Maggy Schneider-Gilot, Professeur
Pierre Henrotay, Assistant
Université de Liège
Service de Didactique des Sciences mathématiques

COMPTE RENDU DE L'ATELIER « MATHÉMATIQUES »

L'atelier comptait une bonne dizaine de participants exerçant diverses fonctions dans le monde de l'enseignement : enseignants des divers réseaux et niveaux d'études (fondamental et secondaire inférieur et supérieur), inspecteurs, conseillers pédagogiques, personnel d'encadrement CIFEN, titulaire de cours de didactique à l'Université.

Après une courte présentation, les participants ont, dans une première phase, exprimé à tour de rôle leur perception de l'actuelle approche « par compétences ». Ensuite, deux présentations ont été faites par le service de didactique spéciale de mathématiques :

- Approche par compétences et réduction des inégalités d'apprentissage : un mariage impossible ?
- Problèmes d'optimisation - Illustration de quelques catégorisations possibles

Les présentations se sont déroulées sur un mode interactif ; les diapositives des présentations sont disponibles sur le site Ladimath : http://www.ladimath.ulg.ac.be/?q=node/12

Enfin, un temps a été consacré à une discussion générale, avec un retour sur les points principaux évoqués dans les présentations et sur la thématique du jour.

Le présent article contient l'introduction à l'atelier, la teneur des échanges, la position des animateurs face à l'apprentissage et l'enseignement de la résolution de problèmes, étayée d'analyses publiées ailleurs (M. Schneider, 2006a, 2006b, 2007 et 2008 ; M. Schneider & A. Mercier, à paraitre), une illustration de leur point de vue à travers la classe des problèmes d'optimisation et une expérimentation menée par P. Henrotay dans ses classes, ainsi que quelques éléments de l'échange final de cet atelier.

Une brève introduction : le focus mis sur la résolution de problèmes

Le courant pédagogique dit « des compétences » remet la question du transfert au cœur du débat sur les priorités de l'enseignement. D'abord, par son origine dans le monde professionnel à travers le concept d'intelligence situationnelle qui suppose de mobiliser et d'intégrer des savoirs et savoir-faire dans des circonstances variées et inédites (Ph. Zarifian, 1988). Ensuite, par ses modalités d'application. Ainsi, comme l'ont analysé B. Rey et al. (2002) à propos des socles de compétences à l'articulation primaire/secondaire : « L'élève compétent, ce n'est pas celui qui sait seulement accomplir une opération stéréotypée en réponse à un signal préétabli. Il doit savoir choisir les procédures à mettre en œuvre dans des situations toujours nouvelles, il doit savoir élaborer une démarche originale ». Bref, il s'agit bien dans les deux cas de pouvoir choisir de manière pertinente des savoirs et des procédures pour résoudre un problème nouveau, sans indice explicite facilitant ce choix et souvent en dehors de la période d'apprentissage. Le concept de transfert rend compte de cette situation, même si, comme le fait remarquer P. Perrenoud (2002), ce concept est relativement ambigu car il couvre, suivant les cas, des réalités aussi diverses que le transfert d'une technique apprise pour résoudre un problème nouveau au sein d'un même cours, le transfert d'un concept d'une discipline à l'autre ou encore des compétences méthodologiques.

En mathématiques, le transfert est lié à la résolution de problèmes, compétence « royale » par excellence, qui suppose l'acquisition de toutes les autres. Mais est-il facile d'y initier les élèves ? Quelles difficultés les professeurs rencontrent-ils sur le terrain ? Quelles sont les stratégies d'enseignement efficaces ?

Les réactions à priori des participants

Les questions posées lors de cette introduction ont trouvé écho chez les participants. Voici quelques propos significatifs issus de leurs préoccupations, regroupés autour de quelques thèmes.

Des problèmes complexes et inédits jugés difficiles

- La mise en équation est un réel problème : il n'y a pas de méthode pas-à-pas, de recette de cuisine ; je n'arrive pas à leur faire « sentir » ce qu'ils doivent faire, et le côté recette n'est pas constructif.

- (Réflexion à propos d'élèves du 3e degré qualifiant et de 4e TT, et du CEFA) À 16-17 ans, ils ne savent rien faire tout seuls, alors on les aide. Pourquoi des examens ? Ils ne sont pas obligatoires, on pourrait profiter de ce temps pour travailler autrement, pour construire des boites à outils, mettre les élèves en des situations où ils vont trouver des pistes pour arriver, les mettre dans des situations plus larges. En fait, on refait les matières du primaire.
- (À propos d'élèves en boulangerie) Dans les proportions, les élèves se trompent en faisant leur pain ; si on est au cours de maths, c'est « mettre au même dénominateur ». On essaie de décloisonner mais eux, les élèves, ils cloisonnent. il faut revenir sans cesse sur ce qu'ils ne savent pas faire.
- La résolution des problèmes, c'est en 3e primaire. Une situation complexe, inédite, nouvelle, c'est perturbant, on ne peut qu'être d'accord, mais il y a une différence entre théorie et pratique. Au fondamental, ça se voit très bien : autant je suis favorable à des situations-problèmes dans un contexte d'apprentissage, autant je suis réticent dans l'évaluation comme le CEB.
- Les apprentissages se basent-ils sur la résolution de problèmes ? Le plus critique c'est : que faut-il faire ? Or on traite l'aspect algorithmique seul : ils (les élèves) ne savent pas expliquer pourquoi ils le font.
- Il y a un problème d'invisibilité aux enseignants, on confond moyen et objectif. Selon la pédagogie cognitive de Tardif, on doit munir l'enfant de connaissance à construire. Résoudre des problèmes, c'est un moyen pour construire des connaissances. Il y a une confusion qui rend invisible pour les élèves et pour les professeurs. C'est toujours les connaissances qui doivent être maitrisées, ce n'est pas résoudre le problème qui est important.
- « Problèmes » est lié à un traumatisme de l'école primaire ; mieux vaut proposer à l'élève des problèmes où il y a plusieurs solutions, plusieurs démarches, dont certaines interdites. Au 1er degré, les élèves se contentent de boites à outils, de techniques qu'eux-mêmes remplissent. On peut proposer des problèmes mais ne pas les résoudre, se demander quels outils sont utilisables : 50% sont consacrés à la modélisation.
- La conception qu'ont les enseignants des « problèmes » mérite en soi un chapitre des mathématiques, plutôt que la raison d'être des maths. La peur s'est transformée. Mon fils éprouve des difficultés avec la règle de 3, qu'il applique comme recette sans transposer ; or, il maitrise les fractions, et il ne voit pas que c'est la même chose.
- (À propos des enseignements professionnel et technique) Les élèves ont appris des recettes sans savoir pourquoi, et ils les oublient. À cet âge-là, ils n'ont plus envie de savoir pourquoi.
- On met toujours les problèmes en « production personnelle » ; or il y a la peur de l'erreur.
- Le véritable enjeu, pour l'élève, c'est : quelle est la réponse du prof, que veut-il que je dise ?
- (En évoquant le cognitivisme et la zone proximale de développement) Dans le fondamental, on attend la nouveauté et ce qui est nouveau est attrayant.
- Il faut apprendre à l'élève à se poser les bonnes questions.

Le travail en groupe : pas évident à mettre en place

- (Réflexions portant sur un lointain cours de math modernes, 9H en rhéto) À l'époque le pourquoi n'était pas expliqué, il y avait très peu de collectif entre profs et entre élèves, on n'a pas appris à travailler ensemble. Il y avait peu de travaux de recherche collectifs.
- C'est très insécurisant de donner dans le « collectif ».
- Pour les travaux de groupe, on coince avec les locaux pas adaptés.
- Et on coince avec les heures de 50 minutes.
- Il ne faut pas travailler trop vite collectivement, car un seul a la solution, les autres attendent. Il faut une phase individuelle d'abord.
- Collectivement, c'est bien pour comparer des voies différentes. La question doit être posée à chaque membre du groupe : le travail en groupe n'est pas une recette.
- (À propos des enseignements professionnel et technique) Les élèves peuvent se répartir des tâches.
- Alors on ne fait pas cours, on fait de la gestion de groupes.

Le programme et ses contraintes

- Le programme est très clair, je ne sais pas l'appliquer autrement ; jusqu'où puis-je m'en éloigner ? c'est la question qui tue.
- Il ne devrait rien y avoir de honteux pour un professeur d'avouer qu'il n'a pas vu toute la matière.

Et encore…

- Il y a un problème de verbalisation aussi : on ne s'habitue pas assez à s'exprimer en français sur les stratégies utilisées en math ; c'est très difficile même pour un professeur.
- (À propos des enseignements professionnel et technique) Avant je ne faisais pas de problèmes ou très peu. Expliquer à quoi ça sert, je ne le fais pas. On fait des problèmes mais collectivement car les fainéants ne travaillent pas chez eux. L'évaluation porte sur ce qu'on a vu. Un souci particulier,

c'est pour le 1er degré et la résolution d'équations : il y a beaucoup d'exemples pratiques mais on ne sait pas faire de liens (Kirchhoff, Fahrenheit) ; le souci en technique prof., c'est qu'on fait appel alors à des notions qu'ils n'ont pas vues.

Ces quelques échanges illustrent bien la difficulté de l'entreprise et font écho aux doléances souvent exprimées par les professeurs lors des formations, lesquels jugent effectivement ardu d'apprendre à leurs élèves à résoudre des problèmes mathématiques. Devant les échecs répétés de ceux-ci lors des évaluations, beaucoup d'entre eux semblent se replier peu à peu sur des évaluations qui font la part belle aux acquisitions techniques ou à un bachotage caché des problèmes précédemment posés lors des évaluations officielles.

Nous sommes sensibles à ce repli d'autant que nous pensons que les théories didactiques permettent d'éclairer la question du transfert et de suggérer des pistes crédibles en matière d'apprentissage et d'enseignement à la résolution de problèmes. C'est ce que nous développons dans la section suivante.

Une manière de concevoir l'apprentissage et l'enseignement à la résolution de problèmes, contrastée avec d'autres positions

Plusieurs chercheurs ont reçu mandat de la CFWB pour concevoir des épreuves d'évaluation des compétences auprès d'une cohorte importante d'élèves concernés par le socle commun. C'est le cas de Rey (2009) et de Kahn (2010) dont nous résumons ici la position. Tous deux commencent par distinguer les « procédures », qui se ramènent à l'exécution d'une tâche relativement stéréotypée telle que *Effectuer à la main un calcul isolé sur des nombres en écriture décimale de taille normale* et les « compétences avec mobilisation », c'est-à-dire des « compétences qui impliquent que l'élève doive choisir, parmi les procédures qu'il connait, celle(s) qu'il y a lieu de mettre en œuvre dans une situation nouvelle ». Affirmant en conséquence que « la compétence avec mobilisation ne saurait être attestée que par l'affrontement de l'élève à une situation inédite », ils proposent alors « la passation des épreuves d'évaluation, dans chaque classe, en trois temps répartis sur la semaine :

- d'abord, la situation complexe qui requiert la mise en œuvre et la combinaison de plusieurs procédures ;
- ensuite, dans un second temps, cette situation découpée en «petits problèmes» qui nécessitent la mobilisation d'une seule procédure ;
- enfin, ce sont des batteries d'exercices correspondants aux procédures requises dans les deux temps précédents qui sont présentées aux élèves ».

Pour Rey et Kahn, une telle forme d'évaluation « permet d'abord de donner à chaque élève toutes les chances de faire prendre en compte ce qu'il sait faire : la mobilisation complexe s'il le peut et, s'il ne le peut, la mobilisation simple et enfin s'il n'y arrive pas, on lui donne au moins la possibilité de montrer qu'il a automatisé certaines opérations élémentaires ». Leur proposition révèle un certain pessimisme et ils la motivent en développant que le « à bon escient » dont il faut savoir faire preuve pour mobiliser les savoirs pertinents dans une situation donnée « ne s'enseigne pas ». Les auteurs insistent sur le fait que la difficulté majeure est de faire partager aux élèves « le mode d'interprétation des tâches et des situations qui est celui de l'École ».

Une autre position, plus optimiste, est celle de Fagnant et Demonty (2005) qui signent, dans le cadre d'une recherche commanditée par la CFWB, des guides méthodologiques à l'adresse des enseignants du primaire, portant le titre significatif : « Résoudre des problèmes : pas de problème ! ». Dans ces guides qui alimentent actuellement les formations d'enseignants, ces chercheuses visent à favoriser chez les élèves une *démarche réflexive* de résolution de problèmes en articulant deux objectifs : « développer chez les enfants des compétences propres à chaque phase du processus de résolution » et « contrecarrer les stratégies superficielles peu compatibles avec la mise en œuvre d'une démarche générale de résolution ». Conformément au premier objectif, les problèmes multiples repris dans ces guides sont groupés en chapitres et sections qui correspondent aux étapes et démarches de la résolution de problèmes telles qu'elles ont été mises en évidence par les psychologues cognitivistes, e.a. Schoenfeld (1989) : d'abord, *la représentation du problème* et ce qu'elle suppose en termes, par exemple, d'estimation de la solution ; ensuite, la *résolution proprement dite* du problème qui requiert de développer des « démarches de type essais-erreurs » et, parfois, de « décomposer le problème en sous-problèmes » ; enfin, l'interprétation de la solution, y compris dans des situations « ouvertes », et la communication de celle-ci « sous une forme adaptée au contexte ». Les ressorts majeurs de ces guides sont donc d'un ordre dit « méthodologique » et concernent prioritairement les stratégies générales de résolution de problèmes scolaires même si, sur les 280 pages que contient par exemple celui écrit en 2005, 50 sont consacrées aux outils mathématiques spécifiques enseignés au niveau d'étude considéré : les grandeurs proportionnelles, les intervalles et les partages inégaux.

Quant au deuxième objectif, il conduit Fagnant et Demonty à choisir les problèmes proposés de manière à provoquer chez les élèves le « désapprentissage de stratégies superficielles et des présupposés associés ». Ces présupposés, selon Reusser et Stebler (1997) ou Verschaffel et *al.* (2000), consistent, par exemple, à supposer que tous les problèmes proposés par les enseignants ou dans les manuels ont un sens, que tout problème a une solution et une seule et qu'elle doit se présenter sous une forme numérique et précise ou encore que la tâche peut être effectuée en exploitant les concepts et les formules qu'on vient d'apprendre. En clair, il s'agit de dénoncer le contrat didactique ordinaire, dont on a montré pourtant qu'il était à la source de tout apprentissage lié à un processus organisé d'enseignement.

Nous venons de décrire là deux positions contrastées. Ces deux positions, assez révélatrices nous semble-t-il de deux tendances observées à propos de « l'Approche Par Compétences » tant chez les enseignants que chez les chercheurs, sont propres à occulter un autre regard qui suppose d'articuler compétences et savoirs, et que nous décrivons ci-après.

Contrairement à Rey et Kahn, nous pensons que le « à bon escient s'enseigne » et, pour l'illustrer, nous repartirons d'un cas de figure commenté par Kahn (*Ib.*) en ces termes : « On peut par exemple avoir expliqué à des élèves que le théorème de Pythagore est utilisable dans la famille des situations géométriques où l'on connaît la longueur de deux côtés d'un triangle rectangle et où on doit calculer celle du troisième ; pourtant, si l'énoncé du problème ne mentionne pas la présence d'un triangle rectangle (par exemple s'il est question de la diagonale d'un carré), certains élèves ne verront pas que le problème qu'ils ont à résoudre relève de cette famille ». Cet exemple nous donne l'occasion de préciser notre point de vue : nous suggérons que les chercheurs cités ne voient pas la nécessité d'étudier avec les élèves les domaines d'usage des techniques. La détermination de « sous-figures » ou de « sur-figures » construites au prix du tracé ou de l'oubli d'une ligne supplémentaire est une technique générique en géométrie : en oubliant deux côtés du carré, on détermine un triangle rectangle où le théorème de Pythagore s'applique. On peut imaginer que les élèves n'y pensent pas à priori ou qu'ils ne s'y autorisent pas, mais on peut aussi montrer que cette technique s'enseigne et que les élèves peuvent devenir capables de la mobiliser d'eux-mêmes, dans d'autres cas. Ainsi nous pensons que l'usage « à bon escient » s'enseigne : savoir est *pouvoir agir*, mais c'est d'abord *pouvoir juger de l'action adéquate*. Pour nous, savoir est donc une compétence technique forte.

Par ailleurs, les enseignements de « méthodes », tels qu'ils sont envisagés par Demonty et Fagnant (Ib.), ne semblent pas tenir leurs promesses si l'on en juge les recherches de plusieurs psychologues cognitivistes qui se sont penchés sur le sujet. Il semble même, selon Tardif (1999) qui fait une synthèse de leurs travaux, que les enseignements de stratégies générales soient assez inefficaces en matière de transfert et qu'il vaut mieux miser sur les stratégies spécifiques qui nous ramènent aux savoirs et aux techniques qu'ils autorisent. Quant aux présupposés que les élèves auraient vis-à-vis des problèmes, on peut espérer que la plupart de ceux enseignés à l'école les illustrent. En effet, dans la mesure où les établissements scolaires se doivent de diffuser les savoirs en lien avec les questions qu'ils permettent de résoudre et même de se focaliser là-dessus, il n'est pas stupide de penser que ces problèmes ont une réponse et que cette réponse a quelque chose à voir avec les savoirs enseignés récemment ou non. De plus, croire cela est, pour les élèves, une source de confiance dans le système éducatif et dans leur professeur en particulier, confiance sans laquelle ils ne peuvent assumer un engagement personnel dans l'étude.

En revanche et *à contrario* de ces deux pistes, la question du transfert peut être analysée à la lumière de théories didactiques (Schneider, 2006b). Il en ressort une possibilité d'action que nous résumons ci-dessous. Elle consiste à mettre le transfert « sous contrat » en apprenant aux élèves à manœuvrer dans une classe (ou catégorie) donnée de problèmes, puis en leur apprenant à brasser plusieurs classes à la fois. Ces classes sont, dans un premier temps, fédérées à la fois par une tâche donnée et par une technique particulière associée à un savoir. Il y a ainsi la classe des problèmes d'optimisation qui peuvent être résolus par la programmation linéaire ; celle des problèmes qui, relevant toujours de l'optimisation, requièrent le calcul des dérivées. Dans un second temps, on peut mélanger des problèmes qui concernent une même tâche, comme l'optimisation, mais dont la résolution suppose le choix de la technique appropriée entre les deux qui viennent d'être citées, les élèves étant avertis, et c'est là l'aspect contractuel, qu'ils ont le choix entre ces deux types de résolution. Un autre exemple est donné par la classe des problèmes de distances inaccessibles qui se ramènent à la résolution d'un triangle mais qui, selon les cas, supposent d'appliquer des techniques distinctes, inspirées soit du théorème de Thalès, soit du théorème de Pythagore ou encore des techniques qui mobilisent des triangles semblables ou des nombres trigonométriques. Si ce dernier exemple est cité ici, c'est que toutes ces techniques sont enseignées la même année : il serait donc facile d'imaginer des périodes pendant lesquelles on apprend aux élèves à choisir entre deux, puis entre trois ou quatre d'entre elles. Or, rares sont les enseignants qui ménagent de tels temps de travail sur le transfert, attendant que celui-ci se fasse spontanément chez leurs élèves quand l'occasion se présente. À d'autres moments, les classes de problèmes se diversifient par les tâches mobilisées, une seule et même technique permettant de les réaliser toutes : par exemple, le calcul des dérivées permet de résoudre des problèmes de vitesses ou d'approximations aussi bien que des problèmes d'optimisation. Enfin, à un stade plus évolué de l'apprentissage, on peut faire brasser aux élèves des classes de problèmes se différenciant *à la fois* par le type de tâche mobilisé et par la technique de résolution.

Mais que veut dire « apprendre aux élèves à manœuvrer dans une classe de problèmes ou brasser plusieurs telles classes » ? Cela suppose ce que

CHEVALLARD (1990) appelle *une technique d'étude*, c'est-à-dire « … non pas une procédure ou une méthode qu'il s'agit d'apprendre et de contrôler dans ses étapes, mais [ce qui] travaille la fonctionnalité d'un savoir dans la résolution d'un problème qu'il s'agit de roder dans des conditions standard, de tester dans des conditions limites, d'infirmer peut-être en bordure du champ » (cité par CASTELLA et MERCIER, 1994). Et cela requiert en outre un discours métacognitif polarisé sur le savoir en jeu (SCHNEIDER, 2006b) plus que sur l'apprenant comme c'est bien souvent le cas. Un tel discours peut porter sur les critères de choix d'une technique eu égard à une tâche donnée. Ainsi, pour évaluer une distance inaccessible, une technique trigonométrique est particulièrement appropriée dans une situation où l'on doit gérer à la fois des angles et des longueurs alors que le théorème de Pythagore, par exemple, ne peut convenir car il ne mobilise que des longueurs. Mais, un tel discours doit permettre déjà à l'élève de cerner à la fois l'essence commune des problèmes fédérés par une même tâche et une même technique et les paramètres qui déterminent la variabilité de la classe dont ils font partie. Par exemple, en ce qui concerne les problèmes relevant de la trigonométrie, on peut distinguer les paramètres suivants : le nombre de triangles ou de sous-figures utilisés, le fait que ces figures se situent ou non dans un même plan, le fait qu'elles puissent ou non être dessinées à l'échelle, le fait que l'énoncé soit ou non assorti d'emblée d'un dessin montrant un point de vue « approprié », la possibilité ou l'obligation de prendre des mesures sur le terrain, la possibilité d'avoir recours à une calculatrice …

Dans la section suivante, nous appliquons un tel discours à l'exemple des problèmes d'optimisation relevant du calcul des dérivées. Bien plus, nous illustrons le travail conjoint des élèves et du professeur que suppose l'élaboration d'un tel discours. Car il doit être approprié par les élèves si l'on veut qu'il puisse leur servir de guide pour « étudier » les problèmes déjà résolus dans la perspective de transférer ce qu'ils ont appris à tout autre problème de la même classe.

Illustration d'une technique d'étude à travers l'exemple de la classe des problèmes d'optimisation

Les problèmes d'optimalisation sont au programme de 5e de l'enseignement de transition et suscitent en général un certain désarroi parmi les élèves. Ils sont à coup sûr pour eux des problèmes « complexes et inédits ».

Des problèmes complexes et inédits

Les auteurs des manuels scolaires mais aussi des ouvrages universitaires confirment la complexité de cette matière, pour laquelle « Il n'y a pas à proprement parler de règles strictes et rapides qui permettent à coup sûr de résoudre des problèmes » (STEWART, 2006), ou encore « La variété des problèmes d'optimisation est telle qu'il est bien difficile d'établir une méthode précise de résolution. » (SWOKOWSKI, 1993). La résolution d'un problème d'optimisation relèverait donc plus d'un art que d'une science. Faut-il donc abandonner l'espoir de les voir maitrisés par tous, ou au contraire, y a-t-il des pistes qui peuvent être frayées ?

Convient-il, par exemple, de faire plus d'exercices ? Si ça aide en effet certains élèves, il faut bien reconnaitre que c'est surtout ceux qui analysent ce qui a été fait et pourquoi, ceux qui « étudient les exercices ». Sinon, pour les autres élèves, le constat est bien affligeant : « Plus j'en fais, plus je m'y perds ».

Faut-il espérer trouver une recette miracle, une méthode générale qui permette d'aborder progressivement un problème nouveau ? C'est, hélas, illusoire et inefficace.

Une piste : la catégorisation

Une piste qui apparait plus prometteuse serait de classifier les problèmes pour pouvoir y reconnaitre quelque chose de familier et se retrouver ainsi en terrain connu, d'identifier des similitudes. Citons en effet G. et N. BROUSSEAU :

> Certains de ces énoncés se ressemblent beaucoup et pourraient être mis ensemble. Nous aurions ainsi moins de catégories et de problèmes types à apprendre. Cherchez des problèmes qui se résolvent ou s'expliquent de la même façon. Nous discuterons ensemble les regroupements. En même temps, nous chercherons ce qui peut les rendre différents.

Commençons par interroger les élèves une fois que plusieurs de ces problèmes ont été résolus. Que proposent-ils comme classification possible ? Ensuite penchons-nous sur des catégories que le professeur peut introduire comme pistes d'exploration, en guise de retour réflexif sur les exercices faits. Voici dans ce qui suit les résultats de 3 années successives.

Une première proposition des élèves - que demande-t-on d'optimiser ?

Fonder une classification sur la base de ce qu'on demande de rendre optimal est, d'après notre expérience, ce qui vient d'abord sur le tapis. Les élèves citent dans l'ordre « tout ce qui est une longueur, une aire, un volume… puis ce qui a rapport avec un temps puis un cout puis… puis… ».

Voilà qui est somme toute la traduction d'une progression dans la résistance ou la difficulté qu'ils éprouvent à traiter ces problèmes : pour eux, c'est une gradation dans la complexité qui est ainsi identifiée. Ils se sentent en effet relativement à l'aise avec les problèmes où on parle d'une quantité simple à optimiser (somme, produit…), en général explicite dans l'énoncé - qu'il s'agit avant tout de traduire en langage mathématique, et lorsque cette traduction est assez directe. Mais c'est déjà un peu moins le cas avec des longueurs, aires, ou volumes, moins évident encore avec le temps… et plus du tout maitrisé lorsque des couts, débits, résistances au mouvement, frottements, dissipations ou déperditions calorifiques, etc. entrent en scène. Car si les élèves abordent de bon gré (ou presque) les 2 premières « classes », ils sont bien déconcertés par les suivantes : selon eux, « ce n'est plus des maths », « c'est de la physique ». Le professeur a d'ailleurs l'impression d'avoir violé une règle du jeu implicite, d'avoir rompu son contrat.

Nous repérons bien un signe de l'inconfort de l'élève, qui est censé aussi faire des liens, ou (pire) appliquer des lois supposées « évidentes » ou considérées comme telles. Qui a dit « transversalité » ?

Il peut être éclairant de découvrir ensemble que nous avons essentiellement affaire à des variantes : un problème de temps est en général lié à celui d'une longueur (via la vitesse), un problème de cout peut souvent être relié à une longueur, une aire, un volume (comme des frais de peinture ou de confection). Un débit est proportionnel à une section ; une résistance, un frottement, une dissipation ou déperdition sont aussi liés à des surfaces de contact : ces problèmes cachent donc en général simplement une aire… Une piste pour surmonter l'obstacle peut être de jouer à « un problème en cache un autre », en proposant aux élèves de transformer un problème de longueur, aire, volume en un autre, c'est-à-dire à en changer le contexte.

Si cette classification est naïve, et inutilisable en pratique, elle est révélatrice de malaises et d'obstacles, et est facile à creuser avec les élèves ; elle permet aussi de jouer avec l'énoncé (traduction langage français/mathématique).

Une deuxième proposition des élèves - quel est le nombre de variables ?

La deuxième proposition des élèves est fréquemment de se baser sur le nombre de variables utilisées. Ceci est largement induit par un effet de contrat, car c'est l'approche classique des premières étapes de la résolution de problèmes d'optimisation : de combien de variables a-t-on besoin ?

Il est intéressant de procéder, lors de la ré-exploration des exercices faits, à une analyse du « comment a-t-on procédé ? ». Le fil rouge est ici : quelles stratégies ont été utilisées, combien de variables et lesquelles ?

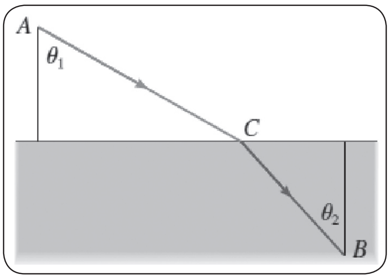
De cette pratique réflexive peuvent émerger de nombreuses pistes que les élèves alimentent spontanément :

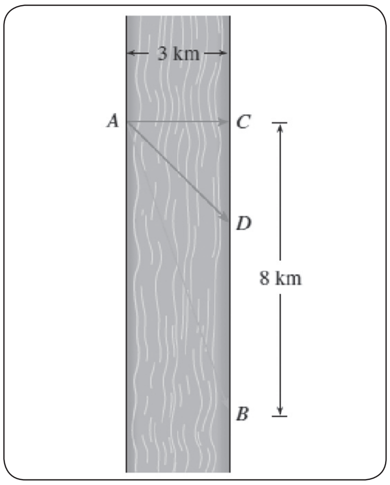
- y a-t-il un guide pour choisir la ou les variable(s) ? Que les élèves apprennent à exprimer en : « si je devais expliquer à quelqu'un de quoi on parle, quelle information suffit-il de lui donner ? »
- faut-il vraiment se soucier de choisir ses variables ? Pour citer quelques élèves, « On finit quand même par n'en avoir plus qu'une, puisqu'on élimine les autres , il n'en reste qu'une et c'est la bonne ». Et un débat peut être entamé sur « Oui… mais laquelle, y en a-t-il une «meilleure» que les autres ? »
- et quelles relations établir entre les variables : peut-on classer les divers cas rencontrés ? Les élèves introduisent assez naturellement quelques distinctions de leur cru, comme : relations explicites dans l'énoncé (avec l'indispensable nécessité de le traduire du français en mathématique), relations algébriques (souvent issues d'une formule : un périmètre, d'une aire, d'un volume, d'un cout total…), géométriques (Pythagore, triangles semblables, Thalès), trigonométriques…

Une classification basée sur le type de fonction à optimiser - une classe importante

Une classe particulière mérite d'être explorée en détail : c'est celle qui mène à l'étude de certaines fonctions irrationnelles - qui en fait émergent naturellement comme cas particuliers de la loi de Snell-Descartes. Elle est typiquement introduite par l'enseignant.

Cette classe de problèmes particuliers est riche en variables didactiques. Ainsi, la fonction à optimiser peut être un temps, une distance, un cout… Il est intéressant de faire varier les divers paramètres et de regarder ce qui se produit : le comportement s'avère différent selon qu'on change certains paramètres (comme les vitesses dans chaque milieu…).





Techniquement aussi, cette classe présente une difficulté particulière : l'étude de la variation de la fonction n'est pas toujours simple, notamment à cause des racines carrées. Ceci perturbe les élèves, pour qui l'étude du signe de la dérivée première (et seconde, encore plus pénible ici) est incontournable. Or c'est superflu :

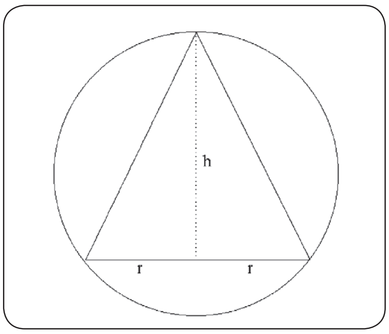
- la physique du problème permet de déduire que l'extremum trouvé doit être un minimum (ou un maximum)
- considérer les asymptotes obliques suffit à donner l'allure de la fonction.

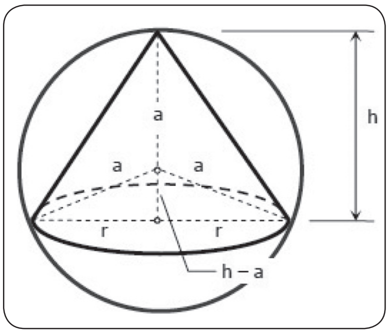
Des obstacles particuliers

Plusieurs obstacles précis sont régulièrement rencontrés par les élèves. On en détaille quelques-uns ci-après.

Premièrement, un problème où la solution optimale est liée à une mise à l'échelle : l'énoncé dit « proportionnel », sans indiquer quel est le rapport de proportionnalité ou encore dit « fixée » sans expliciter quelle valeur serait imposée. Voilà qui jette quelque trouble parmi les élèves : « il manque quelque chose », « on ne donne pas le rapport ? », « c'est impossible » sont quelques-unes de leurs réflexions. Alors que si une grandeur (fonction) est optimale, un multiple de celle-ci le sera aussi ; il s'agit d'un simple choix - arbitraire - d'unités, d'échelle. Bien souvent, imposer une « norme » simplifiera le problème et clarifiera la situation. Mais encore faut-il ensuite commenter l'artifice technique et sa réelle nécessité. Un tel problème est aussi symptomatique de la crainte des élèves de « jouer » avec des coefficients littéraux.

Deuxièmement, passer d'une vue plane (2D) à une vue de l'espace (3D) n'est pas aisé pour tous. On note en effet un malaise général avec la perception 3D, la perspective, la construction graphique, et plus généralement la représentation de la réalité sous forme de schéma intelligible à partir duquel on peut déduire des relations. C'est que savoir représenter la réalité doit s'apprendre, et trop souvent le professeur est tenté de « souffler » à ses élèves en agrémentant son énoncé de nombreux dessins, littéraux, représentations par projections, en coupes, etc. (dessin ci-après). À noter que, malgré tous ses efforts, le professeur constatera qu'une difficulté subsiste : l'irrésistible envie d'« aplatir » l'ensemble du problème - et non juste le dessin — lors du passage 3D à 2D (les volumes devenant des aires pour certains élèves).





Troisièmement, on relève la confusion entre ce qui est à optimiser et les relations entre variables, déjà évoquée plus haut. On assiste ici à diverses inversions, à divers mélanges, avec la volonté d'arriver à n'importe quel prix à « une formule » afin de satisfaire l'enseignant… et souvent en dépit du bon sens. Une expérience simple à réaliser avec les élèves peut aplanir l'obstacle : proposer aux élèves de se transformer en inventeurs de problèmes, c'est-à-dire de modifier un énoncé pour que les rôles entre variables soient échangés. Par exemple, optimiser une aire ou un volume avec contrainte sur un périmètre ou une aire et vice versa.

Quels outils utiliser, de quoi faut-il se souvenir ?

Une angoisse particulière des élèves : avec les problèmes d'optimisation, « Il faut se souvenir de tout car beaucoup de choses, de formules interviennent ».

D'où l'idée de demander aux élèves de réaliser un pense-bête, d'élaborer avec eux un formulaire « bouée de secours » qui se veut bien sûr rassurant, mais aussi qui permet de dresser la liste des diverses techniques abordées.

À la question : « Qu'y mettre ? De quoi a-t-on besoin ? Quels sont les incontournables ? », on est parfois surpris de voir apparaitre bien des choses qu'on considérait ou espérait connues, car on y retrouve les formules de volume, d'aire et de périmètre, la trigonométrie du triangle rectangle, les cas de triangles semblables, Thalès, les rapports entre angle inscrit et angle au centre – qui remontent à bien loin déjà, mais aussi l'ensemble du second degré (racines, sommet, signe), plus généralement l'étude du signe (matière de 4e) et encore, plus surprenant, du vocabulaire élémentaire (quotient, terme, facteur)…

Des problèmes qui supposent tous le calcul des dérivées ?

L'optimisation est prévue au programme comme une application des dérivées. Il est intéressant de vérifier avec les élèves si cette technique est toujours incontournable. Donc de demander aux élèves : « Est-ce toujours vrai ? Systématique ? Sinon, pourquoi ? Avons-nous rencontré des contre-exemples ? ».

Arrivent dans le désordre quelques intéressantes constatations : un maximum ou un minimum peut être réalisé aux bornes de l'intervalle ; une fonction peut être non dérivable (même en étant continue) ; la fonction à optimiser peut être un trinôme du deuxième degré (une vieille connaissance qui ne nécessite pas de dérivation) ; ou encore, la fonction à optimiser peut posséder un extremum évident ne nécessitant guère de longs calculs.

Enfin, il est également intéressant pour le professeur de lever un coin du voile sur d'autres domaines importants qui relèvent de l'optimisation, comme la programmation linéaire qui peut être évoquée en s'appuyant sur des problèmes simples mais concrets, utilisant des techniques bien connues des élèves (systèmes linaires et inéquations).

Retour vers les manuels et leurs auteurs

Et pourquoi ne pas demander aux élèves leur avis sur les conseils des auteurs, sur ceux des manuels scolaires ? Dans la plupart de ces manuels, en général quelques paragraphes sont consacrés aux « stratégies » à utiliser dans le cas de problèmes d'optimisation, même si l'on concède bien volontiers qu'il n'y a pas de méthode générale. Ces stratégies sont-elles effectives ? Quelles sont leurs limites et leurs prétentions ? Les élèves ne manquent pas de les regarder maintenant d'un œil critique, et sont à même de distinguer leur applicabilité et de proposer des améliorations ou des « attention à ». Plus encore, ils reconnaissent une certaine vanité à prétendre à des techniques absolument générales, et ceci donne un sentiment de normalité à ce qui au début était source d'inconfort.

En guise de conclusion provisoire - retour sur l'utilisation d'une catégorisation

Le processus suivi vise donc à réaliser une « Exploration systématique des classes de problèmes (types de tâches), des techniques qui permettent de les résoudre efficacement et du discours technologique (au sens d'Y. Chevallard, 1999) qui justifie et rend intelligible l'usage de telle technique pour telle classe de problèmes et qui étudie le champ d'opérationnalité de la technique. »

Dans cette approche, les élèves jouent collectivement le rôle d'« analystes du savoir », en étudiant la manière dont les problèmes ont été appréhendés et résolus, en exprimant et en analysant les obstacles rencontrés, en explorant les types de tâches associées aux diverses classes de problèmes et les techniques les plus efficaces.

Il n'y a pas de quête d'une recette miracle, mais une focalisation sur la reconnaissance de classes de problèmes identifiées et travaillées préalablement, comme on l'a observé chez les experts. Ces problèmes restent inédits et complexes, mais maitrisables, non pas par le fait d'en avoir fait tant et tant, mais par celui de les avoir répertoriés en genres, en classes. Ceci est à rapprocher du comportement du crisis manager :

> Au fur et à mesure qu'il gère des crises, le crisis manager construit un savoir-faire d'expérience par lequel il se dote d'une classification des crises ainsi que d'un répertoire de procédures adaptées. Bref, au fur et mesure que le crisis manager acquiert de l'expertise, la notion de crise se dissout progressivement.
> (M. Crahay)

Débat et conclusion en lien avec le thème de l'université d'été

La présentation précédente visait à décontextualiser le propos par rapport à l'exemple développé. Elle a permis aux participants à l'atelier d'évoquer d'autres contenus d'enseignement, tous niveaux scolaires confondus, auxquels certains aspects de l'exposé peuvent être appliqués. Il semble qu'ils souscrivaient volontiers à la perspective développée et sont revenus, pour la plupart, sur la question du sens en mathématiques.

La conclusion commence par un fait divers relaté et commenté par M. Schneider (2006a), qui concerne ce que l'on appelle les « problèmes de dénombrement » proposés au cours des deux premières années de l'enseignement secondaire, dans les programmes scolaires belges ou dans les manuels. Ces problèmes supposent d'identifier d'abord une régularité dans une suite de nombres figurés par des objets et d'exprimer ensuite cette régularité par une formule susceptible de donner le nombre d'objets à toute étape. Des professeurs enseignant dans des écoles voisines font part à un conseiller pédagogique de leur perplexité face à ces problèmes que leurs élèves échouent souvent à résoudre. Le conseiller rassemble plusieurs de ces problèmes et explique aux professeurs, qui n'en sont pas conscients, les diverses structures fonctionnelles sous-jacentes à ces problèmes. Dans le cas présent, celles-ci sont au nombre de cinq et des techniques particulières permettent de les repérer et de les traiter au-delà du contexte : ainsi, une suite arithmétique se traduit par des écarts constants d'un terme au suivant et la formule associée ne fait que rendre compte du nombre de fois qu'il faut ajouter cet écart pour obtenir un terme donné… Les professeurs apprécient l'enseignement prodigué par le conseiller pédagogique car, disent-ils, ce discours les aide eux-mêmes à y voir plus clair dans le « fouillis » des problèmes qu'ils parviennent enfin à « catégoriser ». Le conseiller pédagogique les engage à travailler ces problèmes de la même façon avec leurs élèves. La réponse des professeurs est le fait que je voudrais analyser ici : « Si nous faisons la même chose avec nos élèves, ce ne sera plus pour eux de la résolution de problèmes ».

Ce fait divers est révélateur, d'une part, d'une conception de la résolution de problèmes qui relève d'une certaine quête d'absolu et, d'autre part, d'une définition très générale de ce qu'est un problème, généralement non mise en question, dans laquelle on trouve des références au caractère inédit et/ou complexe. Cette conception de la résolution de problèmes s'accommode mal d'une catégorisation des problèmes, ce qui fait que chacun d'eux doit se résoudre presque indépendamment des autres, le progrès ne pouvant venir que de l'exercice répété de la démarche même de résolution de problèmes. Et c'est ce qui explique que les professeurs soient réticents à montrer à leurs élèves les structures fonctionnelles sous-jacentes aux problèmes de dénombrement, sans doute dans la crainte de voir les problèmes se convertir en exercices « répétitifs » et leur résolution, en « recettes ». Pour eux, la résolution de problèmes est ou n'est pas et tout enseignement pollue en quelque sorte la pureté de la démarche. Sans doute, le spectre d'une évaluation « scientifique », souvent associé à la réforme des compétences, participe de cet absolutisme. Une telle évaluation est censée « mesurer » l'objectif annoncé. Or, disent les enseignants, comment évaluer rigoureusement la progression des élèves en matière de résolution de problèmes si ce n'est en leur soumettant de « vrais » problèmes à résoudre, c'est-à-dire des problèmes qu'ils n'ont pas encore rencontrés ? À leurs yeux, toute entreprise susceptible d'aider les élèves dans cette tâche ne pourrait qu'interférer avec celle d'une évaluation scientifique de la démarche visée.

Dans notre perspective, au contraire, un élève qui apprend à résoudre des problèmes, c'est avant tout un élève qui apprend à manœuvrer à l'intérieur de classes de problèmes au sens décrit plus haut et à brasser des classes de plus en plus nombreuses, ce qui est, somme toute, beaucoup plus modeste. Mais force est de constater que de tels brassages sont peu organisés dans les pratiques curriculaires, même au sein d'une même année scolaire. Sans doute l'approche préconisée est-elle moins glorieuse, les transferts que l'élève arrive à faire ayant été en quelque sorte induits par l'enseignement, alors que les professeurs souhaitent vérifier vraiment, sans concession, si les élèves sont capables de transférer une attitude « de recherche » ou une méthode générale de résolution de problèmes. Mais que vise-t-on vraiment ? En définitive, l'alternative n'est-elle pas la suivante : se retenir d'enseigner pour sélectionner les « meilleurs » élèves ou chercher à ce que tous apprennent, quitte à ce que l'évaluation ne permette pas vraiment de faire la part entre les apprentissages des élèves et l'efficacité de l'enseignement lui-même ? Nous sommes là en effet en présence d'un malentendu scolaire propre à accentuer des inégalités scolaires au sens développé par Bautier et Rayou (2009), les manières de faire et « d'étudier » les problèmes mathématiques, classe par classe, comme le font les experts en la matière, n'étant visibles qu'aux élèves qui peuvent les rencontrer en dehors des temps et lieux scolaires.

Bibliographie

Bautier E. et Rayou P. (2009). *Les inégalités d'apprentissage*. Paris : PUF.

Brousseau G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Castella C. & Mercier A. (1994). Peut-on enseigner des méthodes ? Comment les élèves apprennent-ils des méthodes ? *Bulletin de la Commission Inter-IREM de didactique des mathématiques*, 1.

Chevallard Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie, Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit X*, 19, 43-72.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-265.

Crahay M. (2006), Dangers, incertitudes et incomplétude de la logique de la compétence en éducation, *Revue Française de Pédagogie*, 154, 97-110.

Fagnant A. & Demonty I. (2005). *Résoudre des problèmes : pas de problème ! Guide méthodologique et documents reproductibles*. Bruxelles : De Boeck.

Kahn S. (2010). *Différents types de compétences : Comment les faire acquérir ? Comment les évaluer ?* Socle commun et travail par compétences. Balises et boussole, origine inconnue.

Reusser & Stebler (1997). Every word problem has a solution. The social rationality of mathematical modelling in schools. *Learning and Instruction,* 7(4), 309-327.

Rey B., Carette V. & Kahn S. (2002). *Lignes directrices pour la construction d'outils d'évaluation relatifs aux socles de compétences*. Rapport de recherche du Service des Sciences de l'éducation de L'Université libre de Bruxelles.

Rey B. (2009). Les compétences, oui, mais ce qui compte, c'est de faire apprendre …, *Café pédagogique* du 6 décembre 2009, INRP.

Schneider M. (2006a). Quand le courant pédagogique 'des compétences' empêche une structuration des enseignements autour de l'étude et de la classification de questions parentes. *Revue Française de Pédagogie*, 154, 85-96.

Schneider M. (2006b). Comment des théories didactiques permettent-elles de penser le transfert en mathématiques ou dans d'autres disciplines ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26 (1), 9-38.

Schneider M. (2007). Les compétences comme cadre pour organiser des enseignements de mathématiques ? Oui, mais … Quelques dérives possibles. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, vol. 7, numéro 1, 28-40.

Schneider M. (2008). Traité de didactique des mathématiques. La didactique par des exemples et contre-exemples. Les Editions de l'Université de Liège.

Schneider M. & Mercier A. (à paraitre). *Approche par compétences, définition et désignation des savoirs mathématiques : peut-on envisager la disparition d'une organisation disci-*

plinaire des savoirs ? Exposé au 3e colloque organisé par l'Association pour des Recherches en Didactique Comparée, Lille, janvier 2011.

Schoenfeld A.H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. In L.B. Resnick et L.E. Klopfer (dir.), *Toward the thinking curriculum : Current cognitive research*, 83-104. Alexandria : VA : Association for Supervision and Curriculum Development.

Stewart J. (2006). *Analyse 1*. Bruxelles : De Boeck.

Swokowski E.W. (1993). *Analyse*. Bruxelles : De Boeck.

Tardif J. (1999). *Le transfert des apprentissages*. Montréal : Les Éditions Logiques.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands : Swets & Zeitlinger.

Zarifian Ph. (1988), L'émergence du modèle de la compétence. In F. Stankiewicz, *Les stratégies d'entreprise face aux ressources humaines. L'après taylorisme*. Paris : Economica.