendrent. On observe alors que, pour justifier un tel résultat qui est faux, les élèves donnent des arguments dans le domaine des grandeurs en insistant, par exemple, sur le fait que les solides sont composés de leurs sections radiales, comme si les mesures de grandeurs se doivent de traduire une façon de voir les grandeurs elles-mêmes, ce qui révèle une absence de distanciation entre grandeurs, d'une part et mesures, d'autre part. Cet obstacle de l'hétérogénéité des dimensions est une hypothèse qui permet d'interpréter de multiples erreurs d'élèves liées au calcul intégral non seulement dans le cadre d'une ingénierie qui intègre des découpages à la Cavalieri en guise de méthodologie de recherche mais aussi dans celui d'une transposition didactique plus standard. Il prend en compte également des réactions de personnes ayant une formation plus poussée en mathématiques, par exemple des professeurs en formation, outre le fait qu'on en trouve des traces dans l'histoire. Mais, au-delà de sa « résistance » qui permettrait déjà d'argumenter son caractère épistémologique, cet obstacle m'intéresse surtout car il est significatif d'une position plus globale vis-à-vis des mathématiques relevant du positivisme empirique tel que caractérisé plus haut.

Une vision des mathématiques imprégnée de positivisme empirique permet en effet d'expliquer les erreurs liées à l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions qui traduit des glissements inconscients des grandeurs à leurs mesures censées en être le reflet. Mais, au-delà de ce contexte sans doute étroit, cette vision positiviste permet d'interpréter des réactions relatives à des objets géométriques ou grandeurs définis par le biais du concept de limite. Ainsi la tangente peut-être perçue comme « limite » de sécantes sans qu'aucune topologie n'ait été définie sur l'ensemble des droites plutôt que comme droite définie à partir de sa pente, c'est-à-dire d'une limite de fonction au sens mathématique. C'est l'obstacle géométrique de la limite que j'ai étudié à la suite de Sierpinska et dont j'ai montré qu'il se manifestait aussi à propos des aires curvilignes dont les élèves doutent qu'elles puissent égaler exactement la limite d'une suite d'aires rectilignes, pensant assez volontiers le passage à la limite en termes de rectangles qui finissent, « à la limite », par se réduire en segments. Quant à la vitesse instantanée, des élèves prétendent qu'elle n'existe pas se référant à l'impossibilité de la déterminer exactement par des observations et des mesures, se situant donc dans un univers sensible en dehors du monde des concepts imaginés par l'être humain. Au-delà de l'analyse mathématique, je note que Glaeser (1981) interprète la fin des « difficultés » d'appréhension des nombres relatifs par le fait qu'il ne « s'agit plus de déterrer dans la Nature des exemples pratiques qui “expliquent” les nombres relatifs sur le mode métaphorique. Ces nombres ne sont plus découverts, mais inventés, imaginés ». De même, les conceptions causaliste et chronologiste du concept de probabilité conditionnelle s'expliqueraient, d'après Gras et Totohasina (1995), par la difficulté à raisonner sans référence à des exemples précis et l'on rejoindrait ici la fixation à un contexte dont parle Artigue (1991).

2.3. Une expérience première d'ordre plus contractuel

On peut imaginer, à un autre niveau et dans certains cas, que l'expérience première des élèves soit déterminée par leur rapport personnel aux objets de savoirs tel que nourri par leur scolarité antérieure. Je rejoins là le point de vue partagé par Brousseau et Chevallard, selon lequel tout comportement d'élève a une signification « en relation avec les conditions concrètes de son activité » et, *in fine*, liée au contrat didactique. On peut donc s'attendre à observer des obstacles « contractuels » tout aussi résistants que les obstacles épistémologiques relevant d'une approche première plus spontanée. C'est ce que j'illustre ci-après au moyen d'un exemple analysé par Lebeau & Schneider (*à paraître*).

L'interprétation d'équations cartésiennes incomplètes, telles $y = -3/2x + 3$ ou $z = 0$, soulève des difficultés d'apprentissage que ce soit pendant la période d'enseignement au niveau secondaire (Lebeau & Schneider, *op. cit.*) ou après comme l'ont constaté Sackur et al. (2005) chez des étudiants universitaires en 1re année de « Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales ». Pour plusieurs élèves ou étudiants, les équations $y - 2x + 1 = 0$ (ou, plus encore, $y = 2x - 1$) seraient, dans l'espace « usuel », celles d'une droite. De même, de nombreux étudiants continuent à penser, malgré l'enseignement reçu, que l'équation $ax + by + cz + d = 0$ généralise à l'espace l'équation d'une droite dans le plan. On peut interpréter ces réactions d'élèves en termes de contrat didactique. En l'occurrence, un élève croit devoir gérer convenablement les expressions algébriques qui sont, à ses yeux, plus des étiquettes que des contraintes, en respectant les différences ostensives et en préservant la complexité ostensive. Ainsi, des objets géométriques distincts se doivent d'être représentés par des écritures distinctes et il serait donc aberrant, pour lui, qu'une équation du type $y = 2x + 1$ représente, tantôt une droite, tantôt un plan au gré des circonstances. Et, pour préserver la complexité ostensive, il garde plus ou moins la forme de l'équation d'une droite dans un plan en faisant tout simplement intervenir z pour dire que, cette fois, on travaille dans l'espace, exactement ce qu'on fait d'ailleurs, à bon escient, pour généraliser l'expression de la distance entre deux points entre le plan et l'espace.

2.4 Apprendre « contre » ses connaissances antérieures mais aussi « avec »

L'impact de ces expériences premières dans l'apprentissage est conséquent, ainsi que le montrent plusieurs articles (voir en particulier Castela, 1995) sur les tangentes dont j'emprunte *grosso modo* le titre. Ce qui appelle *a priori* des dispositifs didactiques spécifiques. Des jeux adidactiques (ou mixtes) devraient permettre alors une mise à l'épreuve de connaissances anciennes ou, à tout le moins, la mise en évidence d'un projet qui en suppose un prolongement. J'y vois une vision poppérienne de mise à l'épreuve et d'émergence de modèles mathématiques. Par exemple, la situation du puzzle permet de falsifier le modèle additif qui, je cite Brousseau (1998, p. 227), en tant « qu'obstacle résistant à la mise en place du modèle multiplicatif doit pouvoir lui être opposé dans des situations ouvertes, ce choix devant se faire sur des critères rationnels et intellectuels ». Ce qui lui fait préférer, dans la problématique des agrandissements de figures, la situation du puzzle à toute autre situation exploitant un matériel qui agrandit tel le pantographe et dans laquelle il suffirait de découvrir le modèle multiplicatif comme une « loi de la nature ». De même, à propos de l'équivalence des couples permettant de coder l'épaisseur des feuilles de papier, Brousseau (1998) déclare :

> « Les couples qui obéissent à la loi implicite ne donnent lieu à aucune remarque : ce sont des couples qui ne lui obéissent pas qui, par l'accident qu'ils révèlent, rendent la formulation nécessaire : comme une théorie, le modèle se révèle par ses contradictions – apparentes ou réelles – avec l'expérience et non avec ses accords. » (op cit., p. 275)

On reconnaît bien là un processus de mise à l'épreuve de modèles inadaptés.

Les situations adidactiques créent ainsi une déstabilisation d'une certaine « violence » qui suppose un « environnement » didactique particulier. À commencer par ce que Brousseau appelle un équilibre entre ruptures du contrat didactique que suppose la dévolution de telles situations et maintien de la relation didactique. Mais aussi le processus de dépersonnalisation par lequel l'élève réalise que ce qui est en jeu, c'est l'analyse collective de stratégies candidates et non ses capacités personnelles à résoudre des problèmes. Il me paraît également important d'insister sur une forme de rentabilisation de l'investissement initial des élèves consistant à accepter qu'ils prennent plaisir à « tuer » les problèmes au moyen des techniques apprises, la dévolution se portant alors sur le choix de la technique appropriée lorsque les classes de problèmes se multiplient.

À d'autres occasions, cette violence peut être évitée, les nouveaux savoirs étant présentés dans la continuité des anciens. Je pense en particulier aux extensions des ensembles de nombres, sources, selon Brousseau, d'obstacles épistémologiques. Ailleurs (Schneider, 2008), je développe que c'est l'usage même du mot « nombre », dans des situations nouvelles, qui pose problème aux élèves. Ce que Jacquard (2001) exprime si bien à propos des complexes :

> « Tout devient facile si l'on admet que les manipulations auxquelles nous allons nous livrer concernent non pas des nombres mais des couples de nombres. La fantasmagorie alors disparaît et chacun peut suivre un cheminement qui n'a plus rien de mystérieux».

On peut dès lors choisir une approche moins violente où les nouveaux nombres, qui ne sont pas d'emblée nommés tels, répondent à un projet de modélisation. C'est ce qu'ont illustré Matheron & Noirfalise (dans cet ouvrage), en faisant apparaître les « nombres » relatifs comme des programmes de calcul permettant de simplifier des programmes plus complexes. Selon une idée de Chevallard, développée par l'antenne marseillaise de (CD)AMPERES[45], il s'agit de remplacer un programme P1 : « à un nombre, on ajoute un deuxième et on soustrait un troisième » par un programme P2 : « à un nombre on ajoute ou soustrait un deuxième ». Les relatifs apparaissent alors comme simplificateurs dans certains cas. Je citerais aussi les « nombres » complexes introduits comme codages de similitudes par Rosseel et Schneider (2003, 2004). Dans les deux cas, le professeur donne *in fine* le statut de nombres à ces objets en raison du fait qu'on peut les additionner et les multiplier, ce qui n'est pas sans rappeler la position de Brousseau à propos des décimaux.

L'efficacité des situations adidactiques sur les apprentissages se devrait d'être étayée davantage. Il y a bien quelques études montrant que certaines situations adidactiques font évoluer les conceptions des élèves relatives à certains savoirs mathématiques. Mais il est moins évident que cette évolution soit pérenne et on peut supposer, comme le montre la recherche de Castela (1995) sur le concept de tangente, que des conceptions anciennes cohabitent avec les nouvelles qu'elles contredisent. De même est-il délicat de prouver une quelconque efficacité en matière de disponibilité des connaissances, les conditions suffisantes n'existant pas en didactique. Tout au plus les dysfonctionnements peuvent-ils nous pousser à formuler des conditions nécessaires. Parmi lesquelles je mettrais volontiers le fait qu'un seul discours ne peut suffire à favoriser chez les élèves le deuil de conceptions devenues inadaptées. Je reviendrai sur ce qu'on peut attendre comme type de preuve en ce domaine dans la section dévolue aux aspects liés à la recherche.

UN REGARD PRAXEOLOGIQUE SUR LES « SITUATIONS » FONDAMENTALES

Vous aurez remarqué les guillemets autour du mot situation dans mon titre. C'est une manière de rappeler que, pour moi comme pour Bosch et Chevallard (1999), les situations fondamentales sont des modèles des savoirs mathématiques : il s'agit avant tout de caractériser un savoir par les questions ou les projets auxquels il répond. Et c'est pourquoi je préfère parler de caractère fondamental d'une question, d'un problème ou d'une tâche lesquels peuvent être exploités ou non dans une situation didactique à caractère éventuellement adidactique.

C'est cette position qui m'engage à accepter ce fameux postulat d'existence d'une situation fondamentale pour tout savoir mathématique, postulat qui ne fait pas l'unanimité des chercheurs (Legrand, 1997). Et ceci conformément à l'épistémologie socio-constructiviste selon laquelle les savoirs et théories sont d'office des réponses à des projets humains. Nonobstant bien sûr la relativité institutionnelle propre à la TAD qui nous montre que les « raisons d'être » des savoirs peuvent fluctuer d'une institution à l'autre ou de leur construction originelle dans l'histoire des mathématiques à leur usage contemporain.

Mais, dans cette optique, les projets à l'origine des savoirs enseignés se doivent d'être rendus intelligibles pour les élèves et ce, le plus tôt possible dans l'apprentissage concerné. Il me semble alors qu'un regard praxéologique en facilite une formulation adaptée, contrairement à un regard plus conceptuel. C'est ce que je développe dans la section suivante à propos du concept de limite.

[45] (CD)AMPERES : Conception et Diffusion d'Activités Mathématiques et Parcours d'Etude et de Recherche dans l'Enseignement Secondaire, INRP

3.1 L'exemple éclairant du concept de limite

Il n'est pas facile de se mettre d'accord sur ce qu'est une situation fondamentale du concept de limite. Ce dernier fait partie du même champ conceptuel que le concept de fonction et, comme ce dernier, joue un rôle unificateur dans l'analyse mathématique, ainsi que l'exprime Artigue (1998) à son propos :

> « [...] ce qui est en jeu, épistémologiquement, à travers la définition et la formalisation, c'est la réponse à des besoins d'unification, de généralisation, de structuration du savoir dont la dévolution est beaucoup plus délicate. »

Une autre raison qui rend la dévolution difficile, invoquée par Bloch (2000), tient à la « non-nécessité du système de validation de l'analyse classique ». Cependant, cette chercheuse mise sur la situation du Flocon de Von Koch dont il s'agit de déterminer le périmètre et l'aire en supposant préalablement qu'une situation fondamentale du concept de limite doit faire intervenir le système de validation propre à l'analyse et en se référant à *la* situation fondamentale (c'est moi qui souligne le singulier) du concept de limite telle que formulée par C. et R. Berthelot, en référence à la métaphore de la théorie des jeux :

> « • il faut maîtriser la fonction de base f ;
>
> • il faut être capable de faire une hypothèse sur l'existence et la valeur d'une limite L en x_0 ;
>
> • il faut valider ou infirmer cette hypothèse en construisant […] deux applications : une fonction H, définie de l'ensemble des voisinages de L dans l'ensemble des voisinages de l'un des antécédents de x_0, dont l'image par f est incluse dans un voisinage de L ; une fonction G, définie dans l'ensemble des voisinages de x_0, vers l'ensemble des parties de F. » (cité par Bloch, 2000)

Sans devoir entrer dans les détails d'une telle formulation d'une situation fondamentale associée au concept de limite et au risque de la sortir de son contexte, il me semble évident qu'elle porte l'empreinte d'un regard essentiellement conceptuel. Je lui préférerai une approche praxéologique, considérant que la modélisation de l'activité mathématique doit rendre visibles, conformément à une épistémologie socio-constructiviste, les projets humains à l'origine des savoirs visés, quitte à prendre quelque distance vis-à-vis de ces projets lorsqu'il s'agira de concevoir des ingénieries didactiques. Dans cette perspective et en me basant sur mes travaux de thèse d'abord et sur ceux du groupe AHA[46] (1999) ensuite, je défendrais l'idée qu'il convient de formuler ce qu'est une situation fondamentale du concept de limite à deux niveaux praxéologiques au moins, ceux-ci se différenciant tant par le bloc « logos » que par le bloc « praxis » pour que l'un soit adapté à l'autre.

À un premier niveau, la limite se présente surtout comme outil de résolution de problèmes (ou de tâches) liés entre autres à la détermination de grandeurs ou d'objets géométriques : vitesses variables, aires et volumes, calcul d'asymptotes et de tangentes, optimisation de grandeurs. Quant aux techniques, le calcul des limites remplacé ensuite par celui des dérivées et des primitives, elles mobilisent une forme embryonnaire du concept de limite : c'est le résultat obtenu en supprimant des termes dans une expression algébrique, sans jeu de compensations. Et les grandeurs physiques ou géométriques impliquées ne sont pas définies *a priori* mais le seront, au bout du processus, par les techniques mises en œuvre pour réaliser les tâches. Le caractère fondamental est ici essentiellement pluriel, l'unité se créant à partir de formes langagières communes à tous les phénomènes étudiés : « *f(x)* dépasse n'importe quel nombre » ou « devient aussi proche que l'on veut de tel nombre », « pourvu que *x* soit suffisamment grand » ou « suffisamment proche de tel nombre ».

S'enchevêtrent, à ce niveau, deux praxéologies. La praxéologie « grandeurs » décrite plus haut et une praxéologie que je nommerais « modélisation fonctionnelle » à laquelle j'ai déjà

[46] Approche Heuristique de l'Analyse

fait allusion à la section 1.2. dont la tâche majeure consiste à catégoriser des phénomènes divers, mathématiques ou non, à l'aide de modèles fonctionnels paramétrés, ce qui suppose bien sûr de savoir relier allures graphiques et, entre autres, comportements asymptotiques précisés par des calculs de limites. Les situations fondamentales relatives au concept de limite peuvent alors être liées aux comportements asymptotiques de certains de ces modèles fonctionnels.

À un second niveau praxéologique, le concept de limite est construit comme un outil de preuve permettant un système de validation logiquement cohérent et une organisation déductive globale de l'analyse. Mais on gère là des théorèmes généraux, tels que ceux relatifs à l'algèbre des limites et non plus un calcul de grandeur particulier. Ce projet correspond à la constitution de l'analyse proprement dite, comme discipline autonome, épurée donc de toute intuition géométrique ou cinématique. C'est la praxéologie « analyse moderne » dont les historiens s'accordent à attribuer la paternité à Cauchy parce qu'il a construit le concept de limite, ou du moins une version discursive, comme outil permettant un nouveau mode de validation, en lui donnant donc le rôle de « proof-generated concept » au sens de Lakatos (1984). À ce niveau, une situation fondamentale peut alors avoir pour fonction de changer le rapport personnel des élèves aux « objets » construits lors du premier niveau, dépassant ainsi l'obstacle empiriste dont j'ai parlé plus haut, pour concevoir les définitions, non comme des descriptions mais comme des référents qui donnent prise au raisonnement déductif. C'est là le travail de thèse en cours de P. Job. Je parlerai alors de situation fondamentale au sens large, me référant à l'exemple de la situation des médiatrices chez Brousseau (2000). Celle-ci m'apparaît en effet paradigmatique du point de vue traité ici, en ce sens que son enjeu majeur serait l'évolution du rapport des élèves à de mêmes objets qui, ayant le statut de simples dessins dans l'institution « collège », deviennent de véritables figures géométriques dont les propriétés donnent prise au raisonnement déductif dans l'institution « lycée ».

La perspective décrite ici rend évidemment périlleuse la formulation en termes de jeux d'une situation fondamentale. Et surtout, elle fait apparaître que beaucoup de chercheurs se situent malaisément entre deux niveaux praxéologiques - tels que je les formalise à la section suivante - au moment de formuler la question d'une situation fondamentale du concept de limite qui est surtout envisagée, je pense, au second niveau essentiellement. C'est aussi souvent le cas pour le concept de fonction, ainsi que suggéré plus haut.

3.2 Deux niveaux praxéologiques : « modélisation » et « déduction »

J'en arrive à un aspect central dans ce cours et qui me paraît devoir structurer toute réflexion sur les ingénieries didactiques. Il s'agit de distinguer deux types de praxéologies, ce mot étant à comprendre à la fois en tant que processus et comme résultat de ce processus. D'une part, je cherche à traduire deux facettes de l'activité mathématique et, d'autre part, je décris les différents types d'organisations mathématiques auxquels conduisent respectivement ces deux facettes lesquelles peuvent être situées dans des institutions différentes : le premier type de praxéologie étant plus propre aux institutions d'enseignement, le second typique de l'activité mathématique professionnelle telle qu'elle se donne à voir dans les articles de recherche.

Le premier type de praxéologies concerne la modélisation mathématique de systèmes intra ou extra-mathématiques constitués d'objets que l'on peut considérer comme des objets préconstruits au sens de Chevallard (1991), c'est-à-dire d'objets dont l'existence résulte, aux yeux de personnes assujetties à une même institution, d'un « croisement d'énoncés du langage et de situations surdéterminées ». Un tel objet

> « n'est pas construit mais présenté, par une deixis qui est un appel à la complicité dans la reconnaissance ontologique ; l'existence de l'objet apparaît alors comme évidente, non douteuse,

> plus justement non susceptible de doute ; l'objet est installé, par la monstration qui le désigne dans son existence entêtée, dans un état qui échappe au questionnement, parce que tout questionnement le suppose : il est un point d'appui inattaquable de la réflexion. » (*op.cit.*, p.91)

Dans ma représentation de l'apprentissage, j'accorde un rôle indéniable à de tels objets préconstruits, lesquels peuvent constituer des objets mentaux au sens de Freudenthal (1973). J'ai retravaillé personnellement ceux-ci (Schneider, 1988) comme « substituts de concepts » auxquels sont associées des convictions, des « images » qui peuvent soit faciliter, soit entraver l'apprentissage des concepts mathématiques correspondants, rejoignant ainsi un thème cher à Wittgenstein sur l'impossibilité d'expliciter complètement les règles. De fait, et mes travaux en analyse l'ont largement montré, il ne faut pas négliger une phase d'apprentissage au cours de laquelle, les objets préconstruits, existant d'abord par le biais d'une désignation, se mettent à exister par le truchement d'une définition celle-ci devant donner prise ultérieurement à une organisation véritablement déductive. Et ce serait là le rôle des praxéologies « modélisation ». Précisons les ingrédients de telles praxéologies au moyen de quelques exemples. Comme on l'a vu plus haut, en analyse, il s'agira de déterminer des objets préconstruits tels que des aires, des volumes, des vitesses variables, des tangentes en un point d'une courbe. En géométrie analytique à 3 dimensions, ces objets seront des points, des droites, des plans qui sont, à un certain stade du cursus, des objets tantôt préconstruits, tantôt définis par des axiomes au sein de la géométrie synthétique déjà constituée comme théorie déductive. Les techniques sont les modes de détermination ou de modélisation « standard » de tels objets : dans le cas de l'analyse, le calcul des limites dans une phase embryonnaire décrite plus haut, ou encore, le calcul plus performant des dérivées et des primitives. En ce qui concerne la géométrie analytique, je pense aux caractérisations paramétriques, cartésiennes et vectorielles des droites et des plans. Comme ces objets n'existent pas encore comme objets d'une théorie et que le but est précisément de les constituer comme tels, le discours qui justifie ces techniques et les rend intelligibles eu égard à la tâche visée ne peut être théorique, au sens où l'entendraient des mathématiciens. Et, c'est ce qui rend nécessaire, me semble-t-il, l'existence d'un niveau de discours que Chevallard appelle discours technologique. Dans nos exemples, il s'agira de justifier qu'un calcul de limite fournit bien la valeur exacte d'une aire curviligne ou d'une vitesse instantanée, contrairement à l'intuition « commune » qui se constitue en obstacle épistémologique ainsi que je l'ai montré plus haut. Il s'agira aussi de « justifier » telle ou telle caractéristique algébrique de la droite ou du plan dans l'espace à partir de caractéristiques proprement géométriques comme, par exemple, le fait qu'un plan est déterminé par deux droites sécantes, et/ou de savoirs propres à la géométrie analytique du plan. Au terme de telles praxéologies, les préconstruits se constituent en concepts mathématiques par le truchement d'une définition pour se prêter à une théorie déductive : les aires sont définies comme intégrales définies, les vitesses comme des dérivées et les plans comme lieu de points dont les coordonnées vérifient une équation cartésienne ou un système particulier d'équations paramétriques.

Entrent en jeu alors les praxéologies de type « déduction » dont les tâches diffèrent considérablement de celles des praxéologies « modélisation ». Elles sont en effet propres à la constitution d'une organisation déductive. Il s'agit de reformuler certains concepts pour en faire des « proof-generated concept » au sens de Lakatos, l'exemple typique étant celui du concept de limite, formulé en termes de quantificateurs et d'inégalités et inspirant un modèle de preuve faisant officiellement abstraction de toute considération géométrique ou cinématique (ce qui n'empêche pas la pensée intime de recourir à des formes diverses d'intuitions). Il peut s'agir aussi de déduire tel résultat théorique d'axiomes et/ou de théorèmes antérieurement démontrés, d'établir un système d'axiomes « simple » et non redondant, de conjecturer un ordre d'agencement des théorèmes, etc. Les techniques sont à la fois des règles d'inférence du calcul propositionnel et de celui des prédicats telles que le *modus ponens* et le *modus tollens* mais aussi des techniques de réfutation comme celle qui consiste à chercher le « lemme coupable », au sens de Lakatos, dans une inférence invalide. Quant à la théorie, il s'agit en quelque sorte d'une théorie des théories ou ce que Popper appelle « la logique de la connaissance scientifique » qui soulève des questions épistémologiques concernant la nature des concepts scientifiques, la falsifiabilité des théories, le problème méthodologique de la simplicité, la hiérarchie des disciplines scientifiques, le refus du mélange des genres dans l'établissement de la causalité, … On peut aussi y trouver la théorie des preuves et réfutations de Lakatos.

Ces deux types de praxéologies conduisent à des développements mathématiques presque étrangers les uns aux autres. Si une praxéologie de type « déduction » peut conduire à une théorie mathématique standardisée, plus ou moins globale, il n'en va pas de même des praxéologies « modélisation » qui débouchent sur des argumentations non assimilables à des théories canoniques plus ou moins locales. En effet, s'il peut y avoir interpénétration entre les deux, c'est au niveau des tâches ou des techniques mais pas à celui des discours qui valident les secondes en regard des premières. En général, les tâches des praxéologies « modélisation » deviennent des applications des théories résultant des praxéologies « déduction », ce que Chevallard (1999, p. 243) nomme « une déconnexion franche du cœur théorico-technologique de l'œuvre d'avec ses applications ». Et ce sont les techniques des premières praxéologies qui définissent les objets premiers de ces mêmes théories. Par contre, les praxéologies « modélisation » autorisent des modes de validation plus pragmatiques qui seront récusés dans les secondes, tel celui qui consiste à tester la pertinence d'une technique nouvelle pour résoudre un problème dont la solution est déjà connue par ailleurs. C'est bien une telle démarche que fait Fermat lorsqu'il exploite sa méthode d'adégalité, dans laquelle on peut voir une forme embryonnaire du calcul des dérivées, pour retrouver des résultats connus depuis l'Antiquité, comme la détermination de la tangente en un point quelconque de la parabole ou l'optimisation de l'aire de rectangles iso-périmétriques. Krysinska (dans cet ouvrage) ont illustré un tel mode de « validation » pragmatique dans une ingénierie portant sur l'introduction des dérivées. Elles ont montré également que, à un tel niveau praxéologique, un discours technologique peut être « hybride », c'est-à-dire à cheval sur plusieurs cadres, au sens de Douady. Ainsi, on peut argumenter la forme des ostensifs cartésiens et paramétriques qui modélisent les droites et plans par une argumentation qui, globalement, s'appuie à la fois sur des résultats de géométrie analytique 2D et sur d'autres relevant de la géométrie synthétique 3D.

3.3 Un premier niveau praxéologique négligé à tort

Habituellement, le travail propre aux praxéologies « modélisation » ne se donne guère à voir. Même si, préalablement à toute démarche qui s'inscrit dans une perspective de praxéologie « déduction », un mathématicien se sera souvent convaincu de la pertinence des modèles en recourant, en toute intimité, à des intuitions liées à des objets préconstruits, ainsi qu'à des procédures de validation pragmatique. Personnellement, je ne vois pas pour quelle raison on refuserait aux élèves un tel travail en amont d'une organisation déductive, travail au cours duquel des objets préconstruits que la pensée essaie de décrire deviennent peu à peu des objets existant par le truchement d'une définition pour finir comme éléments d'un ensemble structuré. Surtout lorsque les élèves questionnent ces modèles en ce qu'ils heurtent leur expérience première fût-elle d'ordre plus empirique ou de nature plus contractuelle, comme c'est le cas pour les exemples traités dans ce cours. Je plaiderais donc pour l'existence, au niveau de l'enseignement secondaire, de praxéologies « modélisation » construites à la lumière des obstacles d'apprentissage identifiés et dont on a des raisons de penser qu'ils sont résistants à la variabilité transpositionnelle.

Or, comme le suggèrent les travaux de Rouy (2007), le niveau praxéologique « modélisation » ne semble guère identifié et *a fortiori* non ménagé par les professeurs du secondaire (ni d'ailleurs par les professeurs d'université), ce qui priverait les élèves du secondaire d'un niveau de rationalité qui leur serait adapté les poussant ainsi à privilégier une approche des mathématiques exclusivement procédurale. Évidemment, les praxéologies « modélisation » ont un prix : l'acceptation d'un mode de validation pragmatique, de même que celle d'un discours technologique qui ne s'apparente guère à une théorie standardisée. Et il n'est pas évident ni d'accepter un tel discours, ni de lui octroyer un statut « d'objet institutionnalisable ». Pour évaluer les praxéologies mathématiques, Chevallard (1999) ne pointe-t-il pas le critère suivant : « Les formes de justification utilisées sont-elles proches des formes canoniques en mathématiques ? » J'avais moi-même adopté un tel critère pour juger assez sévèrement (Schneider, 2001) une approche dite heuristique de l'analyse à l'écriture de laquelle j'avais participé. Mais, aujourd'hui, je questionne les malentendus possibles qu'un tel critère peut susciter en occultant certaines possibilités d'appréhension rationnelle des mathématiques qu'il me plaît de voir dans une expression souvent citée par Rouche : « Ne théoriser que si nécessaire ».

En lieu et place de praxéologies « modélisation », on observe souvent un discours du professeur qui emprunte à des théories standardisées certains éléments emblématiques tout en négligeant d'autres aspects en raison de leur difficulté à les enseigner. C'est le cas dans la transposition standard de la géométrie analytique 3D telle que pratiquée dans l'enseignement secondaire en Belgique. Pour les mathématiciens d'aujourd'hui, cette discipline est subordonnée à l'algèbre linéaire. Les droites et plans y sont définis d'emblée comme variétés linéaires ou affines. Les vecteurs sont des éléments d'un espace vectoriel et des vecteurs multiples sont définis à partir de la notion de partie liée. Dans cette théorie proprement mathématique correspondant à un projet praxéologique « déductif », un théorème important va gérer le passage entre les écritures vectorielles, d'une part, et leur traduction en termes de coordonnées, d'autre part : « Tout espace vectoriel E de dimension finie sur un champ K est isomorphe à l'espace K^n des coordonnées (par rapport à une base donnée de E, n un naturel) ». Mais si la transposition en vigueur dans le secondaire s'inspire de cette organisation mathématique, elle est fortement « édulcorée ». Ainsi, comme déjà annoncé plus haut, le théorème qui vient d'être mentionné n'y est pas présent ce qui a pour effet de rabaisser au statut de « recette » le passage d'une écriture vectorielle de deux vecteurs multiples aux égalités correspondantes sur les composantes : « on barre les flèches et on déploie les égalités sur les composantes » comme le présente un élève. Il manque donc un maillon important de l'édifice théorique, celui-là même qui permet de traduire des propriétés de vecteurs en termes de techniques propres à la géométrie analytique. La transposition didactique habituelle au niveau secondaire en Belgique est donc une praxéologie « à trous » au sens où l'entend Rouy (2007) : cette transposition imite le discours théorique dont elle emprunte des éléments emblématiques, en l'occurrence des définitions du plan et de la droite en termes vectoriels, mais n'en prend que les aspects jugés accessibles pour les élèves concernés en gommant tous les autres. Ce qui fait qu'on est, dans ce cas, ni vraiment dans une praxéologie de type « modélisation », ni dans une praxéologie de type « déduction ».

3.4 L'articulation entre les deux niveaux praxéologiques

La question de l'articulation entre les praxéologies « modélisation » et les praxéologies « déduction » est précédée d'une autre : celle de leur partage entre les différentes institutions d'enseignement, en particulier entre l'école secondaire et l'enseignement universitaire. Il serait trop facile de cantonner les praxéologies « modélisation » dans le premier niveau d'enseignement pour réserver les praxéologies « déduction » au second. Bien évidemment, ces dernières ne sont pas le monopole de l'enseignement supérieur, l'initiation à des organisations déductives, ne fût-ce que locales, étant prévue dès le collège dans le cadre de la géométrie synthétique laquelle n'utilise aucun formalisme calculatoire. Pour d'autres matières telle l'analyse mathématique, la question se pose dans d'autres termes : il n'est pas évident qu'une initiation aux démonstrations basées sur un concept de limite défini en termes de quantificateurs soit indispensable dès le cycle secondaire ; mais sans doute ne l'est-elle pas plus pour des étudiants universitaires qui sont de futurs utilisateurs potentiels de mathématiques en économie, en chimie, etc. Quoi qu'il en soit, le plus important, me semble-t-il, est la visibilité, pour les étudiants, du projet dans lequel s'inscrit l'enseignement prodigué, que ce projet soit de l'ordre de la modélisation ou de celui de la mise en ordre déductive. Et que tout changement de ce point de vue soit souligné par une (des) situation(s) fondamentale(s) au sens large que je lui ai donné plus haut. Surtout à l'université où l'on considère implicitement et à tort que les étudiants ont compris depuis longtemps les règles du jeu associées aux praxéologies « déduction ».

On peut craindre cependant un manque de netteté de ce point de vue, du moins en ce qui concerne l'enseignement secondaire, où vivent des praxéologies qui ne peuvent jouer franchement la carte de la modélisation, étant sous l'influence permanente mais pas toujours affichée de praxéologies « déduction », comme illustré dans la section précédente à propos de la géométrie analytique. L'euclidéanisme au sens de Bosch & Gascon (2002) serait-il le modèle épistémologique dominant ? Ce qui ne signifie pas que le 2^{e} niveau praxéologique soit toujours visible pour les élèves ou les étudiants universitaires : en effet, les praxéologies « déduction » sont souvent présentées sous une forme achevée, le travail heuristique étant gommé, même par « îlots », alors qu'il y a sans doute là des opportunités de situations fondamentales. Tout ceci risque de rendre peu visible chacun des deux projets visés ainsi que la frontière qui les sépare.

L'articulation entre les deux niveaux praxéologiques se pose en des termes spécifiques lorsque ces deux niveaux sont envisagés, pour un même domaine mathématique, non séquentiellement mais simultanément. C'est le cas, comme dit plus haut, pour la géométrie synthétique qui, dès le collège, relève à la fois d'un projet de modélisation et d'un projet d'organisation déductive, ne fût-ce que local. On peut se demander si un des deux projets doit déterminer l'autre et lequel ? Ainsi, si l'on se focalise sur la problématique des distances inaccessibles, les cas d'isométrie et de similitude des triangles interviennent d'emblée comme « théorèmes en acte » qui permettent de modéliser sur une feuille de papier des situations de l'espace sensible sur lesquelles on cherche prise. Il peut alors paraître cohérent d'opter pour une organisation déductive qui octroie à ces cas le statut d'axiomes. Mais on peut également considérer l'ordre de présentation des théorèmes de géométrie dans le programme comme axe chronogénétique, ce qui correspond, d'après Artaud & Cirade (*à paraître*), à une contrainte forte dans les pratiques enseignantes. Et panacher alors les enjeux de modélisation pour s'adapter à chacun des théorèmes rencontrés, dans cet ordre : un problème d'ombre, un problème de grandeur, un autre d'arpentage, … Dans le premier cas, la dialectique modélisation/déduction se pense, globalement, dans un sens : de la modélisation vers la déduction et, dans le deuxième cas, elle se pense en sens inverse.

Une autre question est liée à celle-là : faut-il penser la dialectique modélisation/déduction au sein de petites tranches d'enseignement ou de tranches plus amples ? On peut, par exemple, engranger un certain nombre de théorèmes en acte lors de phases de modélisation pour les organiser, après-coup, au sein d'un îlot déductif au sens de Choquet.

De telles questions et d'autres ont été travaillées par Matheron et Noirfalise (dans cet ouvrage) au travers de différents « squelettes » inspirés des travaux des équipes clermontoise et marseillaise de (CD)AMPERES.

Mais, comme je le montre dans la section suivante, l'articulation entre les praxéologies « modélisation » et les praxéologies « déduction » relève d'une réflexion située à un niveau élevé de l'échelle de co-détermination didactique, au sens de Chevallard : au moins le niveau du domaine mathématique.

LA FORMATION DES ENSEIGNANTS, EN LIEN AVEC DES QUESTIONS CURRICULAIRES

Des questions liées à cette articulation, j'ai été amenée à en gérer lors de formations d'enseignants lesquelles m'ont appris que seule une réflexion épistémologique à créneau très large permettait aux professeurs de mettre à distance les programmes scolaires et leurs propres pratiques. Voici en quoi peut consister une telle formation.

4.1 Enjeux d'une formation en géométrie

La formation dont il sera question ici s'adressait à un groupe de huit professeurs enseignant les mathématiques, les uns au collège et les autres au lycée, et qui souhaitaient réfléchir sur l'enseignement de la géométrie au collège, dans une perspective de coordination verticale. Et ce, sur une période de 5 ans : de 1990 à 1995, à raison d'un après-midi toutes les deux semaines. La question principale mise à l'étude était : « Quelle géométrie enseigner au collège ? ». Très vite, les débats se sont orientés vers une critique assez passionnelle d'un enseignement basé sur l'étude des transformations du plan (isométries et similitudes). Notons que cette critique n'émanait pas uniquement de professeurs ayant enseigné avant la réforme des mathématiques modernes. Voici quelques-uns des arguments avancés par les formés : « on n'en fait plus rien au lycée », « Les invariants des isométries tombent comme un cheveu dans la soupe », « les élèves ne comprennent rien aux démonstrations basées sur les isométries : ils se réconcilient avec la démonstration en 3^{e} lorsqu'on étudie les cas d'isométrie et de similitude des triangles ». On était parti là, il y a presque 20 ans, pour débattre d'une question didactique ancienne mais toujours d'actualité si l'on en juge par le rapport Kahane (2002, p. 113) :

> « Très contestés dans les années 1960 (on connaît l'invective de Dieudonné : À bas Euclide, plus de triangles !), les cas d'égalité ont disparu depuis la réforme (et ne sont pas revenus depuis). Ce point nous semble être un contresens, même (surtout ?) si l'on pense la géométrie en termes de transformations ».

Mais comment dépassionner le débat ? C'est ici que j'ai engagé, avec ces professeurs, ce qu'on pourrait appeler, je pense, un parcours d'étude et de recherche (PER) sur la géométrie axé sur des questions épistémologiques et didactiques : le rôle qu'y jouent, d'une part, les transformations et, d'autre part, les cas d'isométrie des triangles.

Je décris ici, de manière schématique, quelques jalons de ce PER qui ont fait l'objet d'un ouvrage destiné aux enseignants (Cojerem, 1995a) et à la rédaction duquel les formés ont participé, selon leurs possibilités respectives d'investissement :

- La question de la prise en compte du mouvement ou de l'expérimental ou celle de leur exclusion pour des raisons métaphysiques et la manière dont ces questions sont traitées dans une géométrie des transformations et dans une approche s'appuyant sur les cas d'isométrie.

- Les limites d'un développement axiomatique « à la Euclide », faisant l'impasse sur les positions d'objets géométriques. L'existence d'une « réplique », soit le travail de Hilbert, qui, contrairement au développement de Klein, donne aux cas d'égalité des triangles un rôle d'outils de preuve fondamentaux en les faisant apparaître comme conséquences des axiomes de congruence.
- Le rôle joué par les transformations dans les problèmes de construction de figures géométriques (à la manière de Petersen), la méthode performante des deux lieux supposant souvent qu'un des lieux à l'intersection desquels on trouve le point-clé est l'image du lieu d'un autre point par une transformation géométrique précisément. Plus généralement, l'économie de pensée qu'offre l'usage des transformations dans la résolution de problèmes géométriques et la démonstration de propriétés de figures quand les circonstances rendent efficace l'idée de « travailler à une transformation près ».
- Le rôle joué par les groupes de transformations dans la classification et la hiérarchisation des diverses géométries, conformément au programme d'Erlangen de Klein. Les retombées d'un tel programme sur une efficacité nouvelle en matière de déduction : d'une part, la possibilité de prouver une nouvelle propriété en « plongeant » un théorème appartenant à une certaine géométrie dans une géométrie plus globale et, d'autre part, celle de démontrer un résultat relatif à une géométrie dans un cas particulier plus simple pour autant que celui-ci ait une valeur générique au sens de la géométrie concernée par la propriété en question.
- Des difficultés d'apprentissage liées à la démonstration : le caractère aisément identifiable du modèle de démonstration basé sur des critères d'isométrie ou de similitude des triangles *versus* la subtilité des démonstrations basées sur les invariants des transformations; la preuve même de l'existence d'une transformation qui envoie telle partie de la figure sur telle autre supposant, la plupart du temps, de regarder les transformations comme des applications du plan dans lui-même et les figures comme des ensembles de points du plan (entre autres Mante, 1986).

Sur base d'une telle réflexion, un projet d'enseignement au niveau « collège », portant sur quatre années d'étude, avait été rédigé (Cojerem, 1995a, 1995b). Ce projet redorait le blason des cas d'isométrie et de similitude des triangles mais redonnait par ailleurs une fonctionnalité aux transformations à travers des problèmes fédérés en classes autour de techniques standard : principalement, des problèmes de constructions géométriques par la méthode des deux lieux.

4.2. Une réflexion au niveau du domaine mathématique qui rend noosphériens les professeurs

Ce que je voudrais souligner ici, c'est que ce travail avait supposé, comme illustré plus haut, une réflexion de type épistémologique se situant à un niveau élevé dans l'échelle de co-détermination didactique, en l'occurrence celui du domaine mathématique qu'est la géométrie dans son historicité. C'est ce qui avait permis aux professeurs de prendre de la hauteur vis-à-vis de certaines pratiques liées aux transformations qui, pendant plusieurs années de scolarité, sont vouées à une instrumentalité assez proche du néant. Ainsi, ils étaient devenus capables de comprendre que les symétries orthogonales sont centrales surtout dans une praxéologie « déduction » à la mode de Klein dans laquelle les isométries sont définies comme composées de telles symétries mais que les activités scolaires proposées à leur propos relèvent plus d'un cours de dessin que d'une initiation à la géométrie.

J'ai relaté ci-dessus une expérience « heureuse » de formation à l'issue de laquelle les professeurs formés étaient devenus et reconnus comme de véritables interlocuteurs aux yeux des membres de la noosphère, même si les positions défendues de manière argumentée par les premiers ont été prises en compte par les seconds sur un mode mineur en raison de la politique des compromis en vigueur dans les commissions de programmes. Il faut dire que plusieurs conditions ont facilité ma tâche de formatrice, à commencer par la durée de la formation, le nombre restreint de formés, un mandat d'animation qui m'avait été octroyé par un groupe d'institutions scolaires et les conditions d'une recherche collaborative au sens de Bednarz & Poirier (2002). Mais, au-delà de ces circonstances, j'ai retenu de cette expérience le sentiment aigu que la réflexion à ce niveau est une condition nécessaire à la reproductibilité interne des situations. Je rejoins là de nombreux chercheurs qui ont travaillé sur les pratiques enseignantes. À commencer par Margolinas (2004) qui montre, à partir de son modèle de structuration sur le milieu du professeur, que la réflexion aux niveaux supérieurs, en particulier à celui de la construction du thème mathématique se répercute sur la qualité des interventions du professeur dans la classe. D'autant que j'ai pu rapprocher cette formation d'autres expériences moins heureuses à l'occasion desquelles j'ai pu observer que l'obsolescence des situations didactiques est liée à l'absence de hauteur que les enseignants en ont, n'ayant pas intégré leurs enjeux qu'ils soient de nature didactique, épistémologique ou même mathématique. C'est là que je vois l'intérêt d'un travail de formation dont « l'arrière-fond » épistémologique est consistant et remonte au niveau du domaine mathématique, tel qu'illustré plus haut. Mais, souvent, ce travail de formation débouche sur une analyse critique des programmes scolaires et c'est pour cette raison que questions de formation et questions curriculaires sont étroitement imbriquées, ainsi que le montre l'exemple développé plus haut.

LE POINT DE VUE DE LA RECHERCHE

J'en arrive au point de vue de la recherche que mon discours et mes exemples précédents vont m'aider à préciser.

5.1. La recherche de discours falsifiables

Tout d'abord, je reste attachée à une vision poppérienne de la recherche en didactique même si je sais qu'il existe des réserves sur l'exploitation d'un tel paradigme dans les sciences humaines (voir entre autres Passeron (1991) pour qui les propositions en sciences sociales n'ont pas la même force probatoire qu'en sciences expérimentales). Cependant, je considérerai la falsifiabilité en un sens souple. Au départ, un discours falsifiable est un discours au sujet duquel on peut éventuellement déterminer une situation où le modèle pourrait ne pas fonctionner. En élargissant le sens, à l'instar d'autres chercheurs (Fourez et al., 1997), je considérerai qu'il s'agit d'un discours dont on tente d'expliciter les présupposés sous-jacents autant que faire se peut et que l'on spécifie suffisamment pour qu'il soit possible de concevoir une enquête qui permette de l'infirmer.

Les discours non falsifiables pullulent. En voici un petit échantillon : « Des études scientifiques ont montré l'intérêt des nouvelles technologies de communication et d'enseignement dans l'enseignement des mathématiques » propos dans lequel on ne précise ni les apprentissages visés, ni les nouvelles technologies concernées dont les formes sont pourtant très diversifiées, ni le type d'usage qu'on en fait, ni l'environnement didactique plus global dans lequel s'insère cet usage. Ou bien « l'élève a le droit à l'erreur » sans référence aucune à l'une ou l'autre typologie d'erreurs ou d'obstacles catégorisant les erreurs suivant leur « nature » telle la typologie de Brousseau et à leur rôle supposé dans l'apprentissage. Ou encore « les situations-problèmes motivent les élèves ». Ces propos non falsifiables le sont en général car leur sens dépend de la définition des concepts mobilisés, souvent implicite, de la description du contexte souvent tue et que ces propos ne prennent pas en compte la multiplicité des paramètres variables en jeu. Ils se rencontrent fréquemment chez les élèves-professeurs, dans leurs cours de psycho-pédagogie mais aussi chez les chercheurs en sciences de l'éducation, voire en didactique, tels Jonnaert & Vander Borght (1999) et Roegiers (2000) qui affirment, sans nuance ni investigation réelle, qu'un enseignement qui fait la part belle aux situations adidactiques favorise l'autonomie des élèves en les préparant à gérer des situations non didactiques.

5.2. Des théories didactiques qui fonctionnent comme des réseaux conceptuels

Le risque des discours non falsifiables en didactique est particulièrement lié à une utilisation normative, à tout le moins militante, de la TSD en particulier, dans laquelle on projette facilement des fantasmes que l'on partage sans doute tous sur l'enseignement et au nom de laquelle on exploite de manière excessive le filon des situations adidactiques ou déclarées telles.

Je ne peux m'empêcher ici de contraster la position des chercheurs précités en 5.1. avec la prudence de Brousseau qui, malgré des conditions d'observation assez enviables, n'a pas cherché à prouver un quelconque bénéfice des situations adidactiques en termes d'apprentissage et a expliqué, lors d'une présentation de la TSD à ICMI 2004, que là n'était pas son entreprise et qu'il a tout au plus établi que des élèves de l'école élémentaire ayant bénéficié d'un tel enseignement réussissent aussi bien que les autres les épreuves nationales, ce qui n'est d'ailleurs pas négligeable à ses yeux, étant donné les « perturbations » apportées au système. Ce qui n'empêche pas d'ailleurs l'existence d'études statistiques montrant en quoi certaines situations adidactiques sont susceptibles de faire évoluer les conceptions des élèves relatives à des savoirs mathématiques donnés, comme déjà dit plus haut.

C'est que Brousseau et Chevallard se situent surtout dans un projet de modélisation des phénomènes d'apprentissage et d'enseignement. Et c'est dans cette perspective aussi que j'ai opté pour la TSD et la TAD en tant que réseaux conceptuels solidaires tant du point de vue théorique que sur le plan méthodologique. Ces théories permettent, me semble-t-il, de mettre à jour et de questionner de manière suffisamment systémique des phénomènes d'apprentissage et d'enseignement en tenant compte conjointement de registres aussi différents que la spécificité épistémologique des savoirs concernés et les contraintes institutionnelles qui déterminent les modalités de leur enseignement, pour considérer deux aspects parmi d'autres. En particulier, je considère (Schneider, 2002) le concept de contrat didactique comme un concept grâce auquel la modélisation que constitue un enseignement basé sur des situations adidactiques est bien un modèle scientifique au sens de Popper, c'est-à-dire un modèle falsifiable pour lequel on peut imaginer une situation où il est mis en défaut. Effectivement, c'est l'analyse du contrat qui permet de déterminer si les conditions d'enseignement et d'apprentissage sont bien celles des situations adidactiques. C'est pour cela d'ailleurs que ce concept est un outil pertinent pour analyser des leçons « ordinaires » qui échappent à ce modèle et qu'il permet de débusquer des leurres d'apprentissage derrière des réussites à des tests mettant ainsi à jour des points aveugles dans bon nombre de recherches psycho-pédagogiques qui font l'économie du questionnement du savoir et de sa modélisation par le biais de situations fondamentales. Quant à l'étude de la transposition didactique et de sa relativité institutionnelle, elle permet de prendre conscience que toute recherche ou proposition d'enseignement est sous la contrainte d'une transposition que l'on se doit de dénaturaliser sous peine de travailler au sein d'hypothèses qui ne s'affichent pas comme telles car elles sont devenues transparentes.

Ainsi, la TAD et la TSD favorisent-elles l'explicitation de présupposés auxquels n'échappe *a priori* aucun chercheur. C'est pour cette raison qu'elles permettent de falsifier des certitudes illusoires liées à des théories d'apprentissage qui se transforment en idéologies d'enseignement et donc d'en cerner les limites ou les conditions *sine qua non* à leur fonctionnement. Ainsi, l'existence du contrat didactique et la nécessité du processus d'institutionnalisation permettent de mettre en évidence les limites des thèses socio-constructivistes.

Cela dit, le choix de tels cadres théoriques est lié aussi à des circonstances qui me sont personnelles et je me dois de les considérer à leur tour comme des théories scientifiques, au sens de Popper, soit des pièces « à casser » dont il convient d'éprouver la capacité à interpréter des phénomènes, jusqu'au jour où il convient de les remplacer par d'autres plus performantes de ce point de vue car permettant de mettre à jour des points aveugles des recherches actuelles. Je n'exclus pas que d'autres cadres puissent jouer le même rôle ou posséder un pouvoir interprétatif complémentaire mais je me méfie *a priori* des argumentations métissées en ce sens qu'elles s'appuient sur plusieurs cadres à la fois car il est facile d'en abuser pour faire un plaidoyer en faveur de n'importe quelle action d'enseignement.

5.3 Les ingénieries didactiques, genèses artificielles de concepts, dans une optique poppérienne

Mais revenons aux ingénieries qui sont conçues comme des genèses artificielles de concepts et qui sont celles qui ont pu conduire à quelques illusions ou excès en étant utilisées à des fins de développement. C'est évidemment là que se situe *a priori* le risque de recherches qui sont des plaidoyers « cachés » en faveur d'un projet d'enseignement et dont les points aveugles sont liés à l'absence de perception des effets de contrat et la transparence de la transposition au sein de laquelle se fait le travail. D'où l'intérêt de se situer dans une perspective poppérienne, le discours ne pouvant devenir falsifiable tant que les points aveugles le demeurent.

Dans une telle perspective, il serait sans doute plus facile de tirer parti des ingénieries qui ne marchent pas - au sens où les analyses *a priori* et *a posteriori* ne concordent pas - que de celles qui marchent. Pour autant que l'on prenne la peine, comme dit Artigue (1990), de rechercher « ce que, dans les hypothèses engagées, les distorsions constatées <u>invalident</u> » (c'est moi qui souligne), plutôt que de se borner, comme cela arrive souvent d'après l'auteur, « à proposer des modifications de l'ingénierie visant à les réduire sans s'engager donc véritablement dans une démarche de validation ». Quant à prouver que des ingénieries marchent, cela reste périlleux, même si on peut espérer qu'une analyse *a priori* serrée permette de distinguer ce qui relève du nécessaire et du contingent. C'est d'autant plus difficile lorsqu'elles concernent des tranches amples d'apprentissage et ce, en particulier, à cause des phénomènes d'obsolescence et de reproductibilité.

Et cependant, même dans ce dernier cas, une perspective poppérienne n'est pas exclue. Je vais le développer à partir de l'exemple des travaux de Douady (1986) sur la dialectique outil-objet et d'une critique auxquels ils ont donné lieu, non pour alimenter une quelconque polémique non avérée et de toute façon dépassée mais pour mieux me faire comprendre. Se posant la question « Qu'est-ce qu'un 'résultat' en didactique des mathématiques ? », Johsua (1996) évoque la perspective poppérienne en termes de changement de paradigme pour dire qu'il n'existe pas de paradigme dominant en sciences humaines et, en particulier, en didactique des mathématiques. Il insiste cependant, au-delà du repérage de phénomènes didactiques, sur la délimitation des conditions d'apparition de ces phénomènes et surtout sur une position plus négative qui consiste à « préciser dans quelles conditions un phénomène didactique dûment repéré n'apparaît pas ». En effet, dit-il, « tant qu'on en reste à l'observation de comportements didactiques effectifs, on a toujours le loisir de 'rentrer' ces observations dans la théorie, et le discours sera un peu fermé sur lui-même » (p. 201). D'où l'importance, aux yeux de cet auteur, des résultats de recherche fondés sur l'étude des conditions limites d'une théorie mais aussi un certain scepticisme exprimé sur des résultats trop liés à la théorisation retenue. Entre autres exemples, il pointe les conclusions avancées par Douady sur le fait que la dialectique outil-objet « ça marche ». Bien que reconnaissant que l'auteure citée précise les conditions dans lesquelles fonctionne cette dialectique et bien qu'exprimant la nécessité d'examiner de plus près son travail de recherche, Johsua ne peut s'empêcher un propos assez sévère :

> « Mais on peut faire fond sur un énoncé qui se détache largement des conditions de la recherche : 'on peut faire, au primaire, de la dialectique outil-objet'. Que cet énoncé, pris au pied de la lettre, soit quelque peu dogmatique, c'est certain. Mais sans cette dîme payée à la dogmatisation, on ne peut guère parler de résultat ». (*op. cit.,* p. 208)

Nonobstant ce propos qui a la tonalité d'une critique, je pense qu'on peut regarder les travaux de Douady comme une forme d'invalidation, en tout cas de mise à l'épreuve à la mode poppérienne, non pas du fonctionnement didactique qu'elle propose, mais de celui *a contrario* duquel s'est définie la dialectique outil-objet et que résume l'expression « j'apprends, j'applique ». Ce dernier fonctionnement semble reposer sur une conviction non questionnée inspirée d'une conception déductiviste de l'enseignement qui prête une certaine efficacité à un enseignement allant, comme dit Douady, du « général au particulier », du « signifiant au signifié » ou encore de « l'objet à l'outil ». On touche là à une épistémologie spontanée largement répandue chez les enseignants et qui semble occulter la possibilité de toute autre, ainsi que maintes observations me le confirment. En effet, souvent les enseignants, tous niveaux d'enseignement ou d'ancienneté confondus, méconnaissent les possibilités d'un travail mathématique par les élèves préalable à tout enseignement.

Or, à l'instar de Brousseau, Douady prouve bien qu'une autre approche est possible, invalidant par là même la conviction du contraire, fût-elle inconsciente. On connaît des conditions nécessaires d'un tel travail : caractère fondamental des questions posées aux élèves, existence d'un milieu permettant leur dévolution, existence d'une niche scolaire où de telles pratiques peuvent se développer, … toutes dimensions dont l'analyse doit permettre d'évaluer si les faits observés ont un caractère nécessaire ou contingent. Mais, outre ces aspects, il en est un sur lequel je voudrais insister : reconnaître la faisabilité d'un tel travail suppose aussi la reconnaissance de formes ou justifications 'embryonnaires' des savoirs mathématiques, ainsi que la connaissance de conditions, historiques ou autres, propices à leur développement. Ce sont de telles formes ou justifications embryonnaires que j'ai décrites plus haut à propos des dérivées et de la géométrie analytique 3D. Et que les travaux de Douady (*op.cit.*) ont mis en évidence à propos des réels.

5.4. Un modèle de thèses qui allie prudence …

Des recherches, comme celle de Douady, qui montrent la faisabilité d'autres manières d'enseigner, participent à la dénaturalisation de transpositions didactiques devenues transparentes de par leur standardisation au sein d'institutions scolaires. Mais, on peut aller plus loin en mettant en évidence des difficultés d'apprentissage que négligent ces mêmes transpositions, l'ingénierie construite servant alors à faire apparaître des phénomènes jusque là invisibles. Encore faut-il, bien sûr, montrer que ces difficultés d'apprentissage ne sont pas propres à la transposition dans laquelle s'inscrit l'ingénierie en question mais qu'elles ont un caractère presqu'« intrinsèque », lié aux savoirs mathématiques visés. Et montrer aussi qu'elles ne sont pas gérées dans la transposition habituelle. De telles recherches doivent être structurées autour de situations fondamentales que l'on déterminera avec un regard praxéologique à l'échelle du domaine mathématique en se situant explicitement par rapport aux niveaux praxéologiques décrits dans ce cours. Le but est de dénaturaliser les transpositions standard autant que celles sous-tendant ces mêmes recherches et dont il convient de rendre les hypothèses explicites.

On a là, je pense, un modèle de thèse « prudent », l'ingénierie étant cantonnée dans un registre phénoménotechnique, les phénomènes étant soit de l'ordre des obstacles d'apprentissage « résistants » à la variabilité des transpositions, soit de celui des formes embryonnaires des savoirs que des situations données sont susceptibles de faire apparaître ou des deux. Mais sans chercher aucunement à faire croire ou à « montrer » que l'ingénierie décrit un meilleur enseignement, ou tout simplement un bon enseignement des savoirs concernés. Cette position, dont je ne prétends pas qu'elle conduit au seul modèle formel possible de thèse lié à une ingénierie-genèse de concepts, permet, je pense, de réduire la tension entre les démarches descriptive et prescriptive dont je parlais au début de ce cours. Le thésard fait un véritable travail de recherche phénoménotechnique sans tomber dans le piège d'un plaidoyer en faveur de son ingénierie et de son impact sur les apprentissages. Ce qui n'empêche que, par ailleurs, de telles ingénieries puissent nourrir des idées pour le développement.

5.5. ... et retombées sur « l'ordinaire curriculaire »

En effet, en ayant contribué à une certaine mise à l'épreuve de transpositions standardisées, des recherches ainsi pensées pourraient permettre de formuler des propositions argumentées pour améliorer « l'ordinaire curriculaire ». Voilà ce que j'entends par là. En Belgique, mais aussi dans d'autres pays à ma meilleure connaissance (Kahane, 2002), s'est créé un point d'équilibre entre plusieurs pôles : le calcul numérique, l'algèbre et l'analyse ; la géométrie avec des aspects synthétiques et calculatoires ; le traitement de données numériques et la pensée aléatoire. Il y a là matière à concevoir un enseignement propre à faire sentir aux élèves en quoi les mathématiques apportent une économie de pensée et d'action, particulièrement bien mise en évidence à travers l'instrumentalité des ostensifs algébriques. Et aussi pour mettre en évidence que les mathématiques relèvent de deux projets fondamentaux : modélisation, d'une part, et mise en ordre déductive, d'autre part. De ce point de vue, la géométrie synthétique continue à jouer un rôle important au niveau secondaire.

Ce qui ne signifie pas, bien sûr, qu'il faut fermer la porte à de nouvelles percées qui apparaissent dans certaines filières d'enseignement, par exemple les mathématiques discrètes. Leur avantage majeur est qu'il n'en existe aucune transposition usuelle dont la transparence ferait écran à d'autres. Mais, comme pour d'autres contenus de programmes, il faut encore y gérer la tension entre un enseignement axé sur l'apprentissage d'algorithmes et un autre dans lequel le spectre de la résolution de problèmes inciterait le professeur à éviter de les 'tuer' afin de leur conserver un caractère inédit. Il faut aussi éviter quelques illusions sur leurs promesses en matière de motivation des élèves. En effet, il en va de même pour les mathématiques discrètes que pour la plupart des autres contenus d'enseignement : l'entrée dans une théorie, comme celle des graphes, qui permet de catégoriser les problèmes pour en standardiser les techniques de résolution y est coûteuse pour les élèves.

Il n'empêche que cet ordinaire curriculaire doit être aménagé pour aller à l'encontre d'une perspective monumentaliste de l'enseignement. Et pour cela, il convient, je pense, de faire des propositions amples et structurées laissant plus de place, pour l'enseignement secondaire, à des praxéologies « modélisation ». Je donnerai un exemple. Bolea et al. (2001) regardent l'algèbre comme une organisation mathématique au service des autres, la géométrie par exemple. La praxéologie « algèbre » propre au collège, axée sur la résolution d'équations et les programmes de calcul, se prolongerait en une praxéologie « modélisation algébrique-fonctionnelle » au niveau du lycée. Personnellement, je plaide pour la subordination complète de l'algèbre à l'étude des fonctions et cela, d'entrée de jeu, m'en tenant ainsi à une seule praxéologie « modélisation fonctionnelle » au sens différent décrit plus haut, soit l'étude de familles paramétrées standard de fonctions. Comme l'ont montré les travaux de Krysinska (2007), un tel parcours pourrait commencer par les problèmes de dénombrement concernant des suites de nombres figurés lesquels permettent de faire travailler d'emblée, en fonction des questions précises posées, à la fois des relations fonctionnelles, des équations et des identités. Et inspirer ainsi l'ensemble de la praxéologie « modélisation fonctionnelle » en ce sens que l'étude de toutes les équations, inéquations et identités - et aussi celle des nombres - seraient subordonnées à celle des modèles fonctionnels rencontrés. Si j'insiste tant sur ce point, c'est que je pense que l'algèbre est une pierre d'achoppement de l'enseignement des mathématiques dès le début du cycle secondaire, le règne des identités faisant écran, pour les élèves, à toute fonctionnalité de l'algèbre.

5.6 D'autres recherches à mener encore ...

Pour conclure, je listerai très schématiquement des types de recherche dont la pertinence se justifie à la lumière des points de vue adoptés dans ce cours sur les ingénieries.

- Des recherches relatives à des genèses artificielles de concepts qui mettent en évidence des obstacles d'apprentissage « résistants » et qui permettent de faire émerger les présupposés des transpositions didactiques usuelles. En particulier, des recherches relatives à des praxéologies « modélisation » au niveau de l'enseignement secondaire. De telles recherches doivent être structurées autour de situations fondamentales que l'on déterminera avec un regard praxéologique à l'échelle du domaine mathématique. C'est à ce prix que ces recherches peuvent participer à la dénaturalisation des transpositions standard tout en affichant les hypothèses au principe de la transposition au sein de laquelle les nouvelles ingénieries construites s'inscrivent. Cette démarche n'est pas toujours faite. Je pense en particulier à plusieurs recherches relatives aux symétries orthogonales dans lesquelles on fait l'économie de la réflexion faite plus haut sur la géométrie. De telles recherches touchent immanquablement à l'ingénierie curriculaire.
- Des recherches sur les résistances des professeurs à adopter les ingénieries des chercheurs, résistances soit plus transversales, par exemple relatives à leur conception des mathématiques, soit spécifiques aux contenus à enseigner. Je placerais dans cette catégorie les recherches de Rouy (2007) qui montrent, entre autres, que le scénario d'introduction aux dérivées à partir des tangentes pensées comme « limites » de sécantes semble inamovible dans les pratiques d'élèves-professeurs. Mais de telles recherches supposent un environnement où existent des dispositifs phénoménotechniques adaptés et des outils d'analyse suffisamment puissants sur le plan épistémologique. Dans l'exemple de la recherche précitée, l'environnement était celui d'une formation initiale de futurs professeurs de Lycée, formation dans laquelle je les faisais travailler sur les enjeux épistémologiques et didactiques d'ingénieries s'inscrivant dans des transpositions assez orthogonales aux transpositions standardisées, telle l'ingénierie sur les dérivées à laquelle j'ai déjà fait allusion (Krysinska, dans cet ouvrage). Au niveau formation,

l'enjeu est de favoriser, chez les enseignants, une prise de recul par rapport aux transpositions existantes. Au niveau de la recherche, le travail sur ces ingénieries permet de faire apparaître les nœuds de résistance tandis que la réflexion relative à leur construction permet de les interpréter : ainsi, l'attachement aux « faux objets empiriques », obstacle majeur dont j'ai parlé plus haut, permet d'expliquer cet attachement des élèves-professeurs à cette approche de la dérivée alors que la formation leur en explique les limites telles que mises en évidence par des recherches portant … sur le même obstacle.

- Des recherches sur les caractéristiques des professeurs qui sont « noosphériens » et/ou « dévoluant » avec un certain succès et ce, selon différents points de vue :
  - Les routines dont on sait l'importance dans la pratique professionnelle mais ciblées sur l'observation de professeurs « dévoluant ». Autrement dit, quelles sont les techniques didactiques adoptées par les professeurs qui s'emparent effectivement des ingénieries conçues par les chercheurs ?
  - Leurs compétences théâtrales à les faire vivre.
  - Leur manière d'articuler temps d'action et temps de réflexion.
- Des recherches sur les savoirs didactiques et épistémologiques qui permettraient aux professeurs d'adopter les ingénieries conçues par des chercheurs et, corollairement, des recherches relatives à la didactique de la didactique … Un enjeu fondamental d'une formation à la didactique est de permettre tant aux chercheurs qu'aux professeurs de prendre du recul, de manière « éclairée », par rapport aux ingénieries construites par eux-mêmes ou par d'autres. En effet, je pense que toute proposition faite à des fins d'enseignement risque d'être reçue dans une perspective assez normative. La condition minimale pour échapper à cela et permettre à ce sujet un débat proprement scientifique est de décrire les enjeux supposés des ingénieries proposées par un discours qui affiche les cadres de pensée et les outils conceptuels de leurs auteurs.

C'est à partir de là que je formulerais le mot de la fin. De nombreux travaux mettent en évidence les résistances des professeurs à adopter les ingénieries conçues par les chercheurs, ce qui rend celles-ci peu viables en un sens écologique. Les raisons en sont sans doute multiples mais il me semble que, généralement, on mésestime l'effort qu'il reste à faire au niveau de la formation et sans lequel il est difficile de conclure quoi que ce soit. Je pense non seulement à une formation en didactique dont on peut espérer qu'elle ait un caractère un tant soit peu heuristique, mais aussi à une formation mathématique qui intègre une dimension épistémologique et qui permettrait aux enseignants de cerner d'autres modes de vie des savoirs mathématiques que ceux dont ils ont l'habitude. Dans le cadre d'une telle formation, la construction d'ingénieries didactiques de 2^{e} niveau, au sens décrit par Perrin-Glorian (cours dans ce volume), pourrait permettre aux enseignants de s'approprier, à des fins de développement, les ingénieries conçues pour la recherche. Je verrais alors la négociation porter surtout sur une plus grande circonspection dans l'usage de situations adidactiques et leur cantonnement dans des conditions privilégiées que j'ai décrites plus haut, en termes de deuil de connaissances antérieures. En dehors de telles circonstances, il me paraît surtout crucial de préserver, pour l'élève, l'intelligibilité du projet mathématique à l'étude, fût-ce par le biais d'un discours heuristique. Il serait temps, en effet, d'affranchir les professeurs du « diktat » des activités et de les aider à restaurer, par l'alternance d'exposés et de moments adidactiques, une « netteté » topogénétique mise à mal dans les cours dialogués.

REFERENCES

Artaud, M., & Cirade, G. (2008). *L'enseignement et la réception de la notion de PER dans la formation des professeurs stagiaires de mathématiques*. Colloque Efficacité et équité en éducation.

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281-308

Artigue, M. (1991). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des mathématiques, 10*(2.3), 241-285

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des mathématiques, 18*(2), 231-261

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique* (19802 ed). Paris: Vrin.

Bachelard, G. (1949). *Le rationnalisme appliqué* (1975 ed.). Paris: P.U.F.

Bednarz, N., & Poirier, L. (2002). Recherche collaborative et développement professionnel des enseignants en mathématiques. In P. Jonnaert & Bednarz (Eds.), *Paradigmes socio-constructivistes dans la formation des intervenants*. Bruxelles: De Boeck Université

Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation.* Thèse de doctorat. Université de Bordeaux 1, Bordeaux http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012151/fr/

Bolea, P., Bosch, M., & Gascon, J. (2001). La transposicion didactica de organizaciones matematicas en proceso de algebrizacion. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des mathématiques, 21*(3), 247-304

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématiques aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 77-124

Bosch, M., & Gascòn, J. (2002). Organiser l'étude. Théories et empiries. . In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème École d'Eté de Didactique des Mathématiques* (23-40). Grenoble La Pensée Sauvage

Bourbaki (1960). *Eléments d'histoire des mathématiques*. Paris: Hermann.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2000). *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire.* Actes de Sémimaire de didactique des mathématiques de l'Université de Crète, Rethymon http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/fr/

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 15*(1), 7-48

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique* (2e ed.). Grenoble La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266

COJEREM (1995). *Des situations pour enseigner la géométrie (guide méthodologique)*. Bruxelles: De Boeck-Wesmael.

Crahay, M. (2002). La recherche en éducation: une entreprise d'intelligibilité de faits et de représentations ancrés dans l'histoire sociale In F. Leutenegger & M. Saada-Robert (Eds.), *Expliquer et comprendre en sciences de l'éducation* (pp. 253-275). Raisons Educatives n°5. Bruxelles De Boeck

Dorier, J.-L. (1997). Une lecture épistémologique de la genèse de la théorie des espaces vectoriels. In J.-L. Dorier (Ed.), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31

Falcade, R. (2006). *Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction.* Université Joseph Fourier, Grenoble http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00085202/fr/

Firode, A. (2009). La notion de problème chez K. Popper et ses implications pédagogiques. *Recherches en éducation, 6*, 33-41

Fourez, G. (1988). *La construction des sciences : introduction à la philosophie et à l'éthique des Sciences*. Bruxelles: De Boeck-Wesmael.

Fourez, G., Englebert-Lecomte, V., & Mathy, P. (1997). *Nos savoirs sur les savoirs*. Bruxelles: De Boeck Université.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* . Dordrecht Reidel Publishing Press.

Glaeser (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des mathématiques, 2*(3), 303-346

Gras, R., & Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des mathématiques, 15*(1), 49-96

Groupe AHA (1999). *Vers l'infini pas à pas : une approche heuristique de l'analyse*. Bruxelles: De Boeck.

Jacquard, A. (2001). *La Science à l'usage des non-scientifiques*. Paris: Calmann-Lévy.

Johsua, S. (1996). Qu'est-ce qu'un « résultat » en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(2), 197-220

Jonnaert, P., & Vander Borght, C. (1999). *Créer des conditions d'apprentissage*. Bruxelles: De Boeck Université.

Kahane, J.-P. (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques*. Paris: Odile Jacob.

Krysinska, M. (2007). *Emergence de modèles fonctionnels comme outils de catégorisation de phénomènes divers : repères épistémologiques et didactiques.* Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique* (N. Balacheff & J.-M. Laborde, Trans.). Paris: Hermann.

Lebeau, C., & Schneider, M. (à paraître). Equations incomplètes de plans et obstacles à la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des mathématiques*

Legrand, M. (1997). La problématique des situations fondamentales. *Repère IREM, 27*, 81-125

Mach, E. (1925). *La mécanique*. Paris Hermann.

Mante, M. (1986). L'initiation au raisonnement déductif et le nouveau programme de collège. Suivi scientifique 1986-1987, Bulletin Inter-Irem premier cycle.

Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur : Essai de développement de la théorie des situations didactiques*. Université de Provence http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00429580/fr/

Newton, I. (1947 ed.). *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World*. Motte's translation revised by F. Cajori. Berkeley University of California Press.

Passeron, J.-C. (1991). *Le Raisonnement sociologique. L'espace non-poppérien du raisonnement naturel*. Paris Nathan.

Perrin-Glorian, M.-J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques: l'exemple du concept de milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(3), 279-322

Piaget, J. (1974). *La prise de conscience*. Paris: PUF, collection psychologie d'aujourd'hui.

Popper, K. (1973). *La logique de la découverte scientifique*. Paris Payot.

Robert, A., & Robinet, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 16*(2), 145-177

Roegiers, X. (2000). *Une pédagogie de l'intégration. Compétences et intégration des acquis dans l'enseignement*. Bruxelles: De Boeck Université.

Rosseel, H., & Schneider, M. (2003). Ces nombres qu'on dit imaginaires. *Petit x, 63*, 53-71

Rosseel, H., & Schneider, M. (2004). Des nombres qui modélisent des transformations. *Petit x, 64*, 7-34

Rouy, E. (2007). *Formation initiale des professeurs du secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre l'institution universitaire et l'institution secondaire. Le cas éclairant du thème des dérivées.* Université de Liège, Liège

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J.-P., & Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. Recherches en Didactique des Mathématiques *Recherches en Didactique des mathématiques, 25*(1), 57-90

Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux "aires" et "volumes" au calcul des primitives.* Université catholique de Louvain

Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides. Recherches en Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques, 11*(2.3), 241-294

Schneider, M. (2001). Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. A propos d'un enseignement des limites au secondaire. Recherches en Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques, 21*(1.2), 7-56

Schneider, M. (2002). Problèmes et situations-problèmes : un regard pluraliste *Mathématique et Pédagogie, 137*, 13-48

Schneider, M. (2006a). Comment des théories didactiques permettent-elles de penser le transfert en mathématiques ou dans d'autres disciplines? . *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 9-38

Schneider, M. (2006b). Quand le courant pédagogique « des compétences » empêche une structuration des enseignements autour de l'étude et de la classification de questions parentes. *Revue Française de Pédagogie, 154*, 85-96

Schneider, M. (Ed.). (2008). *Traité de didactique des mathématiques - La didactique par des exemples et contre-exemples.* Liège: Edition Université de Liège.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*: Mathematical Association of America Notes, volume 25