

Fonction de Riemann généralisée

Laurent SIMONS

L.Simons@ulg.ac.be

Travail en collaboration avec

Françoise BASTIN (F.Bastin@ulg.ac.be)

Samuel NICOLAY (S.Nicolay@ulg.ac.be)

Université de Liège (Belgique) – Département de Mathématique

Journées du GDR Analyse multifractale

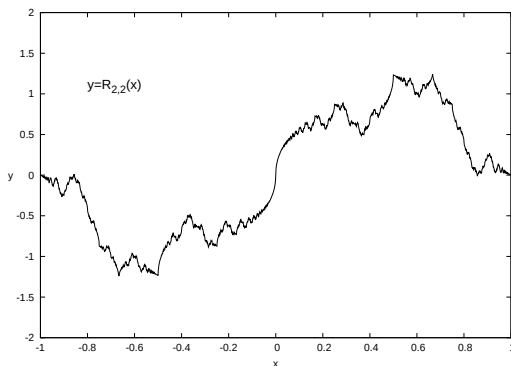
Nouan-le-Fuzelier (France) – 21-24 septembre 2014

Introduction

A la fin du 19^e siècle, Riemann proposa la fonction R définie par

$$R(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

comme fonction continue nulle part dérivable.



Introduction

À la fin du 19^e siècle, Riemann proposa la fonction R définie par

$$R(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

comme fonction continue nulle part dérivable.

Théorème

La fonction R n'est seulement dérivable qu'en les nombres rationnels

$$\frac{2p+1}{2q+1}$$

avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$.



G. H. Hardy, *Weierstrass's Non-Differentiable Function*, Transactions of the American Mathematical Society **17**, 301-325, 1916.



J. L. Gerver, *The Differentiability of the Riemann Function at Certain Rational Multiples of π* , American Journal of Mathematics **92**, 33-55, 1970.

Introduction

Soit $\alpha > 0$. La fonction bornée f appartient à

- l'espace de Hölder $C^\alpha(x_0)$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe une constante $C > 0$ et un polynôme P de degré strictement plus petit que α tels que

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$;

- l'espace uniforme de Hölder $C^\alpha(\mathbb{R})$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un polynôme P de degré strictement plus petit que α tel que

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.



S. Jaffard, *Wavelet Techniques in Multifractal Analysis*, In Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **72**, 91-152, 2004.



G. Krantz, *Lipschitz Spaces, Smoothness of Functions, and Approximation Theory*, Expositiones Mathematica **3**, 193-260, 1983.

Introduction

Soit f une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.

- L'exposant de Hölder de f au point $x_0 \in \mathbb{R}$ est

$$h_f(x_0) := \sup\{\alpha > 0 : f \in C^\alpha(x_0)\}.$$

- L'exposant uniforme de Hölder de f sur $\mathbb{R}$ est

$$h_f(\mathbb{R}) := \sup\{\alpha > 0 : f \in C^\alpha(\mathbb{R})\}.$$

Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $h_f(\mathbb{R}) \geq 1$. Si $h_f(\mathbb{R}) < 1$, f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$. Il existe des fonctions nulle part dérivable sur $\mathbb{R}$ avec un exposant uniforme de Hölder égal à 1. Un exemple célèbre est la fonction de Takagi.



T. Takagi, *A Simple Example of the Continuous Function without Derivative*, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan **1**, 176-177, 1903.



A. Shidfar, K. Sabetfakhri, *On the Continuity of van der Waerden's Function in the Hölder Sense*, American Mathematical Monthly **93**, 375-376, 1986.

Introduction

Soit f une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.

- L'exposant de Hölder de f au point $x_0 \in \mathbb{R}$ est

$$h_f(x_0) := \sup\{\alpha > 0 : f \in C^\alpha(x_0)\}.$$

- L'exposant uniforme de Hölder de f sur $\mathbb{R}$ est

$$h_f(\mathbb{R}) := \sup\{\alpha > 0 : f \in C^\alpha(\mathbb{R})\}.$$

Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $h_f(\mathbb{R}) \geq 1$. Si $h_f(\mathbb{R}) < 1$, f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$. Il existe des fonctions nulle part dérivable sur $\mathbb{R}$ avec un exposant uniforme de Hölder égal à 1. Un exemple célèbre est la fonction de Takagi.



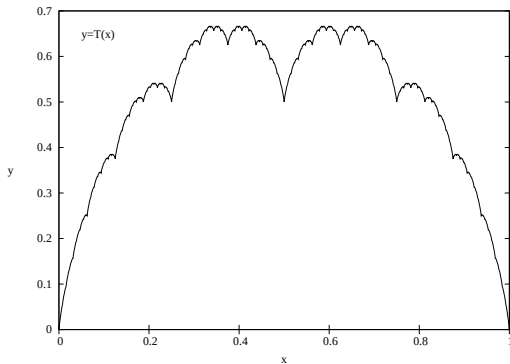
T. Takagi, *A Simple Example of the Continuous Function without Derivative*, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan **1**, 176-177, 1903.



A. Shidfar, K. Sabetfakhri, *On the Continuity of van der Waerden's Function in the Hölder Sense*, American Mathematical Monthly **93**, 375-376, 1986.

Fonction de Takagi

$$T(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \operatorname{dist}(2^n x, \mathbb{Z}), \quad x \in \mathbb{R}$$



Fonction de Darboux

En 1875, Darboux montra que la fonction D définie par

$$D(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)!x)}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

est continue, mais nulle part dérivable sur $\mathbb{R}$.



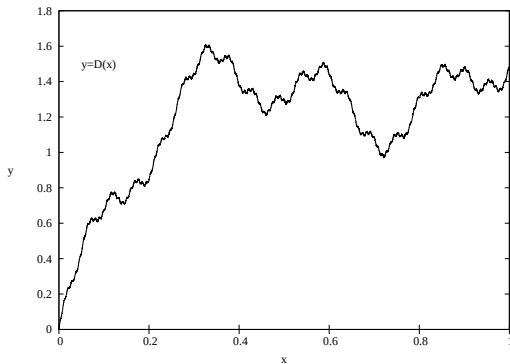
G. Darboux, *Mémoire les fonctions discontinues*, Annales de l'Ecole Normale **2** (4), 57-112, 1875.



G. Darboux, *Addition au mémoire sur les fonctions discontinues*, Annales de l'Ecole Normale **2** (8), 195-202, 1879.

Fonction de Darboux

$$D(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)!x)}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$



Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h_D(x) = h_D(\mathbb{R}) = 1$.

Introduction

Théorème

On a $R \in C^{1/2}(\mathbb{R})$ et $h_R(\mathbb{R}) = 1/2$.



M. Holschneider, P. Tchamichian, *Pointwise Analysis of Riemann's "Nondifferentiable" Function*, *Inventiones Mathematicae* **105**, 157-175, 1991.

Introduction

Théorème

On a $R \in C^{1/2}(\mathbb{R})$ et $h_R(\mathbb{R}) = 1/2$.

Théorème

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors

$$h_R(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\tau(x)}$$

où $\tau(x) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$, $\tau_n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) est défini par $|x - p_n/q_n| \leq 1/q_n^{\tau_n}$ et $(p_n/q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des convergents de x telle que p_n et q_n ne sont pas simultanément impairs. De plus, pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$, on a

$$h_R\left(\frac{2p+1}{2q+1}\right) = \frac{3}{2}.$$



S. Jaffard, *The Spectrum of Singularities of Riemann's Function*, Revista Matemática Iberoamericana **12** (2), 441-460, 1996.



S. Jaffard, Y. Meyer, *Wavelet Methods for Pointwise Regularity and Local Oscillations of Functions*, Memoirs of the American Mathematical Society (Book **587**), 1996.

Introduction

La fonction de Riemann généralisée est la fonction (continue et bornée) $R_{\alpha,\beta}$ ($\alpha > 1$ et $\beta > 0$) définie par

$$R_{\alpha,\beta}(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^\beta x)}{n^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Si $\beta \in]0, \alpha - 1[$, alors $R_{\alpha,\beta}$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Si $\beta \geq \alpha + 1$, alors $R_{\alpha,\beta}$ est une fonction continue nulle part dérivable sur $\mathbb{R}$.

 W. Luther, *The Differentiability of Fourier Gap Series and "Riemann's Example" of a Continuous, Nondifferentiable Function*, *Journal Approximation Theory* **48**, 303-321, 1986.

- Si $\beta \in [\alpha - 1, \alpha + 1[$, quelques résultats partiels concernant la dérivabilité sont connus.

Introduction

La fonction de Riemann généralisée est la fonction (continue et bornée) $R_{\alpha,\beta}$ ($\alpha > 1$ et $\beta > 0$) définie par

$$R_{\alpha,\beta}(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^{\beta} x)}{n^{\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Théorème

Si $\beta > \alpha - 1$, alors $R_{\alpha,\beta} \in C^{\frac{\alpha-1}{\beta}}(\mathbb{R})$.



F. Chamizo, A. Ubis, *Some Fourier series with gaps*, Journal d'analyse mathématique **101**, 179-197, 2007.



J. Johnsen, *Simple Proofs of Nowhere-Differentiability for Weierstrass's Function and Cases of Slow Growth*, Journal of Fourier Analysis and Applications **16**, 17-33, 2010.

Dans certains cas particuliers, des résultats ponctuels sont également connus...

Introduction

La fonction de Riemann généralisée est la fonction (continue et bornée) $R_{\alpha,\beta}$ ($\alpha > 1$ et $\beta > 0$) définie par

$$R_{\alpha,\beta}(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^\beta x)}{n^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Théorème

- Si $\beta > \alpha - 1$, alors $R_{\alpha,\beta} \in C^{\frac{\alpha-1}{\beta}}(\mathbb{R})$.
- Si $\beta = \alpha - 1$, alors $R_{\alpha,\alpha-1} \in C^{1-\delta}(\mathbb{R})$ pour tout $\delta \in]0,1[$.

De plus, on a

$$h_{R_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}) = \frac{\alpha - 1}{\beta}$$

pour $\beta \geq \alpha - 1$.



F. Bastin, S. Nicolay, L. Simons, *About the Uniform Hölder Continuity of Generalized Riemann Function*, 2014, submitted.

Introduction

La fonction de Riemann généralisée est la fonction (continue et bornée) $R_{\alpha,\beta}$ ($\alpha > 1$ et $\beta > 0$) définie par

$$R_{\alpha,\beta}(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^\beta x)}{n^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Contenu de l'exposé

- ➊ Transformée en ondelette continue et continuité höldérienne
- ➋ Continuité höldérienne uniforme de $R_{\alpha,\beta}$
- ➌ Extension et remarque
- ➍ Comportement de $R_{\alpha,\beta}$ lorsque α ou β tend vers l'infini

Transformée en ondelette continue

La fonction ψ est une ondelette si $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{\psi}(0) = 0$.

La transformée en ondelette continue de la fonction bornée f (par rapport à l'ondelette ψ) est la fonction $\mathcal{W}_\psi f$ définie par

$$\mathcal{W}_\psi f(a,b) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{a} \overline{\psi} \left(\frac{x-b}{a} \right) dx, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

Exemple

En prenant l'ondelette de Lusin ψ_L définie par

$$\psi_L(x) := \frac{1}{\pi(x+i)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

on a

$$\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\beta}(a,b) = ia\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\pi n^\beta(b+ia)}}{n^{\alpha-\beta}}$$

pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Transformée en ondelette continue

La fonction ψ est une ondelette si $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{\psi}(0) = 0$.

La transformée en ondelette continue de la fonction bornée f (par rapport à l'ondelette ψ) est la fonction $\mathcal{W}_\psi f$ définie par

$$\mathcal{W}_\psi f(a,b) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{a} \overline{\psi} \left(\frac{x-b}{a} \right) dx, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

Exemple

En prenant l'ondelette de Lusin ψ_L définie par

$$\psi_L(x) := \frac{1}{\pi(x+i)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

on a

$$\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\beta}(a,b) = ia\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\pi n^\beta(b+ia)}}{n^{\alpha-\beta}}$$

pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Transformée en ondelette continue

Théorème – Formule de reconstruction

Soit ψ une ondelette de $H^2(\mathbb{R}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f} = 0 \text{ pp. sur }]-\infty, 0[\}$. Soit φ une ondelette dérivable telle que $x \mapsto x\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R})$, $D\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ et

$$\int_0^{+\infty} \overline{\hat{\psi}(\xi)} \hat{\varphi}(\xi) \frac{d\xi}{\xi} = 1.$$

Si f est une fonction continue et bornée telle que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(t) dt \right| = 0,$$

alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ r \rightarrow +\infty}} 2 \int_{\varepsilon}^r \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_{\psi} f(a, b) \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right) db \right) \frac{da}{a}.$$



M. Holschneider, P. Tchamichian, *Pointwise Analysis of Riemann's "Nondifferentiable" Function*, *Inventiones Mathematicae* **105**, 157-175, 1991.

Transformée en ondelette continue

Théorème – Caractérisation des espaces de Hölder

Soient $\alpha \in]0,1[$, ψ une ondelette telle que $x \mapsto x^\alpha \psi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ et f une fonction comme dans le théorème précédent.

- On a $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que

$$|\mathcal{W}_\psi f(a,b)| \leq C a^\alpha$$

pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.



S. Jaffard, *The Spectrum of Singularities of Riemann's Function*, Revista Matematica Iberoamericana **12** (2), 441-460, 1996.

Transformée en ondelette continue

Théorème – Caractérisation des espaces de Hölder

Soient $\alpha \in]0,1[$, ψ une ondelette telle que $x \mapsto x^\alpha \psi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ et f une fonction comme dans le théorème précédent.

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $f \in C^\alpha(x_0)$, alors il existe $C > 0$ et $\eta > 0$ tels que

$$|\mathcal{W}_\psi f(a,b)| \leq C a^\alpha \left(1 + \left(\frac{|b - x_0|}{a} \right)^\alpha \right)$$

pour tous $a \in]0,\eta[$ et $b \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$. Inversement, s'il existe $\alpha' \in]0,\alpha[$, $C > 0$ et $\eta > 0$ tels que

$$|\mathcal{W}_\psi f(a,b)| \leq C a^\alpha \left(1 + \left(\frac{|b - x_0|}{a} \right)^{\alpha'} \right)$$

pour tous $a \in]0,\eta[$ et $b \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, alors $f \in C^\alpha(x_0)$.



S. Jaffard, *The Spectrum of Singularities of Riemann's Function*, Revista Matematica Iberoamericana **12** (2), 441-460, 1996.

Continuité höldérienne uniforme de $R_{\alpha,\beta}$

Théorème

- Si $\beta > \alpha - 1$, alors $R_{\alpha,\beta} \in C^{\frac{\alpha-1}{\beta}}(\mathbb{R})$.
- Si $\beta = \alpha - 1$, alors $R_{\alpha,\alpha-1} \in C^{1-\delta}(\mathbb{R})$ pour tout $\delta \in]0,1[$.

De plus, on a

$$h_{R_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}) = \frac{\alpha - 1}{\beta}$$

pour $\beta \geq \alpha - 1$.

Preuve

On a

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\beta}(a,b)| \leq a\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-a\pi n^\beta}}{n^{\alpha-\beta}} = |\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\beta}(a,0)|$$

pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^{-a\pi x^\beta} / x^{\alpha-\beta}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ seulement si $\beta > \alpha - 1$. Regardons plus en détail le cas $\beta = \alpha - 1$.

Continuité höldérienne uniforme de $R_{\alpha,\beta}$

Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On sait que

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\beta}(a,b)| \leq a\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-a\pi n^\beta}}{n^{\alpha-\beta}} = |\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\beta}(a,0)|$$

Dès lors, on a

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\alpha-1}(a,b)| \leq a\pi \left(e^{-a\pi} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-a\pi x^{\alpha-1}}}{x} dx}_{E_1(a\pi)} \right)$$

et

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\alpha-1}(a,0)| \geq \frac{a\pi}{\alpha-1} E_1(a\pi).$$

La conclusion provient de l'encadrement

$$\frac{1}{2} e^{-x} \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) < E_1(x) < e^{-x} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

valable pour tout $x > 0$.

Continuité höldérienne uniforme de $R_{\alpha,\beta}$

Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On sait que

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\beta}(a,b)| \leq a\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-a\pi n^\beta}}{n^{\alpha-\beta}} = |\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\beta}(a,0)|$$

Dès lors, on a

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\alpha-1}(a,b)| \leq a\pi \left(e^{-a\pi} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-a\pi x^{\alpha-1}}}{x} dx}_{E_1(a\pi)} \right)$$

et

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\alpha-1}(a,0)| \geq \frac{a\pi}{\alpha-1} E_1(a\pi).$$

La conclusion provient de l'encadrement

$$\frac{1}{2} e^{-x} \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) < E_1(x) < e^{-x} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

valable pour tout $x > 0$.

Continuité höldérienne uniforme de $R_{\alpha,\beta}$

- On a donc

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\alpha-1}(a,b)| \leq a\pi e^{-a\pi} \left(1 + \frac{1}{\alpha-1} \ln \left(1 + \frac{1}{a\pi}\right)\right)$$

pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Pour $\delta \in]0,1[$, il existe $C > 0$ tel que

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\alpha-1}(a,b)| \leq Ca^{1-\delta}$$

pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ et donc $R_{\alpha,\alpha-1} \in C^{1-\delta}(\mathbb{R})$.

- On a aussi

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\alpha-1}(a,0)| \geq a \frac{\pi}{2(\alpha-1)} e^{-a\pi} \ln \left(1 + \frac{2}{a\pi}\right)$$

pour tout $a > 0$. Pour tout $C > 0$, il existe $A > 0$ tel que

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\alpha-1}(a,0)| > Ca$$

pour tout $a \in]0,A[$ et donc, $h_{R_{\alpha,\alpha-1}}(\mathbb{R}) = 1$.

Continuité höldérienne uniforme de $R_{\alpha,\beta}$

- On a donc

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\alpha-1}(a,b)| \leq a\pi e^{-a\pi} \left(1 + \frac{1}{\alpha-1} \ln \left(1 + \frac{1}{a\pi}\right)\right)$$

pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Pour $\delta \in]0,1[$, il existe $C > 0$ tel que

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\alpha-1}(a,b)| \leq Ca^{1-\delta}$$

pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ et donc $R_{\alpha,\alpha-1} \in C^{1-\delta}(\mathbb{R})$.

- On a aussi

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\alpha-1}(a,0)| \geq a \frac{\pi}{2(\alpha-1)} e^{-a\pi} \ln \left(1 + \frac{2}{a\pi}\right)$$

pour tout $a > 0$. Pour tout $C > 0$, il existe $A > 0$ tel que

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\alpha-1}(a,0)| > Ca$$

pour tout $a \in]0,A[$ et donc, $h_{R_{\alpha,\alpha-1}}(\mathbb{R}) = 1$.

Continuité höldérienne uniforme de $R_{\alpha,\beta}$

- On a donc

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\alpha-1}(a,b)| \leq a\pi e^{-a\pi} \left(1 + \frac{1}{\alpha-1} \ln \left(1 + \frac{1}{a\pi}\right)\right)$$

pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Pour $\delta \in]0,1[$, il existe $C > 0$ tel que

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\alpha-1}(a,b)| \leq Ca^{1-\delta}$$

pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ et donc $R_{\alpha,\alpha-1} \in C^{1-\delta}(\mathbb{R})$.

- On a aussi

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\alpha-1}(a,0)| \geq a \frac{\pi}{2(\alpha-1)} e^{-a\pi} \ln \left(1 + \frac{2}{a\pi}\right)$$

pour tout $a > 0$. Pour tout $C > 0$, il existe $A > 0$ tel que

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha,\alpha-1}(a,0)| > Ca$$

pour tout $a \in]0,A[$ et donc, $h_{R_{\alpha,\alpha-1}}(\mathbb{R}) = 1$.

Série nonharmonique de Fourier

Soient $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ une suite de nombres complexes et $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ une suite croissante de nombres strictement positifs qui tend vers l'infini. Une *série nonharmonique de Fourier* (relative à $\mathbf{a}$ et $\boldsymbol{\lambda}$) est la fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{i\lambda_n x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

si la série est convergente.



R. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Academic Press, San Diego, 2001.

On suppose que la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est absolument convergente.

On a

$$\mathcal{W}_{\psi_L} S(a, b) = -2a \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda_n e^{i\lambda_n(b+ia)}$$

pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Série nonharmonique de Fourier

Soient $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ une suite de nombres complexes et $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ une suite croissante de nombres strictement positifs qui tend vers l'infini. Une *série nonharmonique de Fourier* (relative à $\mathbf{a}$ et $\boldsymbol{\lambda}$) est la fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{i\lambda_n x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

si la série est convergente.



R. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Academic Press, San Diego, 2001.

On suppose que la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est absolument convergente.

On a

$$\mathcal{W}_{\psi_L} S(a, b) = -2a \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda_n e^{i\lambda_n(b+ia)}$$

pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Série nonharmonique de Fourier

Si on suppose qu'il existe $C_1, C_2, C_3 > 0$, $\alpha > 1$ et $\beta > 0$ tels que

$$|a_n| \leq \frac{C_1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad C_2 n^\beta \leq \lambda_n \leq C_3 n^\beta$$

pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on obtient

$$|\mathcal{W}_{\psi_L} S(a, b)| \leq 2aC_1C_3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-C_2an^\beta}}{n^{\alpha-\beta}}$$

pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Proposition

Dans ces conditions sur a et λ , on a

- $S \in C^{\frac{\alpha-1}{\beta}}(\mathbb{R})$ si $\beta > \alpha - 1$,
- $S \in C^{1-\delta}(\mathbb{R})$ pour $\delta \in]0, 1[$ si $\beta = \alpha - 1$.

Limite de l'ondelette de Lusin

On sait que $h_{R_{2,2}}(1) = 3/2$.

Avec l'ondelette de Lusin, la transformée en ondelette continue de $R := R_{2,2}$ ne permet de retrouver cet exposant car

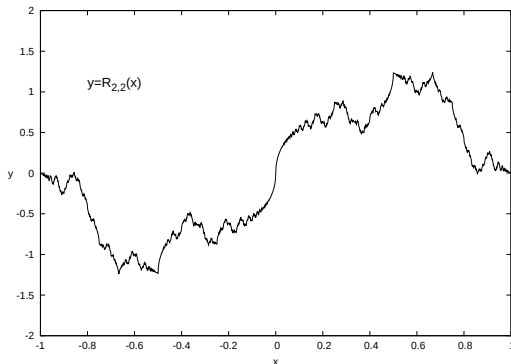
$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{|\mathcal{W}_{\psi_L} R(a, 1)|}{a} = \frac{\pi}{2}.$$

En fait, l'ondelette de Lusin n'a qu'un seul moment nul puisque $\hat{\psi}_L(0) = 0$ et $(D\hat{\psi}_L)(0) \neq 0$. Cela montre que l'annulation du second moment de ψ_L est essentielle pour étudier la continuité höldérienne de R lorsque l'exposant est plus grand que 1.

Comportement de $R_{\alpha,\beta}$ lorsque $\beta \rightarrow +\infty$

Pour $\alpha > 1$ et $\beta \geq \alpha - 1$, on sait que

$$h_{R_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}) = \frac{\alpha - 1}{\beta}.$$



Comportement de $R_{\alpha,\beta}$ lorsque $\beta \rightarrow +\infty$

En fait, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$R_{\alpha,\beta}(x) = \underbrace{\sin(\pi x)}_{=:s(x)} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^\beta x)}{n^\alpha}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in L^1(]a, b[)$. La moyenne de f sur $]a, b[$ est définie par

$$m_f^{a,b} := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Proposition

- Soit $\alpha > 1$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on a

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} m_{R_{\alpha,\beta}}^{a,b} = m_s^{a,b}.$$

- Soient $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La fonction $R_{\alpha,\beta}$ est périodique de période 2 et on a

$$\int_{-1}^1 (R_{\alpha,\beta}(x) - s(x))^2 dx = \zeta(2\alpha) - 1.$$

Comportement de $R_{\alpha,\beta}$ lorsque $\beta \rightarrow +\infty$

En fait, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$R_{\alpha,\beta}(x) = \underbrace{\sin(\pi x)}_{=:s(x)} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^\beta x)}{n^\alpha}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in L^1(]a, b[)$. La moyenne de f sur $]a, b[$ est définie par

$$m_f^{a,b} := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Proposition

- Soit $\alpha > 1$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on a

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} m_{R_{\alpha,\beta}}^{a,b} = m_s^{a,b}.$$

- Soient $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La fonction $R_{\alpha,\beta}$ est périodique de période 2 et on a

$$\int_{-1}^1 (R_{\alpha,\beta}(x) - s(x))^2 dx = \zeta(2\alpha) - 1.$$

Comportement de $R_{\alpha,\beta}$ lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$

Remarque

- Soit $\beta > 0$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} m_{R_{\alpha,\beta}}^{a,b} = m_s^{a,b}.$$

- Soient $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La fonction $R_{\alpha,\beta}$ est périodique de période 2 et on a

$$\int_{-1}^1 (R_{\alpha,\beta}(x) - s(x))^2 dx = \zeta(2\alpha) - 1.$$

Pour tout $\beta > 0$, la fonction $R_{\alpha,\beta}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction s lorsque α tends vers l'infini.

Comportement de $R_{\alpha,\beta}$ lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$

Remarque

- Soit $\beta > 0$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} m_{R_{\alpha,\beta}}^{a,b} = m_s^{a,b}.$$

- Soient $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La fonction $R_{\alpha,\beta}$ est périodique de période 2 et on a

$$\int_{-1}^1 (R_{\alpha,\beta}(x) - s(x))^2 dx = \zeta(2\alpha) - 1.$$

Pour tout $\beta > 0$, la fonction $R_{\alpha,\beta}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction s lorsque α tends vers l'infini.