UN OBSTACLE EPISTEMOLOGIQUE COMME TRAIT D'UNION DES TRAVAUX D'UN LABORATOIRE DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Conférence au Séminaire National de Didactique des Mathématiques, 19 octobre 2012

Maggy Schneider, Université de Liège

Résumé

L'obstacle dont il est question ici est une attitude que les épistémologues des sciences nomment le positivisme empirique. Ce texte développe et illustre que cette posture épistémologique fédère des observations multiples qui, à la lumière d'un usage articulé de la théorie des situations didactiques et de la théorie anthropologique du didactique, deviennent des phénomènes didactiques. Dans une perspective de recherche, ceux-ci aident non seulement à casser des illusions relatives à la modélisation dont on néglige souvent des aspects plus construits mais aussi à dénaturaliser des praxéologies mathématiques qui s'organisent un peu trop systématiquement à partir d'un projet d'organisation déductive sans toutefois l'assumer pleinement.

Comme l'indique son titre, mon exposé sera centré sur ce qui fédère les travaux passés ou en cours d'un laboratoire de didactique des mathématiques. Ce laboratoire est le *Ladimath* intégré au département de mathématiques de l'Université de Liège. Et le trait d'union est un obstacle épistémologique que les épistémologues des sciences nomment le positivisme empirique. De manière inattendue, il prolonge, en mathématiques, l'expérience première dont parle Bachelard à propos des sciences expérimentales. Cet exposé n'est pas sans lien avec le cours que j'ai donné à l'école d'été de Clermont-Ferrand (Schneider, 2011) dont il reprend certains aspects.

D'une histoire personnelle à un enseignement qui a eu une portée phénoménotechnique

Les choses n'arrivent pas par hasard en recherche moins qu'ailleurs. Dans le cas présent, je pense éclairant de relater une anecdote qui a orienté ma vie d'enseignante et de chercheuse. C'est l'objet de la section suivante.

Une anecdote personnelle

Lors de ma première année d'enseignement dans un lycée, je dispensais un cours de mathématiques à des élèves d'une orientation « latin-grec ». Dans l'institution scolaire en question, ces élèves étaient peu portés sur les mathématiques mais étaient rompus à l'argumentation et sa réfutation. J'avais donné un cours sur les intégrales définies à partir de calculs d'aires curvilignes et un élève m'avait interpelée en des termes proches de ceux-ci : « Comment se fait-il que l'on obtienne la valeur exacte d'une aire délimitée par une courbe au moyen de rectangles : ils ne la recouvrent pas sauf quand ils deviennent des segments et alors leur aire vaut 0 ? ». J'avais alors questionné un autre jeune collègue à ce sujet et nous avions prudemment conclu que, faute de mieux, on dirait aux élèves que : « C'était grâce au concept de limite … ».

Cette anecdote fut pour moi un premier questionnement sur les intuitions que peuvent avoir les élèves sur des faits mathématiques déjà bien établis aux yeux d'un professeur qui a fait des études de mathématiques. Environ 7 ans plus tard, je m'étais inscrite au doctorat à l'Université catholique de Louvain. L'injonction qui m'y fut faite était de rédiger, en guise de thèse, une approche « intuitive » de l'analyse mathématique pour les élèves du niveau secondaire. Cette injonction m'apparut embarrassante d'abord parce que, faute d'une alternative, j'étais supposée expérimenter cet enseignement dans mes propres classes ce qui me mettait dans une position délicate. En outre, ce n'est pas comme cela que je voyais un travail de thèse. Fort heureusement, j'avais acquis en autodidacte quelques rudiments d'épistémologie des sciences et des mathématiques. De là m'est venue l'idée m'est venue de réaliser ces expérimentations en ménageant deux temps. Un premier temps où les élèves travaillaient en autonomie sur les « situations-problèmes » structurant le projet et devaient me rendre un rapport individuel écrit. Dans un second temps, j'organisais un travail de mise en commun et une structuration théorique. Ce faisant, je pouvais me polariser uniquement sur les erreurs des élèves sans qu'on puisse me soupçonner de les avoir inventées. Je voyais à ce moment mon travail de thèse comme une recherche d'intelligibilité de ces erreurs, mes grilles de lecture étant de nature épistémologique. Les observations faites sont alors devenues phénomènes et c'est dans ce sens que je pense que cet enseignement a pu avoir une portée phénoménotechnique.

Des sciences expérimentales aux mathématiques : la mise en évidence de l'obstacle empiriste comme « phénomène » didactique

Dans ce cadre, plusieurs erreurs ont attiré mon attention. Elles étaient toutes relatives à des comparaisons particulières de grandeurs sur lesquelles je vais m'expliquer et j'ai pu leur donner sens à travers un obstacle que j'ai nommé « l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions ». Ces comparaisons étaient basées sur des « indivisibles ». Le terme indivisible est emprunté à Cavalieri qui déduit, par exemple, un rapport entre les volumes de deux solides compris entre deux plans parallèles de la constance du rapport entre les mesures de leurs indivisibles, entendant par là les surfaces découpées respectivement dans les solides par des plans quelconques parallèles aux premiers. Cette comparaison est audacieuse en ce sens que l'on déduit une information sur des volumes à partir d'une autre sur des aires, changeant ainsi de dimension. Mais elle est correcte dans le découpage qui vient d'être évoqué (Fig. 1). L'obstacle se manifeste lorsque de mêmes comparaisons sont faites dans certains autres cas, par exemple lorsqu'on suppose que les volumes de deux solides de révolution sont entre eux comme les aires des surfaces qui les engendrent (Fig. 2).

Figure 1

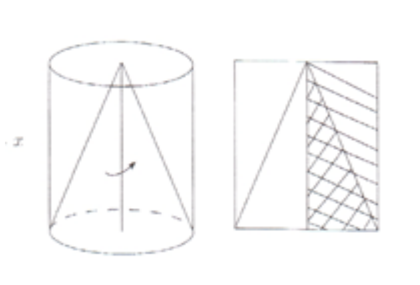

Figure 2

On observe alors que, pour justifier un tel résultat qui est faux, les élèves donnent des arguments dans le domaine des grandeurs en insistant, par exemple, sur le fait que les solides sont composés de leurs sections radiales, comme si les mesures de grandeurs, loin d'être des concepts ayant une vie propre, se doivent de traduire une façon de voir les grandeurs elles-mêmes. Cet obstacle de l'hétérogénéité des dimensions est une hypothèse qui permet d'interpréter de multiples erreurs d'élèves liées au calcul intégral non seulement dans le cadre d'une ingénierie qui intègre des découpages à la Cavalieri en guise de méthodologie de recherche mais aussi dans celui d'une transposition didactique plus standard. Il prend en compte également des réactions de personnes ayant une formation plus poussée en mathématiques, par exemple des professeurs en formation. On en trouve aussi des traces dans l'histoire.

Mais, au delà de sa « résistance » qui permettrait déjà d'argumenter son caractère épistémologique, cet obstacle m'intéressait surtout comme relevant d'une position plus globale vis-à-vis des mathématiques et qui relève du positivisme empirique. Je m'explique en repartant du domaine philosophique où l'empirisme est une théorie selon laquelle l'expérience serait l'origine de nos connaissances, a contrario du rationalisme qui les situe dans la raison humaine. En épistémologie des sciences, on parlera de positivisme empirique pour désigner une perception des concepts et des lois scientifiques comme un reflet exact des objets du monde « physique » au lieu d'être inventés par des humains pour réaliser un projet donné et il en résulterait une absence de distanciation entre les phénomènes « observés » et les concepts qui les modélisent.

Une telle vision des mathématiques, imprégnée de positivisme empirique, permet bien d'expliquer les erreurs liées à l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions qu'expliquent des glissements inconscients des grandeurs à leurs mesures censées en être le reflet. Mais, au delà de ce contexte sans doute étroit, cette vision positiviste permet d'interpréter des réactions relatives à des objets géométriques ou grandeurs définis par le biais du concept de limite. Ainsi la tangente peut-être perçue comme « limite » de sécantes sans qu'aucune topologie n'ait été définie sur l'ensemble des droites plutôt que comme droite définie à partir de sa pente, c'est-à-dire d'une limite de fonction au sens mathématique. C'est l'obstacle géométrique de la limite que j'ai étudié à la suite de Sierpinska . En particulier, j'ai montré qu'il se manifestait aussi à propos des aires curvilignes dont les élèves doutent qu'elles puissent égaler exactement une suite d'aires rectilignes, le passage à la limite étant assez volontiers pensé en termes de rectangles qui finissent, « à la limite », par se réduire ou non en segments. N'est-ce pas le même phénomène qui dicte, encore au XIXe siècle, la définition erronée de l'aire d'une surface comme limite de la somme des aires des triangles d'une surface polyédrale inscrite et à laquelle Schwarz opposera en 1883 un contre-exemple assez sophistiqué (Fig. 3).

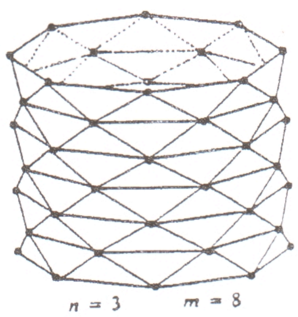

Figure 3

Quant à la vitesse instantanée, des élèves prétendent « qu'elle n'existe pas » se référant à l'impossibilité de la déterminer exactement par des observations et des mesures. Ils se situent donc dans un univers sensible en dehors du monde des concepts imaginés par l'être humain.

Si les observations précédentes ont eu, à mes yeux, valeur de phénomène didactique, c'est en raison d'une justification que j'ai voulu la plus serrée possible, en montrant qu'une même interprétation leur donnait une intelligibilité commune, tel un invariant qui les rassemble. Cette interprétation, qui n'est jamais qu'une hypothèse de travail susceptible d'être invalidée, prend la forme ici d'un obstacle dont le caractère épistémologique se doit d'être fortement argumenté. Il ne suffit pas, comme on le voit dans certaines recherches, d'évoquer la récurrence d'erreurs ou de faire un parallèle allusif avec l'histoire des mathématiques pour déclarer l'existence d'un tel obstacle. Il faut impérativement avancer les raisons qu'on a de voir, dans les propos tenus par des élèves ou par des mathématiciens dans l'histoire, des indicateurs langagiers de l'obstacle présumé. Pour ne donner qu'un exemple au passage, il faudra, dans la citation de Berkeley ci-dessous, montrer que son usage du mot « limite » et sa référence à la mesure sont autant d'indices de l'absence de distanciation entre monde « sensible » et monde conceptuel qui caractérise l'obstacle empiriste.

> *« Un point peut être limite d'une ligne ; une ligne peut être la limite d'une surface ; un instant peut terminer le temps. Mais comment peut-on concevoir une vitesse au moyen de telles limites ? Une vitesse dépend du temps et de l'espace, et ne peut être conçue sans eux. Et si les vitesses de quantités naissantes ou qui s'évanouissent ; c'est-à-dire sans lien avec le temps et l'espace, ne peuvent être comprises, comment peut-on comprendre et montrer leur rapport ; ou considérer leur rapport 'premier' ou 'ultime' ? Car considérer le rapport de deux choses suppose que ces choses aient une grandeur et que cette grandeur puisse être mesurée. » (Berkeley, XVIIème siècle)*

L'obstacle que je viens de définir et d'illustrer possède une parenté certaine avec l'obstacle de l'expérience première de Bachelard (rééd. 1980), soit « L'expérience placée avant et au-dessus de la critique » qui consiste à expliquer certaines observations par ce que les sens nous en livrent. Ainsi, l'attraction de poussières sur une paroi électrisée est expliquée par l'existence d'un 'fluide glutineux' et, comme le souligne Bachelard, l'obstacle vient du fait que cette métaphore n'est pas perçue pour ce qu'elle est mais bien pour une explication dont la réduction aux sensations n'est pas consciente :

> *« On pense comme on voit, on pense ce qu'on voit : une poussière colle à la paroi électrisée, donc l'électricité est une colle, une glu. »*

Et pourtant, malgré les rapprochements évidents, l'expérience première est, pour Bachelard, le premier obstacle source d'autres obstacles épistémologiques qui concernent 'la formation de l'esprit scientifique' mais pas la 'formation de l'esprit mathématique' :

> *« A notre avis, cette division est possible parce que la croissance de l'esprit mathématique est bien différente de la croissance de l'esprit scientifique dans son effort pour comprendre les phénomènes physiques. En fait, l'histoire des mathématiques est une merveille de régularité. Elle connaît des périodes d'arrêt. Elle ne connaît pas des périodes d'erreurs. Aucune des thèses que nous soutenons dans ce livre ne vise donc la connaissance mathématique. Elles ne traitent que de la connaissance du monde objectif. » (Bachelard, rééd.1980)*

En fait, mon clin d'œil ici serait de dire que si j'avais eu un peu de culot ou un tant soit peu le sens du marketing, j'aurais intitulé ma thèse (Schneider, 1988) non pas 'Des objets mentaux *aire* et *volume* au calcul des primitives' mais bien : 'De l'expérience première en mathématiques : le cas de la modélisation de grandeurs géométriques et physiques en analyse'.

Mais parle-t-on, dans d'autres recherches en didactique des mathématiques, du même obstacle épistémologique ? En fait, l'empirisme est le plus souvent évoqué à propos de l'épistémologie spontanée des professeurs dont découlent des pratiques ostensives assumées ou non en fonction des injonctions institutionnelles. Ainsi, pour souscrire à une idéologie constructiviste, voit-on des enseignants, non plus se contenter de « montrer un objet, un graphique, … dans lequel l'élève doit, par constatation, identifier un savoir », mais le « dissimuler derrière une fiction » et s'imaginer qu'ils l'ont fait 'découvrir' par les élèves en triant leurs interventions à partir de questions telles que : « *Que constates-tu ?* ». (M.-H. Salin, 1999).

En dehors des pratiques enseignantes et de l'analyse mathématique, je note quelques recherches dont les conclusions peuvent être rapprochées de l'obstacle empiriste. Ainsi, Glaeser (1981) interprète la fin des « difficultés » d'appréhension des nombres relatifs par le fait qu'il ne « s'agit plus de déterrer dans la Nature des exemples pratiques qui « expliquent » les nombres relatifs sur le mode métaphorique. Ces nombres ne sont plus découverts, mais inventés, imaginés ». De même, les conceptions causaliste et chronologiste du concept de probabilité conditionnelle s'expliqueraient, d'après Gras et Totohasina (1995), par la difficulté à raisonner sans référence à des exemples précis et l'on rejoindrait ici la fixation à un contexte dont parle Artigue (1991) à propos des obstacles épistémologiques.

Dans ce dernier cas cependant, il se peut que les exemples donnés par l'enseignant pour introduire les probabilités conditionnelles induisent l'idée de cause ou soient relatives à un certain déroulement temporel. C'est que, si comme le dit Bachelard, « L'esprit scientifique doit se former contre la Nature. », on apprend aussi, en mathématiques, « avec et contre ses connaissances antérieures », ainsi que l'a montré Castela (1995). Dans les deux cas, le cerveau suit la ligne de plus grande pente et, en fonction de ce rapprochement, j'ai étendu le concept d'expérience première (Schneider, 2011) à des exemples où c'est un apprentissage scolaire antérieur qui fait obstacle au savoir nouveau. Par exemple, le fait d'avoir associé une équation de la forme $ax + by + d = 0$ à une droite du plan pousse les élèves à modéliser une droite de l'espace usuel par l'équation $ax + by + cz + d = 0$. Lebeau et Schneider (2010) interprètent cette erreur en termes de contrat didactique, les élèves croyant devoir respecter les différences ostensives et préserver la complexité ostensive en gardant un même genre d'ostensif pour représenter un même objet géométrique, l'ajout du terme cz suffisant à indiquer que l'on est passé du plan à l'espace. On touche là bien sûr aux rapports personnel et institutionnel ainsi qu'aux obstacles didactiques ou psychologiques.

Plusieurs catégories de phénomènes

Cet obstacle de l'expérience première a permis de mettre à jour, dans les travaux du *Ladimath*, des phénomènes multiples que je classifie ci-dessous en trois catégories.

Une première catégorie de phénomènes : description de certains 'préconstruits'

La première catégorie de phénomènes est relative à la mise en évidence de 'préconstruits' au sens où l'entend Chevallard (1991) dans sa théorie sur la transposition didactique. Je ne peux ici que citer sommairement ceux-ci en renvoyant aux thèses ou articles dans lesquels le lecteur trouvera une analyse plus détaillée. Je cite donc, de manière très schématique et au prix de certaines redites :

- L'interprétation de graphiques représentant des distributions de probabilités, reste fort tributaire d'une lecture en 'x,y' (Calmant, 2004, Calmant, Ducarme et Schneider, 2010).
- La non prise en compte de la variabilité en biostatistiques (mêmes références).
- La propension à parler 'proba isolée' plutôt que 'distribution' (Henrotay, Rosseel et Schneider, en cours).

- La forme d'un objet géométrique détermine, à peu de choses près, celle de l'équation qui constitue sa carte d'identité (Lebeau, 2009, Lebeau et Schneider, 2010, thèse de Dunia en cours).
- La dialectique entre pensée algébrique et pensée géométrique dans l'étude de systèmes linéaires est à la fois féconde et source de difficultés (thèse de Dunia en cours).
- La prise de conscience d'une covariation comporte, dans certains cas, une référence à une variable 'temporelle' transparente occultant ainsi sa prise en compte dans le calcul (Krysinska, 2007, Krysinska, Mercier et Schneider, 2009).
- Les aires et volumes 'curvilignes' ne peuvent être déterminés exactement au départ d'aires et de volumes 'rectilignes'(Schneider, 1988 et 1991).
- Une vitesse instantanée ne peut être déterminée exactement au départ de vitesses moyennes. (Schneider, 1988 et 1991, Gantois, 2012, Gantois et Schneider, 2012).
- La tangente est un objet premier par rapport à sa pente et c'est ce qui explique l'obstacle géométrique de la limite (mêmes références).
- Le mot 'nombre' supporte difficilement 'l'extension' aux complexes. (Rosseel et Schneider, 2003 et 2004).

Ces préconstruits ont pu être décrits grâce, le plus souvent, à deux types de méthodes :

- Des interviews semi-structurés complétées par des questionnaires et dont le public cible était constitué de non néophytes par rapport aux apprentissages concernés mais aussi le relevé de faits divers dont l'observation a été 'sauvage'.
- Des ingénieries conçues comme méthodologies de recherche, c'est-à-dire construites à des fins phénoménotechniques.

Le croisement de données que ces deux types de méthodologies ont mises à jour ont permis non seulement de modéliser les préconstruits en question mais aussi de montrer qu'ils persistent à faire obstacle à l'issue de l'enseignement usuel chez des publics très variés : élèves initiés, étudiants terminant un master en math, professeurs en formation.

Une deuxième catégorie de phénomènes : étude de conditions de formulation de ces 'préconstruits', voire d'une 'reprise' en vue d'une conceptualisation mathématique

Je place dans cette catégorie de phénomènes les conditions qui favorisent une dialectique de formulation de ces mêmes préconstruits mais aussi une dialectique d'invalidation et donc d'une reprise en vue d'une conceptualisation mathématique. A nouveau schématiquement, ces conditions concernent les thèmes suivants :

- Travail d'interprétation d'équations incomplètes de plans telles que $y = 2x+1$ et retour sur les équations comme contraintes. (Lebeau, 2009, Lebeau et Schneider, 2010).
- Etude d'un milieu mixte où des systèmes linéaires 2x2, 2x3, 3x2, 3x3 sont travaillés en termes de faisceaux de droites et de plans autant qu'en termes de dépendance linéaire ; milieu dans lequel une hiérarchisation algébrique prend peu à peu le pas sur un inventaire géométrique ; dualité en géométrie projective comme marchepied vers l'algèbre linéaire. (thèse de Dunia en cours).
- Théorème fondamental de l'analyse, interprétation cinématique comme accès à un regard fonctionnel ; passage du temps à une variable indépendante quelconque. (Schneider, 1988, Balhan, thèse en cours).
- Démarche de passage d'une information locale à une information globale dans un milieu de résolution d'équations différentielles (Balhan, thèse en cours)
- Etude de suites de nombres figurés, numéro d'étape comme variable temporelle et travail sur la dénotation (Krysinska, 2007, Krysinska, Mercier et Schneider, 2009).
- PER intégrant statistiques et probabilités d'entrée de jeu (Henrotay, Rosseel et Schneider, en cours).

- Etude des variables didactiques favorisant, dans des contextes cinématiques, l'émergence d'une forme embryonnaire du concept de dérivée ainsi qu'un débat à son propos. (Schneider, 1988, Gantois et Schneider, 2012) :
    - la présence de deux vitesses dont l'une est constante, dans un contexte où la constance de l'une induit l'intuition que l'autre est variable ;
    - une question portant sur l'instant auquel la seconde a telle ou telle valeur ;
    - un contexte qui permet d'exploiter le caractère qualitatif de la vitesse ainsi qu'une continuité de type cinématique.
- Etude d'un milieu cinématique dans lequel trouve place une négociation possible :
    - De l'octroi d'un signe négatif au temps, à la position d'un mobile sur une trajectoire rectiligne et à sa vitesse (constante).
    - Des règles d'addition et de multiplication des nombres relatifs.

  L'enjeu de cette négociation est de modéliser un MRU au moyen d'une formule unique, de rendre compte d'un décalage ou de sens de parcours différents entre deux mouvements de même vitesse et de rassembler tous ces types de mouvements derrière un même ostensif (Job, Rosseel et Schneider, en cours).
- Etude d'un milieu dans lequel peut vivre une dialectique entre objet et concept à propos d'apprentissages de la physique pour 'passer par le positivisme afin de le dépasser' à la manière du rationalisme appliqué tel que l'entend Bachelard, 1949 (Roland, UCLouvain, thèse en co-tutelle avec Plumat).

Une troisième catégorie de phénomènes relative à la mise en évidence de choix didactiques trop naturalisés

Une des analyses préalables constitutives des ingénieries didactiques conçues comme méthodologies de recherche consiste à étudier l'enseignement usuel et ses effets (Artigue, 1990). Encore faut-il arriver à caractériser cet enseignement par ses variables didactiques. Cela ne va pas de soi car ces variables ne sont pas toujours identifiées comme telles, les choix inhérents ayant été naturalisés. La plupart des recherches citées plus haut s'accompagnent de la construction d'ingénieries qui s'inscrivent dans une transposition 'orthogonale' à celle sous-jacente à l'enseignement 'usuel'. Ces études facilitent donc la dénaturalisation de ce qui caractérise l'enseignement usuel en même temps qu'elles permettent de désigner les apprentissages que cet enseignement néglige alors qu'ils supposent d'être effectivement pris en compte. Pour illustrer les phénomènes mis ainsi en lumière, je développerai un exemple lié à la géométrie analytique en partant d'erreurs et de difficultés d'élèves du secondaire observées soit de manière occasionnelle, soit à l'occasion de recherches en didactique (Sackur et al., 2005, Lebeau et Schneider, 2010).

Ces erreurs concernent la géométrie analytique 3D. Comme je l'ai dit plus haut, l'interprétation d'équations cartésiennes de plans pose problème lorsque ces équations sont incomplètes : par exemple, $y - 2x + 1 = 0$ (ou pire $y = 2\,x + 1$) ou encore $z = 0$. Il semble qu'une première interprétation de ces équations en termes de droites, dans le cadre de la géométrie analytique plane, constitue une 'expérience première' vis-à-vis de laquelle les élèves ont du mal à prendre du recul. Et c'est pourquoi ils continuent à les interpréter comme des équations de droites, le concept même d'équation étant sans doute considéré plus comme un mode d'étiquetage d'un objet géométrique que comme une contrainte caractérisant les points d'un lieu. D'autres réactions confirment une forme d'incompréhension des écritures algébriques dans le contexte de la géométrie analytique 3D, certains élèves s'étonnant de devoir associer à une droite deux équations cartésiennes et non une seule et pensent que $ax + by + cz + d = 0$ généralise à l'espace l'équation d'une droite dans un plan. De telles difficultés d'apprentissage ne semblent pas dépendre du niveau des élèves : elles ont pu être observées dans le secondaire, au niveau de l'enseignement universitaire et aussi chez des élèves-professeurs. Elles résistent également à tout discours théorique. Doit-on incriminer l'enseignement pour autant ou tout simplement supposer que les élèves n'ont pas suffisamment étudié ?

Regardons d'abord en quoi consiste l'enseignement concerné au niveau secondaire. Il s'inspire d'une organisation mathématique enseignée à l'université et qui consiste à subordonner la géométrie à l'algèbre linéaire. Les droites et plans y sont définis d'emblée comme variétés linéaires ou affines. Les vecteurs sont des éléments d'un espace vectoriel et des vecteurs multiples sont définis à partir de la notion de partie liée. L'entrée en matière relève donc du registre vectoriel et les registres paramétrique et cartésien en « découlent ». Dans cette théorie proprement mathématique, un théorème important va gérer le passage entre les écritures vectorielles, d'une part, et leur traduction en termes de coordonnées, d'autre part : « *Tout espace vectoriel E de dimension finie sur un champ K est isomorphe à l'espace* K^n *des coordonnées (par rapport à une base donnée de E, n étant un naturel).* ». Personne ne contestera l'efficacité d'une telle organisation : l'algèbre linéaire est une théorie dont l'efficacité vient de son caractère multi-sens, ses théorèmes pouvant être spécifiés aussi bien dans l'étude des espaces fonctionnels qu'en géométrie. Et, par ailleurs, la géométrie va bien au delà d'une modélisation de l'espace physique et nécessite donc une formalisation plus abstraite.

La transposition didactique standardisée de la géométrie analytique 3D dans l'enseignement secondaire ressemble à une telle approche mais elle en gomme des aspects jugés trop difficiles pour les élèves. Ainsi, le théorème que nous venons de mentionner n'y est pas présent ce qui a pour effet de rabaisser au statut de 'recette' le passage d'une écriture vectorielle de deux vecteurs multiples aux égalités correspondantes sur les composantes : « *on barre les flèches et on déploie les égalités sur les composantes* » comme le décrit un élève. Il manque donc un maillon important de l'édifice théorique, celui-là même qui permet de traduire des propriétés de vecteurs en termes de techniques propres à la géométrie analytique. La transposition didactique du secondaire est donc une organisation mathématique 'à trous' au sens où l'entend Rouy (2007) : cette transposition imite le discours universitaire dont elle emprunte des éléments emblématiques, en l'occurrence des définitions du plan et de la droite en termes vectoriels, mais ne constitue pas vraiment une théorie déductive à cause des 'omissions'. Par ailleurs, l'enseignement dispensé dans le secondaire ne prend pas en considération la modélisation même, vectorielle ou analytique, des objets 'droite' et 'plan' de l'espace 'usuel'. Un fait divers me permettra de l'expliquer. Il s'agit de deux élèves forts qui mettent en cause la définition vectorielle d'un plan en arguant que la somme de deux vecteurs de l'espace ne donne pas forcément un vecteur 'coplanaire' (sic !) avec les précédents parce que, dans l'espace, « *le parallélogramme peut être gauche* ». Qu'aurait pu répondre le professeur qui avait préalablement défini la somme de deux vecteurs par le biais des composantes ? Montrer que cette somme permet d'exprimer la coplanarité en s'appuyant sur une caractérisation synthétique du plan ? Et, s'il avait défini la somme vectorielle de deux vecteurs de 'l'espace' par le biais de la règle du parallélogramme, les élèves auraient été obligés de s'incliner mais auraient peut-être demandé des comptes sur le passage d'une somme vectorielle à celles relatives aux composantes. Car, ces élèves posent là une question dont la portée épistémologique est consistante en questionnant la pertinence du modèle vectoriel pour rendre compte d'un objet, le plan, sur lequel ils briguent avoir quelque connaissance ne fût-ce qu'intuitive. Cette question se pose déjà pour la droite. Trois points alignés ont des différences de coordonnées proportionnelles. Dans la transposition habituelle, cette propriété n'a pas de nécessité liée au fait que des points alignés forment vraiment une droite au sens physique du terme, mais découle des définitions vectorielles. En se plaçant dans la perspective des deux élèves dont on vient de parler, on peut retourner la chose en disant :

pour avoir le droit de définir la droite vectoriellement avec les conséquences que cela entraîne, il faudrait être certain que des points formant une ligne droite ont, dans un repère donné, des coordonnées dont les différences sont proportionnelles à moins que l'on ne se préoccupe pas de l'objet géométrique au sens commun du terme.

L'enseignement de la géométrie analytique 3D dans le secondaire est donc sujette à caution, que l'on se situe sur le plan théorique ou que l'on regarde comment les modèles algébriques d'objets géométriques sont 'justifiés'. De manière générale, cet enseignement semble conduire à un « rabattement » de l'apprentissage sur des acquisitions procédurales, comme ont pu le mettre en évidence plusieurs interviews d'étudiants. Ne peut-on alors imaginer un autre type d'enseignement qui se polariserait d'entrée de jeu sur la construction même de cette modélisation d'objets géométriques ? Ne peut-on considérer que cette modélisation a un intérêt en soi, par exemple, pour constituer un formalisme qui permet de démontrer efficacement des propriétés de figures géométriques et, qu'en plus, elle constitue un marchepied intéressant pour accéder plus tard à l'algèbre linéaire. Après tout, un mathématicien qui fait des démonstrations en algèbre linéaire ne recoure-t-il pas en toute intimité, à des intuitions inspirées par des objets géométriques, même s'il ne les affiche pas ?

Comme on le voit, cet exemple renvoie à des questions plus générales que je traite dans les sections suivantes.

La capitalisation de 'petits' phénomènes à la lumière d'une dualité praxéologique

Mais quelle est la portée des trois types de phénomènes identifiés dans les précédentes sections ? Est-elle limitée aux apprentissages et enseignements spécifiques d'un contenu mathématique ? Il me semble que non et je tente ici de montrer que, au contraire, ces phénomènes particuliers peuvent être capitalisés pour donner accès à des phénomènes plus globaux que les théories didactiques permettent de rendre intelligibles.

Un regard porté sur l'articulation des praxéologies mathématiques et des praxéologies didactiques

Mon point de départ sera l'analyse didactique d'une 'approche heuristique de l'analyse mathématique' (groupe AHA, 1999) qui m'avait amenée à soulever la question de l'articulation entre les praxéologies ou organisations mathématiques (OM) et les praxéologies ou organisations didactiques (OD) tout en regrettant que la TAD était, à l'époque, plus explicite sur les critères d'évaluation des premières que sur celles des secondes :

> *« Au-delà de la description des praxéologies mathématiques et didactique sous-jacentes à des leçons ou à des projets d'enseignement, c'est leur articulation qui devrait permettre de mettre en évidence les ressorts des pratiques enseignantes […] Nul doute cependant que les didacticiens attentent impatiemment le plus longs développements sur l'évaluation d'une organisation didactique. ». (Schneider, 2001).*

Défendant l'idée que la TAD était, contrairement à ce que pensaient d'aucuns à l'époque, une théorie d'apprentissage en ce sens qu'elle spécifiait les moments d'étude dont on ne peut faire l'économie sans risquer d'hypothéquer les apprentissages, j'avais développé une étude de cas qui posait en effet la question de l'articulation des OM et des OD, en particulier pour les OD relevant d'un certain paradigme constructiviste :

> *« Quel poids accorder au constructivisme ? Le prix peut-il en être des praxéologies mathématiques non canoniques […] ? » (Schneider, 2001).*

Le constructivisme dont il était question était, selon les références adoptées, de nature épistémologique et la praxéologie didactique décrite était, comme je l'avais exprimé, 'en rupture avec un exposé déductif de l'analyse'. (Schneider, 2001). Depuis a été formalisée une grille d'OD se caractérisant :

> *« par le fait d'attribuer une grande importance à quelques-uns des moments de l'étude au détriment de tous les autres – qui sont alors généralement sous la seule responsabilité de l'élève ou de l'étudiant ». (Bosch et Gascon, 2002).*

Je note donc qu'on parle aujourd'hui d'OD théoricistes, technicistes, modernistes, ainsi que d'OD classiques, empiristes ou constructivistes. Mais qu'en est-il d'une grille d'OM et surtout de l'articulation OD-OM ? En particulier, comment caractériser les OM auxquelles peut conduire un dispositif didactique à consonance 'constructiviste', à l'image du projet AHA ? Et quels critères utiliser pour évaluer, par exemple, les technologies associées ? Est-ce pertinent de regarder si « *les formes de justification utilisées sont proches des formes canoniques en mathématiques* » ? (Chevallard, 1999). A quoi renvoie le 'en mathématiques' ?

J'avais, dans mon article de 2001, critiqué plusieurs aspects de ce projet d'enseignement de l'analyse dont j'étais co-auteure. Mais a posteriori, je me suis demandée pourquoi cette critique avait plu à plusieurs collègues didacticiens et si elle rendait bien compte, au-delà des maladresses, des spécificités de ce projet et d'un certain décalage didactique qu'il illustrait. En particulier, ce projet mettait en œuvre deux types de praxéologies mathématiques complémentaires que j'ai pensé, depuis lors, utile de caractériser comme ci-dessous.

Deux niveaux praxéologiques

Ces deux niveaux, je les envisage à la fois comme processus pour décrire deux facettes de l'activité mathématique et comme produits de ces processus en termes d'organisations mathématiques. Pour un développement plus ample, je renvoie le lecteur à Schneider (2011) et me contenterai de dire ici que, dans les praxéologies 'modélisation', on cherche à modéliser des objets non définis mathématiquement mais dont on a une certaine connaissance : ce sont des 'préconstruits' au sens de Chevallard (1991) et ils fonctionnent comme des 'objets mentaux' au sens de Freudenthal (1973). Dans les praxéologies 'déduction', on construit une organisation déductive des éléments du modèle ainsi construit, les objets étant définis par les techniques qui les modélisent.

Un exemple du premier niveau est celui de la praxéologie 'grandeurs' en analyse dans laquelle les tâches fondamentales consistent à déterminer des aires curvilignes, des vitesses variables, des tangentes et à optimiser des grandeurs, par des techniques 'conviviales' : calcul de limites, de dérivées, de primitives. Le concept de limite apparaît là sous une forme embryonnaire : c'est ce qu'on obtient en supprimant des termes dans une expression algébrique, sans jeu de compensations, à l'instar de la manière dont Lagrange définit la dérivée. Dans cette praxéologie, le caractère fondamental du concept de limite est pluriel, l'unité se créant à partir de formes langagières communes modélisant les phénomènes étudiés : 'aussi proche que l'on veut', 'suffisamment proche de'.

C'est à ce niveau que doivent être gérées les questions qu'une vision empiriste induit sur la pertinence des techniques : « *Un calcul de limite peut-il donner la valeur exacte d'une aire curviligne ou d'une vitesse instantanée ?* ». D'où la nécessité d'un discours technologique qui ne s'apparente pas à un discours théorique standard dans lequel les aires, vitesses, … sont définies par le biais du concept de limite. Voici un exemple de tel discours (Schneider, 1988) qui ne relève pas de la théorie se basant sur une conviction géométrique relative à l'ordre des aires de surfaces emboîtées. Il s'agit de justifier que l'on obtient bien la valeur exacte de l'aire sous $y = x^3$ entre les bornes 0 et 1 en prenant la limite qui vaut ¼ de deux suites de sommes d'aires de rectangles qui l'encadrent (Fig. 4).

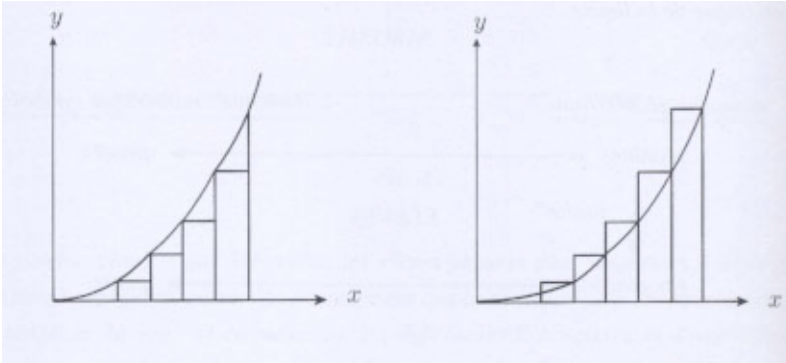

Figure 4

On suppose, par l'absurde, que l'aire curviligne recherchée est supérieure à ¼, par exemple égale à ¼ + ε (Fig. 5). On peut alors, en choisissant une valeur de n suffisamment grande, rendre l'approximation par excès de l'aire curviligne inférieure à cette dernière, ce qui constitue bien sûr une contradiction. Or, en vertu de ce qu'on sait de la limite, ce raisonnement peut être reproduit si petit soit ε. On en conclut que l'aire cherchée ne peut être supérieure à ¼. En jouant de manière analogue sur l'approximation par défaut, on prouve que cette aire ne peut être non plus inférieure à ¼. Elle égale donc ¼.

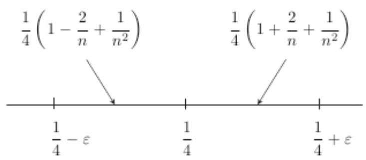

Figure 5

Plus généralement, on justifie que le calcul créé (de limite, de dérivée ou de primitive) donne bien ce que l'on cherche, au prix d'une 'validation' non canonique basée sur des intuitions géométriques ou cinématiques, des expériences mentales, l'examen de cas extrêmes, … ou encore au prix d'une validation pragmatique qui consiste à rendre crédible une nouvelle technique, sujette à caution, en montrant qu'elle permet de retrouver des résultats déjà acquis par d'autres méthodes. Fermat en donne un exemple significatif lorsqu'il met à l'œuvre sa méthode d'adégalité, où intervient un infinitésimal au statut ambigu, en l'appliquant à un problème d'optimisation et à un autre de tangente déjà résolus dans l'Antiquité.

Au deuxième niveau praxéologique, que j'appelle praxéologie 'déduction', les préconstruits initiaux (vitesses, aires, …) sont 'définis' par les techniques qui permettaient de les déterminer au stade précédent, ce qui suppose que soient réglées les questions relatives à l'efficacité et à l'intelligibilité des techniques. Il s'agit alors d'agencer les pièces du modèle en une organisation déductive où le mode de validation est exempt de toute référence aux contextes d'origine. Cette nouvelle perspective suppose un changement d'intelligibilité de ce qu'est une définition. En effet, dans une praxéologie 'modélisation', les concepts mathématiques sont d'abord des modèles pertinents 'd'objets' extra ou intra-mathématiques, ce qui suppose une certaine forme de distanciation entre les objets 'réels' et leur modélisation. Mais ensuite, dans les praxéologies du $2^{\text{ème}}$ type, les 'bonnes' définitions des concepts sont celles qui donnent prise au raisonnement déductif et qui permettent un agencement déductif 'optimal'. Le critère varie donc d'un niveau praxéologique à l'autre.

Je ferai allusion, en guise d'illustration, à l'élargissement des sommes de Riemann : entre la détermination d'aires curvilignes et l'élaboration d'une théorie où les propriétés telles l'additivité par rapport aux intervalles peuvent se démontrer sans embûches, il faut épurer le concept de certaines restrictions comme celle de s'imposer des subdivisions régulières : que deviendrait en effet la démonstration de la propriété qui vient d'être mentionnée dans le cas d'un domaine d'intégration composé de deux segments 'incommensurables' ?

Le positivisme empirique perdure à ce niveau. Ainsi, pour un nombre non négligeable de futurs professeurs, l'écriture que voici qui caractérise ce qu'on appelle, en Analyse Non Standard, des nombres 'infiniment proches':

$$\forall \varepsilon > 0 : |x - a| < \varepsilon \qquad \text{("Faut-il ajouter } \varepsilon \text{ très petit ?").}$$

signifie, dans l'ensemble des réels, que « x tend vers a » et non « x = a ». Et d'ajouter cette allusion au ε très petit. Quand on le démontre, sur base d'une propriété de densité, certains persistent dans leur erreur en insistant sur le fait que ε n'est pas nul ou en complétant l'écriture ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0 : 0 \neq |x - a| < \varepsilon.$$

Comme le montre Job (2011), cette observation est significative d'un rapport 'non lakatosien' aux définitions : celles-ci 'décrivent' ce que l'on entend intuitivement par 'tendre vers', voire ont un rôle sténographique, au lieu d'être des 'outils de preuve'. Il a en effet étayé cette hypothèse par une analyse a priori épistémologique et institutionnelle et par une 'situation fondamentale de mise à l'épreuve', pour le chercheur, de cette interprétation, et, pour les étudiants, de leur posture première face aux définitions. A partir de là, on peut craindre un malentendu fondamental dans les enseignements d'analyse proposant aux étudiants une sorte de « calculus » inspiré de l'analyse non standard : les étudiants ne sont pas à même de comprendre que l'ensemble des hyperréels définis par des écritures analogues à celles ci-dessus constitue une extension de l'ensemble des réels.

S'impose donc un travail sur le statut même des définitions, que ce soit la reprise de concepts connus dans un univers nouveau et déstabilisant, à l'instar de ce que propose Ouvrier-Buffet à propos de ce que l'on peut appeler droite en géométrie discrète ou encore un travail de type lakatosien conduisant à l'émergence d'un concept né de l'examen d'une preuve invalidée par un contre-exemple, tel celui de convergence uniforme faisant écho au théorème faux de Cauchy sur les séries de fonctions continues. Sans aller jusque là, je décris (Schneider, 2008) un dispositif où naît le concept de continuité numérique de l'étude de conditions pour que la droite $x = a$ soit une asymptote verticale d'une fonction qui a la forme d'une fraction.

De la négligence du niveau praxéologique 'modélisation'

J'en arrive, dans cette phase conclusive, au point qui me tient le plus à cœur : celui de la place mineure attribuée aux praxéologies 'modélisation' à certains niveaux de l'enseignement et en certaines institutions. Je m'en tiendrai ici à l'enseignement secondaire, niveau auquel les enseignants – et, plus particulièrement, ceux du Lycée, identifient difficilement ce niveau praxéologique tant les praxéologies 'déduction' sont, à leurs yeux, un 'phare' emblématique du travail mathématique. Loin de moi l'idée que cette facette de l'activité mathématique, orientée vers les organisations déductives, n'a pas sa place au niveau secondaire, mais il faut bien reconnaître qu'elle ne peut pleinement s'épanouir dans certains domaines mathématiques où elle reste un phare inaccessible … D'où, comme déjà dit, le repli des enseignants sur des praxéologies 'à trous' (Rouy, 2007) où les trous sont comblés par des gestes d'ostention.

C'est là un phénomène majeur qui détermine des comportements non seulement des professeurs mais aussi des membres de la noosphère. Il est préjudiciable aux apprentissages, il me semble, ce niveau praxéologique ayant pour fonction de faire du plein là où il y a du manque. Je m'en explique en référence à la théorie de la transposition didactique dans laquelle, pour expliquer le phénomène de préconstruction, Chevallard (1991) évoque la façon dont Cauchy justifie le théorème des valeurs intermédiaires comme une évidence géométrique. Il y voit une 'circulation du manque' : absence des concepts de continuité, de nombre réel, de courbe. Et donne un statut à ces 'objets' dont le concept est absent en parlant de 'préconstruits désignés par le truchement du langage' en faisant 'appel à la complicité dans la reconnaissance ontologique'. Dans les praxéologies 'modélisation', il s'agit, à mes yeux, de recréer un plein d'une autre nature : ainsi la continuité numérique y est remplacée par une continuité géométrique ou cinématique.

C'est le questionnement des modèles par les élèves qui rend indispensable ce plein d'une autre nature, comme je l'ai illustré par l'exemple de la géométrie analytique. Ce questionnement n'est pas forcément explicite, la quête du sens ayant un coût pour les élèves dont plusieurs préfèrent s'en tenir à la résolution d'exercices, ainsi que Rosseel et Schneider (2003 et 2004) l'ont mis en évidence, par voie d'enquête, à propos de l'apprentissage des nombres complexes. Et il faut bien avouer que des effets de contrat, à une échelle institutionnelle, les y autorisent. Il y aurait d'ailleurs beaucoup à apprendre en écoutant certains élèves, plus indépendants par rapport au contrat.

Même si la perspective préconisée ici est sans doute écologiquement très fragile, je continue de penser que la recherche didactique doit continuer à fournir des données dans ce registre. Ne fût-ce que pour mettre à distance les transpositions naturalisées … A moins que les phénomènes décrits dans cet exposé ne soient des OVNI… Mais pour qui le seraient-ils ? Pour les mathématiciens ? Pour les enseignants du secondaire ? Pour les chercheurs en didactique ? Sans doute pour plusieurs sujets de ces trois institutions, pour des raisons différentes : les mathématiciens en raison d'une idéologie platonicienne plus ou moins consciente, (Job, 2011) ; les enseignants qui considèrent les praxéologies déduction comme emblématiques de l'institution des mathématiciens auxquels ils ont tendance à s'identifier. Reste à voir pour les didacticiens …

REFERENCES

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9 (3), 281-307.

Artigue, M. (1991). Epistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10/2.3, 241-285.

Bachelard, G. (1949), *Le rationalisme appliqué*, Paris : PUF.

Bachelard, G. (1980), *La formation de l'esprit scientifique*, Paris : J. Vrin.

Balhan, K. (en cours). *Problèmes d'apprentissage et d'enseignement du calcul intégral : repères épistémologiques et didactiques*. Thèse, Université de Liège.

Bosch, M. et Gascon, J. (2002). Organiser l'étude 2. Théories et empiries dans Dorier, J.-L. et al. (Eds). *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques – Corps, 21-30 Août 2001* , 23-40. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Calmant, P. (2004). *Favoriser l'apprentissage des biostatistiques par le Web ?* Essai de problématisation d'une question issue du terrain. Thèse,Université de Namur.

Calmant, P., Ducarme, M. et Schneider, M. (2010). Obstacles a priori à l'apprentissage de l'analyse statistique inférentielle. *Statistique et Enseignement, x(z), pp-pp,* http://www.statistique-et-enseignement.fr, Société Française de Statistique (SFdS).

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15/1, 7-48.

Chevallard, Y. (1991), *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné,* Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. Recherches en Didactique des Mathématiques,*19/2, 221-265.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 5-31.

Dunia, A. (en cours). *Accès à la pensée structurelle en algèbre linéaire par l'étude de systèmes linéaires*. Thèse, Université de Liège.

Freudenthal H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht : D. Reidel.

Gantois, J.-Y. (2012). *Un milieu graphico-cinématique pour apprendre les dérivées.* Potentialités et limites. Thèse, Université de Liège.

Gantois, J.-Y. et Schneider M. (2012). Une forme embryonnaire du concept de dérivée induite par un milieu graphico-cinématique dans une praxéologie 'modélisation'. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32/1, pp. 57-99.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 2-3, pp. 303-346.

Gras, R. et Tothohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15/1, 49-96.

Groupe AHA, (1999), *Vers l'infini pas à pas : une approche heuristique de l'analyse*, Bruxelles : De Boeck.

Job, P. (2011). *Etude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques*. Thèse, Université de Liège.

Krysinska, M. (2007). *Emergence de modèles fonctionnels comme outils de catégorisation de phénomènes divers : repères épistémologiques et didactiques.* Thèse, Université de Namur.

Krysinska, M., Mercier, A. et Schneider, M. (2009), Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29/3, 247-304.

Lebeau, C. (2009). *Etude d'une genèse d'un modèle algébrique du système formé par les points, droites et plans de l'espace usuel*. Thèse, Université de Liège.

Lebeau, C. et Schneider, M. (2010). Equations incomplètes de plans et obstacles à la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30/1, pp. 11-46.

Rosseel, H. et Schneider, M. (2003). Ces nombres qu'on dit imaginaires. *Petit x*, 63, 53-71.

Rosseel, H. et Schneider, M. (2004). Des nombres qui modélisent des transformations. *Petit x,* 64, 7-34.

Rouy, E. (2007). *Formation initiale des professeurs (du secondaire supérieur) et changements de posture vis-à-vis de la rationalité mathématique.* Thèse de doctorat, Université de Liège.

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard J.-Ph. et Paquelier, Y., (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 25(1) 57-90.

Salin, M.-H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants, dans Lemoyne, G. et Conne, F., *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Les Presses de l'Université de Montréal, 327-352.

Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux 'aires' et 'volumes' au calcul des primitives.* Thèse défendue à l'Université catholique de Louvain.

Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des 'découpages infinis' des surfaces et des solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11/2.3, 241-294.

Schneider, M. (2001). Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. A propos d'un enseignement des limites au secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21/1.2, 7-56.

Schneider, M. (2008). Traité de Didactique des Mathématiques*, Presses universitaires de Liège.*

Schneider, M. (2011). Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique ? dans Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., et al. (Eds.). (2011). *En amont et en aval des ingénieries didactiques.* Grenoble: La pensée sauvage.