



Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Analyse de la régularité hölderienne

De la théorie à l'application à des séries temporelles de températures

Adrien DELIÈGE

Mémoire de fin d'études
en vue de l'obtention du diplôme de Master en Sciences Mathématiques

Année académique 2012-2013

Introduction

Depuis quelques dizaines d'années, l'analyse du signal a connu de grandes avancées grâce au développement de la transformée en ondelettes. De la physique (e.g. turbulences [1]) à l'économie ([6]), en passant par la médecine ([34]) et la biologie ([2]), les applications des ondelettes s'étendent à un nombre sans cesse grandissant de domaines et ont très souvent été couronnées de succès, apportant la plupart du temps de nouvelles informations là où d'autres outils s'avéraient limités. Stéphane Jaffard a récemment ouvert un nouveau chapitre de la théorie mathématique sous-jacente, à savoir la méthode des coefficients dominants ([16]), qui a pour but de calculer la régularité globale d'une fonction (dans un sens que nous allons définir) via un procédé heuristique. Dans ce travail, nous introduisons cette méthode et nous l'appliquons à une branche de la climatologie où une telle démarche n'a, à notre connaissance, jamais été réalisée : l'étude de séries temporelles de températures.

La notion de régularité que nous utilisons est la régularité hölderienne, qui est définie comme suit. Considérons une fonction f continue sur \mathbb{R} à valeurs réelles, un réel s strictement positif, et un réel t . Nous disons que f est une fonction hölderienne d'exposant s en t , ce que nous notons $f \in C^s(t)$, s'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à s et s'il existe une constante positive C et un voisinage de zéro V_0 tels que, pour tout l appartenant à V_0 , on a

$$|f(t+l) - P(l)| \leq C|l|^s.$$

Grâce à la décroissance des espaces $C^s(t)$ (i.e. $C^s(t) \subset C^{s'}(t)$ si $0 < s' < s$), nous pouvons définir l'exposant de Hölder de f en t , noté $h(t; f)$, comme étant la borne supérieure de l'ensemble des réels positifs s tels que $f \in C^s(t)$. Il représente en quelque sorte la régularité de f au point t .

Puisqu'il est très souvent impossible en pratique de calculer cet exposant pour tout

réel t , on préfère déterminer le spectre des singularités de f , i.e. la fonction

$$d(\cdot; f) : h \mapsto \dim_{\mathcal{H}}(\{t \in \mathbb{R} : h(t; f) = h\}).$$

Il s'agit de la fonction qui, à tout réel positif h , fait correspondre la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points dont l'exposant de Hölder vaut h , ce qui représente l'importance relative des points partageant une même régularité h . Nous montrons alors comment la transformée en ondelettes discrète et la méthode des coefficients dominants permettent de déterminer le spectre des singularités d'une fonction donnée.

Ainsi, la première partie de ce travail est composée de trois chapitres qui présentent les outils mathématiques nécessaires à nos analyses. Le premier est consacré à la définition et aux principales propriétés des notions de régularité hölderienne et d'exposant de Hölder, que nous calculons pour quelques exemples concrets comme la fonction de Weierstrass. Au deuxième chapitre, nous présentons la mesure de Hausdorff et quelques unes de ses propriétés comme celle relative à la notion de complétude ou encore le lien avec la mesure de Lebesgue. Nous poursuivons naturellement avec la définition et les propriétés de la dimension de Hausdorff, que nous calculons pour l'ensemble de Cantor. Enfin, dans le troisième chapitre, nous présentons la notion d'analyse multirésolution et nous démontrons un important théorème illustrant comment, à partir de ce concept, il est possible de construire une base orthonormée de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ formée d'ondelettes. Après avoir introduit les coefficients dominants, nous détaillons alors le formalisme multifractal associé, qui permet de déterminer le spectre des singularités d'un signal.

L'objet de la seconde partie de ce travail est l'analyse de la régularité hölderienne de séries temporelles de températures via le formalisme décrit précédemment. Tout d'abord, au quatrième chapitre, nous appliquons ce formalisme à des fonctions irrégulières classiques, afin de prouver l'efficacité de la méthode et d'effectuer un calibrage des programmes utilisés. Enfin, au cinquième chapitre, nous l'appliquons à des séries temporelles de températures issues d'environ 200 stations météorologiques réparties sur l'ensemble de l'Europe. L'idée est d'étudier la régularité hölderienne de ces séries de températures afin de voir si des différences significatives apparaissent entre des stations soumises à des types de climats différents (déterminés formellement selon la classification de Köppen) et si il est alors possible d'établir une classification du climat basée sur l'analyse multifractale de ces signaux. Notre hypothèse est que la proximité de l'océan Atlantique ou de la mer Méditerranée devrait se marquer dans la régularité des signaux provenant des régions côtières. Dans un premier temps, nous constatons avec surprise que tous les signaux considérés sont

mono-Hölder, i.e. tous les points possèdent le même exposant de Hölder. Après de nombreuses observations et analyses, nous établissons notre propre méthode de détermination du climat et, pour prouver son efficacité, nous la comparons à celle de Köppen. A notre connaissance, bien que l'utilisation de la régularité hölderienne soit déjà répandue dans de nombreux domaines, la démarche que nous avons entreprise (i.e. l'application à des données de températures) n'a jamais été réalisée. Ce travail, réalisé sans l'aide de climatologues, constitue donc un premier aperçu des possibilités de l'analyse multifractale dans l'étude des températures en Europe, c'est pourquoi nous terminons par quelques pistes qu'il serait bon d'examiner dans un avenir proche afin de confirmer, affiner, et surtout officialiser les résultats que nous avons obtenus.

Remerciements

Je tiens à remercier sincèrement toutes les personnes qui m'ont aidé ou soutenu, de près ou de loin, dans la réalisation de ce mémoire.

En premier lieu, je me dois de remercier mon promoteur Monsieur S. Nicolay pour m'avoir proposé ce sujet et pour m'avoir guidé tout au long de la réalisation de ce travail. Il m'a donné de son temps pour m'orienter dans les directions que je désirais explorer et m'a transmis sa passion pour l'application des mathématiques en climatologie. Sans lui, rien de tout cela n'aurait été possible.

Ensuite, je tiens à remercier l'ensemble de mes amis, matheux ou non, qui ont rendu ces cinq dernières années exceptionnelles. Je pense notamment à Pierre, Martin, Romain, Fanny, Isabelle, Simon, Bruno, Marc, Adrien, et tant d'autres qui ont, à différents niveaux, contribué au bon déroulement de mes années d'étude.

Merci également à Monsieur J.-M. Lesoinne, qui m'a donné le goût des mathématiques et les connaissances indispensables pour aborder dans de bonnes conditions la première année de bachelier.

Enfin, je remercie mes parents et ma soeur, sans qui je n'aurais pu accéder aux études en Sciences Mathématiques. Ils m'ont apporté le soutien et la motivation qui m'ont permis d'arriver là où j'en suis aujourd'hui.

Table des matières

Introduction	i
Remerciements	iv
I De la notion de régularité hölderienne à la théorie du formalisme multifractal associé aux coefficients dominants	1
1 Régularité hölderienne ponctuelle	2
1.1 Introduction	2
1.2 Régularité ponctuelle	4
1.3 Exposant de Hölder	9
1.4 Exemples	11
2 Mesure et dimension de Hausdorff	20
2.1 Mesure de Hausdorff	20
2.1.1 Définitions	20
2.1.2 Propriétés	24
2.1.3 Mesure de Hausdorff et complétude	29
2.1.4 Relation entre mesure de Lebesgue et mesure de Hausdorff	31
2.1.5 Propriétés supplémentaires	34
2.2 Dimension de Hausdorff	37
2.2.1 Définition	37
2.2.2 Propriétés	39

2.2.3	L'ensemble de Cantor	42
3	Ondelettes et analyse multirésolution	46
3.1	Transformée en ondelettes continue	46
3.2	Analyse multirésolution	48
3.2.1	Définition	48
3.2.2	De l'analyse multirésolution aux ondelettes	53
3.3	Coefficients dominants	66
3.4	Formalisme multifractal lié aux coefficients dominants	76
II	Applications du formalisme multifractal	81
4	Etude de fonctions irrégulières classiques	82
4.1	Description de la méthode	82
4.2	Fonction de Weierstrass	84
4.3	Fonction de Schoenberg	86
4.4	Mouvement brownien fractionnaire	87
4.5	Fonction de Lebesgue-Davenport	91
4.6	Conclusions	93
5	Application à des données de températures	95
5.1	Collecte des données	95
5.2	Résultats obtenus et analyses	100
5.3	Classification du climat via les exposants de Hölder.	108
5.4	Analyse des erreurs	116
5.5	Analyses à l'aveugle	123
5.6	Interprétation des résultats	125
5.7	Conclusions	129

III Annexes	132
A Démonstrations annexes	133
A.1 Diamètre de l'enveloppe convexe d'un ensemble borné	133
A.2 Mesure de Hausdorff et union dénombrable de fermés	133
A.3 Orthonormalité des translations d'une fonction	136
B Informations et résultats complémentaires	139
B.1 Stations sélectionnées et climats associés	139
B.2 Exposants de Hölder	139
B.3 Autres estimations de h et résultats associés	139
B.4 Climats selon nos critères	144
C Codes personnels	153
C.1 Mise en forme des différents signaux	153
C.2 Obtention du sommet de la parabole de régression	157
Bibliographie	161

Première partie

De la notion de régularité hölderienne à la théorie du formalisme multifractal associé aux coefficients dominants

Chapitre 1

Régularité hölderienne ponctuelle

1.1 Introduction

Notre but dans ce chapitre est de présenter un outil permettant de définir une notion de régularité d'une fonction. Nous écrivons $f \in C_p(]a, b[)$ si f est une fonction p -fois continûment dérivable sur $]a, b[$. De plus, nous posons, pour tout $s > 0$,

$$\lfloor s \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{N} : n \leq s\},$$

et

$$\lceil s \rceil = \inf\{n \in \mathbb{N} : n \geq s\}.$$

Avant toute chose, nous tenons à signaler que la plupart des résultats énoncés dans ce chapitre sont connus et bien établis. Cependant, les démonstrations sont originales, sauf mention du contraire.

Revenons tout d'abord sur le développement de Taylor d'une fonction. Considérons une fonction réelle $f \in C_p(]a, b[)$. La formule de Taylor limitée dans \mathbb{R} s'écrit comme suit :

$\forall t \in]a, b[, \forall l \in \mathbb{R}$ tel que $t + l \in]a, b[, \exists r \in]0, 1[$ tel que

$$f(t + l) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} l^k + \frac{f^{(p)}(t + rl)}{p!} l^p.$$

Si l'on pose

$$P_t(l) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} l^k,$$

alors P_t est un polynôme de degré strictement inférieur à p . De plus, étant continue sur

$]a, b[$, $f^{(p)}$ est bornée sur tout intervalle $]a', b'[\subset]a, b[$ avec $a < a' < b' < b$ et donc on a

$$C = \sup_{t \in]a', b'[\} f^{(p)}(t) < +\infty.$$

Ainsi, pour tout $t \in]a', b'[\$ et pour tout $l \in \mathbb{R}$ tel que $t + l \in]a', b'[\$, il existe un polynôme P_t de degré strictement inférieur à p tel que

$$|f(t+l) - P_t(l)| \leq \frac{C}{p!} |l|^p = C' |l|^p \quad (1.1)$$

où C' est une constante indépendante de t et de l . Puisque C' ne dépend que de f et que l'inégalité est valable pour tout $t \in]a', b'[\$, on dira que f est une fonction uniformément hölderienne d'exposant p sur $]a', b'[\$, ce que l'on écrira $f \in C^p(]a', b'[\)$. L'exposant p est évidemment dans ce cas un entier positif. Nous allons étendre cette notion aux exposants réels positifs (qu'ils soient entiers ou non). Donnons maintenant la définition rigoureuse de la régularité hölderienne uniforme.

Définition 1.1.1. Soient un ouvert U de \mathbb{R} , une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $s > 0$. On dit que la fonction f est uniformément hölderienne d'exposant s sur U , ce que l'on écrit $f \in C^s(U)$, si il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $t \in U$, il existe P_t un polynôme tel que $\deg(P_t) < s$ et $V_{0,t}$ un voisinage de 0 tels que

$$|f(t+l) - P_t(l)| \leq C |l|^s \quad \forall l \in V_{0,t}.$$

De manière équivalente¹, $f \in C^s(U)$ si et seulement si il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $t \in U$, il existe P_t un polynôme tel que $\deg(P_t) < s$ et $V_{0,t}$ un voisinage de 0 tels que

$$\sup_{|h| \leq |l|} |f(t+h) - P_t(h)| \leq C |l|^s \quad \forall l \in V_{0,t}.$$

Quand le contexte est clair, on écrit généralement V_0 au lieu de $V_{0,t}$.

Ainsi, si U est un ouvert de \mathbb{R} et p un entier positif, on a, par le développement de Taylor,

$$C_p(U) \subset C^p(U).$$

Remarquons que l'inclusion inverse est fautive. Prenons U un ouvert de \mathbb{R} contenant 0, $p = 1$ et $f(t) = |t|$. On sait que $f \notin C^1(U)$ puisque f n'est pas dérivable en 0. Cependant, on peut montrer aisément que $f \in C^1(U)$. En effet, soit $t \in U$ fixé, et prenons $P_t(l) = f(t)$. On a alors

$$|f(t+l) - P_t(l)| = ||t+l| - |t|| \leq |t+l-t| = |l|,$$

et ce, pour tout $l \in \mathbb{R}$. On a donc $f \in C^1(U)$. Remarquons que $C^1(U)$ correspond à

1. La vérification est directe.

l'ensemble des fonctions Lipschitz sur U .

La proposition suivante présente les inclusions que nous sommes en droit d'attendre des espaces $C_p(U)$ classiques et $C^p(U)$ que nous venons d'introduire. Le lecteur intéressé trouvera la preuve dans [20].

Proposition 1.1.2. *Pour tout $U \subset \mathbb{R}$ ouvert et pour tout $\epsilon > 0$, on a $C^{p+\epsilon}(U) \subset C_p(U)$.*

1.2 Régularité ponctuelle

Via les espaces de Hölder ponctuels, nous allons obtenir une notion de régularité d'une fonction en un point. Avant toute chose, il est important de remarquer que les valeurs de l qui nous intéressent sont évidemment celles proches de 0, et nous supposons travailler avec des fonctions continues.

Définition 1.2.1. Soient une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}_0^+$. On dit que f appartient à $C^s(t)$ si il existe P_t un polynôme tel que $\deg(P_t) < s$, une constante $C_t \geq 0$ et $V_{0,t}$ un voisinage de 0 tels que

$$|f(t+l) - P_t(l)| \leq C_t |l|^s \quad \forall l \in V_{0,t}, \quad (1.2)$$

ou, de manière équivalente,

$$\sup_{|h| \leq |l|} |f(t+h) - P_t(h)| \leq C_t |l|^s \quad \forall l \in V_{0,t}. \quad (1.3)$$

On dira que f est une fonction hölderienne d'exposant s en t . Afin de ne pas alourdir les notations, nous écrirons dorénavant C au lieu de C_t et V_0 au lieu de $V_{0,t}$. L'analogie avec l'inéquation (1.1) est claire, et en plus, si il existe V_t un voisinage ouvert de t tel que $f \in C_p(V_t)$ ($p \in \mathbb{N}$), alors $f \in C^p(t)$ (grâce à la formule de Taylor).

Si $f \in C^s(t)$ pour tout $s \in \mathbb{R}_0^+$, alors on dira que $f \in C^\infty(t)$. C'est notamment le cas de toute fonction infiniment continûment dérivable sur un voisinage de t .

Remarques 1.2.2. En effectuant une simple translation, il est évident que f appartient à $C^s(t)$ si il existe P_t un polynôme tel que $\deg(P_t) < s$, une constante $C \geq 0$ et V_t un voisinage de t tels que

$$|f(l) - P_t(l-t)| \leq C |l-t|^s \quad \forall l \in V_t, \quad (1.4)$$

ce qui est la définition utilisée dans certaines références.

Il est également intéressant de remarquer qu'une fonction $f \in C^s(t)$ si et seulement si il existe une constante $C > 0$, un entier $J > 0$, et un polynôme P_t de degré strictement

inférieur à s tels que

$$\sup_{|h| \leq 2^j} |f(t+h) - P_t(h)| \leq C2^{js} \quad \forall j \leq -J. \quad (1.5)$$

La condition est trivialement nécessaire. Il suffit de choisir J tel que $B(0, 2^{-J}) \subset V_0$, et de considérer $l = 2^j$ pour tout $j \leq -J$ dans l'équation (1.3). Elle est également suffisante. En effet, il faut tout d'abord choisir V_0 tel que $V_0 \subset B(0, 2^{-J})$. Soit $l \in V_0$, tel que $l \neq 0$. Il existe alors $j \leq -J$ tel que $2^{j-1} < |l| \leq 2^j$. Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned} \sup_{|h| \leq |l|} |f(t+h) - P_t(h)| &\leq \sup_{|h| \leq 2^j} |f(t+h) - P_t(h)| \\ &\leq C(2^j)^s = C2^{s(j-1)}2^s \\ &\leq C_1|l|^s. \end{aligned}$$

Le cas $l = 0$ s'obtient en faisant tendre j vers $-\infty$ dans l'équation (1.5). Cette définition est généralement utilisée dans le cadre de la transformée en ondelettes discrète, comme illustré au chapitre 3.

Nous pouvons nous interroger sur l'unicité du polynôme P_t intervenant dans la définition 1.2.1. La proposition suivante règle cette question.

Proposition 1.2.3. *Si $f \in C^s(t)$, alors le polynôme P_t intervenant dans la définition 1.2.1 est unique.*

Démonstration. Tout d'abord, posons

$$n = \begin{cases} \lfloor s \rfloor & \text{si } s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N} \\ s - 1 & \text{si } s \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

pour simplifier l'écriture. Nous avons donc $n < s$. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe deux polynômes distincts P_t et Q_t de degré au plus n , ainsi que $C_1 \geq 0$ et $C_2 \geq 0$ et U_0 et W_0 deux voisinages ouverts de 0, tels que

$$|f(t+l) - P_t(l)| \leq C_1|l|^s \quad \forall l \in U_0$$

et

$$|f(t+l) - Q_t(l)| \leq C_2|l|^s \quad \forall l \in W_0.$$

Si on pose $V_0 = U_0 \cap W_0$, alors V_0 est un voisinage ouvert de 0, et si on pose $C = \max\{C_1, C_2\}$, on obtient

$$|f(t+l) - P_t(l)| \leq C|l|^s \quad \forall l \in V_0$$

et

$$|f(t+l) - Q_t(l)| \leq C|l|^s \quad \forall l \in V_0.$$

Par l'inégalité triangulaire, il vient

$$|P_t(l) - Q_t(l)| \leq |P_t(l) - f(t+l)| + |f(t+l) - Q_t(l)|.$$

Pour tout $l \in V_0$, on a donc

$$0 \leq |P_t(l) - Q_t(l)| \leq 2C|l|^s = C'|l|^s. \quad (1.6)$$

Autrement dit, l'expression

$$\frac{|P_t(l) - Q_t(l)|}{|l|^s}$$

est bornée si $l \rightarrow 0$, ce qui est impossible puisque par hypothèse $P_t - Q_t$ est un polynôme non nul de degré strictement inférieur à s .

□

Le corollaire qui suit est immédiat.

Corollaire 1.2.4. *Si $f \in C^s(t)$ et si f est $\lfloor s \rfloor$ fois continûment dérivable sur un voisinage de t , alors le polynôme $P_t(l)$ vérifiant l'inégalité (1.2) est le polynôme de Taylor de f à l'ordre $\lfloor s \rfloor$ au point t (à l'ordre $s - 1$ si $s \in \mathbb{N}$).*

Remarque 1.2.5. Il est important de noter que, si $f \in C^n(t)$, où $n \in \mathbb{N}$, alors f n'est pas forcément dérivable en t . Par exemple, la fonction $f = |t|$, qui appartient clairement à $C^1(0)$ (en prenant $P_t = 0$), n'est pourtant pas dérivable en 0.

Remarque 1.2.6. Si $f \in C^s(t)$ avec $0 < s \leq 1$, alors le polynôme P_t intervenant dans la définition 1.2.1 est une constante D_t que l'on peut déterminer explicitement. En effet, il existe $C \geq 0$ et V_0 un voisinage de 0 tels que

$$|f(t+l) - D_t| \leq C|l|^s \quad \forall l \in V_0.$$

En particulier pour $l = 0$ on obtient $D_t = f(t)$. Ainsi, si $f \in C^s(t)$ avec $0 < s \leq 1$, alors il existe $C \geq 0$ et V_0 un voisinage de 0 tels que

$$|f(t+l) - f(t)| \leq C|l|^s \quad \forall l \in V_0,$$

la réciproque étant trivialement vraie.

Par conséquent, pour $0 < s \leq 1$, la définition 1.2.1 devient : $f \in C^s(t)$ si il existe $C \geq 0$ et si il existe V_0 un voisinage de 0 tels que

$$|f(t+l) - f(t)| \leq C|l|^s \quad \forall l \in V_0.$$

Si $s = 1$, alors en particulier f est Lipschitz.

Dans le cadre usuel des espaces $C_p(]a, b[)$, on a

$$C_p(]a, b[) \subseteq C_q(]a, b[) \quad \text{si } q \leq p,$$

et la proposition 1.1.2 montre que des inclusions semblables ont lieu en termes de régularité hölderienne uniforme. Nous avons une propriété similaire avec les espaces $C^s(t)$.

Proposition 1.2.7. *Si $0 < s' \leq s$, alors $C^s(t) \subseteq C^{s'}(t)$.*

Démonstration. Tout d'abord, posons

$$n = \begin{cases} [s] & \text{si } s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N} \\ s - 1 & \text{si } s \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

pour simplifier l'écriture. Soit $f \in C^s(t)$. Alors il existe un unique polynôme P_t de degré inférieur à n , une constante $C \geq 0$ et W_0 un voisinage ouvert de 0 tels que

$$|f(t+l) - P_t(l)| \leq C|l|^s \quad \forall l \in W_0.$$

Posons $V_0 = W_0 \cap]-1, 1[$, V_0 est donc un voisinage ouvert de 0.

Puisque $s' \leq s$, il existe un unique $i \in \mathbb{N}$ tel que

$$n - i < s' \leq n - i + 1.$$

Ecrivons

$$P_t(l) = \sum_{k=0}^n p_k(t)l^k,$$

et posons

$$Q_t(l) = \sum_{k=0}^{n-i} p_k(t)l^k.$$

Alors, on a

$$\deg(Q_t(l)) \leq n - i < s',$$

et pour tout $l \in V_0$, il vient successivement

$$\begin{aligned} |f(t+l) - Q_t(l)| &\leq |f(t+l) - P_t(l)| + |P_t(l) - Q_t(l)| \\ &\leq C|l|^s + \left| \sum_{k=n-i+1}^n p_k(t)l^k \right| \\ &\leq C|l|^s + \sum_{k=n-i+1}^n |p_k(t)||l|^k. \end{aligned}$$

Pour $l \in V_0$, on a $|l| < 1$, donc $|l|^k \leq |l|^{s'}$ pour tout $k = n-i+1, \dots, n$ puisque $s' \leq n-i+1$, et on a aussi $|l|^s \leq |l|^{s'}$ puisque $s' \leq s$. On obtient alors

$$|f(t+l) - Q_t(l)| \leq C|l|^{s'} + |l|^{s'} \sum_{k=n-i+1}^n |p_k(t)| \quad \forall l \in V_0,$$

donc

$$|f(t+l) - Q_t(l)| \leq C'|l|^{s'} \quad \forall l \in V_0,$$

où

$$C' = C + \sum_{k=n-i+1}^n |p_k(t)|.$$

Donc $f \in C^{s'}(t)$. □

Remarque 1.2.8. En vertu de l'unicité du polynôme intervenant dans la définition d'une fonction hölderienne, nous remarquons que la démonstration précédente donne la méthode de "construction" du polynôme Q_t tel que $f \in C^{s'}(t)$ à partir du polynôme P_t connu tel que $f \in C^s(t)$. Il suffit en fait de garder tous les coefficients de P_t dont l'indice est strictement inférieur à s' , les coefficients de Q_t sont donc les mêmes que ceux de P_t .

Terminons cette section en introduisant une notion de régularité un peu plus faible que la régularité hölderienne, mais qui sera utilisée au chapitre 3.

Définition 1.2.9. Soient une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}_0^+$. On dit que $f \in C_{\log}^s(t)$ si il existe P_t un polynôme de degré strictement inférieur à s , une constante $C \geq 0$ et V_0 un voisinage de 0 tels que

$$|f(t+l) - P_t(l)| \leq C|l|^s |\log |l|| \quad \forall l \in V_0, \quad (1.7)$$

ou, de manière équivalente,

$$\sup_{|h| \leq |l|} |f(t+h) - P_t(h)| \leq C|l|^s |\log |l|| \quad \forall l \in V_0. \quad (1.8)$$

On dira que f est une fonction log-hölderienne d'exposant s en t .

A nouveau, il est intéressant de remarquer qu'une fonction $f \in C_{\log}^s(t)$ si et seulement si il existe une constante $C > 0$, un entier $J > 0$, et un polynôme P_t de degré strictement inférieur à s tels que

$$\sup_{|h| \leq 2^j} |f(t+h) - P_t(h)| \leq C2^{js} |\log(2^{sj})| \quad \forall j \leq -J. \quad (1.9)$$

La preuve est similaire à celle exposée précédemment.

Remarque 1.2.10. Les propriétés des espaces $C_{\log}^s(t)$ sont les mêmes que celles des es-

paces $C^s(t)$.

Signalons encore le résultat suivant, prouvé dans [19]. Il sera utilisé dans la démonstration du théorème 3.3.5.

Proposition 1.2.11. *Une fonction $f \in C_{\log}^s(t)$ (resp. $C^s(t)$) si et seulement si il existe une constante $C > 0$ et un entier $J > 0$ tels que pour tout $j \leq -J$, il existe un polynôme $P_{j,t}$ de degré strictement inférieur à s tel que*

$$\sup_{|h| \leq 2^j} |f(t+h) - P_{j,t}(h)| \leq C 2^{js} |\log(2^{sj})|$$

$$\left(\text{resp. } \sup_{|h| \leq 2^j} |f(t+h) - P_{j,t}(h)| \leq C 2^{js} \right).$$

1.3 Exposant de Hölder

Définition 1.3.1. On peut voir la régularité d'une fonction f en un point t comme étant "le plus grand" s (au sens borne supérieure) tel que $f \in C^s(t)$. Ainsi, on appelle *exposant de Hölder de f en t* , noté $h(t; f)$, la borne supérieure de l'ensemble des s tels que $f \in C^s(t)$:

$$h(t; f) = \sup\{s : f \in C^s(t)\}.$$

Si la fonction f est claire dans le contexte, on écrira $h(t)$ au lieu de $h(t; f)$.

Si $h(t; f)$ est une constante H pour tout t appartenant au domaine de f , alors on dira que f est une fonction *mono-Hölder d'exposant H* . Si $H < 1$, alors f n'est pas dérivable, et donc une fonction qui est mono-Hölder d'exposant H avec $H < 1$ a pour caractéristique d'avoir une "irrégularité régulière".

Proposition 1.3.2. *Si il existe $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, P_t un polynôme tel que $\deg(P_t) < s$, $C > 0$, et U_0 un voisinage ouvert de 0, tels que*

$$|f(t+l) - P_t(l)| = C|l|^s \quad \forall l \in U_0, \tag{1.10}$$

alors $h(t; f) = s$.

Démonstration. Evidemment, on a $f \in C^s(t)$, où P_t est le polynôme requis pour avoir $f \in C^s(t)$.

Il suffit de montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $f \notin C^{s+\epsilon}(t)$. Au vu de la proposition 1.2.7, on peut se restreindre au cas où ϵ est tel que $s + \epsilon < [s]$.

Procédons par l'absurde et supposons avoir un polynôme Q_t et un voisinage W_0 de 0, tels que

$$|f(t+l) - Q_t(l)| \leq C'|l|^{s+\epsilon} \quad \forall l \in W_0.$$

Pour $|l| < 1$, on a

$$|f(t+l) - Q_t(l)| \leq C'|l|^s,$$

et vu notre choix de ϵ , le degré de Q_t est strictement inférieur à s . Alors, par unicité, on a $P_t = Q_t$, donc

$$C|l|^s = |f(t+l) - Q_t(l)| \leq C'|l|^{s+\epsilon} \quad \forall l \in V_0 \cap W_0.$$

Donc, sur $V_0 \cap W_0$, on a $C \leq C'|l|^\epsilon$, ce qui mène à une contradiction pour l suffisamment proche de 0.

□

Remarque 1.3.3. Illustrons le problème qui survient quand $s \in \mathbb{N}$, pour $s = 2$ en considérant $f(t) = t^2$. Cette fonction étant infiniment continûment dérivable sur \mathbb{R} , on a évidemment $h(t; f) = \infty$. Or, pour $P_t(l) = 2tl + t^2$, on a

$$|f(t+l) - P_t(l)| = |l|^2 \quad \forall l \in \mathbb{R}.$$

Si la proposition était vraie pour $s \in \mathbb{N}$, alors on aurait $h(t; f) = 2$, qui est une contradiction.

Notons que deux fonctions qui ne diffèrent que par une fonction infiniment continûment dérivable sur un voisinage de t ont le même exposant de Hölder en t , comme en témoigne la proposition suivante.

Proposition 1.3.4. Soient $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et g est une fonction infiniment continûment dérivable sur un voisinage de $t \in \mathbb{R}$. Si $f_1 = g + f_2$, alors $h(t; f_1) = h(t; f_2)$.

Démonstration. Il suffit de montrer l'équivalence

$$f_1 \in C^s(t) \Leftrightarrow f_2 \in C^s(t).$$

Montrons que la condition est suffisante. Tout d'abord, posons

$$n = \begin{cases} \lfloor s \rfloor & \text{si } s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N} \\ s - 1 & \text{si } s \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Si $f_2 \in C^s(t)$, alors il existe P_t un polynôme tel que

$$\deg(P_t) \leq n < s,$$

une constante $C \geq 0$, et V_0 un voisinage de 0 tels que, pour tout $l \in V_0$, on a

$$|f_2(t+l) - P_t(l)| \leq C|l|^s.$$

Posons

$$Q_t(l) = P_t(l) + \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(t)}{k!} l^k,$$

qui est un polynôme de degré $n < s$. On obtient alors

$$\begin{aligned} |f_1(t+l) - Q_t(l)| &= \left| g(t+l) + f_2(t+l) - P_t(l) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(t)}{k!} l^k \right| \\ &\leq \left| g(t+l) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(t)}{k!} l^k \right| + |f_2(t+l) - P_t(l)| \\ &\leq C_2|l|^{n+1} + C|l|^s \quad (\text{Taylor}) \\ &\leq C_2|l|^s + C|l|^s = C_3|l|^s \end{aligned}$$

pour tout $l \in V_0$ tel que $|l| < 1$, et donc $f_1 \in C^s(t)$.

La condition est nécessaire puisqu'il suffit d'utiliser le même raisonnement en échangeant les rôles de f_2 et f_1 , et en utilisant $-g$ à la place de g . \square

1.4 Exemples

Calculons l'exposant de Hölder sur quelques exemples afin de se familiariser avec cette notion.

Exemples 1.4.1. 1. Le premier exemple de base est la fonction $f_s(t) = |t|^s$, pour $s > 0$. Montrons que

$$h(0; f_s) = \begin{cases} s & \text{si } s \text{ est réel positif non entier ou entier impair,} \\ \infty & \text{si } s \text{ est un entier pair.} \end{cases}$$

Si $s = 2n$ pour un $n \in \mathbb{N}$, alors $f_s(t) = |t|^{2n} = t^{2n}$, il s'agit alors d'un polynôme, donc $h(t; f_s) = \infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Si $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, alors trivialement $f_s \in C^s(0)$ où le polynôme nul convient, et la proposition 1.10 permet de conclure directement que $h(0; f_s) = s$.

Ecrivons tout de même le développement, qui servira de modèle standard pour la suite. Soit $\epsilon > 0$, montrons que $f_s \notin C^{s+\epsilon}(0)$.

Procédons par l'absurde et supposons que $f_s \in C^{s+\epsilon}(0)$. Nous pouvons supposer,

grâce à la décroissance des espaces $C^s(t)$. que $\epsilon < \lceil s \rceil - s$. Ainsi, $\lfloor s + \epsilon \rfloor = \lfloor s \rfloor$ et donc c'est le même polynôme qui permet à f_s d'appartenir aux espaces $C^s(0)$ et $C^{s+\epsilon}(0)$, à savoir le polynôme nul (par unicité). Cela signifie qu'il existe $C \geq 0$ et V_0 un voisinage de 0 tels que

$$|l|^s \leq C |l|^{s+\epsilon} \quad \forall l \in V_0,$$

ou encore

$$1 \leq C |l|^\epsilon \quad \forall l \in V_0.$$

En particulier pour $l = 0$ on obtient une contradiction.

Si $s = 2n + 1$ pour un $n \in \mathbb{N}$, la démarche est similaire. Tout d'abord, le polynôme nul donne directement $f_s \in C^{2n+1}(0)$. A nouveau par l'absurde, supposons que $f_s \in C^{2n+1+\epsilon}(0)$, pour un $\epsilon < 1$, grâce à un polynôme Q_t . Par la remarque 1.2.8 et l'unicité du polynôme adéquat, on a

$$Q_t(l) = q_{2n+1} l^{2n+1}.$$

On a donc, pour un $C > 0$ et V_0 un voisinage de 0, l'inégalité suivante

$$\left| |l|^{2n+1} - q_{2n+1} l^{2n+1} \right| \leq C |l|^{2n+1+\epsilon} \quad \forall l \in V_0. \quad (1.11)$$

Alors, pour tout $l \geq 0$ tel que $l \in V_0$, l'inégalité (1.11) devient

$$|1 - q_{2n+1}| \leq C l^\epsilon.$$

En $l = 0$, cela nous donne $q_{2n+1} = 1$. Or, pour tout $l \leq 0$ tel que $l \in V_0$, l'inégalité (1.11) devient

$$|1 + q_{2n+1}| \leq C (-l)^\epsilon.$$

En $l = 0$, cela nous donne $q_{2n+1} = -1$, d'où une contradiction.

2. L'étape suivante consiste à déterminer $h(0; f)$ pour

$$f(t) = \sum_{i=1}^N c_i |t|^{s_i},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $c_i \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$, $s_i > 0$ pour tout i , et où aucun exposant s_i n'est un entier pair. Intuitivement, chaque $|t|^{s_i}$ présente une singularité en 0, et la plus grande contribution, pour t proche de 0, devrait venir de l'exposant le plus petit, donc on devrait avoir

$$h(0; f) = \min\{s_i : i = 1, \dots, N\} = h.$$

Nous allons brièvement confirmer cela.

On a, pour commencer,

$$|f(l)| \leq |l|^h \sum_{i=1}^N |c_i| = C|l|^h.$$

Ainsi, pour $P_0 = 0$, on a $f \in C^h(0)$. Il suffit ensuite de procéder comme dans l'exemple précédent selon que $h \in 2\mathbb{N}+1$ ou $h \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

De manière un peu plus générale, on peut utiliser la proposition 1.3.4 lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur les s_i . Si

$$f(t) = \sum_{i=1}^N c_i |t|^{s_i},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $c_i \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$ et où tous les s_i sont strictement positifs, alors

$$h(0; f) = \begin{cases} \infty & \text{si tous les } s_i \text{ sont des entiers pairs} \\ \min\{s_i : s_i \in \mathbb{R}_0^+ \setminus 2\mathbb{N}\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Considérons cette fois

$$f_h(t) = |t|^h \log |t|,$$

avec $h > 0$, où on pose $f_h(0) = 0$ pour assurer la continuité de f_h en 0. Montrons que

$$h(0; f_h) = h.$$

On a

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{|f_h(l)|}{|l|^s} = \lim_{l \rightarrow 0} |l|^{h-s} |\log |l|| = 0 \quad \forall s < h.$$

Donc $f_h \in C^s(0)$ pour tout $s < h$, en prenant $P_0 = 0$. Par conséquent, $h(0; f_h) \geq h$. Pour montrer que $h(0; f_h) = h$, il suffit de montrer que $f_h \notin C^h(0)$.

Procédons par l'absurde et supposons que $f_h \in C^h(0)$. Par décroissance des espaces C^s , par la remarque 1.2.8 et l'unicité des polynômes adéquats, le polynôme qui convient pour avoir $f_h \in C^h(0)$ est le polynôme nul. Ainsi, il existe $C \geq 0$ et V_0 un voisinage de 0 tels que

$$|f_h(l)| = |l|^h |\log |l|| \leq C|l|^h \quad \forall l \in V_0,$$

donc

$$|\log |l|| \leq C \quad \forall l \in V_0,$$

ce qui est impossible puisque

$$\lim_{l \rightarrow 0} |\log |l|| = +\infty.$$

On a donc $h(0; f_h) = h$.

4. Considérons enfin

$$f_{\alpha,\beta}(t) = |t|^\alpha \sin\left(\frac{1}{|t|^\beta}\right),$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, où on pose $f_{\alpha,\beta}(0) = 0$ pour assurer la continuité de $f_{\alpha,\beta}$ en 0. Montrons que

$$h(0; f_{\alpha,\beta}) = \alpha.$$

Tout d'abord, on a

$$|f_{\alpha,\beta}(l)| \leq |l|^\alpha,$$

donc pour $P_0 = 0$ on a $f_{\alpha,\beta} \in C^\alpha(0)$, et donc $h(0; f_{\alpha,\beta}) \geq \alpha$.

Supposons d'abord $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, et soit $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < \lceil \alpha \rceil - \alpha$. Supposons avoir $f_{\alpha,\beta} \in C^{\alpha+\epsilon}(0)$. Avec les mêmes arguments que précédemment, le polynôme qui convient pour cela est le polynôme nul, et donc il existe $C \geq 0$ et V_0 un voisinage de 0 tels que

$$|f_{\alpha,\beta}(l)| = |l|^\alpha \left| \sin\left(\frac{1}{|l|^\beta}\right) \right| \leq C|l|^{\alpha+\epsilon} \quad \forall l \in V_0,$$

donc

$$\left| \sin\left(\frac{1}{|l|^\beta}\right) \right| \leq C|l|^\epsilon \quad \forall l \in V_0.$$

Prenons

$$l = \left(\frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

avec k suffisamment grand pour que $l \in V_0 \cap]0, 1[$ et pour que $C|l|^\epsilon < 1$. On a alors

$$\left| \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) \right| < 1,$$

d'où une contradiction. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, $f_{\alpha,\beta} \notin C^{\alpha+\epsilon}(0)$, d'où $h(0; f_{\alpha,\beta}) = \alpha$. Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, prenons $0 < \epsilon < 1$ et supposons que $f_{\alpha,\beta} \in C^{\alpha+\epsilon}(0)$. Comme précédemment, le polynôme Q_0 permettant à $f_{\alpha,\beta}$ d'appartenir à $C^{\alpha+\epsilon}(0)$ est réduit à $Q_0(l) = q_\alpha l^\alpha$ et il existe $C \geq 0$ et V_0 tels que

$$|f(l) - q_\alpha l^\alpha| \leq C|l|^{\alpha+\epsilon} \quad \forall l \in V_0,$$

donc

$$\left| \sin\left(\frac{1}{|l|^\beta}\right) - q_\alpha \right| \leq C|l|^\epsilon \quad \forall l \in V_0.$$

Prenons

$$l = \left(\frac{1}{(4k+1)\frac{\pi}{2}} \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

avec k suffisamment grand pour que $l \in V_0 \cap [0, 1[$ et pour que $C|l|^\epsilon < |1 - q_\alpha|$. On obtient alors la contradiction

$$|1 - q_\alpha| < |1 - q_\alpha|.$$

Nous avons donc bien $h(0; f_{\alpha,\beta}) = \alpha$.

Remarque 1.4.2. Si

$$f(t) = |t|^\alpha \log |t| \text{ et } g(t) = |t|^\alpha \sin \left(\frac{1}{|t|^\beta} \right),$$

alors

$$h(0; f) = \alpha = h(0; g),$$

mais

$$f \notin C^\alpha(0) \text{ alors que } g \in C^\alpha(0).$$

La méthode utilisée dans les exemples précédents est relativement simple et intuitive. Cependant, elle est difficile à mettre en oeuvre dans de nombreux cas, pour lesquels il faut recourir à d'autres outils afin d'obtenir les exposants de Hölder. A ce titre, présentons un dernier exemple, complètement différent des autres, mais qui sera utile plus loin dans ce travail, lors de l'analyse des spectres des singularités de fonctions irrégulières classiques.

Exemple 1.4.3. La fonction de Weierstrass. Soient $\phi < 1$ et ω deux nombres positifs tels que $\phi\omega > 1$. La fonction de Weierstrass est définie sur \mathbb{R} par l'expression

$$f_{\phi,\omega}(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \phi^j \cos(\omega^j t).$$

Il est trivial de vérifier que cette expression définit bien une fonction sur \mathbb{R} , et il est possible de montrer que celle-ci n'est dérivable en aucun point [11]. Ainsi, nous savons déjà que l'exposant de Hölder de cette fonction en tout réel t est inférieur à 1. En fait, nous allons montrer que l'exposant de Hölder est dans ce cas une fonction constante, i.e. la fonction de Weierstrass est mono-Hölder :

$$h(t; f_{\phi,\omega}) = \frac{-\log \phi}{\log \omega} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cette fonction est représentée à la figure 1.1 pour $\phi = 0,5$ et différentes valeurs de ω ,

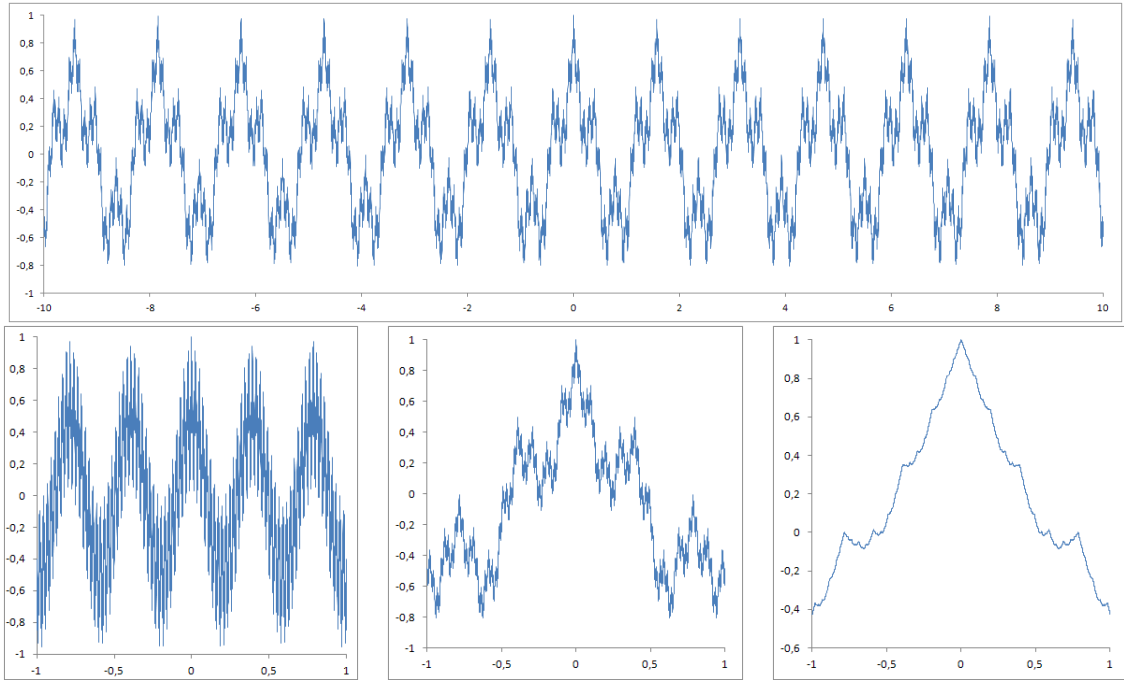


FIGURE 1.1 – *En haut* : La fonction de Weierstrass $f_{\frac{1}{2},4}$, donc son exposant de Hölder est $1/2$. *En bas* : La fonction de Weierstrass pour $\phi = 1/2$ et successivement $\omega = 16, 4, 2^{4/3}$, donnant donc lieu à des exposants de Hölder de $0,25, 0,5, 0,75$. On constate graphiquement que la courbe semble plus lisse, moins bruitée, lorsque l'exposant de Hölder croît, c'est-à-dire lorsque ω décroît.

illustrant parfaitement la différence de régularité qui survient quand un paramètre varie. Afin de simplifier les notations, nous écrirons f au lieu de $f_{\phi,\omega}$ et nous posons

$$s = \frac{-\log \phi}{\log \omega}.$$

De plus, C désignera une constante, dont la valeur peut différer à chaque occurrence. Montrons d'abord que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f \in C^s(t)$. Puisque $s < 1$, il faut majorer l'écart $|f(t+l) - f(t)|$ par une constante que multiplie $|l|^s$ pour $|l|$ suffisamment petit. Nous avons l'inégalité suivante

$$|f(t+l) - f(t)| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \phi^j |\cos(\omega^j(t+l)) - \cos(\omega^j t)|,$$

où la différence entre les cosinus peut être majorée par 2 ou $\omega^j |l|$. En effet, la seconde

possibilité peut s'obtenir par les relations

$$\begin{aligned} |\cos(\omega^j(t+l)) - \cos(\omega^j t)| &= \left| \omega^j \int_{t+l}^t \sin(\omega^j x) dx \right| \\ &\leq \omega^j \left| \int_{t+l}^t |\sin(\omega^j x)| dx \right| \leq \omega^j \left| \int_{t+l}^t 1 dx \right| = \omega^j |l|. \end{aligned}$$

Posons $V_0 =]-1, 1[$ et considérons $l \in V_0$, avec $l \neq 0$ (l'inégalité voulue pour $l = 0$ est trivialement vérifiée), et posons

$$j_0 = \left\lfloor \frac{-\log |l|}{\log \omega} \right\rfloor.$$

Pour les j inférieurs à j_0 , nous majorons la différence des cosinus par $\omega^j |l|$, et nous la majorons par 2 pour les autres j . On obtient alors l'inégalité

$$|f(t+l) - f(t)| \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{j_0} \phi^j \omega^j |l|}_{(1)} + 2 \underbrace{\sum_{j=j_0+1}^{+\infty} \phi^j}_{(2)}.$$

L'expression (1) se travaille comme suit, en tenant compte de la définition de j_0 , du fait que $\phi\omega > 1$ et de l'identité $a = b^{\frac{\log a}{\log b}}$ pour tous $a, b > 0$:

$$\begin{aligned} (1) &= \phi\omega |l| \sum_{j=0}^{j_0-1} (\phi\omega)^j = \phi\omega |l| \frac{(\phi\omega)^{j_0} - 1}{\phi\omega - 1} \\ &\leq C |l| (\phi\omega)^{j_0} \leq C |l| (\phi\omega)^{\frac{-\log |l|}{\log \omega}} \\ &= C |l| \left(|l|^{\frac{\log(\phi\omega)}{\log |l|}} \right)^{\frac{-\log |l|}{\log \omega}} = C |l| |l|^{\frac{-\log \phi - \log \omega}{\log \omega}} \\ &= C |l| |l|^s |l|^{-1} = C |l|^s. \end{aligned}$$

En ce qui concerne l'expression (2), on a d'abord

$$(2) = 2\phi^{j_0+1} \sum_{j=0}^{+\infty} \phi^j = 2 \frac{1}{1-\phi} \phi^{j_0+1} = C \phi^{j_0+1}$$

puisque $\phi < 1$. En utilisant à nouveau l'égalité $a = b^{\frac{\log a}{\log b}}$, il vient

$$\begin{aligned} C \phi^{j_0+1} &= C \left(|l|^{\frac{\log \phi}{\log |l|}} \right)^{\left\lfloor \frac{-\log |l|}{\log \omega} \right\rfloor + 1} \\ &\leq C \left(|l|^{\frac{\log \phi}{\log |l|}} \right)^{\frac{-\log |l|}{\log \omega}} = C |l|^{\frac{-\log \phi}{\log \omega}} = C |l|^s, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte du fait que $|l|^{\frac{\log \phi}{\log |l|}} < 1$ et que $\left\lfloor \frac{-\log |l|}{\log \omega} \right\rfloor + 1 > \frac{-\log |l|}{\log \omega}$.

On en déduit donc que

$$|f(t+l) - f(t)| \leq C|l|^s \quad \forall l \in V_0$$

et donc que $f \in C^s(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Afin de prouver que, pour tout $\epsilon > 0$, f n'appartient pas à $C^{s+\epsilon}(t)$, nous avons besoin d'un résultat concernant la transformée en ondelettes continue d'une fonction. Pour le lecteur non-initié, cette notion est brièvement présentée au début du chapitre 3. Ce résultat est le suivant ([15],[23]).

Proposition 1.4.4. *Si $f \in C^s(t)$, alors il existe une constante $C > 0$ et un voisinage $V_t \times U_0$ de $(t, 0^+)$ tels que*

$$|W_\psi f(b, a)| \leq C a^{s+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{|t-b|}{a}\right)^s$$

pour tout couple $(b, a) \in V_t \times U_0$, où $W_\psi f$ est la transformée en ondelettes (continue) de f réalisée grâce à une ondelette ψ .

Revenons à la fonction de Weierstrass, et calculons sa transformée en ondelettes continue. Afin de simplifier nos calculs, choisissons une ondelette ψ de classe C^2 telle que $[\hat{\psi}] \subset [1/\omega, \omega]$, et posons $\hat{\psi}(1) = 2$. Alors, pour tout entier $J > 0$, on a

$$\begin{aligned} W_\psi f(b, \omega^{-J}) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \phi^j \int_{\mathbb{R}} \cos(\omega^j t) \psi \left(\frac{t-b}{\omega^{-J}} \right) \frac{dt}{\sqrt{\omega^{-J}}} \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \phi^j \sqrt{\omega^{-J}} \int_{\mathbb{R}} \cos(\omega^{j-J} t + \omega^j b) \psi(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \phi^j \sqrt{\omega^{-J}} \frac{1}{2} \left(e^{i\omega^j b} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega^{j-J} t} \psi(t) dt + e^{-i\omega^j b} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega^{j-J} t} \psi(t) dt \right) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \phi^j \sqrt{\omega^{-J}} \frac{1}{2} \left(e^{i\omega^j b} \hat{\psi}(\omega^{j-J}) + e^{-i\omega^j b} \hat{\psi}(-\omega^{j-J}) \right). \end{aligned}$$

Notre choix particulier de ψ implique que le seul terme non nul dans la somme est celui correspondant à $j = J$, ce qui donne alors, pour tout $b \in \mathbb{R}$ et tout entier $J > 0$,

$$W_\psi f(b, \omega^{-J}) = \phi^J \sqrt{\omega^{-J}} \frac{1}{2} e^{i\omega^J b} \cdot 2 = \phi^J \sqrt{\omega^{-J}} e^{i\omega^J b}. \quad (1.12)$$

Nous avons à présent tout mis en place pour conclure. En effet, fixons $t \in \mathbb{R}$ et supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $f \in C^{s+\epsilon}(t)$. La proposition 1.4.4 implique alors qu'il existe une constante $C > 0$ et un voisinage $V_t \times U_0$ de $(t, 0^+)$ tels que

$$|Wf(b, a)| \leq C a^{s+\epsilon+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{|t-b|}{a}\right)^{s+\epsilon}$$

pour tout couple $(b, a) \in V_t \times U_0$. Prenons alors J un entier positif suffisamment grand de sorte que $\omega^{-J} \in U_0$. Alors, en (t, ω^{-J}) , l'inégalité précédente s'écrit

$$|Wf(t, \omega^{-J})| \leq C\omega^{-Js}\omega^{-J\epsilon}\sqrt{\omega^{-J}},$$

et en utilisant l'égalité (1.12), on obtient

$$|\phi^J \sqrt{\omega^{-J}} e^{i\omega^J t}| = \phi^J \sqrt{\omega^{-J}} \leq C\omega^{-Js}\omega^{-J\epsilon}\sqrt{\omega^{-J}}.$$

Au vu de la définition de s , on a $\phi^J = \omega^{-Js}$, et donc l'inégalité obtenue devient finalement

$$1 \leq C\omega^{-J\epsilon},$$

ce qui mène à une contradiction si J est choisi suffisamment grand.

Ainsi, nous venons de montrer que l'exposant de Hölder de f est s en tout point, c'est donc une fonction mono-Hölder. Cependant, il s'est révélé nettement plus difficile et technique à déterminer dans ce cas que dans les précédents.

Remarque 1.4.5. Le calcul de l'exposant de Hölder de la fonction de Weierstrass a été réalisé à la main afin de montrer qu'il est parfois complexe à déterminer, et qu'il faut occasionnellement utiliser des outils mathématiques provenant d'autres branches de l'analyse pour mener à bien ce calcul. Notons toutefois qu'on aurait pu obtenir cet exposant à partir d'un résultat plus général concernant les séries de fonctions, dont les détails se trouvent dans [17]. Ce résultat stipule que, si f s'écrit sous la forme

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g(b^n t)}{a^n}$$

avec $1 < a < b$ et g une fonction bornée, Lipschitz, et de dérivée bornée, définie sur \mathbb{R} , alors, sous de nombreuses conditions (vérifiées pour la fonction de Weierstrass et les autres fonctions définies via une série utilisées dans ce travail), f est une fonction mono-Hölder sur \mathbb{R} d'exposant

$$s = \frac{\log a}{\log b}.$$

En fait, on peut montrer que $f \in C^s(t)$ pour tout réel t ; il suffit en effet de procéder comme nous l'avons fait pour la fonction de Weierstrass. La seconde partie est un peu plus délicate, et peut être démontrée sans recourir aux ondelettes [17].

Chapitre 2

Mesure et dimension de Hausdorff

Notre but dans ce chapitre est de présenter la dimension de Hausdorff, qui nous sera utile dans la suite de ce travail.

La dimension topologique classique est toujours un nombre entier [27], ce qui ne permet pas toujours de mettre en évidence toutes propriétés des ensembles considérés. La dimension de Hausdorff va pallier ce problème, et elle a l'avantage mathématique non-négligeable d'être basée sur une mesure, la mesure de Hausdorff, que nous allons présenter dans un premier temps.

2.1 Mesure de Hausdorff

2.1.1 Définitions

Nous nous limitons ici aux espaces euclidiens \mathbb{R}^n , mais les résultats exposés se généralisent aux espaces métriques séparables.

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . Rappelons que l'on définit son diamètre par

$$\text{diam}(X) = \sup\{|x - y| : x, y \in X\},$$

et que l'on dit que X est subordonné à $\epsilon > 0$ si $\text{diam}(X) \leq \epsilon$.

Si $(X_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de sous-ensembles de \mathbb{R}^n , on dit que les X_i forment un recouvrement de X subordonné à $\epsilon > 0$ si

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \text{ et } \text{diam}(X_i) \leq \epsilon \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

Définition 2.1.1. Soient $\epsilon > 0$, $h \geq 0$, et $X \subset \mathbb{R}^n$. On définit

$$\mathcal{H}_\epsilon^h(X) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(X_i))^h : X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \text{diam}(X_i) \leq \epsilon \forall i \right\}.$$

On recouvre donc X avec des ensembles de diamètre inférieur à une borne donnée, et puis on calcule la somme de ces diamètres exposant h . Remarquons que l'on peut toujours supposer que les X_i du recouvrement sont convexes. En effet, on peut toujours remplacer chaque X_i par un ensemble convexe de même diamètre (i.e. l'enveloppe convexe de X_i , détails dans la section annexe A.1), ce qui ne change pas la valeur de $\mathcal{H}_\epsilon^h(X)$.

Intuitivement, \mathcal{H}_ϵ^h est une mesure extérieure, c'est ce que nous allons montrer. Le lecteur habitué à la théorie de la mesure remarquera dans cette section de nombreuses similarités avec la mesure de Lebesgue. Les preuves présentées ici ont souvent été adaptées à partir de celles établies pour cette mesure dans [28].

Proposition 2.1.2. *Soient $\epsilon > 0$ et $h \geq 0$. L'application*

$$\mathcal{H}_\epsilon^h : \wp(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty] : X \mapsto \mathcal{H}_\epsilon^h(X)$$

est une mesure extérieure sur \mathbb{R}^n .

Démonstration. 1. $\mathcal{H}_\epsilon^h(\emptyset) = 0$. C'est évident puisque tout ensemble non vide recouvre l'ensemble vide. Il suffit donc de prendre en particulier un ensemble de diamètre arbitrairement petit, ce qui rend $\mathcal{H}_\epsilon^h(\emptyset)$ inférieur à n'importe quel nombre arbitrairement petit, d'où $\mathcal{H}_\epsilon^h(\emptyset) = 0$.

2. Si $A \subset B$, on a $\mathcal{H}_\epsilon^h(A) \leq \mathcal{H}_\epsilon^h(B)$. C'est également évident parce que tout recouvrement de B est un recouvrement de A et que \mathcal{H}_ϵ^h est une borne inférieure.

3. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ une suite de parties de \mathbb{R}^n . Montrons que

$$\mathcal{H}_\epsilon^h\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_k \mathcal{H}_\epsilon^h(A_k).$$

Soit $\delta > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, soit $(R_{k,j})_{j \in \mathbb{N}_0}$ un recouvrement de A_k tel que $\text{diam}(R_{k,j}) \leq \epsilon$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, et tel que

$$\mathcal{H}_\epsilon^h(A_k) > \sum_j (\text{diam}(R_{k,j}))^h - \frac{\delta}{2^k}.$$

Ainsi

$$\sum_k \mathcal{H}_\epsilon^h(A_k) > \sum_{k,j} (\text{diam}(R_{k,j}))^h - \delta.$$

De plus, par construction, on a

$$\bigcup_k A_k \subset \bigcup_{k,j} R_{k,j}, \quad \text{diam}(R_{k,j}) \leq \epsilon \quad \forall k, \forall j,$$

donc par définition de \mathcal{H}_ϵ^h on obtient

$$\mathcal{H}_\epsilon^h \left(\bigcup_k A_k \right) \leq \sum_{k,j} (\text{diam}(R_{k,j}))^h < \sum_k \mathcal{H}_\epsilon^h(A_k) + \delta.$$

Cette inégalité étant valable pour tout $\delta > 0$, en prenant $\delta \rightarrow 0$, on obtient la conclusion

$$\mathcal{H}_\epsilon^h \left(\bigcup_k A_k \right) \leq \sum_k \mathcal{H}_\epsilon^h(A_k).$$

□

Remarque 2.1.3. Nous remarquons que

$$\mathcal{H}_\epsilon^h(X) \leq \mathcal{H}_{\epsilon'}^h(X) \text{ si } 0 < \epsilon' < \epsilon,$$

parce que tout recouvrement de X subordonné à ϵ' est subordonné à ϵ et que \mathcal{H}_ϵ^h est une borne inférieure. Ainsi, l'application

$$E : \epsilon \mapsto \mathcal{H}_\epsilon^h(X)$$

pour un X donné est décroissante. Ce qui nous intéresse, c'est ce que devient $\mathcal{H}_\epsilon^h(X)$ lorsque les recouvrements considérés sont de plus en plus petits, c'est-à-dire la limite de $\mathcal{H}_\epsilon^h(X)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, ce qui n'est rien d'autre que la borne supérieure pour les $\epsilon > 0$ de $\mathcal{H}_\epsilon^h(X)$. C'est ainsi que nous arrivons naturellement à la définition de la mesure extérieure de Hausdorff.

Définition 2.1.4. La mesure extérieure de Hausdorff de dimension h d'un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est définie par

$$\mathcal{H}^h(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\epsilon^h(X) = \sup_{\epsilon > 0} \mathcal{H}_\epsilon^h(X).$$

Le fait que \mathcal{H}^h soit une mesure extérieure découle directement de la proposition 2.1.2 .

Remarque 2.1.5. Lorsqu'on impose à chaque ensemble X_i du recouvrement de X dans la définition 2.1.1 d'être une boule ouverte de \mathbb{R}^n , on obtient une autre mesure extérieure, appelée mesure extérieure de Hausdorff-Besicovitch :

$$\mathcal{B}^h(X) = \sup_{\epsilon > 0} \mathcal{B}_\epsilon^h(X),$$

où on définit

$$\mathcal{B}_\epsilon^h(X) = \inf \left\{ \sum_j (\text{diam}(B_j))^h : X \subset \bigcup_j B_j, \text{diam}(B_j) \leq \epsilon \right\}$$

et où B_j est une boule ouverte de \mathbb{R}^n .

On a, par définition, $\mathcal{H}_\epsilon^h(X) \leq \mathcal{B}_\epsilon^h(X)$ et ce, pour tout $\epsilon > 0$, ce qui mène à

$$\mathcal{H}^h(X) \leq \mathcal{B}^h(X).$$

L'égalité n'est pas toujours vérifiée [5]. Par ailleurs, si on considère $(X_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ un recouvrement de X subordonné à ϵ , on peut inclure chaque X_i dans une boule ouverte B_i telle que

$$\text{diam}(B_i) = 2 \text{diam}(X_i) \leq 2\epsilon$$

et donc on a

$$\sum_i (\text{diam}(B_i))^h \leq 2^h \sum_i (\text{diam}(X_i))^h.$$

Cela étant valable pour tout recouvrement de X subordonné à ϵ , on obtient l'inégalité $\mathcal{B}_{2\epsilon}^h(X) \leq 2^h \mathcal{H}_\epsilon^h(X)$. En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient

$$\mathcal{B}^h(X) \leq 2^h \mathcal{H}^h(X),$$

et donc

$$\mathcal{H}^h \leq \mathcal{B}^h \leq 2^h \mathcal{H}^h. \quad (2.1)$$

Les mesures \mathcal{H}^h et \mathcal{B}^h sont alors dites équivalentes.

La mesure extérieure de Hausdorff a l'agréable propriété d'être métrique¹, comme nous allons le montrer (la preuve est adaptée à partir de celle sur la mesure de Lebesgue). Cela nous sera très utile pour définir la mesure de Hausdorff à proprement parler, en utilisant un procédé classique.

Proposition 2.1.6. *La mesure extérieure \mathcal{H}^h est une mesure extérieure métrique.*

Démonstration. Nous savons déjà que \mathcal{H}^h est une mesure extérieure. Soient A et B des sous-ensembles de \mathbb{R}^n tels que $d(A, B) > 0$. Puisqu'on a une mesure extérieure, on a directement

$$\mathcal{H}^h(A \cup B) \leq \mathcal{H}^h(A) + \mathcal{H}^h(B)$$

et il nous suffit de montrer l'inégalité inverse.

Soit ϵ tel que

$$0 < \epsilon < d(A, B)/2,$$

et soit $(R_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ un recouvrement de $A \cup B$ subordonné à ϵ tel que

$$\mathcal{H}_\epsilon^h(A \cup B) > \sum_k (\text{diam}(R_k))^h - \epsilon.$$

1. Rappelons qu'une mesure extérieure μ est métrique si, lorsque A et B sont des parties de \mathbb{R}^n telles que $d(A, B) > 0$, on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, où $d(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\}$.

Vu le choix de ϵ , on a, pour un k fixé, $R_k \cap A = \emptyset$ ou $R_k \cap B = \emptyset$ (un même R_k ne peut intersecter A et B). De plus, on a

$$A \subset \bigcup_{\substack{k \\ R_k \cap A \neq \emptyset}} R_k \text{ et } B \subset \bigcup_{\substack{k \\ R_k \cap B \neq \emptyset}} R_k \text{ avec } \bigcup_k R_k = \left(\bigcup_{\substack{k \\ R_k \cap A \neq \emptyset}} R_k \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{k \\ R_k \cap B \neq \emptyset}} R_k \right).$$

Ainsi, on a, par définition de \mathcal{H}_ϵ^h ,

$$\mathcal{H}_\epsilon^h(A) + \mathcal{H}_\epsilon^h(B) \leq \sum_{\substack{k \\ R_k \cap A \neq \emptyset}} (\text{diam}(R_k))^h + \sum_{\substack{k \\ R_k \cap B \neq \emptyset}} (\text{diam}(R_k))^h = \sum_k (\text{diam}(R_k))^h,$$

et vu le choix des R_k , on obtient

$$\mathcal{H}_\epsilon^h(A) + \mathcal{H}_\epsilon^h(B) < \mathcal{H}_\epsilon^h(A \cup B) + \epsilon,$$

cette inégalité étant valable pour tout $\epsilon > 0$. La limite pour $\epsilon \rightarrow 0$ donne

$$\mathcal{H}^h(A) + \mathcal{H}^h(B) \leq \mathcal{H}^h(A \cup B).$$

□

Nous pouvons maintenant définir la mesure de Hausdorff de dimension h à partir de la mesure extérieure \mathcal{H}^h définie sur $\wp(\mathbb{R}^n)$ en procédant selon une méthode classique en théorie de la mesure.

Définition 2.1.7. La mesure de Hausdorff de dimension h est la restriction de la mesure extérieure \mathcal{H}^h à la σ -algèbre des ensembles \mathcal{H}^h -mesurables², que nous notons $\mathcal{A}_{\mathcal{H}^h}$, et cette mesure est complète³. La mesure extérieure \mathcal{H}^h étant métrique, cette σ -algèbre $\mathcal{A}_{\mathcal{H}^h}$ comprend les ensembles boréliens.

2.1.2 Propriétés

Nous allons maintenant examiner les propriétés de la mesure de Hausdorff, en commençant par montrer que la mesure extérieure \mathcal{H}^h est Borel-régulière, c'est-à-dire que, pour tout $X \subset \mathbb{R}^n$, il existe un borélien $B \subset \mathbb{R}^n$ tel que $X \subset B$ et tel que $\mathcal{H}^h(B) = \mathcal{H}^h(X)$.

Notation 2.1.8. Nous notons $\mathcal{F}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ la collection des unions dénombrables de fermés de \mathbb{R}^n et $\mathcal{G}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ la collection des intersections dénombrables d'ouverts de \mathbb{R}^n . Un en-

2. Si μ est une mesure extérieure sur un espace E , on dit qu'un ensemble $M \subset E$ est μ -mesurable ssi $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \forall A \subset M, \forall B \subset M^c$, ce qui est équivalent à $\mu(C) = \mu(C \cap M) + \mu(C \cap M^c)$ pour tout $C \subset E$.

3. Tout ensemble négligeable est mesurable.

semble de $\mathcal{F}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ (respectivement de $\mathcal{G}_\sigma(\mathbb{R}^n)$) sera appelé un *ensemble F_σ* (respectivement *ensemble G_σ*).

Proposition 2.1.9. *Pour tout $X \subset \mathbb{R}^n$, il existe $G \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble G_σ tel que $X \subset G$ et $\mathcal{H}^h(G) = \mathcal{H}^h(X)$. En particulier, \mathcal{H}^h est une mesure extérieure Borel-régulière.*

Démonstration. Si $\mathcal{H}^h(X) = +\infty$, alors il suffit de prendre $G = \mathbb{R}^n$: G est une intersection d'ouverts, $X \subset G$, donc

$$+\infty = \mathcal{H}^h(X) \leq \mathcal{H}^h(G),$$

donc $\mathcal{H}^h(G) = \mathcal{H}^h(X)$.

Supposons donc que $\mathcal{H}^h(X) < +\infty$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_0$, choisissons un recouvrement ouvert $(U_{i,j})_{j \in \mathbb{N}_0}$ de X subordonné à $2/i$, tel que

$$\sum_j (\text{diam}(U_{i,j}))^h < \mathcal{H}^h_{\frac{1}{i}}(X) + \frac{1}{i}.$$

Montrons qu'on peut trouver un tel recouvrement. En effet, pour tout $i \in \mathbb{N}_0$, par définition de $\mathcal{H}^h_{\frac{1}{i}}$, on peut trouver $(X_{i,j})_{j \in \mathbb{N}_0}$ un recouvrement de X subordonné à $1/i$ tel que

$$\sum_j (\text{diam}(X_{i,j}))^h < \mathcal{H}^h_{\frac{1}{i}}(X) + \frac{1}{2i}.$$

Posons

$$U_{i,j} = X_{i,j}^\delta = \{x : d(x, X_{i,j}) < \delta\},$$

avec δ choisi suffisamment petit pour que

$$\text{diam}(U_{i,j}) \leq 2 \text{diam}(X_{i,j}).$$

Ainsi $X_{i,j} \subset U_{i,j}$, donc $X \subset \bigcup_j U_{i,j}$, et ce, pour tout $i \in \mathbb{N}_0$. De plus, $U_{i,j}$ est ouvert, et $\text{diam}(U_{i,j}) \leq 2/i$. En choisissant δ suffisamment petit pour que

$$\sum_j (\text{diam}(U_{i,j}))^h \leq \sum_j (\text{diam}(X_{i,j}))^h + \frac{1}{2i},$$

on a

$$\sum_j (\text{diam}(U_{i,j}))^h < \mathcal{H}^h_{\frac{1}{i}}(X) + \frac{1}{2i} + \frac{1}{2i} = \mathcal{H}^h_{\frac{1}{i}}(X) + \frac{1}{i},$$

et donc $(U_{i,j})_{j \in \mathbb{N}_0}$ satisfait bien les conditions demandées.

Ensuite, pour tout $i \in \mathbb{N}_0$, on a $X \subset \bigcup_j U_{i,j} = V_i$, et donc

$$X \subset \bigcap_i V_i = G,$$

où chaque V_i est ouvert puisqu'une union d'ouverts est un ouvert. Trivialement, nous obtenons $\mathcal{H}^h(X) \leq \mathcal{H}^h(G)$.

D'autre part, $(U_{i,j})_{j \in \mathbb{N}_0}$ est un recouvrement de G subordonné à $2/i$, donc il vient

$$\mathcal{H}_{\frac{2}{i}}^h(G) \leq \sum_j (\text{diam}(U_{i,j}))^h < \mathcal{H}_{\frac{1}{i}}^h(X) + \frac{1}{i}.$$

Pour $i \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\mathcal{H}^h(G) \leq \mathcal{H}^h(X),$$

d'où la conclusion.

En particulier, G est un borélien car une intersection dénombrable de boréliens est un borélien. \square

Remarque 2.1.10. Nous avons montré que le borélien B dont il est question est une intersection dénombrable d'ouverts V_i . Cela veut dire que l'on peut approcher X "par au-dessus" par un ouvert U dont la mesure de Hausdorff ne diffère de celle de X que par une quantité arbitrairement petite. Pour $\epsilon > 0$ fixé, si on considère

$$U_\epsilon = \bigcap_{i=1}^{N_\epsilon} V_i,$$

avec N_ϵ suffisamment grand, alors U_ϵ est un ouvert (intersection finie d'ouverts) tel que $X \subset U_\epsilon$ et tel que

$$\mathcal{H}^h(U_\epsilon) - \epsilon = \mathcal{H}^h(X).$$

De manière similaire, on peut approcher X "par en dessous", avec un fermé (sous la forme d'une union finie de fermés), dont la mesure de Hausdorff est arbitrairement proche de celle de X . C'est la proposition suivante.

Proposition 2.1.11. *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble \mathcal{H}^h -mesurable tel que $\mathcal{H}^h(X) < +\infty$, alors il existe $F \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble F_σ tel que $F \subset X$ et $\mathcal{H}^h(F) = \mathcal{H}^h(X)$.*

Démonstration. Plutôt que de présenter ici la preuve longue et technique de ce résultat, nous préférons donner la preuve plus courte d'une proposition semblable, dans un cadre plus général. Le lecteur intéressé trouvera la preuve de la proposition 2.1.11 à la section annexe A.2, qui utilise des arguments similaires à ceux que nous allons développer. \square

Proposition 2.1.12. *Si μ est une mesure définie sur la σ -algèbre \mathcal{A} , Borel-régulière, et σ -finie sur les boréliens, alors, pour tout $X \in \mathcal{A}$, il existe un borélien F tel que $F \subset X$ et tel que $\mu(F) = \mu(X)$.*

Démonstration. Nous notons $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ la suite croissante de boréliens tels que

$$\bigcup_k C_k = \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \mu(C_k) < +\infty.$$

Soit $X \in \mathcal{A}$. Commençons par démontrer la proposition dans le cas où $\mu(X) < +\infty$. Puisque la mesure μ est Borel-régulière, il existe un borélien B contenant X tel que $\mu(B \setminus X) = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, posons $D_k = C_k \cap B$. Ainsi, $(D_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ est une suite croissante de boréliens, et en utilisant la continuité à gauche de la mesure μ , il vient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(X \cap D_k) = \mu(X \cap \bigcup_k D_k) = \mu(X),$$

puisque $X \subset B$ et $\bigcup_k C_k = \mathbb{R}^n$.

Soit $\epsilon > 0$ fixé. Pour tout $i \in \mathbb{N}_0$, il existe $k_{i,\epsilon}$ tel que

$$\mu(X \cap D_{k_{i,\epsilon}}) > \mu(X) - \frac{\epsilon}{2^i},$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$\mu(X \setminus D_{k_{i,\epsilon}}) < \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Posons

$$F_{1,\epsilon} = \bigcap_i D_{k_{i,\epsilon}},$$

qui est un borélien. On a alors successivement

$$\begin{aligned} \mu(X) &\leq \mu(X \cap F_{1,\epsilon}) + \mu(X \cap F_{1,\epsilon}^c) = \mu(X \cap F_{1,\epsilon}) + \mu(X \cap \bigcup_i D_{k_{i,\epsilon}}^c) \\ &= \mu(X \cap F_{1,\epsilon}) + \mu(\bigcup_i (X \cap D_{k_{i,\epsilon}}^c)) \leq \mu(X \cap F_{1,\epsilon}) + \sum_i \mu(X \cap D_{k_{i,\epsilon}}^c) \\ &= \mu(X \cap F_{1,\epsilon}) + \sum_i \mu(X \setminus D_{k_{i,\epsilon}}), \end{aligned}$$

et on obtient alors

$$\mu(F_{1,\epsilon}) \geq \mu(X \cap F_{1,\epsilon}) \geq \mu(X) - \sum_i \mu(X \setminus D_{k_{i,\epsilon}}),$$

c'est-à-dire

$$\mu(F_{1,\epsilon}) > \mu(X) - \epsilon. \tag{2.2}$$

Puisque $F_{1,\epsilon} \subset B$, on a

$$\mu(F_{1,\epsilon} \setminus X) \leq \mu(B \setminus X) = 0,$$

et donc

$$\mu(F_{1,\epsilon} \setminus X) = 0.$$

Puisque la mesure μ est Borel-régulière, il existe un borélien $F_{2,\epsilon}$ tel que

$$F_{1,\epsilon} \setminus X \subset F_{2,\epsilon} \text{ et } \mu(F_{2,\epsilon}) = 0.$$

Posons alors

$$F_\epsilon = F_{1,\epsilon} \setminus F_{2,\epsilon}.$$

L'ensemble F_ϵ ainsi défini est un borélien inclus à X , impliquant l'inégalité $\mu(F_\epsilon) \leq \mu(X)$, mais aussi les relations

$$\mu(F_\epsilon) \geq \mu(F_{1,\epsilon}) - \mu(F_{2,\epsilon}) > \mu(X) - \epsilon,$$

où on a utilisé le fait que $\mu(F_{2,\epsilon}) = 0$ ainsi que l'inégalité (2.2). Nous avons donc montré que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un borélien $F_\epsilon \subset X$ tel que

$$\mu(X) - \epsilon < \mu(F_\epsilon) \leq \mu(X).$$

En remplaçant à présent ϵ par 2^{-j} avec $j \in \mathbb{N}_0$, nous pouvons dire que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe un borélien $F_j \subset X$ tel que

$$\mu(X) - \frac{1}{2^j} < \mu(F_j) \leq \mu(X).$$

Si nous posons, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$,

$$G_j = \bigcup_{i=1}^j F_i,$$

alors G_j est un borélien inclus à X et, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, on a $\mu(F_j) \leq \mu(G_j)$, donc

$$\mu(X) - \frac{1}{2^j} < \mu(G_j) \leq \mu(X).$$

Si on pose $G = \cup_j G_j$, alors G est un borélien inclus à X , et la croissance des espaces G_j et la continuité de la mesure μ impliquent, pour $j \rightarrow +\infty$, les relations

$$\mu(X) \leq \mu(G) \leq \mu(X),$$

ce qui permet de conclure.

Analysons maintenant le cas $\mu(X) = +\infty$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on a $\mu(X \cap C_k) < +\infty$. En utilisant le cas démontré précédemment, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe un borélien F_k tel que

$F_k \subset X \cap C_k$ et $\mu(F_k) = \mu(X \cap C_k)$. Si nous posons

$$F = \bigcup_k F_k,$$

alors F est inclus à X et

$$\mu(F) \geq \mu(F_k) = \mu(X \cap C_k),$$

pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Par continuité à gauche de la mesure μ , du fait que $\cup_k C_k = \mathbb{R}^n$, et que $\mu(X) = +\infty$, on obtient

$$\mu(F) = +\infty = \mu(X)$$

d'où la conclusion. □

Corollaire 2.1.13. *Dans les conditions de la proposition précédente, pour tout $X \in \mathcal{A}$, on a les égalités*

$$\mu(X) = \inf\{\mu(B) : B \text{ borélien}, B \supset X\} = \sup\{\mu(B) : B \text{ borélien}, B \subset X\}.$$

De manière similaire, en ce qui concerne la mesure de Hausdorff, on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.14. *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ est \mathcal{H}^h -mesurable et si $\mathcal{H}^h(X) < +\infty$, alors*

$$\mathcal{H}^h(X) = \inf\{\mathcal{H}^h(B) : B \text{ borélien}, B \supset X\} = \sup\{\mathcal{H}^h(B) : B \text{ borélien}, B \subset X\}.$$

Démonstration. Résulte des propositions 2.1.9 et 2.1.11. □

2.1.3 Mesure de Hausdorff et complétude

Les deux propositions que nous venons de présenter (à savoir 2.1.9 et 2.1.11) vont nous permettre d'exprimer d'une autre façon la σ -algèbre des ensembles \mathcal{H}^h -mesurables. Cette section est originale, mais la démonstration est adaptée de celle réalisée pour la mesure de Lebesgue dans [28].

Définition 2.1.15. Rappelons ce qu'est la notion de complétion d'une mesure μ , et son processus. Soit une mesure μ définie sur une σ -algèbre \mathcal{A} . On définit la σ -algèbre \mathcal{A}' de la manière suivante :

$$B \in \mathcal{A}' \Leftrightarrow \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A} \text{ tels que } A_1 \subset B \subset A_2 \text{ et } \mu(A_2 \setminus A_1) = 0$$

et on pose, pour tout $B \in \mathcal{A}'$,

$$\mu'(B) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, A \subset B\}.$$

On peut alors montrer ([28]) que μ' ainsi définie sur \mathcal{A}' est une mesure complète et dont la restriction à \mathcal{A} est égale à μ , on a donc procédé à la complétion de μ .

Nous avons le résultat suivant, adapté à partir de celui sur la mesure de Lebesgue.

Proposition 2.1.16. *Si μ est une mesure définie sur une σ -algèbre \mathcal{A} contenant \mathbb{B}^n , Borel-régulière, σ -finie sur les boréliens et complète, alors μ ainsi définie sur \mathcal{A} est la complétion de μ définie sur \mathbb{B}^n (où \mathbb{B}^n est la σ -algèbre des boréliens de \mathbb{R}^n).*

Démonstration. Notons $\mu_{\mathbb{B}}$ la restriction de μ à \mathbb{B}^n et $\mu_{\mathbb{B}}'$ la complétion de $\mu_{\mathbb{B}}$, définie sur \mathcal{A}' .

Au vu de la proposition 2.1.12 et du fait que μ est Borel-régulière, nous savons que si $X \in \mathcal{A}$, alors il existe des boréliens F et G tels que

$$F \subset X \subset G \text{ et tels que } \mu(G \setminus F) = 0.$$

En effet, si $\mu(X) < +\infty$, c'est évident puisque $\mu(F) = \mu(G) = \mu(X) < \infty$, donc

$$\mu(G \setminus F) = \mu(G) - \mu(F) = 0.$$

Si $\mu(X) = +\infty$, et si la suite $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ est croissante, telle que $\cup_k C_k = \mathbb{R}^n$ et telle⁴ que pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, $\mu(C_k) < +\infty$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ il existe des boréliens F_k et G_k tels que

$$F_k \subset X \cap C_k \subset G_k \text{ et } \mu(G_k \setminus F_k) = 0.$$

Il suffit alors de poser $F = \cup_k F_k$ et $G = \cup_k G_k$ pour avoir deux boréliens tels que $F \subset X \subset G$ et tels que

$$\mu(G \setminus F) = \mu\left(\bigcup_k G_k \setminus \bigcup_k F_k\right) \leq \mu\left(\bigcup_k G_k \setminus F_k\right) \leq \sum_k \mu(G_k \setminus F_k),$$

ce qui mène finalement à

$$\mu(G \setminus F) = 0.$$

Ainsi, au vu de la définition 2.1.15, on a directement $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ et μ est la restriction de $\mu_{\mathbb{B}}'$ sur \mathcal{A} .

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$.

Soit $A \in \mathcal{A}'$. Au vu de la définition 2.1.15, il existe des boréliens $B_1, B_2 \in \mathbb{B}^n \subset \mathcal{A}$ tels que

$$B_1 \subset A \subset B_2 \text{ avec } \mu_{\mathbb{B}}(B_2 \setminus B_1) = 0.$$

4. Une telle suite existe car μ est σ -finie.

Il vient donc $A \setminus B_1 \subset B_2 \setminus B_1$ et ⁵

$$\mu(B_2 \setminus B_1) = \mu_{\mathbb{B}}(B_2 \setminus B_1) = 0.$$

Ainsi, puisqu'on sait par hypothèse que μ est une mesure complète sur \mathcal{A} , on a $A \setminus B_1 \in \mathcal{A}$. On peut alors écrire

$$A = \underbrace{(A \setminus B_1)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{B_1}_{\in \mathcal{A}}$$

pour conclure que $A \in \mathcal{A}$. □

Remarque 2.1.17. Rappelons que nous savons que la restriction de la mesure extérieure de Hausdorff à la σ -algèbre $\mathcal{A}_{\mathcal{H}^h}$ de la mesure de Hausdorff (constituée des ensembles de \mathbb{R}^n qui sont \mathcal{H}^h -mesurables) définit la mesure de Hausdorff, et que celle-ci est complète. Si, en plus, nous tenons compte des propositions 2.1.9 et 2.1.11, la mesure de Hausdorff est un cas particulier de la proposition 2.1.16.

Corollaire 2.1.18. *Si la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^h définie sur $\mathcal{A}_{\mathcal{H}^h}$ est σ -finie, alors elle est la complétion de la mesure de Hausdorff définie sur \mathbb{B}^n .*

2.1.4 Relation entre mesure de Lebesgue et mesure de Hausdorff

Intéressons-nous à présent à l'exposant h de la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^h . Commençons par examiner les cas où h est un entier positif. Dans ce cas, nous pouvons trouver une relation entre la mesure de Lebesgue et celle de Hausdorff. Pour cela, énonçons d'abord sans démonstration le résultat suivant. Le lecteur intéressé trouvera la preuve dans [8].

Définition 2.1.19. Une collection d'ensembles \mathcal{V} est appelée classe de Vitali pour X si, pour tout $x \in X$, pour tout $\delta > 0$, il existe $U \in \mathcal{V}$ tel que $x \in U$ et $0 < \text{diam}(U) \leq \delta$.

Théorème 2.1.20. (*Théorème de recouvrement de Vitali*)

1. Si $X \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble \mathcal{H}^h -mesurable et \mathcal{V} une classe de Vitali pour X , formée d'ensembles fermés. Alors on peut sélectionner une suite $(U_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ d'ensembles de \mathcal{V} disjoints tels que soit

$$\sum_i (\text{diam}(U_i))^h = +\infty,$$

soit

$$\mathcal{H}^h(X \setminus \cup_i U_i) = 0.$$

2. Si $\mathcal{H}^h(X) < +\infty$, alors, pour $\epsilon > 0$ fixé, on peut aussi supposer que

$$\mathcal{H}^h(X) \leq \sum_i (\text{diam}(U_i))^h + \epsilon.$$

5. $B_2 \setminus B_1 \in \mathbb{B}^n \subset \mathcal{A}$ donc $\mu(B_2 \setminus B_1)$ a du sens.

Rappelons également le célèbre résultat suivant.

Théorème 2.1.21. (*Inégalité isodiamétrique*)

Le volume, en dimension n , d'un ensemble convexe fermé de diamètre d est, au plus, le volume d'une boule de diamètre d , à savoir

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}} \left(\frac{d}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Rappelons que si A est Lebesgue-mesurable, on a

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf_{(R_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{C}_A} \sum_{i=1}^{+\infty} \text{Vol}(R_i),$$

où \mathcal{C}_A est la collection des suites d'intervalles compacts $(R_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ de \mathbb{R}^n telles que $A \subset \bigcup_i R_i$, et où

$$\text{Vol}(I) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

si $I = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$.

Nous sommes à présent en mesure de montrer le lien entre $\mathcal{L}^n(X)$ et $\mathcal{H}^n(X)$.

Théorème 2.1.22. *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble Lebesgue-mesurable et \mathcal{H}^n -mesurable, alors $\mathcal{L}^n(X) = c_n \mathcal{H}^n(X)$ où c_n est le volume de la boule de diamètre 1, à savoir $c_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n \Gamma(\frac{n}{2})}$.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ un recouvrement de X , où on peut supposer chaque U_i convexe⁶ et fermé⁷, tel que

$$\sum_i (\text{diam}(U_i))^n < \mathcal{H}^n(X) + \epsilon.$$

L'inégalité isodiamétrique 2.1.21 donne alors, au vu de la définition de c_n , l'inégalité $\mathcal{L}^n(U_i) \leq c_n (\text{diam}(U_i))^n$, donc

$$\mathcal{L}^n(X) \leq \mathcal{L}^n(\bigcup_i U_i) \leq \sum_i \mathcal{L}^n(U_i) \leq c_n \sum_i (\text{diam}(U_i))^n,$$

et donc

$$\mathcal{L}^n(X) < c_n \mathcal{H}^n(X) + c_n \epsilon.$$

Donc, pour $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient $\mathcal{L}^n(X) \leq c_n \mathcal{H}^n(X)$.

Pour l'inégalité inverse, soit $\epsilon > 0$ et soit $(R_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ une suite d'intervalles compacts de \mathbb{R}^n

6. En vertu de la remarque énoncée juste après la définition 2.1.1.

7. De la même manière que dans la démonstration de la proposition 2.1.9, en utilisant $d(x, X_i) \leq \delta$ au lieu de $d(x, X_i) < \delta$.

telle que $X \subset \cup_i R_i$, et telle que

$$\sum_i \text{Vol}(R_i) < \mathcal{L}^n(X) + \epsilon. \quad (2.3)$$

Pour tout i , quitte à “agrandir” légèrement R_i tout en conservant l’inégalité (2.3), on peut supposer que les ensembles \mathring{R}_i recouvrent X . Soit $r > 0$ fixé. Pour tout i , si on pose

$$\mathcal{V}_i^r = \{B \subset \mathbb{R}^n \text{ où } B \text{ est une boule fermée telle que } B \subset \mathring{R}_i, \text{ diam}(B) \leq r\},$$

alors \mathcal{V}_i^r forme une classe de Vitali⁸ pour \mathring{R}_i . Par le point 1. du théorème de recouvrement de Vitali 2.1.20, il existe des boules disjointes de \mathcal{V}_i^r , nommons-les $(B_{i,j})_{j \in \mathbb{N}_0}$, incluses à \mathring{R}_i , et de diamètre inférieur (ou égal) à r , telles que soit

$$\sum_j (\text{diam}(B_{i,j}))^n = +\infty,$$

soit

$$\mathcal{H}^n(\mathring{R}_i \setminus \cup_j B_{i,j}) = 0.$$

Montrons que le premier cas est impossible ici. On a, puisque les $(B_{i,j})_{j \in \mathbb{N}_0}$ sont disjoints et que $\cup_j B_{i,j} \subset \mathring{R}_i$,

$$\sum_j (\text{diam}(B_{i,j}))^n = \sum_j \frac{\mathcal{L}^n(B_{i,j})}{c_n} = \frac{1}{c_n} \mathcal{L}^n(\cup_j B_{i,j}) \leq \frac{1}{c_n} \mathcal{L}^n(\mathring{R}_i).$$

Donc si $\sum_j (\text{diam}(B_{i,j}))^n = +\infty$, alors $\mathcal{L}^n(\mathring{R}_i) = +\infty$, ce qui n’est pas possible puisque $\mathcal{L}^n(\mathring{R}_i) \leq \mathcal{L}^n(R_i) < +\infty$ car la mesure de Lebesgue est finie sur tout compact.

Ainsi, $\mathcal{H}^n(\mathring{R}_i \setminus \cup_j B_{i,j}) = 0$, et donc

$$\mathcal{H}_r^n(\mathring{R}_i \setminus \cup_j B_{i,j}) = 0$$

(puisque $\mathcal{H}_r^n \leq \mathcal{H}^n$). On a alors successivement

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_r^n(X) &\leq \mathcal{H}_r^n(\cup_i \mathring{R}_i) \leq \sum_i \mathcal{H}_r^n(\mathring{R}_i) = \sum_i \mathcal{H}_r^n(\mathring{R}_i \cap \cup_j B_{i,j} \cup \mathring{R}_i \cap (\cup_j B_{i,j})^c) \\ &\leq \sum_i \mathcal{H}_r^n(\mathring{R}_i \cap \cup_j B_{i,j}) + \sum_i \mathcal{H}_r^n(\mathring{R}_i \setminus \cup_j B_{i,j}) = \sum_i \mathcal{H}_r^n(\cup_j B_{i,j}) + 0 \\ &= \sum_i \sum_j \mathcal{H}_r^n(B_{i,j}) \leq \sum_i \sum_j (\text{diam}(B_{i,j}))^n = \frac{1}{c_n} \sum_i \sum_j \mathcal{L}^n(B_{i,j}) \\ &= \frac{1}{c_n} \sum_i \mathcal{L}^n(\cup_j B_{i,j}) \leq \frac{1}{c_n} \sum_i \mathcal{L}^n(\mathring{R}_i) \leq \frac{1}{c_n} \sum_i \mathcal{L}^n(R_i) \leq \frac{1}{c_n} \sum_i \text{Vol}(R_i). \end{aligned}$$

8. \mathring{R}_i étant ouvert, la vérification est immédiate.

Compte tenu de la relation 2.3, on obtient finalement

$$\mathcal{H}_r^n(X) < \frac{1}{c_n} \mathcal{L}^n(X) + \frac{\epsilon}{c_n},$$

et donc

$$c_n \mathcal{H}_r^n(X) < \mathcal{L}^n(X) + \epsilon$$

et ce, pour tout $\epsilon > 0$, et pour tout $r > 0$. En considérant $\epsilon \rightarrow 0$ et $r \rightarrow 0$, on obtient

$$c_n \mathcal{H}^n(X) \leq \mathcal{L}^n(X),$$

et on peut donc conclure. □

Remarque 2.1.23. Ainsi, en dimension naturelle, la mesure de Hausdorff se calcule facilement, à partir de celle de Lebesgue. Cependant, elle n'apporte rien d'intéressant par rapport à cette dernière.

Certains auteurs modifient parfois la définition de la mesure de Hausdorff afin de la normaliser, c'est-à-dire, afin d'obtenir $\mathcal{L}^n = \mathcal{H}^n$. Toutefois, ce qui nous intéresse, c'est la dimension de Hausdorff (voir section suivante) d'un ensemble, pour laquelle nous n'avons pas besoin de la valeur exacte de la mesure de Hausdorff de l'ensemble en question. Dès lors, on privilégiera la définition la plus simple et classique pour la mesure de Hausdorff, à savoir celle introduite précédemment.

Notons que $\mathcal{H}^0(X) = \text{card}(X)$ et que $\mathcal{H}^1(X) = \mathcal{L}^1(X)$ pour tout $X \subset \mathbb{R}$.

2.1.5 Propriétés supplémentaires

Il est également intéressant de noter que la mesure de Hausdorff se comporte "gentiment" vis-à-vis des dilatations et translations.

Proposition 2.1.24. 1. Si $X \subset \mathbb{R}^n$, et si $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathcal{H}^h(X + x) = \mathcal{H}^h(X),$$

où $X + x = \{y + x : y \in X\}$.

2. Si $0 < t < +\infty$, on a

$$\mathcal{H}^h(tX) = t^h \mathcal{H}^h(X),$$

où $tX = \{tx : x \in X\}$.

Démonstration. 1. C'est immédiat, il suffit de traduire les recouvrements utilisés dans la définition 2.1.1.

2. Si $(X_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ est un recouvrement de X subordonné à ϵ tel que

$$\sum_j (\text{diam}(X_j))^h < \mathcal{H}_\epsilon^h(X) + \epsilon,$$

alors $(tX_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ est un recouvrement de tX subordonné à $t\epsilon$, et donc

$$\mathcal{H}_\epsilon^h(tX) \leq \sum_j (\text{diam}(tX_j))^h = t^h \sum_j (\text{diam}(X_j))^h < t^h \mathcal{H}_\epsilon^h(X) + t^h \epsilon.$$

Pour $\epsilon \rightarrow 0$, on a

$$\mathcal{H}^h(tX) \leq t^h \mathcal{H}^h(X)$$

et ce, pour tout $X \subset \mathbb{R}^n$ et tout $0 < t < +\infty$. Soient t fixé et X fixé. Le raisonnement précédent pour $t' = \frac{1}{t}$ et $X' = tX$ donne

$$\mathcal{H}^h\left(\frac{1}{t}tX\right) \leq \left(\frac{1}{t}\right)^h \mathcal{H}^h(tX),$$

donc

$$\mathcal{H}^h(tX) \geq t^h \mathcal{H}^h(X).$$

Au total, on a donc bien $\mathcal{H}^h(tX) = t^h \mathcal{H}^h(X)$. □

Remarque 2.1.25. Il existe de nombreuses autres propriétés, qui varient parfois avec la définition donnée pour la mesure de Hausdorff. Nous en démontrons une dernière, qui fait le lien avec les fonctions hölderiennes.

Proposition 2.1.26. 1. Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction uniformément hölderienne d'exposant $s > 0$, pour laquelle il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $x \in X$ on a

$$|f(x+l) - f(x)| \leq C|l|^s,$$

pour tout l tel que $x+l \in X$, ou encore, de manière équivalente⁹,

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^s$$

pour tous x et y appartenant à X . On a alors

$$\mathcal{H}^{\frac{h}{s}}(f(X)) \leq C^{\frac{h}{s}} \mathcal{H}^h(X).$$

9. Donc on suppose avoir une fonction hölderienne d'exposant $s > 0$ où on impose que le polynôme $P_x(l)$ de la définition 1.2.1 soit de degré 0, auquel cas on sait qu'il doit s'écrire $f(x)$. Au vu de la remarque 1.2.6, si f est hölderienne d'exposant s avec $0 < s \leq 1$, alors la contrainte précédente n'en n'est plus une puisque dans ce cas le polynôme $P_x(l) = f(x)$ par définition.

2. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction telle qu'il existe un réel $s > 0$ et une constante $C > 0$ tels que

$$C|x - y|^s \leq |f(x) - f(y)| \quad \forall x, y \in X.$$

On a alors

$$C^h \mathcal{H}^{hs}(X) \leq \mathcal{H}^h(f(X)).$$

Démonstration. 1. Soit $(X_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ un recouvrement de X subordonné à $\epsilon > 0$. On a

$$\text{diam}(f(X \cap X_j)) \leq C \left(\sup_{x, y \in X \cap X_j} |x - y| \right)^s \leq C(\text{diam } X_j)^s,$$

et donc $\{f(X \cap X_j)\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ est un recouvrement de $f(X)$ subordonné à $C\epsilon^s$, et il vient

$$\sum_j (\text{diam}(f(X \cap X_j)))^{\frac{h}{s}} \leq C^{\frac{h}{s}} \sum_j (\text{diam}(X_j))^h.$$

Il en résulte que

$$\mathcal{H}_{C\epsilon^s}^{\frac{h}{s}}(f(X)) \leq C^{\frac{h}{s}} \mathcal{H}_\epsilon^h(X).$$

Pour $\epsilon \rightarrow 0$, on a la conclusion.

2. Soit $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ un recouvrement de $f(X)$ subordonné à $\epsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned} \text{diam}(f^{-1}(Y_j)) &= \sup_{x, y \in f^{-1}(Y_j)} |x - y| \\ &\leq \frac{1}{C^{\frac{1}{s}}} \left(\sup_{x, y \in f^{-1}(Y_j)} |f(x) - f(y)| \right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{1}{C^{\frac{1}{s}}} (\text{diam}(Y_j))^{\frac{1}{s}}, \end{aligned}$$

et donc $\{f^{-1}(Y_j)\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ est un recouvrement de X subordonné à $(\frac{\epsilon}{C})^{\frac{1}{s}}$, et il vient

$$\sum_j (\text{diam}(f^{-1}(Y_j)))^{hs} \leq \frac{1}{C^h} \sum_j (\text{diam}(Y_j))^h.$$

Il en résulte que

$$\mathcal{H}_{(\frac{\epsilon}{C})^{\frac{1}{s}}}^{hs}(X) \leq \frac{1}{C^h} \mathcal{H}_\epsilon^h(f(X)).$$

Pour $\epsilon \rightarrow 0$, on a la conclusion. □

Remarque 2.1.27. Pour le cas particulier d'une fonction f Lipschitz (c'est-à-dire lorsque $s = 1$ dans la première partie de la proposition), on a $\mathcal{H}^h(f(X)) \leq C^h \mathcal{H}^h(X)$. Si f est bi-Lipschitz, i.e. il existe des constantes positives C_1 et C_2 telles que

$$C_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq C_2|x - y| \quad \forall x, y \in X,$$

on a

$$C_1^h \mathcal{H}^h(X) \leq \mathcal{H}^h(f(X)) \leq C_2^h \mathcal{H}^h(X).$$

2.2 Dimension de Hausdorff

2.2.1 Définition

La dimension de Hausdorff se base sur la mesure de Hausdorff que nous venons de définir et examiner. Jusqu'à présent, nous ne nous sommes presque pas intéressés au paramètre h intervenant dans la définition de \mathcal{H}^h . Regardons comment \mathcal{H}^h varie avec h . Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ et soient $h, t \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq h < t$, et fixons $\epsilon > 0$. Puisque $\mathcal{H}^h(X)$ est défini comme étant $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\epsilon^h(X)$, on peut supposer $\epsilon < 1$. Pour tout recouvrement $(X_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ de X subordonné à ϵ , on a

$$\sum_j (\text{diam}(X_j))^h \geq \sum_j (\text{diam}(X_j))^t$$

puisque $\text{diam}(X_j) < 1$ et que $h < t$.

Ainsi, $\mathcal{H}^h(X) \geq \mathcal{H}^t(X)$, et donc $\mathcal{H}^h(X)$ décroît quand h varie de 0 à $+\infty$. On peut encore affiner cela. En effet, on a

$$\sum_j (\text{diam}(X_j))^t = \sum_j (\text{diam}(X_j))^{t-h} (\text{diam}(X_j))^h \leq \epsilon^{t-h} \sum_j (\text{diam}(X_j))^h,$$

donc

$$\mathcal{H}_\epsilon^t(X) \leq \epsilon^{t-h} \mathcal{H}_\epsilon^h(X).$$

Puisque $t-h > 0$ et que $\mathcal{H}^t(X) \leq \mathcal{H}^h(X)$, en considérant $\epsilon \rightarrow 0$ dans l'inégalité précédente, on obtient que, si $\mathcal{H}^t(X) = +\infty$, alors $\mathcal{H}^h(X) = +\infty$.

Si nous supposons maintenant que $0 < \mathcal{H}^t(X) < +\infty$, on écrit l'inéquation obtenue de la sorte :

$$\epsilon^{h-t} \mathcal{H}_\epsilon^t(X) \leq \mathcal{H}_\epsilon^h(X),$$

où $h-t < 0$. Ainsi, si $0 < \mathcal{H}^t(X) < +\infty$, la limite pour $\epsilon \rightarrow 0$ entraîne que $\mathcal{H}^h(X) = +\infty$. Dans ce cas, pour tout $t' > t$, on a $\mathcal{H}^{t'}(X) = 0$, puisque $\mathcal{H}^{t'}(X) \leq \mathcal{H}^t(X) < +\infty$ et que si $\mathcal{H}^{t'}(X) > 0$ le raisonnement précédent donnerait $\mathcal{H}^t(X) = +\infty$.

Par conséquent, il existe une unique valeur, $\dim_{\mathcal{H}}(X)$, telle que $\mathcal{H}^h(X) = 0$ pour tout $h > \dim_{\mathcal{H}}(X)$ et telle que, si $\dim_{\mathcal{H}}(X) > 0$, $\mathcal{H}^h(X) = +\infty$ pour tout $0 \leq h < \dim_{\mathcal{H}}(X)$. On appellera $\dim_{\mathcal{H}}(X)$ la dimension de Hausdorff de X . Mathématiquement, on définit $\dim_{\mathcal{H}}(X)$ comme suit.

Définition 2.2.1. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. On définit la dimension de Hausdorff de X , notée

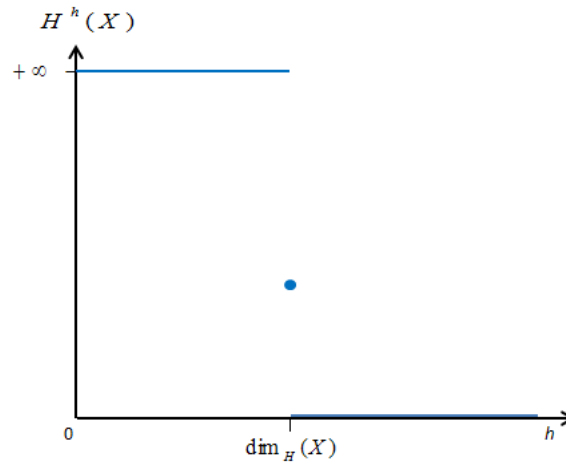


FIGURE 2.1 – Représentation graphique de $\mathcal{H}^h(X)$ en fonction de h pour un ensemble X donné. La dimension de Hausdorff est la valeur de h à laquelle se produit le “saut” de $+\infty$ à 0. Notons que pour $h = \dim_{\mathcal{H}}(X)$, on pourrait avoir $\mathcal{H}^h(X) = 0$ ou $\mathcal{H}^h(X) = +\infty$.

$\dim_{\mathcal{H}}(X)$, par

$$\dim_{\mathcal{H}}(X) = \inf\{h \geq 0 : \mathcal{H}^h(X) = 0\}.$$

La figure 2.1 illustre cette définition, à partir du graphe de la fonction $h \mapsto \mathcal{H}^h(X)$ pour un ensemble X fixé. La dimension de Hausdorff de X correspond donc à la valeur de h pour laquelle $\mathcal{H}^h(X)$ “saute” de $+\infty$ à 0. Attention, il n’est pas correct de dire que $\dim_{\mathcal{H}}(X)$ est l’unique h tel que $0 < \mathcal{H}^h(X) < +\infty$. En effet, nous savons juste que, pour $0 \leq h < \dim_{\mathcal{H}}(X)$, on a $\mathcal{H}^h(X) = +\infty$ (pour autant que $\dim_{\mathcal{H}}(X) > 0$) et que, pour $h > \dim_{\mathcal{H}}(X)$, on a $\mathcal{H}^h(X) = 0$. Pour le cas $h = \dim_{\mathcal{H}}(X)$, les trois cas $\mathcal{H}^h(X) = 0$, $0 < \mathcal{H}^h(X) < +\infty$, $\mathcal{H}^h(X) = +\infty$ sont possibles, nous n’avons pas d’information disponible sur la valeur exacte de $\mathcal{H}^h(X)$. Cependant, si nous pouvons trouver un h tel que $0 < \mathcal{H}^h(X) < +\infty$, alors $h = \dim_{\mathcal{H}}(X)$. Ainsi, une technique communément utilisée dans la détection de $\dim_{\mathcal{H}}(X)$ sans passer par le calcul de la valeur exacte de $\mathcal{H}^h(X)$ est de trouver un h pour lequel on peut trouver une borne inférieure $A > 0$ et une borne supérieure $B < +\infty$ pour $\mathcal{H}^h(X)$:

$$0 < A \leq \mathcal{H}^h(X) \leq B < +\infty.$$

Ainsi, $\dim_{\mathcal{H}}(X) = h$.

Remarque 2.2.2. On pourrait aussi définir

$$\dim_{\mathcal{H}}(X) = \sup\{h : \mathcal{H}^h(X) = +\infty\}.$$

Cette définition est équivalente à la première pour tout ensemble X tel que $\inf\{h : \mathcal{H}^h(X) = 0\} > 0$.

On a, avec notre première définition, $\dim_{\mathcal{H}}(\emptyset) = 0$. Comme nous allons le montrer, il existe des ensembles non-vides dont la dimension de Hausdorff est nulle. Ainsi, afin de les distinguer de l'ensemble vide (en terme de $\dim_{\mathcal{H}}$) on pose généralement $\dim_{\mathcal{H}}(\emptyset) = -1$ pour être en accord avec la dimension topologique, ou encore $\dim_{\mathcal{H}}(\emptyset) = -\infty$ (convention que nous utiliserons lorsque nécessaire dans ce travail). De toute façon, l'ensemble vide nous importera peu.

Remarque 2.2.3. Notons aussi que si l'on définit la dimension de Hausdorff-Besicovitch par

$$\dim_{\mathcal{B}}(X) = \inf\{h : \mathcal{B}^h(X) = 0\},$$

la relation (2.1) assure que $\dim_{\mathcal{B}}(X) = \dim_{\mathcal{H}}(X)$ pour tout $X \subset \mathbb{R}^n$.

2.2.2 Propriétés

Dégageons quelques propriétés de la dimension de Hausdorff.

Proposition 2.2.4. *Si $X \subset X'$, alors $\dim_{\mathcal{H}}(X) \leq \dim_{\mathcal{H}}(X')$.*

Démonstration. Pour tout $h \geq 0$, on a $\mathcal{H}^h(X) \leq \mathcal{H}^h(X')$ donc si $\mathcal{H}^h(X') = 0$ alors $\mathcal{H}^h(X) = 0$, et donc $\{h : \mathcal{H}^h(X') = 0\} \subset \{h : \mathcal{H}^h(X) = 0\}$. En prenant la borne inférieure des deux ensembles, on conclut. \square

Proposition 2.2.5. *Pour tout $X \subset \mathbb{R}^n$, on a $\dim_{\mathcal{H}}(X) \leq n$.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, et soit C un cube unité de \mathbb{R}^n . On peut le découper en j^n sous-cubes de côté $\frac{1}{j}$, et donc de diamètre $\frac{\sqrt{n}}{j}$, notons-les X_1, \dots, X_{j^n} . Prenons j suffisamment grand pour avoir $\frac{\sqrt{n}}{j} \leq \epsilon$, c'est-à-dire pour que les X_i soient subordonnés à ϵ . On a alors

$$\mathcal{H}_{\epsilon}^n(C) \leq \sum_{i=1}^{j^n} (\text{diam } X_i)^n = j^n \left(\frac{\sqrt{n}}{j}\right)^n = n^{\frac{n}{2}},$$

et ce, pour tout $\epsilon > 0$. On a donc $\mathcal{H}^n(C) < +\infty$, et donc $\mathcal{H}^h(C) = 0$ pour tout $h > n$. Puisque \mathbb{R}^n peut s'écrire comme une union dénombrable de tels cubes, on a également $\mathcal{H}^h(\mathbb{R}^n) = 0$ pour tout $h > n$, et donc $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n) \leq n$. La proposition précédente permet de conclure : pour tout $X \subset \mathbb{R}^n$, on a

$$\dim_{\mathcal{H}}(X) \leq \dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n) \leq n.$$

\square

Proposition 2.2.6. *Pour tout ouvert non-vide $U \subset \mathbb{R}^n$, on a $\dim_{\mathcal{H}}(U) = n$.*

Démonstration. Au vu de la proposition précédente, on a $\dim_{\mathcal{H}}(U) \leq n$, il reste à montrer que $n \leq \dim_{\mathcal{H}}(U)$.

U étant ouvert et non-vide, il contient une boule (non-vide) B , dont le volume, i.e. la mesure de Lebesgue en dimension n , $\mathcal{L}^n(B)$, est strictement positif et fini. Le théorème 2.1.22 donne alors, pour $d_n = \frac{1}{c_n}$,

$$0 < d_n \mathcal{L}^n(B) = \mathcal{H}^n(B) \leq \mathcal{H}^n(U),$$

où la dernière inégalité résulte du fait que $B \subset U$. Ainsi, $0 < \mathcal{H}^n(U)$, et donc $n \leq \dim_{\mathcal{H}}(U)$ et on conclut. \square

Remarque 2.2.7. En particulier, on a $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n) = n$, comme on pouvait l'espérer de la part d'une notion de dimension.

Proposition 2.2.8. *Pour tout point $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\dim_{\mathcal{H}}(\{x\}) = 0$.*

Démonstration. Puisqu'on peut recouvrir x avec un intervalle contenant x et de diamètre arbitrairement petit, on a, pour tout $\epsilon > 0$, $\mathcal{H}_{\epsilon}^0(\{x\}) = 1$, et donc $\mathcal{H}^0(\{x\}) = 1$. Ainsi, $\dim_{\mathcal{H}}(\{x\}) = 0$. \square

Remarque 2.2.9. Il existe donc des ensembles non vides dont la dimension de Hausdorff est nulle (cfr remarque 2.2.2). C'est en fait le cas de tout ensemble dénombrable, comme le prouve la proposition suivante, couplée à celle que nous venons de démontrer.

Proposition 2.2.10. *La dimension de Hausdorff est stable. En d'autres termes, étant donné $(X_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ une suite de sous-ensembles de \mathbb{R}^n , on a*

$$\dim_{\mathcal{H}} \left(\bigcup_j X_j \right) = \sup_j \{ \dim_{\mathcal{H}}(X_j) \}.$$

Démonstration. Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, on a $X_j \subset \cup_j X_j$, donc par la proposition 2.2.4, on a $\dim_{\mathcal{H}}(X_j) \leq \dim_{\mathcal{H}}(\cup_j X_j)$, et donc

$$\sup_j \{ \dim_{\mathcal{H}}(X_j) \} \leq \dim_{\mathcal{H}}(\cup_j X_j).$$

D'autre part, si on fixe $h \geq 0$ tel que $h > \sup_j \{ \dim_{\mathcal{H}}(X_j) \}$, alors $\mathcal{H}^h(X_j) = 0 \forall j$ et donc

$$0 \leq \mathcal{H}^h(\cup_j X_j) \leq \sum_j \mathcal{H}^h(X_j) = 0,$$

donc $\mathcal{H}^h(\cup_j X_j) = 0$ et par conséquent $\dim_{\mathcal{H}}(\cup_j X_j) \leq h$. Cette inégalité étant vérifiée pour tout $h > \sup_j \{\dim_{\mathcal{H}}(X_j)\}$, on en tire que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\cup_j X_j) \leq \sup_j \{\dim_{\mathcal{H}}(X_j)\}.$$

On peut donc conclure. □

Corollaire 2.2.11. *Tout ensemble dénombrable est de dimension de Hausdorff nulle.*

Proposition 2.2.12. *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Si $0 < \dim_{\mathcal{H}}(X) < 1$ et $\mathcal{H}^{\dim_{\mathcal{H}}(X)}(X) < +\infty$, alors X est totalement discontinu¹⁰.*

Démonstration. Posons $h = \dim_{\mathcal{H}}(X)$. Soient x et y deux points de \mathbb{R}^n , avec $x \neq y$. Supposons que x et y appartiennent à la même composante connexe de X . On définit

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[: z \mapsto f(z) = |z - x|.$$

On a

$$|f(z_1) - f(z_2)| = ||z_1 - x| - |z_2 - x|| \leq |(z_1 - x) - (z_2 - x)| = |z_1 - z_2|.$$

Ainsi, f est Lipschitz, et la proposition 2.1.26 donne

$$\mathcal{H}^h(f(X)) \leq \mathcal{H}^h(X) < +\infty.$$

On a donc $\mathcal{H}^h(f(X)) < +\infty$, où $h < 1$, donc

$$\mathcal{H}^1(f(X)) = 0,$$

et puisque $f(X) \subset \mathbb{R}$, on a, par le théorème 2.1.22 ,

$$\mathcal{L}^1(f(X)) = \mathcal{H}^1(f(X)) = 0.$$

Puisque $x \neq y$, on a $|y - x| > 0$, donc $f(y) > 0$. Soit $r \notin f(X)$ tel que $0 < r < f(y)$. Un tel r existe car si, pour tout r tel que $0 < r < f(y)$, on a $r \in f(X)$, alors $\mathcal{L}^1(f(X)) > 0$ (puisque dans ce cas $f(X)$ contient au moins un compact), ce qui contredit le résultat obtenu précédemment.

On a alors, puisque $r \notin f(X)$,

$$\begin{aligned} X &= \{z \in X : f(z) < r\} \cup \{z \in X : f(z) > r\} \\ &= \{z \in X : |z - x| < r\} \cup \{z \in X : |z - x| > r\} = X_1 \cup X_2. \end{aligned}$$

10. C'est-à-dire, tout sous-ensemble de X contenant au moins deux points est non-connexe.

On a donc décomposé X en une union disjointe de deux ouverts X_1 et X_2 , tels que $x \in X_1$ et $y \in X_2$ (puisque $r < f(y)$), contredisant l'hypothèse que x et y appartiennent à la même composante connexe. \square

Remarque 2.2.13. Rappelons que, si pour tous x et y de X , on a

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^s,$$

alors

$$\mathcal{H}^{\frac{h}{s}}(f(X)) \leq C^{\frac{h}{s}} \mathcal{H}^h(X).$$

Ainsi, pour tout $h > \dim_{\mathcal{H}}(X)$, on a $\mathcal{H}^{\frac{h}{s}}(f(X)) = 0$, donc $\dim_{\mathcal{H}}(f(X)) \leq \frac{h}{s}$. Cette inégalité étant valable pour tout $h > \dim_{\mathcal{H}}(X)$, on a

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(X)) \leq \frac{1}{s} \dim_{\mathcal{H}}(X).$$

En particulier, si f est Lipschitz ($s = 1$), alors

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(X)) \leq \dim_{\mathcal{H}}(X).$$

Si nous supposons maintenant que la fonction f est bi-Lipschitz, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 non nulles telles que

$$C_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq C_2|x - y|$$

pour tous $x, y \in X$, alors, en inversant les rôles de X et $f(X)$ dans le raisonnement précédent, on obtient que

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(X)) = \dim_{\mathcal{H}}(X).$$

Les applications bi-Lipschitz laissent donc invariante la dimension de Hausdorff. On peut donc dire que deux espaces X et Y sont équivalents vis-à-vis de la dimension de Hausdorff si il existe une application bi-Lipschitz de l'un vers l'autre.

2.2.3 L'ensemble de Cantor

Terminons ce chapitre en calculant la mesure et la dimension de Hausdorff d'un "grand classique" : l'ensemble de Cantor.

Définition 2.2.14. L'ensemble de Cantor se définit récursivement. On pose $C_0 = [0, 1]$, et on obtient C_{j+1} en enlevant à chaque intervalle composant C_j son deuxième tiers, ouvert. Ainsi, on a

$$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1],$$

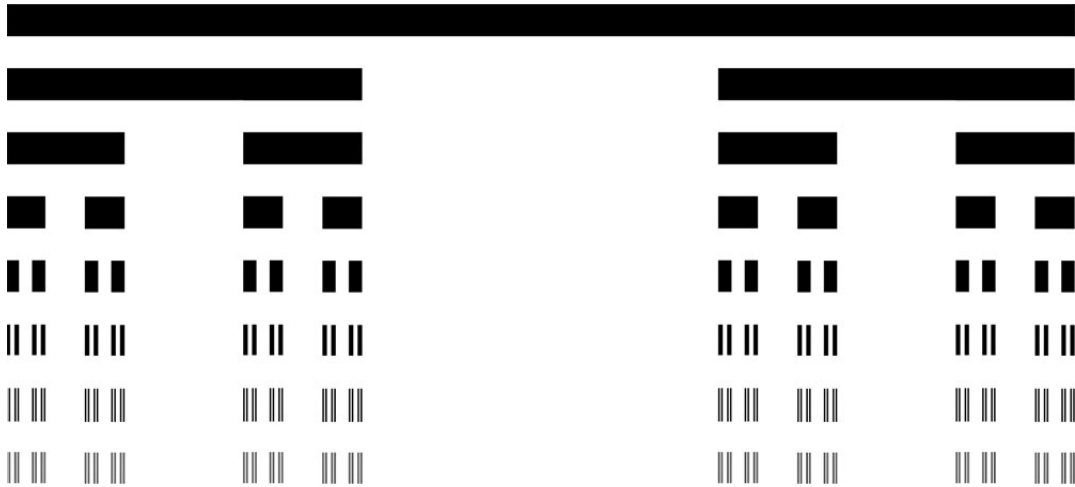


FIGURE 2.2 – Construction de l'ensemble de Cantor.

$$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1],$$

et ainsi de suite, comme illustré à la Figure¹¹ 2.2. L'ensemble de Cantor, C , est donné par

$$C = \bigcap_{j=0}^{+\infty} C_j.$$

Théorème 2.2.15. *On a $\dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$ et pour $h = \dim_{\mathcal{H}}(C)$, on a $\mathcal{H}^h(C) = 1$.*

Démonstration. D'abord, remarquons que C_j est constitué de 2^j intervalles de longueur 3^{-j} et que l'on peut recouvrir C avec C_j (et ce, pour tout j). Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{H}_{3^{-j}}^h(C) \leq \sum_{k=1}^{2^j} (3^{-j})^h = 2^j 3^{-jh}.$$

Pour $h = \frac{\log 2}{\log 3}$, on a $3^{-jh} = (3^{\frac{\log 2}{\log 3}})^{-j} = 2^{-j}$, et donc, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{H}_{3^{-j}}^h(C) \leq 1.$$

En considérant la limite pour $j \rightarrow +\infty$, on a

$$\mathcal{H}^h(C) \leq 1,$$

et en particulier

$$\dim_{\mathcal{H}}(C) \leq h.$$

11. <http://www.julien-nedelec.net/wordpress/index.php/la-poussiere-de-cantor/>

Pour montrer que $\mathcal{H}^h(C) \geq 1$, il suffit de montrer que, pour toute collection d'intervalles \mathcal{I} recouvrant C , on a

$$1 \leq \sum_{I \in \mathcal{I}} (\text{diam}(I))^h. \quad (2.4)$$

Soit \mathcal{I} une collection d'intervalles recouvrant C . Puisque C est compact, en agrandissant légèrement les intervalles I de \mathcal{I} si nécessaire, on peut supposer que \mathcal{I} est une collection finie d'intervalles fermés. Quitte à les modifier à nouveau légèrement ou les déplacer si besoin, on peut également supposer que l'on “place bien” nos intervalles I , c'est-à-dire que chaque I peut se découper en trois morceaux : le premier est un intervalle d'un C_j pour un j , suivi d'un intervalle ouvert, puis enfin d'un autre intervalle d'un $C_{j'}$. On écrira alors

$$I = J \cup K \cup J'$$

où J (resp. J') est un des 2^j (resp. $2^{j'}$) intervalles de C_j (resp. $C_{j'}$), pour un certain $j \in \mathbb{N}$ (resp. pour un certain $j' \in \mathbb{N}$,) et où K est l'intervalle ouvert situé entre J et J' . Par souci d'unicité d'une telle découpe, on prend J et J' les plus grands possibles vérifiant les conditions mentionnées. Par construction de C et du découpage de I , on a $\text{diam}(J) \leq \text{diam}(K)$ et $\text{diam}(J') \leq \text{diam}(K)$, donc

$$\text{diam}(K) \geq \frac{\text{diam}(J) + \text{diam}(J')}{2}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} (\text{diam}(I))^h &= (\text{diam}(J) + \text{diam}(K) + \text{diam}(J'))^h \\ &\geq \left(\frac{3}{2}(\text{diam}(J) + \text{diam}(J'))\right)^h \\ &= 3^h \left(\frac{\text{diam}(J) + \text{diam}(J')}{2}\right)^h \\ &= 2 \left(\frac{\text{diam}(J) + \text{diam}(J')}{2}\right)^h \\ &\geq 2 \frac{(\text{diam}(J))^h + (\text{diam}(J'))^h}{2} \\ &= (\text{diam}(J))^h + (\text{diam}(J'))^h, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité s'obtient par concavité de la fonction $t \mapsto t^h$. En effet, puisque $h < 1$, cette fonction, définie pour tout $t \geq 0$, est concave, et donc donne, pour tous a et b positifs, $(\frac{a+b}{2})^h \geq \frac{a^h + b^h}{2}$. Donc, quitte à remplacer chaque $I \in \mathcal{I}$ par J et J' selon la méthode décrite ci-dessus, il suffit de montrer l'inégalité (2.4) lorsque chaque I est un intervalle d'un C_{j_I} , et donc lorsque chaque I est de diamètre égal à 3^{-j_I} pour un certain ¹²

12. Cela suffit car le fait que $(\text{diam}(I))^h \geq (\text{diam}(J))^h + (\text{diam}(J'))^h$ implique que $\sum_{I \in \mathcal{I}} (\text{diam}(I))^h \geq$

$j_I \in \mathbb{N}$.

Nous considérons donc un nombre fini d'intervalles I dont le diamètre est une puissance de $\frac{1}{3}$ (différente à priori pour chaque intervalle). Puisqu'on en a un nombre fini, le minimum de ces exposants existe et est non nul. Ainsi, tous nos intervalles I sont tels que $\text{diam}(I) \geq 3^{-j_0}$ pour un certain j_0 . Puisqu'on a un recouvrement fini de C avec des intervalles de diamètre supérieur à 3^{-j_0} , ceux-ci doivent donc recouvrir tous les intervalles de C_{j_0} et donc

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} (\text{diam}(I))^h \geq \sum_{i=1}^{2^{j_0}} (3^{-j_0})^h = 1,$$

où la dernière égalité a été prouvée en début de démonstration. Au vu de tout ce qui a été dit, cela suffit pour conclure. \square

Remarque 2.2.16. On peut généraliser les ensembles de Cantor, en retirant au milieu de chaque intervalle de C_j un intervalle ouvert de diamètre égal à $1 - 2k$ pour un $k \in]0, \frac{1}{2}[$. On peut alors montrer ([8],[24]) que

$$\dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\log(2)}{\log\left(\frac{1}{k}\right)},$$

et dans ce cas,

$$\mathcal{H}^h(C) = 1.$$

On voit sur cet exemple comment la dimension de Hausdorff généralise la notion de dimension habituelle. Si on veut “mesurer” C , on peut essayer de compter le nombre de points de C , i.e. calculer $\mathcal{H}^0(C)$, mais cela est inutile puisque C est infini non-dénombrable. On pourrait alors vouloir “mesurer” la longueur de C , i.e. calculer $\mathcal{H}^1(C)$, auquel cas on obtient

$$\mathcal{H}^1(C) = \mathcal{L}^1(C) = 130.$$

L'ensemble C est donc de dimension topologique nulle, et la mesure de Hausdorff est, dans le cas présent, une sorte d’“hybride” entre un dénombrement et la mesure d’une longueur, montrant à quelle “échelle”, i.e. à quelle dimension (celle de Hausdorff) on peut quantifier l'ensemble C .

$\sum_{J, J'} (\text{diam}(J))^h + (\text{diam}(J'))^h$, donc si la seconde somme, appelons-la S , est supérieure à 1, alors l'inéquation (2.4) est vérifiée. Si on montre que l'inéquation (2.4) est vérifiée pour toute collection d'intervalles dont chacun des intervalles est d'un diamètre égal à 3^{-j} (pour un j variant d'un intervalle à l'autre), alors en particulier elle est vérifiée pour S , et donc on a bien $\sum_{I \in \mathcal{I}} (\text{diam}(I))^h \geq 1$.

13. Voir [28]

Chapitre 3

Ondelettes et analyse multirésolution

Dans cette section, nous travaillons dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable. Cet espace est muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx$$

et de la norme associée

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle},$$

ce qui en fait un espace de Hilbert.

3.1 Transformée en ondelettes continue

Notation 3.1.1. Si f est une fonction admettant une transformée de Fourier, nous écrivons \hat{f} cette dernière. Si f est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx.$$

Définition 3.1.2. Soit une fonction ψ appartenant à l'espace $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. On dit que ψ est une ondelette si ψ vérifie l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < +\infty, \tag{3.1}$$

appelée condition d'admissibilité.

Remarque 3.1.3. Pour que ψ vérifie la condition d'admissibilité, il est nécessaire d'avoir

$\hat{\psi}(0) = 0$, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0.$$

Inversement, si $\hat{\psi}(0) = 0$, et si on suppose qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|(1 + |x|)^\alpha dx < +\infty, \quad (3.2)$$

ce qui est un peu plus contraignant que l'intégrabilité de ψ , on peut montrer que ψ vérifie l'inégalité (3.1) (voir [7]). En pratique, on exigera que ψ décroisse suffisamment vite à l'infini, ce qui impliquera (3.2). Si, en plus, nous imposons $\hat{\psi}(0) = 0$, alors on obtient (3.1).

Etant donné une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ et ψ une ondelette, nous allons effectuer des produits de convolution entre f et des translations et dilatations de ψ selon la formule :

$$\begin{aligned} W_\psi f(b, a) &= \frac{1}{\sqrt{a}} (f * \bar{\psi}(-\frac{\cdot}{a}))(b) \\ &= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{\psi}\left(\frac{x - b}{a}\right) dx, \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{R}_0^+$ et $b \in \mathbb{R}$ sont des paramètres d'échelle et de position. Lorsque l'on considère toutes les valeurs possibles¹ de $a \in \mathbb{R}_0^+$ et $b \in \mathbb{R}$, l'application obtenue

$$W_\psi f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : (a, b) \mapsto W_\psi f(b, a)$$

s'appelle la transformée en ondelettes continue de f .

Ainsi, ψ agit un peu comme un microscope, où la fonction

$$\psi_{b,a}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x - b}{a}\right)$$

permet d'observer f à la position b et à l'échelle a . On peut montrer ([33]) que, si ψ vérifie la condition d'admissibilité, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{A_1, A_2 \rightarrow +\infty} \left\| f(x) - \frac{1}{C_\psi} \int_{\frac{1}{A_1} \leq a \leq A_2} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(b, a) \psi_{b,a}(x) db \frac{da}{a^2} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0,$$

où

$$C_\psi = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \quad \text{et} \quad W_\psi f(b, a) = \langle f, \psi_{b,a} \rangle.$$

1. C'est-à-dire lorsqu'on fait varier a et b continûment.

Un des inconvénients majeurs de cette transformée en ondelettes est qu'en pratique il est trop long de calculer tous les coefficients $W_\psi f(b, a)$. De plus, tous ces coefficients donnent "trop" d'informations, certains peuvent alors s'avérer inutiles [23].

Avant de passer à la section suivante, définissons une notion qui s'avèrera essentielle plus loin dans ce chapitre.

Définition 3.1.4. Soit $m \in \mathbb{N}_0$ un entier strictement positif et ψ une ondelette. On dit que ψ possède m moments nuls si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, tel que $k < m$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \psi(x) dx = 0,$$

pour autant que l'intégrale existe.

Une propriété triviale mais importante qui découle de cette définition est que, si ψ est une ondelette qui possède m moments nuls et si P est un polynôme de degré strictement inférieur à m , alors

$$W_\psi P(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} P(x) \bar{\psi} \left(\frac{x-b}{a} \right) dx = 0 \quad \forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}.$$

La transformée en ondelettes continue a déjà été largement étudiée depuis le milieu du siècle passé, nous n'allons donc pas aller plus loin en ce qui la concerne. Ce que nous allons faire, c'est discrétiser la transformée en ondelettes, afin d'éliminer le surplus d'informations de manière à obtenir un nombre infini dénombrable de coefficients. Cela passe par la théorie de l'analyse multirésolution que nous allons présenter.

3.2 Analyse multirésolution

Dans la suite de ce travail, nous utiliserons pour la transformée en ondelettes discrète une définition légèrement différente de celle qui a été présentée lorsque nous parlerons d'une ondelette.

Définition 3.2.1. Nous dirons qu'une fonction ψ est une ondelette lorsque

$$\psi \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } \hat{\psi}(0) = 0.$$

Nous pouvons également supposer que ψ est normalisée, i.e. $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$.

3.2.1 Définition

L'idée de base de l'analyse multirésolution est de décomposer l'espace $L^2(\mathbb{R})$ en sous-espaces $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ décroissants tels que la projection orthogonale d'une fonction f donnée sur un espace V_j donné soit une bonne approximation de f à l'échelle 2^j . Les espaces

d'approximation $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ vont être emboîtés, de telle sorte que les diverses approximations de f soient de plus en plus précises. Ainsi, l'analyse multirésolution porte bien son nom puisque nous allons analyser f à diverses échelles, ou résolutions, et étudier ce que l'on peut en tirer. In fine, toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$ finira par être approchée avec une grande précision, car il y aura une convergence au sens $L^2(\mathbb{R})$ des approximations successives de f .

Afin d'illustrer et d'expliquer les hypothèses que nous nous donnons, nous allons faire l'analogie avec une photographie. Supposons avoir une photographie numérique de résolution arbitrairement grande de côté 1, que l'on va approximer à des résolutions plus grossières. La notion de résolution réfère au nombre de pixels² de l'approximation : une grande résolution correspond à un grand nombre de pixels, donc à des pixels de petite taille et vice-versa. L'approximation de notre photographie dans l'espace V_0 est la plus mauvaise, c'est celle à la plus basse résolution : l'approximation se fait avec un seul pixel. Celle dans l'espace V_{-1} est un peu plus précise, elle est obtenue grâce à 4 pixels, celle dans V_{-2} grâce à 16 pixels, et ainsi de suite : une approximation dans l'espace V_{-j} est formée de 4^j pixels. La photographie d'origine se trouve en fait dans l'espace V_{-J} pour un certain $J > 0$, et ses différentes approximations sont ses représentations dans les espaces V_{-J+k} . Cela est illustré sur la figure 3.1.

Nous pouvons maintenant expliquer pourquoi nous exigeons que $V_{j+1} \subset V_j$. En effet, plus j est petit, plus les pixels sont petits et nombreux. Ainsi, une approximation dans V_j contiendra plus de pixels qu'une approximation dans V_{j+1} et donc on peut dire que V_j possède toutes les informations nécessaires pour réaliser une approximation dans V_{j+1} , l'inverse n'étant pas forcément vrai.

Dans le cadre de l'espace $L^2(\mathbb{R})$, afin de pouvoir approximer aussi bien que possible n'importe quelle fonction, il est naturel d'exiger les égalités suivantes

$$\overline{\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j} = \overline{\cup_j V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

et

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \cap_j V_j = \{0\},$$

où la seconde relation est une généralisation aux fonctions du fait que la pire approximation est celle que l'on réalise quand j est aussi grand que possible. Il va de soi que ce qui nous intéressera, ce seront les approximations avec un $j \rightarrow -\infty$.

Signalons que dans la suite, nous parlerons plutôt d'échelle que de résolution, où une petite échelle correspond à une grande résolution, et vice-versa.

2. Picture element.

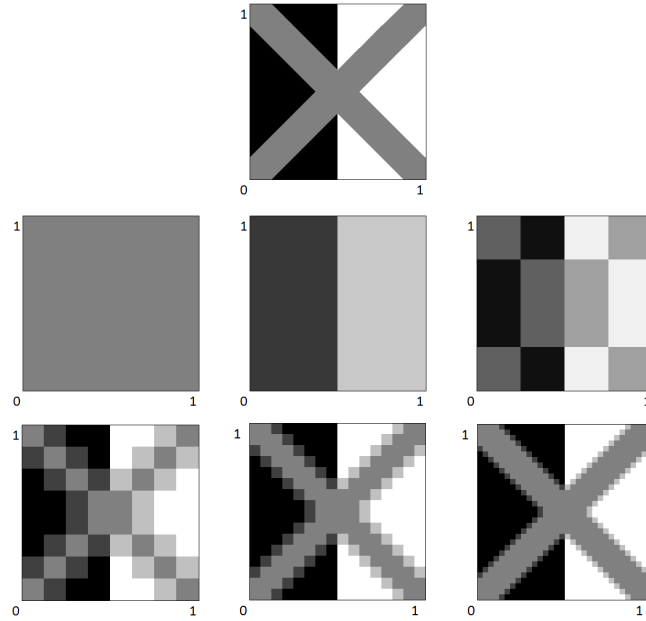


FIGURE 3.1 – *En haut* : L'image originale. *Au milieu* : Les approximations de l'image dans les espaces V_0, V_{-1}, V_{-2} (de gauche à droite). *En bas* : Les approximations de l'image dans les espaces V_{-3}, V_{-4}, V_{-5} (de gauche à droite). Clairement, la meilleure approximation est celle dans V_{-5} .

Nous allons également exiger, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, la relation

$$f \in V_j \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0. \quad (3.3)$$

La condition que nous venons de mentionner³ stipule que, si g est une approximation dans V_j d'une fonction f , et si on étire g d'un facteur 2, on obtient une approximation de f dans V_{j+1} .

Ensuite, nous supposons que, pour tous $j \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$f \in V_j \Leftrightarrow f(\cdot - 2^j k) \in V_j.$$

Autrement dit, toute translation proportionnelle à 2^j d'une approximation dans V_j d'une fonction donnée reste une approximation dans V_j de cette fonction.

Enfin, nous supposons qu'il existe une fonction $\varphi \in V_0$ telle que

$$\{\varphi(\cdot - n), n \in \mathbb{Z}\}$$

est une base orthonormée de V_0 . C'est principalement cette hypothèse qui va donner lieu

3. Est équivalente à $f \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j-1}$.

à la discrétisation de la transformée en ondelettes. En effet, toute fonction $f \in V_0$ peut alors se décomposer comme

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi(t - n),$$

où

$$a_n = \langle f, \varphi(\cdot - n) \rangle.$$

Mieux encore, grâce à cela et à la relation (3.3), on obtient que, pour un $j \in \mathbb{Z}$ fixé,

$$\{\varphi_{j,n} : n \in \mathbb{Z}\}$$

est une base orthonormée de V_j où

$$\varphi_{j,n}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}t - n).$$

En effet, pour un $n \in \mathbb{Z}$ fixé, $\varphi_{j,n} \in V_j$ puisque

$$\varphi_{j,n} \in V_j \Leftrightarrow \varphi_{j,n}(2^j \cdot) \in V_0 \Leftrightarrow 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(t - n) \in V_0$$

et que la dernière condition est vérifiée. Le caractère orthonormé des fonctions $\varphi_{j,n}$ est une simple vérification :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j,n}, \varphi_{j,m} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^{-j}t - n) \bar{\varphi}(2^{-j}t - m) 2^{-j} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x - n) \bar{\varphi}(x - m) dx \\ &= \langle \varphi(\cdot - n), \varphi(\cdot - m) \rangle \\ &= \delta_{n,m} \end{aligned}$$

où on a utilisé le changement de variables $x \mapsto 2^{-j}t$ et le caractère orthonormé des fonctions $(\varphi(\cdot - n))_{n \in \mathbb{Z}}$.

Enfin, pour toute fonction $f \in V_j$, on a $f(2^j \cdot) \in V_0$ et donc

$$f(2^j t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \varphi(t - n),$$

d'où

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \varphi(2^{-j}t - n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \varphi_{j,n}(t)$$

pour

$$c_n = 2^{\frac{j}{2}} b_n.$$

Donc les $(\varphi_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de V_j .

Nous pouvons alors regrouper toutes ces informations pour donner la définition d'une

analyse multirésolution.

Définition 3.2.2. Une analyse multirésolution de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ est la donnée d'une suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ tels que

$$1. \quad \forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j \quad (3.4)$$

$$2. \quad \overline{\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j} = \overline{\cup_j V_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad (3.5)$$

$$3. \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \cap_j V_j = \{0\} \quad (3.6)$$

$$4. \quad \forall j \in \mathbb{Z}, f \in V_j \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0 \quad (3.7)$$

$$5. \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}, f \in V_j \Leftrightarrow f(\cdot - 2^j k) \in V_j \quad (3.8)$$

$$6. \quad \exists \varphi \in V_0 \text{ tel que } \{\varphi(\cdot - n), n \in \mathbb{Z}\} \text{ est une base orthonormée de } V_0. \quad (3.9)$$

On appelle V_j l'espace d'approximation à l'échelle 2^j (ou à la résolution 2^{-j}), et on appelle φ la fonction d'échelle de notre analyse multirésolution.

La meilleure approximation de f dans V_j est sa projection orthogonale sur V_j , à savoir

$$P_{V_j} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \varphi_{j,n}.$$

On entend par "meilleure approximation" le fait que $P_{V_j} f$ est la fonction de V_j qui minimise

$$\left\| f - \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi_{j,n} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

pour des coefficients a_n quelconques⁴.

Exemple 3.2.3. Une analyse multirésolution parmi les plus simples est l'analyse multirésolution de Haar, où les fonctions des espaces d'approximation sont des fonctions constantes. On pose en effet

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \forall n \in \mathbb{Z}, f \text{ est constante sur } [n2^j, (n+1)2^j[\right\}$$

et la fonction d'échelle est

$$\varphi(t) = \chi_{[0,1[}(t),$$

i.e. la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, 1[$. Les approximations d'une fonction f donnée seront donc des fonctions "en escalier", comme illustré sur la figure⁵ 3.2. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$,

4. C'est un résultat classique. Si $g \in V_j$, alors $P_{V_j} f - g \in V_j$. D'autre part, $f - P_{V_j} f \perp V_j$. On écrit alors $f - g = f - P_{V_j} f + P_{V_j} f - g$ donc $f - g$ s'écrit comme la somme de deux fonctions orthogonales. Par la relation de pythagore dans $L^2(\mathbb{R})$ on a $\|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f - P_{V_j} f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|P_{V_j} f - g\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Ainsi, $\forall g \neq P_{V_j} f$, on a $\|f - P_{V_j} f\|_{L^2(\mathbb{R})} < \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

5. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X06000307>

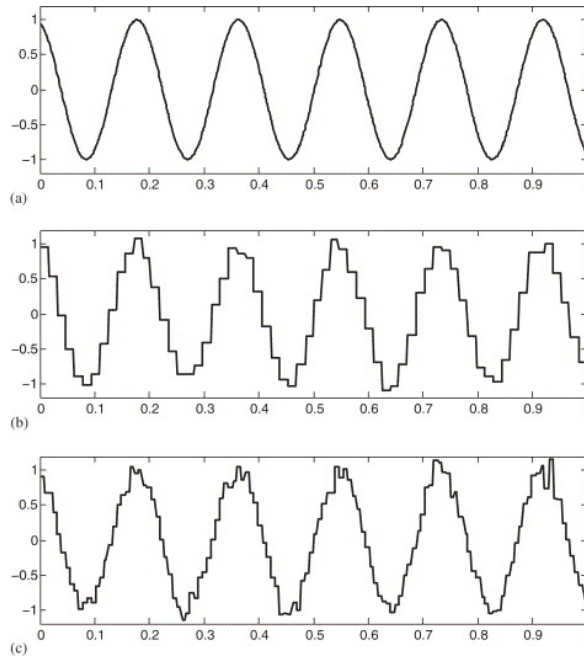


FIGURE 3.2 – Exemples d’approximations dans les espaces de Haar. (a) La fonction de départ. (b) Une approximation dans V_{-6} . (c) Une approximation dans V_{-7} .

alors on a

$$P_{V_j} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \varphi_{j,n}$$

avec

$$\varphi_{j,n} = 2^{-\frac{j}{2}} \chi_{[2^j n, 2^j(n+1)[} \text{ et } \langle f, \varphi_{j,n} \rangle = 2^{-\frac{j}{2}} \int_{2^j n}^{2^j(n+1)} f(t) dt.$$

Cependant, il est en général préférable d’utiliser des espaces d’approximations constitués de fonctions plus régulières. Il est possible de trouver des bases de type sinusoïdal ou polynomial pour avoir plus de régularité, comme en stipulent les exemples présents dans [26] et [23].

3.2.2 De l’analyse multirésolution aux ondelettes

Afin de montrer que la transformée en ondelettes discrète permet de bien représenter une fonction, il serait opportun de trouver des bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$ qui sont constituées d’ondelettes. Nous allons montrer que, à partir d’une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$, cela est possible.

Définition 3.2.4. Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ et φ la fonction d’échelle associée. Puisque $V_j \subset V_{j-1}$, on peut définir W_j le complément orthogonal de V_j dans V_{j-1} :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j.$$

Remarquons déjà que

$$W_j \perp W_k \text{ si } j \neq k.$$

En effet, si $j > k$, alors $W_j \subset V_k$, et puisque $W_k \perp V_k$, on a $W_j \perp W_k$. On appelle W_j l'espace des détails à l'échelle 2^j .

Puisque $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$, on peut aussi écrire $V_{j-1} = V_{j+1} \oplus W_{j+1} \oplus W_j$, et en continuant de la sorte, on obtient, pour tout $J > j$,

$$V_j = V_J \oplus \bigoplus_{k=j+1}^J W_k, \quad (3.10)$$

et où $V_J \perp W_k$ pour tout $k = j+1, \dots, J$ (puisque pour tout k fixé, avec $j+1 \leq k \leq J$, on a $V_J \subset V_k$ et $V_k \perp W_k$ donc $V_J \perp W_k$), et où $W_k \perp W_{k'}$ si $k \neq k'$. Puisque la relation (3.10) est valable pour tous $j, J \in \mathbb{Z}$ avec $j < J$, on a, en prenant $j \rightarrow -\infty$ et $J \rightarrow +\infty$ et compte tenu des relations (3.5) et (3.6), on a symboliquement

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j. \quad (3.11)$$

Ainsi, $L^2(\mathbb{R})$ s'écrit comme la somme directe de sous-espaces deux à deux orthogonaux.

De plus, les espaces W_j jouissent de la propriété (3.7) des espaces V_j :

$$f \in W_j \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in W_0. \quad (3.12)$$

La condition est nécessaire. En effet, si $f \in W_j$ alors $f \notin V_j$ et donc $f(2^j \cdot) \notin V_0$, et aussi $f \in V_{j-1}$ donc $f(2^j \cdot) \in V_{-1}$. Puisque $V_{-1} = V_0 \oplus W_0$, on en tire que $f(2^j \cdot) \in W_0$.

La condition est suffisante. Si $f(2^j \cdot) \in W_0$, alors $f(2^j \cdot) \notin V_0$ donc $f \notin V_j$, et aussi $f(2^j \cdot) \in V_{-1}$ donc $f \in V_{j-1}$. Puisque $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$, on en tire que $f \in W_j$.

Remarque 3.2.5. Au vu de la relation (3.12) et en procédant de la même manière que précédemment⁶, si ψ est une ondelette⁷ telle que $\psi \in W_0$ et que

$$\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

est une base orthonormée de W_0 , alors

$$\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\},$$

où

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}x - k),$$

6. Comme nous avons procédé avec les fonctions $\varphi_{j,n}$ un peu avant la définition 3.2.2.

7. Au sens de la définition 3.2.1.

est une base orthonormée de W_j formée d'ondelettes et ce, pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Etant donné la décomposition $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$, on a alors la décomposition de la projection sur V_{j-1} :

$$P_{V_{j-1}}f = P_{V_j}f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Si nous tenons maintenant en compte la relation (3.11), nous constatons que

$$\{\psi_{j,k} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$$

est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ formée d'ondelettes. Tout revient donc à trouver une ondelette ψ telle que décrite ci-dessus. Nous allons montrer qu'à partir d'une analyse multirésolution de l'espace $L^2(\mathbb{R})$, cela est possible. Le théorème qui suit a été énoncé et démontré dans [7]. La preuve présentée ici s'en inspire, mais plusieurs parties ont été retravaillées ou sont des productions personnelles. Cette preuve est constructive, longue et technique, mais elle établit clairement le lien, à priori difficile à mettre en évidence, entre la théorie de l'analyse multirésolution et la transformée en ondelettes discrète. Nous énonçons d'abord une proposition qui nous sera utile dans la preuve dont nous venons de parler. Etant donné que ce résultat sort légèrement du cadre de l'analyse multirésolution, le lecteur intéressé trouvera la preuve à la section annexe A.3.

Proposition 3.2.6. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction telle que \hat{f} est continue. On pose*

$$f_j(t) = f(t - j).$$

Alors on a

$$\langle f_j, f_k \rangle = \delta_{j,k} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(w + 2\pi n)| = 1 \quad \forall w \in \mathbb{R}.$$

Théorème 3.2.7. *Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ et φ la fonction d'échelle associée, telle que $\hat{\varphi}$ est continue. Il existe alors une ondelette ψ associée à $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ telle que*

$$\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$$

est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ formée d'ondelettes, et telle que

$$P_{V_{j-1}}f = P_{V_j}f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Une possibilité est de prendre ψ telle que

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}m_0} \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right) \hat{\varphi} \left(\frac{\xi}{2} \right),$$

où

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\xi} \quad \text{avec } h_n = \langle \varphi, \varphi_{-1,n} \rangle \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 = 1.$$

Cela revient à prendre

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} \overline{h_{-n-1}} \varphi_{-1,n}, \\ \text{i.e. } \psi(x) &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} \overline{h_{-n-1}} \varphi(2x - n), \end{aligned}$$

où la série converge dans $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. La preuve se découpe en plusieurs parties.

1. Nous commençons d'abord par étudier φ et $\hat{\varphi}$.

Puisque $\varphi \in V_0 \subset V_{-1}$ et que

$$\{\varphi_{-1,n}, n \in \mathbb{Z}\}$$

est une base orthonormée de V_{-1} , on peut écrire⁸

$$\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi_{-1,n} \quad \text{avec } h_n = \langle \varphi, \varphi_{-1,n} \rangle.$$

De plus, puisque $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ et que $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2$, on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 = 1.$$

Par définition de $\varphi_{-1,n}$, on peut écrire

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(2x - n),$$

et en considérant la transformée de Fourier des deux membres, l'égalité devient

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\xi) &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(\widehat{2x - n}) \\ &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \frac{1}{2} e^{-in\frac{\xi}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right). \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \tag{3.13}$$

avec

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\xi},$$

8. La convergence de la série ayant lieu au sens $L^2(\mathbb{R})$.

la convergence ayant lieu dans $L^2(\mathbb{R})$. Ainsi, m_0 est 2π -périodique.

2. Nous allons maintenant établir une propriété importante de m_0 .

Nous savons par hypothèse que

$$\langle \varphi(\cdot - j), \varphi(\cdot - k) \rangle = \delta_{j,k}.$$

Ainsi, notre hypothèse d'avoir $\hat{\varphi}$ continue et la proposition 3.2.6 assurent que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi n)|^2 = 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

D'autre part, en utilisant l'équation (3.13), en posant $\frac{\xi}{2} = w$, et en utilisant la périodicité de m_0 , il vient

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi n)|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |m_0(w + \pi n)|^2 |\hat{\varphi}(w + \pi n)|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |m_0(w + 2\pi n)|^2 |\hat{\varphi}(w + 2\pi n)|^2 \\ &\quad + \sum_{n \in \mathbb{Z}} |m_0(w + 2\pi n + \pi)|^2 |\hat{\varphi}(w + 2\pi n + \pi)|^2 \\ &= |m_0(w)|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(w + 2\pi l)|^2 + |m_0(w + \pi)|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(w + \pi + 2\pi l)|^2. \end{aligned}$$

L'équation (3.14) donne alors

$$|m_0(w)|^2 + |m_0(w + \pi)|^2 = 1 \quad \forall w \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

3. Nous allons maintenant examiner l'espace des détails W_0 .

Considérons une fonction $f \in W_0$. Puisque $V_{-1} = V_0 \oplus W_0$, on a

$$f \in W_0 \Leftrightarrow f \in V_{-1} \text{ et } f \perp V_0.$$

Il vient alors

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \varphi_{-1,n}(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \varphi(2x - n),$$

où

$$f_n = \langle f, \varphi_{-1,n} \rangle.$$

En termes de transformée de Fourier, cela s'écrit

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-in\frac{\xi}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

ce que l'on écrira sous la forme

$$\hat{f}(\xi) = m_f \left(\frac{\xi}{2} \right) \hat{\varphi} \left(\frac{\xi}{2} \right), \quad (3.16)$$

où

$$m_f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-in\xi}.$$

Ainsi, m_f est 2π -périodique. Remarquons que nous venons de montrer l'équivalence

$$f \in V_{-1} \Leftrightarrow \hat{f}(\xi) = m_f \left(\frac{\xi}{2} \right) \hat{\varphi} \left(\frac{\xi}{2} \right)$$

avec

$$m_f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-in\xi}.$$

Nous allons maintenant tirer une condition nécessaire et suffisante pour avoir $f \perp V_0$, que nous combinerons avec celle que nous venons d'obtenir.

On a

$$\begin{aligned} f \perp V_0 &\Leftrightarrow \langle f, \varphi_{0,k} \rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{\varphi}(x-k) dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \bar{\hat{\varphi}}(\xi) e^{ik\xi} d\xi = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \hat{f}(\xi) \bar{\hat{\varphi}}(\xi) e^{ik\xi} d\xi = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \hat{f}(\xi + 2\pi n) \bar{\hat{\varphi}}(\xi + 2\pi n) e^{ik(\xi+2\pi n)} d\xi = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2\pi n) \bar{\hat{\varphi}}(\xi + 2\pi n) e^{ik\xi} d\xi = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2\pi n) \bar{\hat{\varphi}}(\xi + 2\pi n) = 0, \end{aligned}$$

puisque

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2\pi n) \bar{\hat{\varphi}}(\xi + 2\pi n) \in L^2([0, 2\pi])$$

et que les coefficients de sa décomposition en série de Fourier sont tous nuls⁹. On a alors,

⁹. Cet argument est un peu plus détaillé dans la démonstration de la proposition 3.2.6 à la section annexe A.3

en combinant l'égalité obtenue avec les égalités (3.13) et (3.16) et en posant $w = \frac{\xi}{2}$,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2\pi n) \bar{\hat{\varphi}}(\xi + 2\pi n) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} m_f(w + n\pi) \hat{\varphi}(w + n\pi) \overline{m_0}(w + n\pi) \bar{\hat{\varphi}}(w + n\pi) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} m_f(w + n\pi) \overline{m_0}(w + n\pi) |\hat{\varphi}(w + n\pi)|^2 \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} m_f(w + 2n\pi) \overline{m_0}(w + 2n\pi) |\hat{\varphi}(w + 2n\pi)|^2 \\
&\quad + \sum_{n \in \mathbb{Z}} m_f(w + 2n\pi + \pi) \overline{m_0}(w + 2n\pi + \pi) |\hat{\varphi}(w + 2n\pi + \pi)|^2 \\
&= m_f(w) \overline{m_0}(w) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(w + 2n\pi)|^2 + m_f(w + \pi) \overline{m_0}(w + \pi) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(w + \pi + 2n\pi)|^2
\end{aligned}$$

où on a utilisé la périodicité de m_0 et m_f . En utilisant l'équation (3.14), il vient

$$m_f(w) \overline{m_0}(w) + m_f(w + \pi) \overline{m_0}(w + \pi) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}. \quad (3.17)$$

Nous écrivons maintenant m_f différemment. Soit λ la fonction 2π -périodique définie par

$$\lambda(w) = \begin{cases} \frac{m_f(w)}{\overline{m_0}(w + \pi)} & \text{si } \overline{m_0}(w + \pi) \neq 0 \\ \frac{-m_f(w + \pi)}{\overline{m_0}(w)} & \text{si } \overline{m_0}(w + \pi) = 0. \end{cases}$$

Cette fonction est bien définie, car si $\overline{m_0}(w + \pi) = 0$, l'équation (3.15) assure que $\overline{m_0}(w) \neq 0$. On a alors la relation

$$m_f(w) = \lambda(w) \overline{m_0}(w + \pi) \quad \forall w \in \mathbb{R}.$$

C'est évident lorsque $\overline{m_0}(w + \pi) \neq 0$, et lorsque $\overline{m_0}(w + \pi) = 0$, les équations (3.15) et (3.17) garantissent alors que $m_f(w) = 0$. Ainsi, en utilisant la périodicité de m_0 , l'égalité (3.17) devient, pour tout $w \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(w) \overline{m_0}(w + \pi) \overline{m_0}(w) + \lambda(w + \pi) \overline{m_0}(w) \overline{m_0}(w + \pi) = 0,$$

donc

$$\overline{m_0}(w) \overline{m_0}(w + \pi) (\lambda(w) + \lambda(w + \pi)) = 0.$$

Nous en tirons que

$$\lambda(w) + \lambda(w + \pi) = 0,$$

pour tout $w \in \mathbb{R}$. D'abord, c'est évident lorsque $\overline{m_0}(w)\overline{m_0}(w + \pi) \neq 0$. Ensuite, si $\overline{m_0}(w + \pi) = 0$, alors, par les mêmes arguments que précédemment, on a $\overline{m_0}(w + 2\pi) \neq 0$, ce qui donne

$$\lambda(w) + \lambda(w + \pi) = \frac{-m_f(w + \pi)}{\overline{m_0}(w)} + \frac{m_f(w + \pi)}{\overline{m_0}(w + 2\pi)} = 0,$$

en utilisant la définition de λ et la périodicité de m_0 . Enfin, si $\overline{m_0}(w) = 0$, alors, comme précédemment, on en tire que $\overline{m_0}(w + \pi) \neq 0$, et on a aussi $\overline{m_0}(w + 2\pi) = 0$, ce qui mène à

$$\lambda(w) + \lambda(w + \pi) = \frac{m_f(w)}{\overline{m_0}(w + \pi)} + \frac{-m_f(w + 2\pi)}{\overline{m_0}(w + \pi)} = 0$$

en utilisant à nouveau la définition de λ et cette fois la périodicité de m_f . L'équation $\lambda(w) + \lambda(w + \pi) = 0$ est équivalente à écrire

$$\lambda(w) = e^{iw} \nu(2w)$$

pour une fonction ν 2π -périodique. Ainsi, on a

$$m_f(w) = e^{iw} \nu(2w) \overline{m_0}(w + \pi)$$

et la relation (3.16) devient alors

$$\hat{f}(w) = e^{i\frac{w}{2}} \nu(w) \overline{m_0}\left(\frac{w}{2} + \pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{w}{2}\right),$$

où ν est 2π -périodique.

Montrons que $\nu \in L^2([0, 2\pi])$, cela sera utile dans la suite. Nous avons $\nu(w) = \lambda\left(\frac{w}{2}\right) e^{-i\frac{w}{2}}$ où λ est 2π -périodique. Dans un premier temps, nous avons

$$\int_0^{2\pi} |\nu(w)|^2 dw = \int_0^{2\pi} \left| \lambda\left(\frac{w}{2}\right) \right|^2 dw = 2 \int_0^\pi |\lambda(w)|^2 dw. \quad (3.18)$$

D'autre part, on a $m_f(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-inw}$, et donc

$$\int_0^{2\pi} |m_f(w)|^2 dw \leq \frac{1}{2} 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2 = \pi \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < +\infty. \quad (3.19)$$

Enfin, puisque $m_f(w) = \lambda(w) \overline{m_0}(w + \pi)$, on a aussi

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |m_f(w)|^2 dw &= \int_0^{2\pi} |\lambda(w)|^2 |m_0(w + \pi)|^2 dw \\ &= \int_0^\pi |\lambda(w)|^2 |m_0(w + \pi)|^2 dw + \int_\pi^{2\pi} |\lambda(w)|^2 |m_0(w + \pi)|^2 dw. \end{aligned}$$

Pour la seconde intégrale, le changement de variables $w = w' + \pi$ (on renomme ensuite w'

en w), le fait que $\lambda(w) + \lambda(w + \pi) = 0$, et la périodicité de m_0 donnent

$$\int_{\pi}^{2\pi} |\lambda(w)|^2 |m_0(w + \pi)|^2 dw = \int_0^{\pi} |\lambda(w)|^2 |m_0(w)|^2 dw$$

et donc on obtient, en tenant compte de (3.15),

$$\int_0^{2\pi} |m_f(w)|^2 dw = \int_0^{\pi} |\lambda(w)|^2 (|m_0(w + \pi)|^2 + |m_0(w)|^2) dw = \int_0^{\pi} |\lambda(w)|^2 dw. \quad (3.20)$$

En combinant les équations (3.18), (3.19) et (3.20), on obtient finalement

$$\int_0^{2\pi} |\nu(w)|^2 dw = 2 \int_0^{\pi} |\lambda(w)|^2 dw = 2 \int_0^{2\pi} |m_f(w)|^2 dw < +\infty,$$

et on en tire que $\nu \in L^2([0, 2\pi])$.

4. Il paraît maintenant opportun de choisir ψ tel que

$$\hat{\psi}(w) = e^{i\frac{w}{2}} m_0 \left(\frac{w}{2} + \pi \right) \hat{\varphi} \left(\frac{w}{2} \right)$$

comme candidat pour notre ondelette. En effet, la transformée de Fourier de f s'écrit alors

$$\hat{f}(w) = \nu(w) \hat{\psi}(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \nu_n e^{-inw} \hat{\psi}(w)$$

en décomposant ν en série trigonométrique de Fourier¹⁰. En passant à la transformée de Fourier inverse, il vient

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \nu_n \psi(x - n)$$

et donc¹¹

$$\{\psi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{\psi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

est un bon candidat pour former une base orthonormée de W_0 . Vérifions que c'est effectivement le cas, en commençant par vérifier que $\psi \in W_0$. Rappelons qu'au point 3, nous avons montré en toute généralité l'équivalence

$$f \in V_{-1} \Leftrightarrow \hat{f}(\xi) = m_f \left(\frac{\xi}{2} \right) \hat{\varphi} \left(\frac{\xi}{2} \right)$$

avec $m_f(\xi)$ de la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-in\xi}.$$

10. Cela est possible car ν est 2π -périodique et $\nu \in L^2([0, 2\pi])$.

11. Rappelons que, au départ, notre fonction f était une fonction de W_0 .

En ce qui concerne ψ , on a

$$\hat{\psi}(w) = e^{i\frac{w}{2}\overline{m_0}} \left(\frac{w}{2} + \pi \right) \hat{\varphi} \left(\frac{w}{2} \right) = m_\psi \left(\frac{w}{2} \right) \hat{\varphi} \left(\frac{w}{2} \right)$$

avec

$$\begin{aligned} m_\psi(w) &= e^{iw\overline{m_0}}(w + \pi) \\ &= e^{iw} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{h}_n e^{in(w+\pi)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-inw} \end{aligned}$$

qui a donc la forme voulue. Ainsi, $\psi \in V_{-1}$ et par conséquent, nous obtenons aussi

$$\psi \in L^2(\mathbb{R}).$$

Rappelons également qu'au point 3, nous avons montré en toute généralité que si $f \in V_{-1}$, alors

$$f \perp V_0 \Leftrightarrow m_f(w)\overline{m_0}(w) + m_f(w + \pi)\overline{m_0}(w + \pi) = 0.$$

Dans notre cas,

$$m_\psi(w) = e^{iw\overline{m_0}}(w + \pi)$$

et on a

$$\begin{aligned} m_\psi(w)\overline{m_0}(w) + m_\psi(w + \pi)\overline{m_0}(w + \pi) &= e^{iw\overline{m_0}}(w + \pi)\overline{m_0}(w) \\ &\quad + e^{i(w+\pi)\overline{m_0}}(w + 2\pi)\overline{m_0}(w + \pi) \\ &= e^{iw\overline{m_0}}(w + \pi)\overline{m_0}(w) - e^{iw\overline{m_0}}(w + \pi)\overline{m_0}(w) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc $\psi \perp V_0$. Nous avons donc montré que $\psi \in V_{-1}$ et $\psi \perp V_0$, donc $\psi \in W_0$.

Vérifions à présent l'orthogonalité des $\psi_{0,k}$. On a, en utilisant une technique déjà illustrée au point 3,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{0,l}, \psi_{0,k} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x-l)\bar{\psi}(x-k)dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ilw} e^{ikw} |\hat{\psi}(w)|^2 dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(w + 2n\pi)|^2 e^{i(k-l)w} dw \end{aligned}$$

et on a également, en posant $v = \frac{w}{2}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(w + 2n\pi)|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |m_0(v + n\pi + \pi)|^2 |\hat{\varphi}(v + n\pi)|^2 \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |m_0(v + 2n\pi + \pi)|^2 |\hat{\varphi}(v + 2n\pi)|^2 \\
&\quad + \sum_{n \in \mathbb{Z}} |m_0(v + 2n\pi + 2\pi)|^2 |\hat{\varphi}(v + 2(n+1)\pi)|^2 \\
&= |m_0(v + \pi)|^2 \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(v + 2n\pi)|^2}_{=1} + |m_0(v)|^2 \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(v + 2\pi(n+1))|^2}_{=1} \\
&= |m_0(v + \pi)|^2 + |m_0(v)|^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ainsi, les $\psi_{0,k}$ sont orthonormés car on obtient

$$\langle \psi_{0,l}, \psi_{0,k} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)w} dw = \delta_{l,k}.$$

Pour vérifier que ces fonctions orthonormées forment une base de W_0 , il reste à vérifier que toute fonction $f \in W_0$ peut s'écrire

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \psi_{0,n},$$

avec la convergence au sens $L^2(\mathbb{R})$, i.e. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2 < +\infty$. Montrons qu'il est équivalent de vérifier que, si $f \in W_0$, alors $\hat{f}(w) = \gamma(w) \hat{\psi}(w)$ pour un γ 2π -périodique et appartenant à l'espace $L^2([0, 2\pi])$. En effet, si

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \psi_{0,n} \quad \text{avec} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2 < +\infty,$$

alors

$$\hat{f}(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-inw} \hat{\psi}(w) = \gamma(w) \hat{\psi}(w)$$

pour

$$\gamma(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-inw}$$

qui est 2π -périodique et qui appartient à $L^2([0, 2\pi])$ car

$$\|\gamma\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 = \langle \gamma, \gamma \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2 < +\infty.$$

Réciproquement, si

$$\hat{f}(w) = \gamma(w)\hat{\psi}(w)$$

pour un γ qui est 2π -périodique et qui appartient à $L^2([0, 2\pi])$, alors on peut écrire γ comme une série de Fourier :

$$\gamma(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-inw} \quad \text{et} \quad \|\gamma\|_{L^2([0, 2\pi])} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2 < +\infty.$$

Alors

$$\hat{f}(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-inw} \hat{\psi}(w),$$

et donc

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \psi(x - n)$$

et on a bien $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2 < +\infty$.

Puisque $f \in W_0$, nous avons vu au point 3 que l'on peut écrire $\hat{f}(w) = \nu(w)\hat{\psi}(w)$ où ν est 2π -périodique et $\nu \in L^2([0, 2\pi])$, on a donc le résultat escompté.

Rappelons que nous désirons obtenir une base formée d'ondelettes. Il reste juste à vérifier que ψ est effectivement une ondelette, selon la définition 3.2.1. Nous savons déjà que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, il reste à vérifier que $\hat{\psi}(0) = 0$. L'équation (3.13) évaluée en 0 donne

$$\hat{\varphi}(0) = m_0(0)\hat{\varphi}(0).$$

Au vu de la définition de $\hat{\psi}$, si $\hat{\varphi}(0) = 0$, alors on en tire que $\hat{\psi}(0) = 0$. Sinon, on obtient $m_0(0) = 1$, et l'équation (3.15) évaluée en 0 donne $1^2 + |m_0(\pi)|^2 = 1$, d'où

$$m_0(\pi) = 0$$

et donc, vu la forme de $\hat{\psi}$, on obtient à nouveau $\hat{\psi}(0) = 0$. Notre fonction ψ est donc une ondelette.

5. Le théorème est ainsi prouvé. En effet, on sait maintenant par la remarque 3.2.5 que

$$\{\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$$

est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ formée d'ondelettes.

La propriété

$$P_{V_{j-1}} f = P_{V_j} f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

résulte du fait que $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ et que $\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de W_j .

Pour finir, nous allons montrer que ψ peut s'écrire sous la même forme que celle donnée

dans l'énoncé. Il vient successivement

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(w) &= e^{i\frac{w}{2}} \bar{m}_0 \left(\frac{w}{2} + \pi \right) \hat{\varphi} \left(\frac{w}{2} \right) \\
&= e^{i\frac{w}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{h}_n e^{in(\frac{w}{2} + \pi)} \hat{\varphi} \left(\frac{w}{2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{h}_n (-1)^n e^{i(n+1)\frac{w}{2}} \hat{\varphi} \left(\frac{w}{2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{-n-1} (-1)^{-n-1} e^{-in\frac{w}{2}} \hat{\varphi} \left(\frac{w}{2} \right) \\
\hat{\psi}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{-n-1} (-1)^{n-1} e^{-in\frac{w}{2}} \hat{\varphi} \left(\frac{w}{2} \right),
\end{aligned}$$

et en passant à la transformée de Fourier inverse, on obtient finalement

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} \bar{h}_{-n-1} \varphi(2x - n)$$

et on conclut. □

Ainsi, à partir d'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$, on peut trouver une base orthonormée de cet espace formée d'ondelettes, toutes obtenues par dilatations, compressions et translations d'une même ondelette ψ . Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, on peut alors écrire

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

où

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k)$$

et

$$c_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{\psi}_{j,k}(t) dt = 2^{-\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{\psi}(2^{-j}t - k) dt.$$

Il y a clairement une analogie entre ces formules et celles établies pour la transformée en ondelettes continue dans la section 3.1. La différence majeure est que nous n'autorisons désormais que certaines valeurs aux paramètres d'échelle et de position. Le paramètre d'échelle a introduit dans la transformée continue a désormais la forme 2^j ($j \in \mathbb{Z}$) et, lorsque j est fixé, le paramètre de position b doit être du type $2^j k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Le lecteur habitué à la transformée en ondelettes continue sait qu'il est toujours intéressant de considérer des valeurs de a très proches de 0. Notre théorie est en accord avec cela puisque un a proche de 0 correspond à un j proche de $-\infty$, et nous avons déjà mentionné que ce sont ces valeurs de j que nous jugerons intéressantes.

Comme nous obtenons un nombre dénombrable de coefficients $c_{j,k}$, nous avons bel et bien

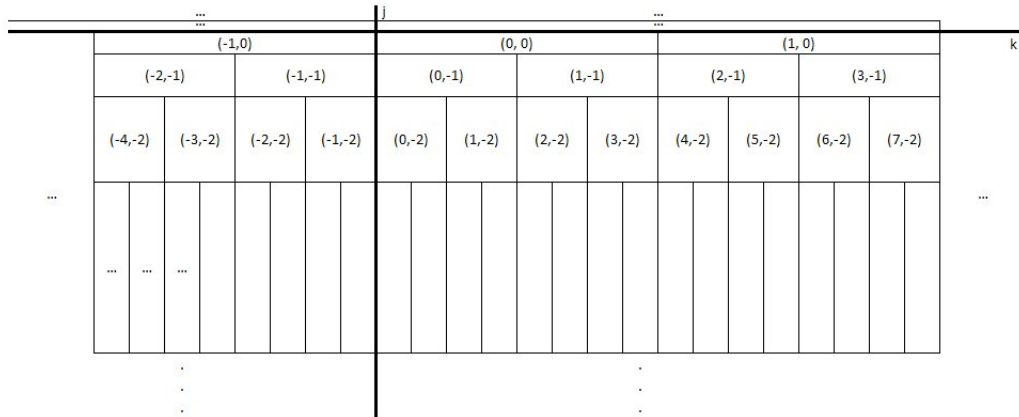


FIGURE 3.3 – Le demi-plan espace-échelle pavé de cubes dyadiques.

discrétisé la transformée en ondelettes.

Notation 3.2.8. Dans la suite, afin de simplifier quelque peu les notations, nous écrirons

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

où

$$\psi_{j,k}(t) = \psi(2^{-j}t - k)$$

et

$$c_{j,k} = 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{\psi}(2^{-j}t - k) dt.$$

Nous allons à présent nous intéresser à certains de ces coefficients $c_{j,k}$, communément appelés les coefficients en ondelettes de f .

3.3 Coefficients dominants

Nous allons indiquer les coefficients en ondelettes de f à l'aide de “cubes dyadiques” qui pavent le demi-plan espace-échelle, comme illustré sur la figure 3.3. A chaque cube dyadique $(k, j) \in \mathbb{Z}^2$ du demi-plan¹² espace-échelle, on fait correspondre l'intervalle dyadique

$$\lambda_{j,k} = [2^j k, 2^j(k + 1)[= 2^j k + [0, 2^j[$$

de la droite réelle. Afin d'alléger les notations, les indices j et k seront sous-entendus, nous noterons λ au lieu de $\lambda_{j,k}$. De plus, nous noterons c_λ au lieu de $c_{j,k}$ pour désigner les coefficients en ondelettes de f , et ψ_λ l'ondelette $\psi_{j,k}$.

12. Pour se persuader qu'il s'agit effectivement d'un demi-plan (ce qui n'est pas clairement le cas sur la figure 3.3), il suffit de se rappeler que la série géométrique de raison 1/2 converge!

Remarque 3.3.1. Il faut garder en tête que le demi-plan espace-échelle est un outil visuel qui va aider à mieux comprendre certains raisonnements développés dans la suite. Par exemple, il s'avère très utile dans le cas suivant. L'ensemble

$$\{\lambda' \subset \lambda\}$$

correspond, dans le demi-plan espace-échelle, à l'ensemble des cubes situés en dessous de celui qui représente λ .

Aussi, à chaque cube de ce demi-plan correspond également une ondelette ψ_λ et un coefficient en ondelettes c_λ . Nous pouvons à présent donner la définition d'un coefficient dominant.

Notation 3.3.2. Nous désignons par Λ l'ensemble des cubes dyadiques du demi-plan espace-échelle.

Définition 3.3.3. Soient une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\{c_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ l'ensemble de ses coefficients en ondelettes (selon la notation 3.2.8), et λ un cube dyadique. Le coefficient dominant de λ est défini par

$$d_\lambda(f) = \sup_{\lambda' \subset \lambda} |c_{\lambda'}|.$$

Toute référence à f sera omise dans la suite lorsque le contexte est clair.

Au vu de la définition de c_λ et du fait que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, pour tout λ ,

$$|c_\lambda| \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

ce qui implique que les coefficients dominants sont finis. Au vu de la remarque 3.3.1, pour obtenir d_λ , il suffit de considérer λ et tous les cubes situés en dessous de lui, et de calculer la borne supérieure de l'ensemble des modules des coefficients en ondelettes associés à ces cubes, comme illustré sur la figure 3.4.

Parfois, l'ondelette ψ_λ peut avoir un impact important en dehors de λ sur le calcul de c_λ , surtout dans les deux intervalles dyadiques situés de part et d'autre de λ (à la même échelle). Mathématiquement, nous dirons que deux cubes dyadiques λ_1 et λ_2 sont adjacents, ou voisins, si ils sont à la même échelle et si $\text{dist}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$.

Notation 3.3.4. Nous notons 3λ (parfois noté $A(\lambda)$) l'ensemble des cubes adjacents à λ . Dans \mathbb{R} , si $\lambda = \lambda_{j,k}$, alors on a

$$3\lambda = \lambda_{j,k-1} \cup \lambda \cup \lambda_{j,k+1} = [2^j(k-1), 2^j(k+2)].$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour toute échelle $j \in \mathbb{Z}$, il existe un unique intervalle dyadique qui

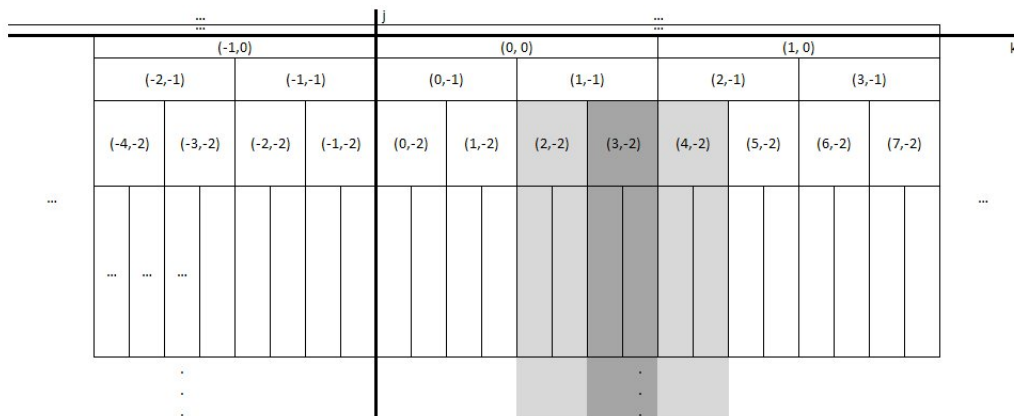


FIGURE 3.4 – En gris foncé, les cubes intervenant dans le calcul de d_λ pour $\lambda = \lambda_{-2,3}$. En gris (foncé et clair réunis), les cubes intervenant dans le calcul de $d_{-2}(t)$ si $t \in \lambda_{-2,3}$.

contient t , que l'on note $\lambda_j(t)$. On pose alors

$$d_j(t) = \sup_{\lambda' \in 3\lambda_j(t)} d_{\lambda'}.$$

On considère donc la borne supérieure de l'ensemble des modules des coefficients d'ondelettes associés aux cubes situés sous $\lambda_j(t)$ et ses deux voisins dans le demi-plan espace-échelle, comme illustré sur la figure 3.4.

Les coefficients dominants ont une propriété fondamentale vis-à-vis de la régularité ponctuelle, énoncée par S. Jaffard dans le théorème 3.3.5. La preuve qui est présentée ici n'est toutefois pas celle de Jaffard (qui semble incomplète), c'est une preuve originale, inspirée de l'une des démonstrations présentes dans l'article [19]. Avant de l'étudier, exposons d'abord les hypothèses de travail dont nous avons besoin concernant l'ondelette ψ utilisée dans le théorème en question :

1. Soient $t \in \mathbb{R}$, une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ bornée, et $s > 0$ tel que $f \in C^s(t)$. Nous supposons que ψ a n moments nuls, avec $n > s$.
2. Nous supposons que ψ est une ondelette réelle à support compact (voir [7] pour plus de détails sur la construction de telles ondelettes).
3. On définit $j_0 \in \mathbb{N}$ par

$$j_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : [\psi] \subset B(0, 2^j) =] - 2^j, 2^j [\}.$$

Théorème 3.3.5. 1. Soient $t \in \mathbb{R}$, une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ bornée, et soit $s > 0$ tel que $f \in C^s(t)$. Alors il existe une constante $C > 0$ et un entier $J \in \mathbb{N}$ tels que

$$d_j(t) \leq C2^{sj} \quad \forall j \leq -J. \tag{3.21}$$

2. Inversement, si il existe $C > 0$ et $J \in \mathbb{N}$ tels que la relation (3.21) est vérifiée, et qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $f \in C^\epsilon(\mathbb{R})$, alors $f \in C_{\log}^s(t)$.

Démonstration. Commençons par mentionner le fait que, tout au long de la démonstration, C désigne une constante, dont la valeur peut être différente à chaque occurrence.

1. Soient

$$k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} : 2^{j_0} + 2 \leq 2^k\},$$

j un entier négatif, et

$$\lambda' = \lambda(j', k') \subset 3\lambda_j(t),$$

où $\lambda_j(t) = \lambda(j, k)$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Soit P le polynôme tel que $f \in C^s(t)$. Puisque le degré de P est strictement inférieur à s , l'hypothèse que nous avons faite sur le nombre de moments nuls de ψ donne

$$\begin{aligned} |c_{\lambda'}| &= \left| 2^{-j'} \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi(2^{-j'} x - k') dx \right| \\ &= \left| 2^{-j'} \int_{\mathbb{R}} (f(x) - P(x-t)) \psi(2^{-j'} x - k') dx \right| \end{aligned}$$

Puisque $[\psi] \subset B(0, 2^{j_0})$, on a $[\psi_{\lambda'}] \subset B(2^{j'} k', 2^{j_0+j'})$ et donc

$$\begin{aligned} |c_{\lambda'}| &= \left| 2^{-j'} \int_{B(2^{j'} k', 2^{j_0+j'})} (f(x) - P(x-t)) \psi(2^{-j'} x - k') dx \right| \\ &\leq 2^{-j'} \int_{B(2^{j'} k', 2^{j_0+j'})} |f(x) - P(x-t)| |\psi(2^{-j'} x - k')| dx \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$B(2^{j'} k', 2^{j_0+j'}) \subset B(t, 2^{k_0+j}).$$

En effet, puisque $t \in [2^j k, 2^j(k+1)[$, que $j' \leq j$, et que

$$[2^{j'} k', 2^{j'}(k'+1)[\subset [2^j(k-1), 2^j(k+2)[,$$

on a $|2^{j'} k' - t| \leq 2 \cdot 2^j$, et, si $x \in B(2^{j'} k', 2^{j_0+j'})$, il en résulte les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} |x - t| &\leq |x - 2^{j'} k'| + |2^{j'} k' - t| \\ &\leq 2^{j_0+j'} + 2^{j+1} \\ &\leq 2^{j_0+j} + 2^{j+1} \quad (j' \leq j) \\ &= 2^j \cdot (2^{j_0} + 2) \\ &\leq 2^j \cdot 2^{k_0} = 2^{k_0+j}, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte de la définition de k_0 . Ainsi, on a effectivement $x \in$

$B(t, 2^{k_0+j})$.

A partir de l'inégalité obtenue précédemment, il vient alors

$$|c_{\lambda'}| \leq 2^{-j'} \int_{B(t, 2^{k_0+j})} |f(x) - P(x-t)| |\psi(2^{-j'}x - k')| dx,$$

et le changement de variables $x \mapsto y + t$ donne

$$|c_{\lambda'}| \leq 2^{-j'} \int_{B(0, 2^{k_0+j})} |f(t+y) - P(y)| |\psi(2^{-j'}y + 2^{-j'}t - k')| dy.$$

Puisque $f \in C^s(t)$, il existe une constante $C > 0$ et V_0 un voisinage de 0 tels que

$$\sup_{|y| \leq |t|} |f(t+y) - P(y)| \leq C|t|^s \quad \forall t \in V_0.$$

Soit

$$K = \min\{k \in \mathbb{N} :] - 2^{-k}, 2^{-k}[\subset V_0\}.$$

On a alors, pour tout $j \leq -K$, l'inégalité

$$\sup_{|y| \leq 2^j} |f(t+y) - P(y)| \leq C2^{js}.$$

En particulier, si $k_0 + j \leq -K$, i.e. $j \leq -K - k_0 = -J$, on obtient

$$|c_{\lambda'}| \leq 2^{-j'} C 2^{(k_0+j)s} \int_{\mathbb{R}} |\psi(2^{-j'}y + 2^{-j'}t - k')| dy,$$

et le changement de variables $2^{-j'}y + 2^{-j'}t - k' \mapsto x$ donne alors

$$|c_{\lambda'}| \leq 2^{-j'} C 2^{k_0s} 2^{js} 2^{j'} \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx = C' 2^{js},$$

le résultat est ainsi démontré.

2. Nous allons montrer qu'il existe une constante $C' > 0$ et un entier $J' > 0$ tels que pour tout $j \leq -J'$, il existe un polynôme P_j de degré strictement inférieur à s tel que

$$\sup_{|x-t| \leq 2^j} |f(x) - P_j(x-t)| \leq C' 2^{js} |\log(2^{sj})|.$$

Au vu de la proposition 1.2.11, cela suffit. Tout d'abord, la relation (3.10) nous permet d'écrire

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus \bigoplus_{j' \leq 0} W_{j'},$$

et donc nous pouvons décomposer notre fonction f comme

$$f(x) = \sum_{j'=-\infty}^1 f_{j'}(x),$$

où

$$f_{j'} = P_{W_{j'}} f = \sum_k c_{j',k} \psi_{j',k} = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \psi_{\lambda} \quad \text{si } j' \leq 0,$$

et

$$f_1 = P_{V_0} f = \sum_k c_k \varphi(\cdot - k),$$

où on considère que φ est une ondelette à support compact. Posons

$$J' = J + 2 + j_0.$$

Soit $j \leq -J'$ et soit $x \in B(t, 2^j)$. On pose $m = \lfloor s \rfloor$ si $s \notin \mathbb{N}$, $m = s - 1$ si $s \in \mathbb{N}$. On définit le polynôme P_j par

$$P_j(x) = \sum_{j'=j}^1 \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!} D^n f_{j'}(t),$$

qui est donc de degré $m < s$. On obtient alors

$$\begin{aligned} |f(x) - P_j(x-t)| &= \left| \sum_{j'=-\infty}^1 f_{j'}(x) - \sum_{j'=j}^1 \sum_{n=0}^m \frac{(x-t)^n}{n!} D^n f_{j'}(t) \right| \\ &\leq \underbrace{\sum_{j'=-\infty}^{j-1} |f_{j'}(x)|}_{(1)} + \underbrace{\sum_{j'=j}^1 \left| f_{j'}(x) - \sum_{n=0}^m \frac{(x-t)^n}{n!} D^n f_{j'}(t) \right|}_{(2)}. \end{aligned}$$

Avant de continuer, faisons deux remarques générales qui seront utiles pour la suite de la démonstration, et dont la vérification est directe.

1. Pour tous réels R et x et pour tous entiers j et k tels que $R > 2^j$ et $2^j k \in B(x, R)$, on a

$$\lambda_{j,k} \subset B(x, 2R).$$

2. Pour tout intervalle dyadique $\lambda = \lambda_{j,k}$ et pour tout réel x tels que $\lambda \subset B(x, 2^j)$, il existe un entier k' tel que

$$\lambda \subset B(x, 2^j) \subset \lambda_{j+1,k'} \cup \lambda_{j+1,k'+1}.$$

De plus, si $t \in B(x, 2^j)$, alors λ est pris en compte dans le calcul de $d_{j+1}(t)$, c'est-à-

dire $|c_\lambda| \leq d_{j+1}(t)$.

Commençons par examiner (2). On retranche à chaque $f_{j'}$ son développement de Taylor à l'ordre m , il vient donc

$$\begin{aligned} \left| f_{j'}(x) - \sum_{n=0}^m \frac{(x-t)^n}{n!} D^n f_{j'}(t) \right| &\leq C|x-t|^{m+1} \sup_{x \in B(t, 2^j)} |D^{m+1} f_{j'}(x)| \\ &\leq C2^{j(m+1)} \sup_{x \in B(t, 2^j)} |D^{m+1} f_{j'}(x)|. \end{aligned}$$

De plus, si $j' \leq 0$, on a

$$\begin{aligned} |D^{m+1} f_{j'}(x)| &\leq \sum_k |c_\lambda| |D^{m+1}(\psi(2^{-j'}x - k))| \\ &= 2^{-j'(m+1)} \sum_{\substack{k \text{ t.q.} \\ 2^{j'}k \in B(x, 2^{j_0+j'})}} |c_\lambda| |(D^{m+1}\psi)(2^{-j'}x - k)|, \end{aligned}$$

compte tenu du support de ψ_λ . Au vu des deux remarques faites précédemment, tous les c_λ de la somme sont tels qu'il existe k' tel que

$$\lambda \subset B(x, 2^{1+j_0+j'}) \subset \lambda_{2+j_0+j', k'} \cup \lambda_{2+j_0+j', k'+1}.$$

De plus, puisque $1 + j_0 + j' \geq j$, on a $t \in B(x, 2^{1+j_0+j'})$ et donc $|c_\lambda| \leq d_{2+j_0+j'}(t)$. Si $j' \leq -2 - j_0 - J = -J'$, alors $j' + 2 + j_0 \leq -J$, et notre hypothèse donne alors

$$|c_\lambda| \leq C2^{s(j'+2+j_0)} = C2^{sj'}.$$

Si $j' > -J'$, on majore les coefficients en ondelettes par $C = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})}$, et donc on a

$$|c_\lambda| \leq C \leq C2^{s(2+j_0+J+j')} = C2^{sj'}.$$

De plus, $|(D^{m+1}\psi)(2^{-j'}x - k)| \leq C = \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})}$, qui est une constante indépendante de j' . Ainsi, pour $j' \leq 0$, on obtient

$$|D^{m+1} f_{j'}(x)| \leq C2^{-j'(m+1)} 2^{sj'} \sum_{\substack{k \text{ t.q.} \\ 2^{j'}k \in B(x, 2^{j_0+j'})}} 1,$$

et puisque le nombre de k tels que $2^{j'}k \in B(x, 2^{j_0+j'})$ vaut au maximum

$$\frac{2^{j_0+j'+1}}{2^{j'}} = 2^{j_0+1} = C,$$

il vient finalement

$$|D^{m+1}f_{j'}(x)| \leq C2^{-j'(m+1)}2^{sj'}.$$

En supposant que l'ondelette φ soit suffisamment régulière et étant donné que son support est compact, il existe une constante C telle que

$$\sup_{x \in B(t, 2^j)} |D^{m+1}f_1(x)| \leq C \leq C2^{-j(m+1-s)},$$

où la dernière inégalité résulte du fait que $j \leq 0$ et que $m+1 \geq s$ et va s'avérer utile dans la suite. Nous pouvons à présent en revenir à (2). Compte tenu des inégalités que nous avons obtenues, il vient

$$\begin{aligned} (2) &\leq C2^{j(m+1)} \left(\sup_{x \in B(t, 2^j)} |D^{m+1}f_1(x)| + \sum_{j'=j}^0 |D^{m+1}f_{j'}(x)| \right) \\ &\leq C2^{j(m+1)} \left(C2^{-j(m+1-s)} + C \sum_{j'=j}^0 (2^{m+1-s})^{-j'} \right) \\ &= C2^{j(m+1)} \left(C2^{-j(m+1-s)} + C \frac{2^{(m+1-s)(-j+1)} - 1}{2^{m+1-s} - 1} \right) \\ &\leq C2^{j(m+1)} \left(C2^{-j(m+1-s)} + C2^{-j(m+1-s)} \right) \\ &\leq C2^{j(m+1)}2^{-j(m+1-s)} = C2^{js} \leq C|j|2^{js} \\ &\leq C2^{js} |\log(2^{js})|. \end{aligned}$$

Examinons à présent (1) = $\sum_{j'=-\infty}^{j-1} |f_{j'}(x)|$. Soit $J_1 \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$2^{-\epsilon J_1} \leq 2^{js} < 2^{-\epsilon(J_1-1)}.$$

On peut alors écrire

$$\sum_{j'=-\infty}^{j-1} |f_{j'}(x)| \leq \underbrace{\sum_{j'=-\infty}^{-J_1} |f_{j'}(x)|}_{(3)} + \underbrace{\sum_{j'=-J_1+1}^{j-1} |f_{j'}(x)|}_{(4)}.$$

En utilisant le résultat de S. Jaffard ([15],[25]) stipulant que, si $f \in C^\epsilon(\mathbb{R})$, alors il existe une constante C telle que $\|f_{j'}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C2^{\epsilon j'}$, on obtient les majorations suivantes pour (3) :

$$\begin{aligned} \sum_{j'=-\infty}^{-J_1} |f_{j'}(x)| &\leq C \sum_{j'=-\infty}^{-J_1} 2^{\epsilon j'} = C \frac{2^{-\epsilon J_1}}{1 - 2^{-\epsilon}} \\ &\leq C2^{js} \leq C2^{js} |\log(2^{js})|. \end{aligned}$$

Il nous reste à travailler (4). Soit j' tel que $-J_1 + 1 \leq j' \leq j - 1$. On a, comme précédemment,

$$|f_{j'}(x)| \leq \sum_{\substack{k \text{ t.q.} \\ 2^{j'} k \in B(x, 2^{j_0+j'})}} |c_\lambda| |\psi_\lambda(x)|,$$

et tous les λ intervenant dans cette somme sont inclus à $B(x, 2^{1+j_0+j'})$ (remarque 1). Puisque $x \in B(t, 2^j)$, si $j' + j_0 + 1 \leq j$, alors on a $B(x, 2^{1+j_0+j'}) \subset B(t, 2^{j+1})$ et les λ en question sont tels que

$$\lambda \subset B(t, 2^{j+1}) \subset \lambda_{2+j, k'} \cup \lambda_{2+j, k'+1}$$

pour un certain $k' \in \mathbb{Z}$ (remarque 2). Donc, si $j' \leq j - j_0 - 1$, alors les λ participent au calcul de $d_{2+j}(t)$. De plus,

$$2 + j \leq 2 - J' = -J - j_0 < -J,$$

et donc notre hypothèse donne

$$|c_\lambda| \leq C 2^{s(2+j)} = C 2^{sj}.$$

Si $j' > j - j_0 - 1$, (et $j' \leq j - 1$), alors $B(t, 2^j) \subset B(x, 2^{2+j_0+j'})$ et les λ de la somme sont tels que

$$\lambda \subset B(x, 2^{2+j_0+j'}) \subset \lambda_{3+j_0+j', k'} \cup \lambda_{3+j_0+j', k'+1},$$

pour un certain $k' \in \mathbb{Z}$, et donc λ entre dans le calcul de $d_{3+j'}(t)$ (remarque 2). Puisque

$$3 + j_0 + j' \leq 2 + j_0 + j \leq 2 + j_0 - J' = -J,$$

notre hypothèse donne

$$|c_\lambda| \leq C 2^{s(3+j_0+j')} = C 2^{s(j'+1)} \leq C 2^{sj}.$$

Comme précédemment, on majore $|\psi_\lambda|$ par une constante C . Il vient alors, comme précédemment,

$$|f_{j'}(x)| \leq C 2^{sj} \sum_{\substack{k \text{ t.q.} \\ 2^{j'} k \in B(x, 2^{j_0+j'})}} 1 \leq C 2^{js} 2^{j_0+1} = C 2^{js}.$$

Dès lors, on peut revenir à (4) avec les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{j'=-J_1+1}^{j-1} |f_{j'}(x)| &\leq C 2^{sj} \sum_{j'=-J_1+1}^{j-1} 1 = C 2^{sj} (J_1 + j - 1) \\ &\leq C 2^{sj} (J_1 - 1). \end{aligned}$$

Par définition de J_1 , on a $J_1 - 1 < \frac{-sj}{\epsilon} = C|sj| = C|\log(2^{sj})|$. L'inégalité précédente devient donc

$$\sum_{j'=-J_1+1}^{j-1} |f_{j'}(x)| \leq C2^{sj} |\log(2^{sj})|.$$

Finalement, en combinant toutes les inégalités obtenues, il vient

$$|f(x) - P_j(x-t)| \leq C2^{js} |\log(2^{js})|$$

et on conclut. □

L'importance de ce théorème en termes de régularité hölderienne est le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.6. *Soient $t \in \mathbb{R}$ et une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ bornée. On a*

$$h(t) = \liminf_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log(d_j(t))}{\log 2^j},$$

où $h(t)$ est l'exposant de Hölder de f en t .

Démonstration. Pour $j < 0$ suffisamment petit, le théorème 3.3.5 donne¹³

$$d_j(t) \leq C2^{h(t)j}.$$

En considérant les logarithmes des deux membres de cette inégalité, il vient

$$\log(d_j(t)) \leq \log(C) + h(t) \log 2^j,$$

donc

$$h(t) \leq \frac{\log(d_j(t)) - \log(C)}{\log 2^j},$$

et on conclut en passant à la limite inférieure. □

Ce résultat théorique est cependant peu utilisé en pratique. En effet, en pratique, il est impossible de calculer l'exposant de Hölder d'une fonction en tout point t , c'est pourquoi nous allons à présent chercher une caractérisation plus globale de la régularité d'une fonction. Nous avons désormais les notions nécessaires à la présentation du formalisme multifractal associé aux coefficients dominants.

¹³ Puisque l'exposant de Hölder en t est la régularité maximale de la fonction en t , la meilleure borne en termes de puissance de 2 que l'on peut trouver pour $d_j(t)$ est $2^{h(t)j}$.

3.4 Formalisme multifractal lié aux coefficients dominants

Le formalisme multifractal permet une détermination quelque peu heuristique du spectre de Hölder d'une fonction, dont voici la définition.

Définition 3.4.1. Soient $\epsilon > 0$ et $f \in C^\epsilon(\mathbb{R})$. Le spectre de Hölder de f , ou spectre des singularités de f , est la fonction

$$d(\cdot; f) : h \mapsto \dim_{\mathcal{H}}(\{t \in \mathbb{R} : h(t; f) = h\}).$$

En général, la référence à f est omise, on écrit $d(h)$ à la place de $d(h; f)$.

Ainsi, $d(h)$ est donc la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points qui ont un exposant de Hölder égal à h . Cette fonction donne donc une caractérisation globale de la régularité de f . Notre but est donc de déterminer l'importance relative des points partageant le même exposant de Hölder. L'hypothèse $f \in C^\epsilon(\mathbb{R})$ sert à conférer à f un tant soit peu de régularité. On pourrait remplacer \mathbb{R} par un ouvert quelconque et adapter la définition. Dans la suite, nous supposons qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que $f \in C^\epsilon(\mathbb{R})$.

Le lecteur habitué à la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes remarquera des similitudes avec la méthode présentée ici ([27] et références internes). Nous posons tout d'abord, pour chaque $j \in \mathbb{Z}$,

$$S(q, j) = 2^j \sum_{\lambda \in \Lambda_j} d_\lambda^q, \quad (3.22)$$

où

$$\Lambda_j = \{\lambda : \text{diam}(\lambda) = 2^j\},$$

et où q est un paramètre réel. On détermine ensuite la fonction

$$w(q) = \liminf_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log(S(q, j))}{\log 2^j}. \quad (3.23)$$

Enfin, comme nous allons le montrer, on peut espérer obtenir le spectre multifractal comme

$$d(h) \approx \inf_q \{1 + qh - w(q)\}.$$

Faisons quelques remarques sur le formalisme décrit ci-dessus. Tout d'abord, afin d'éviter autant que possible la présence de valeurs trop petites et numériquement instables de c_λ , on restreint parfois la somme (3.22) aux intervalles λ tels que

$$\inf\{|c_{\lambda'}| : \lambda' \subset \nu(\lambda)\} \neq 0,$$

où

$$\nu(\lambda) = \{\lambda' : \lambda' \subset \lambda\} \cup \{\lambda' : \lambda \subset \lambda'\}.$$

Ensuite, il n'existe aucune preuve assurant que la méthode décrite ci-dessus donne exactement le spectre multifractal, et il existe même des contre-exemples pour lesquels il ne fonctionne pas ([14]). D'ailleurs, en toute généralité, on n'obtient qu'une approximation de celui-ci, et le seul résultat dont nous disposons est l'inégalité

$$d(h) \leq \inf_q \{1 + qh - w(q)\}.$$

Le formalisme présenté ci-dessus est acceptable pour des raisons heuristiques. En effet, l'égalité (3.23) signifie que, d'un point de vue asymptotique (i.e. $j \rightarrow -\infty$), $S(q, j)$ se comporte de sorte que

$$w(q) \approx \frac{\log(S(q, j))}{\log 2^j},$$

c'est-à-dire

$$\log(S(q, j)) \approx w(q) \log 2^j, \quad (3.24)$$

ou encore

$$S(q, j) \approx 2^{jw(q)},$$

et donc

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} d_j^q \approx 2^{-j} 2^{jw(q)} = 2^{(w(q)-1)j}. \quad (3.25)$$

D'autre part, si t et h sont des réels tels que $h(t; f) = h$ et si $\lambda_j(t) \in \Lambda_j$ est l'intervalle dyadique à l'échelle j contenant t , le théorème 3.3.5 assure que $d_j(t) \leq C2^{hj}$. Ainsi, on peut dire que $d_j(t) \approx 2^{hj}$, et donc

$$d_j^q(t) \approx 2^{hqj}.$$

De plus, le nombre d'intervalles $\lambda \in \Lambda_j$ qui contiennent un point dont l'exposant de Hölder est également h est de l'ordre de $2^{-d(h)j}$. Ainsi, la contribution des intervalles dyadiques de Λ_j qui contiennent un point dont l'exposant de Hölder est h dans la somme $\sum_{\lambda \in \Lambda_j} d_j^q$ est de l'ordre de

$$2^{hqj} \cdot 2^{-d(h)j} = 2^{(hq-d(h))j}.$$

Le comportement global de cette somme est donc du type $2^{(hq-d(h))j}$ où l'exposant $(hq - d(h))j$ est le plus grand possible. Puisque $j \leq 0$, il faut que

$$hq - d(h)$$

soit le plus petit possible. on a donc

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} d_j^\lambda \approx 2^{\inf_h \{hq - d(h)\}j}. \quad (3.26)$$

En comparant les relations (3.25) et (3.26) , il vient

$$w(q) = 1 + \inf_h \{hq - d(h)\}$$

ou encore¹⁴

$$1 - w(q) = \sup_h \{d(h) - hq\}.$$

Pour pouvoir en extraire $d(h)$, il faut recourir à la théorie des transformées de Legendre. Voici brièvement, sans démonstrations, ce que nous allons utiliser.

Définition 3.4.2. Si f est une fonction réelle convexe, on note f^* la transformée de Legendre de f , qui est définie par

$$f^*(p) = \sup_x \{px - f(x)\}.$$

Proposition 3.4.3. Si f et f^* sont convexes, on a

$$(f^*)^* = f,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \sup_p \{px - f^*(p)\}.$$

Si ce n'est pas le cas, on a

$$(f^*)^* \leq f.$$

De plus, l'égalité

$$f^*(p) = \sup_x \{px - f(x)\}$$

est réalisée en le réel x tel que $p = f'(x)$.

Dans le cas qui nous occupe, avec les notations introduites ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} f^*(q) = 1 - w(q) &= \sup_{h \geq 0} \{d(h) - hq\} = \sup_{h \leq 0} \{d(-h) + hq\} \\ &= \sup_{h \leq 0} \{hq - (-d(-h))\} = \sup_{h \leq 0} \{hq - f(h)\} \end{aligned}$$

où on a posé $f(h) = -d(-h)$. Si les fonctions w et d sont concaves, alors les fonctions f^*

14. puisque $\inf(f) = -\sup(-f)$.

et f sont convexes et la proposition 3.4.3 donne alors

$$\begin{aligned}
 f(h) &= \sup_q \{qh - f^*(q)\} \\
 -d(-h) &= \sup_q \{qh - 1 + w(q)\} \\
 d(-h) &= -\sup_q \{qh + w(q) - 1\} \\
 d(-h) &= -\sup_q \{-(-qh - w(q) + 1)\} \\
 d(-h) &= \inf_q \{-qh - w(q) + 1\}
 \end{aligned}$$

et on obtient finalement

$$d(h) = \inf_q \{qh - w(q) + 1\}, \tag{3.27}$$

ce qui était le résultat attendu. Notons qu'en pratique et dans les exemples théoriques, les fonctions w et d sont concaves (turbulence notamment, voir [27] et références internes pour plus de détails).

Deuxième partie

Applications du formalisme
multifractal

Chapitre 4

Etude de fonctions irrégulières classiques

Dans ce chapitre, nous allons appliquer le formalisme multifractal présenté au chapitre 3. Dans un premier temps, il sera appliqué à des fonctions hautement irrégulières mais dont le spectre des singularités est connu, afin de prouver l'efficacité de cette méthode et des algorithmes utilisés. Au chapitre suivant, nous l'appliquerons à des séries de données de températures issues de différentes stations météorologiques réparties sur l'ensemble de l'Europe.

4.1 Description de la méthode

Cette section est consacrée à l'application du formalisme multifractal à des fonctions irrégulières mais dont le spectre des singularités peut être calculé avec exactitude. Cela va nous permettre de vérifier que la méthode et les algorithmes utilisés sont efficaces, et nous pourrions également nous servir des résultats obtenus pour “calibrer” le programme pour l'étude des séries de températures. Les résultats théoriques non-démontrés dans cette section proviennent de [17].

Tout d'abord, par rapport à ce qui a été présenté au chapitre 3, nous n'allons considérer comme valeurs de q que celles comprises entre -3 et 5 (généralement par pas de 0.1) car les autres valeurs n'apporteront pratiquement pas d'informations utiles. En effet, lorsque q est trop grand, les plus grands coefficients dominants sont privilégiés et sont les seuls à avoir réellement une influence sur le calcul de $S(q, j)$. De manière similaire, de trop petites valeurs (négatives) de q vont biaiser le calcul de $S(q, j)$ en privilégiant uniquement les coefficients dominants les plus proches de 0 , et, à cause des approximations numériques, elles pourraient même mener le programme à calculer des termes du type $1/0$, perdant donc tout contact avec des valeurs réelles manipulables. Dans les deux cas, les résultats sont faussés car seulement quelques coefficients sont privilégiés, et ces erreurs peuvent

avoir beaucoup de répercussions sur la suite de l'analyse.

Dans le même ordre d'idée, et cela a déjà été mentionné, le calcul de $S(q, j)$ pour un q et un j fixés est réalisé en négligeant les valeurs de c_λ trop proches de 0, i.e. de module inférieur à un seuil fixé. A cela près, la transformée en ondelettes discrète et le calcul de $S(q, j)$ sont effectués conformément à la méthode expliquée précédemment. Nous utiliserons les ondelettes de Daubechies car nous pouvons choisir leur régularité et elles sont à support compact [7].

Ensuite, pour un q fixé, on tire de la relation (3.24) que d'un point de vue asymptotique, on a

$$\log(S(q, j))/\log(2) \approx w(q)j,$$

ce qui nous permet d'estimer $w(q)$ comme étant le coefficient angulaire de la droite de régression linéaire de $\log(S(q, j))/\log(2)$ vu comme une fonction de j .

Nous allons ensuite utiliser la proposition 3.4.3 conjointement avec l'équation (3.27) :

$$d(h) = \inf_q \{qh - w(q) + 1\}.$$

La proposition en question stipule que cette équation est vérifiée pour le réel q tel que $h = w'(q)$, c'est-à-dire le réel q pour lequel le coefficient angulaire de la tangente au graphe de w en $(q, w(q))$ vaut h . Cependant, puisque nous ne disposons pas de l'entièreté de la fonction w suite aux limitations imposées sur q , nous allons d'abord déterminer autant de tangentes que possible, et en extraire les coefficients angulaires, lesquels correspondront aux valeurs de h qui permettent de résoudre l'équation (3.27) et qui composeront les abscisses du spectre des singularités. Afin de déterminer ces tangentes, nous aurons recours à des régressions linéaires réalisées sur quelques points successifs parmi les points $(q, w(q))$ à notre disposition, et nous en extrairons les coefficients angulaires.

Ensuite, pour chaque h ainsi obtenu à partir d'une tangente t , il reste à déterminer $d(h)$. Si b est l'ordonnée à l'origine de t (dont nous connaissons l'équation), alors on a simplement $d(h) = -b + 1$. En effet, lorsqu'on a déterminé un h par la méthode décrite ci-dessus, il existe q_0 tel que $h = w'(q_0)$, et pour lequel on a

$$d(h) = q_0h - w(q_0) + 1 = q_0w'(q_0) - w(q_0) + 1.$$

D'autre part, l'équation de la tangente t dont h est issu est

$$t \equiv y - w(q_0) = w'(q_0)(q - q_0),$$

c'est-à-dire

$$t \equiv y = w'(q_0)q + b,$$

où $b = w(q_0) - w'(q_0)q_0$ et est l'ordonnée à l'origine de t . On conclut donc que

$$d(h) = -b + 1$$

comme annoncé.

4.2 Fonction de Weierstrass

Commençons par analyser un exemple simple, dont l'étude de la régularité a été réalisée en détail à la fin du premier chapitre (exemple 1.4.3) : la fonction de Weierstrass. Rappelons que cette fonction s'écrit sous la forme

$$f_{\phi,\omega}(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \phi^j \cos(\omega^j t),$$

avec $0 < \phi < 1$ et $\omega > 1/\phi$. Puisque l'exposant de Hölder est le même en tout point (fonction mono-Hölder), à savoir $-\log \phi / \log \omega$, le spectre des singularités de cette fonction est le plus simple que l'on peut obtenir, réduit à un seul point :

$$d(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = \frac{-\log \phi}{\log \omega} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous allons montrer que notre méthode et notre programme permettent d'obtenir cela avec une grande précision sur trois fonctions de Weierstrass distinctes, à savoir $f_1 = f_{1/2,16}$, $f_2 = f_{1/2,4}$, $f_3 = f_{1/2,2^{4/3}}$. Nous avons calculé ces trois fonctions pour 10^5 abscisses équidistantes comprises entre 0 et 1, et l'ondelette choisie pour effectuer l'analyse des données est l'ondelette de Daubechies de second ordre. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 4.1. La première ligne de cette figure représente les graphes de la fonction de Weierstrass pour $\phi = 1/2$, et $\omega = 16, 4$, et $2^{4/3}$ et donc les exposants de Hölder correspondants sont 0, 25, 0, 5, et 0, 75.

La deuxième ligne représente les fonctions w correspondantes. Nous constatons un comportement remarquablement linéaire dans les trois cas, preuve immédiate d'une fonction mono-Hölder. En effet, les pentes des différentes régressions linéaires seront presque toutes égales, et au vu de la description de l'algorithme, cela signifie que les abscisses à considérer pour le calcul du spectre seront presque toutes égales. De plus, les ordonnées à l'origine sont pratiquement nulles, ce qui implique que l'on obtient presque toujours 1 comme valeur correspondante pour $d(h)$, comme attendu.

Ces constatations se vérifient clairement à la troisième ligne, qui représente les spectres obtenus à partir de la ligne précédente. Notre programme détecte avec précision le spectre des singularités de la fonction de Weierstrass dans les trois cas considérés.

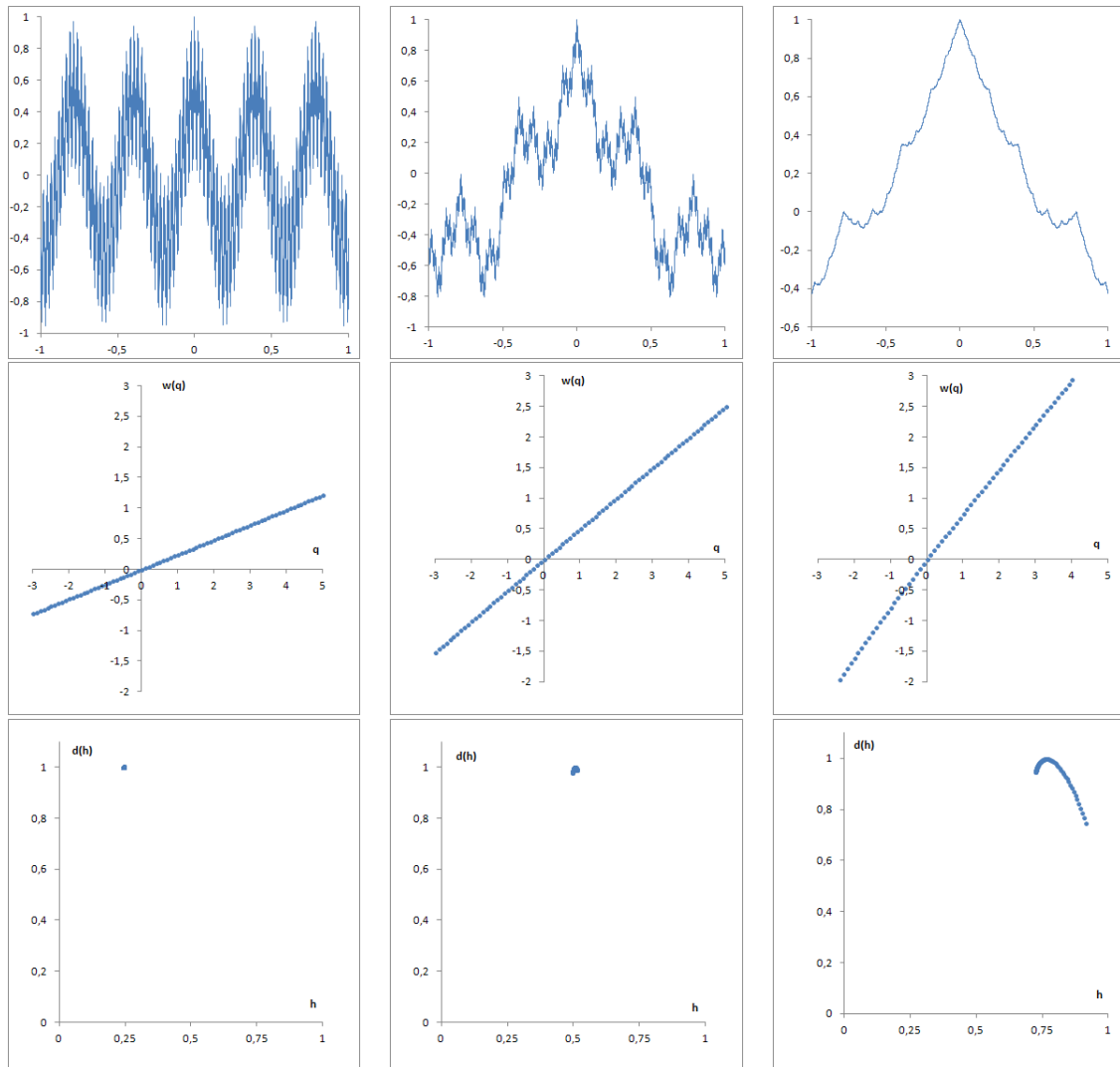


FIGURE 4.1 – *Première ligne* : La fonction de Weierstrass pour $\phi = 1/2$ et successivement $\omega = 16, 4, 2^{4/3}$, donnant donc lieu à des exposants de Hölder de 0, 25, 0, 5, 0, 75. *Deuxième ligne* : Les fonctions $w(q)$ correspondantes, qui affichent ici un comportement linéaire. *Troisième ligne* : Les spectres des singularités déduits de la ligne précédente.

Fonction	h moyen	$d(h)$ moyen	h global	$d(h)$ global
f_1	0,242422	1,001179	0,242432	0,999025
f_2	0,502426	0,993532	0,502249	1,005399
f_3	0,769804	0,953623	0,760054	1,058692

TABLE 4.1 – Résultats numériques obtenus pour les trois fonctions de Weierstrass considérées. La différence entre les qualificatifs “moyen” et “global” est expliquée dans le texte.

En termes de valeurs numériques, les résultats obtenus se trouvent dans le tableau 4.1. La première colonne est la fonction considérée ; la deuxième est le h moyen calculé comme étant la moyenne arithmétique des différents h rendus par le programme ; la troisième est le $d(h)$ moyen. Ensuite, puisque les fonctions $w(q)$ que nous avons trouvées ont un comportement hautement linéaire, il peut être intéressant d’effectuer une régression linéaire sur l’ensemble des points à notre disposition, afin d’obtenir une valeur “globale” de h et de $d(h)$. Ces deux autres valeurs se trouvent dans les quatrième et cinquième colonnes du tableau.

Nous constatons que les valeurs obtenues sont très proches de celles attendues, avec des erreurs de l’ordre de 0,008, 0,002, et 0,01 respectivement. Les résultats concernant la fonction de Weierstrass sont donc concluants, notre méthode et notre algorithme sont, dans ce cas, efficaces et fiables. Nous pouvons à présent passer à la fonction suivante, la fonction de Schoenberg.

4.3 Fonction de Schoenberg

Analysons maintenant la fonction de Schoenberg. A proprement parler, il s’agit d’une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^2 , nous allons donc examiner séparément les deux composantes de la fonction, que nous noterons S_1 et S_2 . La fonction de Schoenberg est définie comme suit :

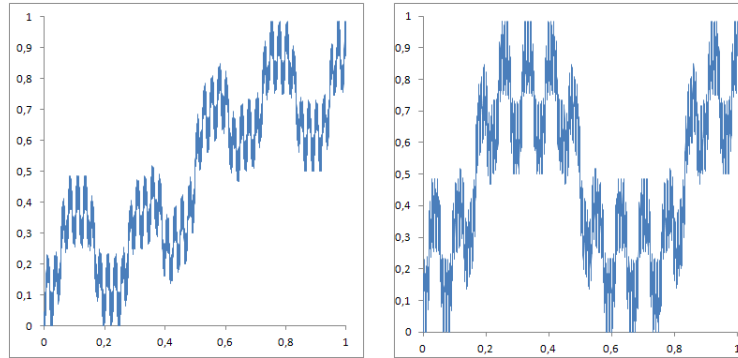
$$S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto S(t) = \left(\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(3^{2n}t)}{2^n}, \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(3^{2n+1}t)}{2^n} \right)$$

où p est la fonction paire 2-périodique qui satisfait les conditions suivantes sur $[0, 1]$:

$$\begin{cases} p(t) = 0 & \text{si } t \in [0, 1/3] \\ p(t) = 3t - 1 & \text{si } t \in [1/3, 2/3] \\ p(t) = 1 & \text{si } t \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

Les deux composantes de la fonction de Schoenberg sont représentées à la figure 4.2. Grâce à la remarque 1.4.5, nous savons que la fonction S_1 est une fonction mono-Hölder d’exposant $h = \frac{\log 2}{2 \log 3} = 0,31546\dots$ De plus, puisque $S_2(t) = S_1(3t)$, la fonction S_2 est également¹ une fonction mono-Hölder d’exposant h . Ainsi, comme pour l’exemple précédent,

1. Il est facile de se convaincre que, pour tous $a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}$, $s > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu, on a $f \in C^s(\mathbb{R})$

FIGURE 4.2 – Les composantes S_1 et S_2 de la fonction de Schoenberg.

Fonction	h moyen	$d(h)$ moyen	h global	$d(h)$ global
S_1	0,314418	0,993011	0,313318	1,008142
S_2	0,321860	0,965135	0,323804	1,037523

TABLE 4.2 – Résultats numériques obtenus pour la fonction de Schoenberg.

le spectre des singularités pour les deux composantes est réduit à un point :

$$d(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = \frac{\log 2}{2 \log 3} = 0,31546\dots \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

A nouveau, nous allons travailler avec 10^5 points et avec l'ondelette de Daubechies d'ordre 2. Les fonctions w et les spectres de singularités obtenus se trouvent sur la figure 4.3.

Nous constatons encore un comportement remarquablement linéaire des fonctions w , en parfait accord avec le caractère mono-Hölder de la fonction. Le spectre obtenu est une fois de plus très précis et proche de la réalité, comme le confirment les résultats numériques dans le tableau 4.2, pour lequel les colonnes ont la même signification que pour la fonction de Weierstrass. Nous remarquons que l'erreur est à nouveau de l'ordre de quelques millièmes, preuve que notre programme est également très efficace pour obtenir le spectre des singularités des composantes de la fonction de Schoenberg.

4.4 Mouvement brownien fractionnaire

Comparer entre eux les résultats et marges d'erreurs obtenus pour les fonctions que nous venons de présenter a peu d'intérêt. Afin de pouvoir comparer des résultats comparables, il faut considérer des fonctions d'une même nature. Cela peut se faire grâce à un processus stochastique mono-Hölder, où chaque réalisation sera différente, mais où l'exposi

ssi $f(a. + b) \in C^s(\mathbb{R})$.

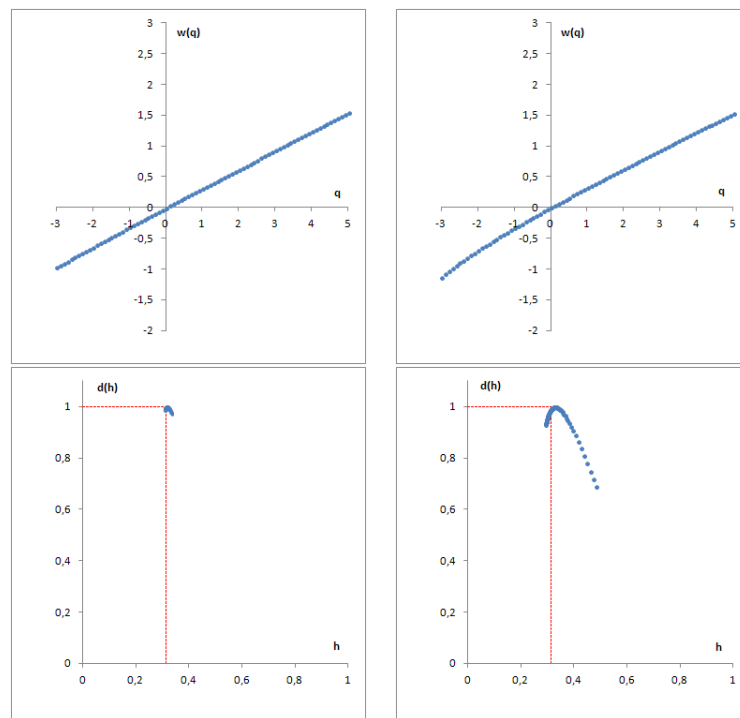


FIGURE 4.3 – Dans la colonne de gauche, la fonction w et le spectre des singularités obtenus pour la fonction S_1 . De même dans la colonne de droite pour la fonction S_2 . Les lignes en pointillés se croisent en le point $(\frac{\log 2}{2 \log 3}, 1)$.

sant de Hölder sera le même. Le processus stochastique que nous allons utiliser ici est le mouvement brownien fractionnaire.

Le mouvement brownien fractionnaire (mbf) est une généralisation du mouvement brownien “classique” tel qu’introduit rigoureusement par N. Wiener au XIX^e siècle² et étudié par de nombreux scientifiques tels que Jean Perrin, Norbert Wiener, ou encore Albert Einstein. Cette généralisation a été effectuée au milieu du siècle passé, et a trouvé des applications dans de nombreux domaines, allant de la finance à la physique, en passant par la biologie ou la télécommunication ([27] et références internes, notamment [12]).

Le mouvement brownien fractionnaire est un processus aléatoire qui possède de nombreuses propriétés, ainsi que diverses définitions équivalentes ; le lecteur intéressé trouvera de plus amples informations sur ce sujet dans [27] (et références internes relatives aux mbf). C’est volontairement que nous ne le présentons pas ici, car les notions nécessaires à sa présentation et à sa compréhension sortent du cadre de ce travail. La propriété des mbf qui nous intéresse est leur caractère mono-Hölder, comme dans les exemples que nous avons déjà considérés. La différence est qu’ici, nous avons la possibilité de choisir un exposant de Hölder h et ensuite de générer autant que nécessaire des mbf distincts d’exposant h , de taille arbitraire. Comme pour les exemples précédents, nous allons considérer 10^5 points, et nous allons examiner cinq mbf d’exposant 0, 2, cinq d’exposant 0, 4, et cinq d’exposant 0, 6, générés aléatoirement par la méthode des matrices circulantes [27]. La figure 4.4 représente trois réalisations de mbf, d’exposants égaux à ceux que nous venons de mentionner. A nouveau, à l’oeil, la courbe semble plus lisse, moins bruitée lorsque l’exposant de Hölder croit. De plus, afin de montrer que des mbf de même exposant de Hölder peuvent avoir l’air sensiblement différents (ce qui n’empêchera pas nos algorithmes de fonctionner correctement), trois autres mbf d’exposant 0, 4 sont également représentés sur cette figure. Notons que tous les mbf utilisés ont été générés grâce au logiciel R, via le package “dvvBm” disponible à l’adresse <http://cran.r-project.org/web/packages/dvvBm/index.html>.

Les fonctions w et spectres des singularités des quinze mbf considérés sont relativement semblables à ce qui a déjà été présenté. Notons toutefois que le comportement des fonctions w est cette fois moins linéaire lorsque l’exposant de Hölder est 0, 2 ou 0, 4 et donc les points formant le spectre obtenu sont moins concentrés que dans les exemples précédents, induisant des erreurs numériques un peu plus grandes qu’auparavant. Ce problème s’atténue lorsque l’exposant de Hölder vaut 0, 6 comme illustré à la figure 4.5. Néanmoins, l’allure générale des fonctions w et les spectres obtenus, même si moins précis qu’avant, ne laissent pas de place au doute et sont typiquement ceux de fonctions mono-Hölder.

Afin d’analyser les mouvements browniens fractionnaires nous avons à nouveau utilisé l’ondelette de Daubechies d’ordre deux. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.3. En ce qui concerne la première colonne, à titre d’exemple, le nom “bmf 02-3”

². Le nom du mouvement brownien fractionnaire vient du botaniste Robert Brown, qui a étudié les mouvements de grains de pollen.

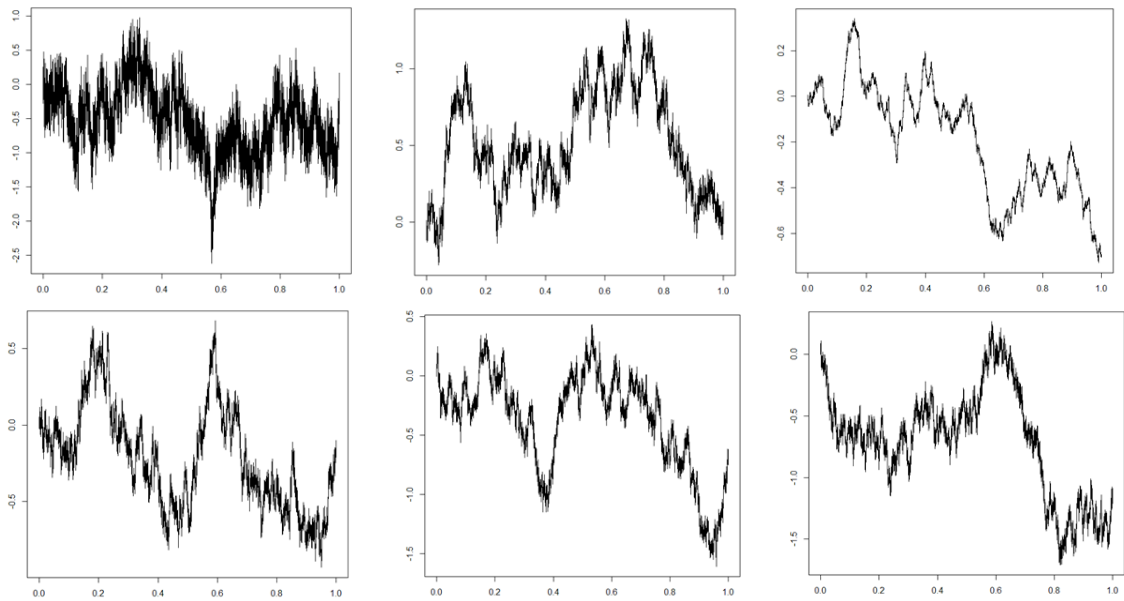


FIGURE 4.4 – *En haut* : Des réalisations de mouvements browniens fractionnaires d'exposant 0, 2, 0, 4, 0, 6. *En bas* : trois autres mbf d'exposant 0, 4, visiblement bien différents les uns des autres.

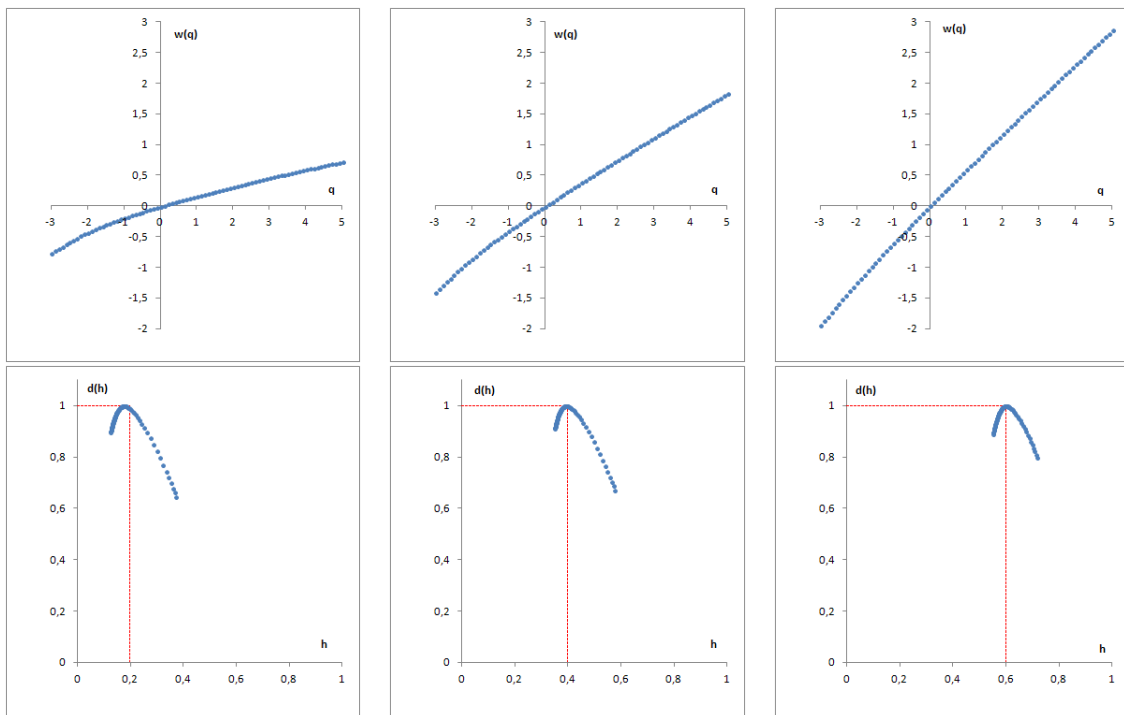


FIGURE 4.5 – *En haut* : La fonction w de réalisations de mbf d'exposant 0, 2, 0, 4, 0, 6. *En bas* : Les spectres correspondants.

Fonction	h moyen	$d(h)$ moyen	h global	$d(h)$ global
bmf 02-1	0,188312	0,938362	0,175775	1,057237
bmf 02-2	0,186634	0,947072	0,177460	1,048496
bmf 02-3	0,185526	0,934083	0,173543	1,057685
bmf 02-4	0,192175	0,925115	0,176548	1,067720
bmf 02-5	0,193858	0,920275	0,176934	1,070651
bmf 04-1	0,404692	0,940983	0,391764	1,053639
bmf 04-2	0,404056	0,941657	0,392716	1,052319
bmf 04-3	0,387757	0,932467	0,373605	1,056040
bmf 04-4	0,389224	0,951822	0,381154	1,044800
bmf 04-5	0,402692	0,941821	0,392209	1,051940
bmf 06-1	0,613796	0,965013	0,609458	1,025695
bmf 06-2	0,601448	0,952523	0,595100	1,041914
bmf 06-3	0,605535	0,964881	0,600349	1,027383
bmf 06-4	0,617378	0,965933	0,610989	1,027516
bmf 06-5	0,614060	0,970349	0,608955	1,022009

TABLE 4.3 – Résultats numériques obtenus pour différents mouvements browniens fractionnaires.

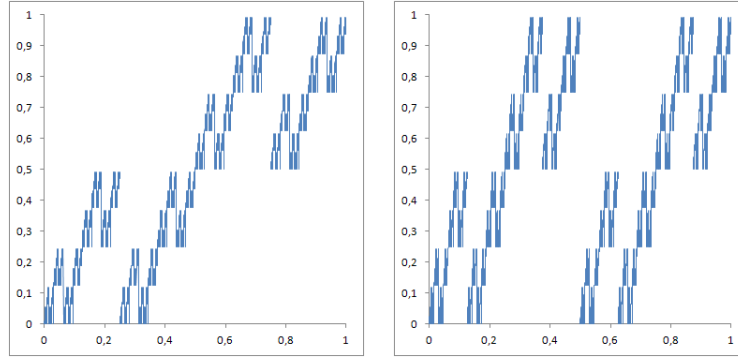
correspond au troisième mouvement brownien fractionnaire d'exposant de Hölder 0,2 que nous avons analysé.

Les résultats numériques obtenus restent globalement bons pour les mouvements browniens fractionnaires. En effet, nous constatons que l'erreur commise dans l'estimation de h (deuxième colonne) est dans tous les cas inférieure à 0,02, et l'erreur lors de l'estimation de $d(h)$ n'est que de quelques centièmes. Des constatations similaires s'appliquent aux deux dernières colonnes, malgré le fait que nous savions que les erreurs seraient plus prononcées, surtout pour les mbf d'exposant 0,2. D'ailleurs, en ce qui concerne les mbf d'exposant 0,6, ce sont les deux dernières colonnes qui donnent les résultats les plus précis, et les plus constants. Lorsque la régularité diminue, les erreurs d'estimation de $d(h)$ augmentent plus que celles des estimations de h , que ce soit en moyenne ou globalement. L'exposant de Hölder est légèrement sous-estimé dans les mbf d'exposant 0,2, et légèrement surestimé dans les autres cas.

Il est intéressant de remarquer que, dans tous les cas, les erreurs commises restent petites, confirmant l'efficacité de notre méthode.

4.5 Fonction de Lebesgue-Davenport

Terminons cette section par l'analyse d'une fonction qui n'est pas mono-Hölder : la fonction de Lebesgue-Davenport. Nous allons montrer que dans ce cas complètement différent des autres, notre programme donne à nouveau de bons résultats. Cette fonction fait partie de la famille des séries p -adiques de Davenport, et le lecteur intéressé trouvera de

FIGURE 4.6 – Les composantes D_1 et D_2 de la fonction de Lebesgue-Davenport.

plus amples détails dans [17]. Tout comme la fonction de Schoenberg, c'est une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^2 , mais nous allons pouvoir étudier séparément la régularité de ses deux composantes, que nous noterons respectivement D_1 et D_2 . Concrètement, la fonction de Lebesgue-Davenport est définie comme suit :

$$D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (D_1(t), D_2(t))$$

avec

$$D_1(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \{2^n t\} \text{ avec } a_{2n} = 2^{-n} \text{ et } a_{2n+1} = -2^{-n-1}$$

et

$$D_2(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \{2^n t\} \text{ avec } a_{2n} = -2^{-n} \text{ et } a_{2n+1} = 2^{-n},$$

où $\{x\}$ représente la fonction en dents de scie :

$$\{x\} = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les deux composantes de cette fonction sont représentées à la figure 4.6.

Comme nous l'avons signalé, les fonctions D_1 et D_2 ont la caractéristique de ne pas être mono-Hölder, à la différence des exemples précédents. En effet, on peut montrer (voir [17]) que le spectre des singularités de ces deux composantes est le suivant :

$$d(h) = \begin{cases} 2h & \text{si } 0 \leq h \leq \frac{1}{2} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons travaillé avec 2^{20} points pour chaque composante, et utilisé l'ondelette de Daubechies de deuxième ordre. Les résultats obtenus sont représentés à la figure 4.7. Il n'y a évidemment dans ce cas aucun sens à établir des tableaux de résultats, comme nous

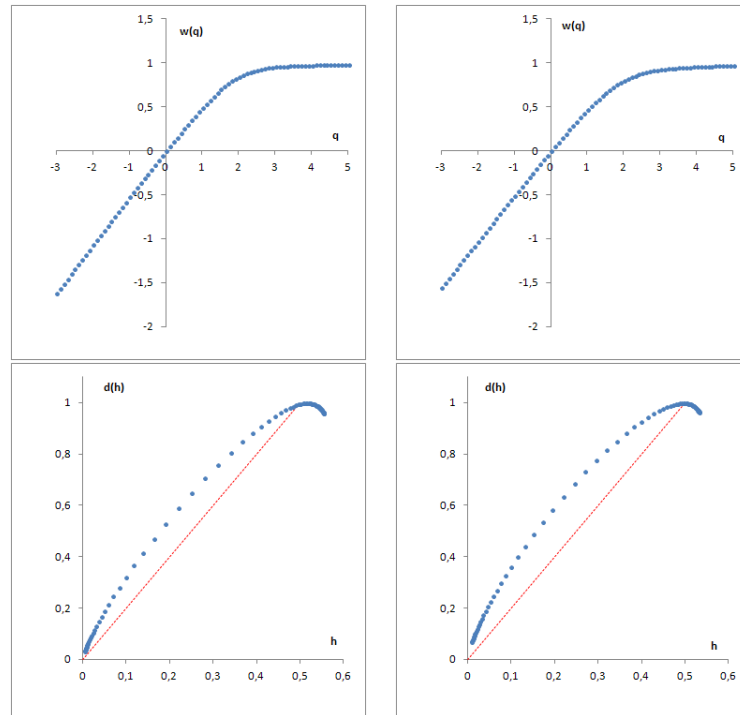


FIGURE 4.7 – *A gauche* : La fonction w et le spectre obtenus pour D_1 . *A droite* : La fonction w et le spectre obtenus pour D_2 . Dans les deux cas, les lignes en pointillés représentent le spectre théorique.

l'avions fait pour les exemples précédents.

Nous remarquons que le spectre obtenu grâce à notre programme est visuellement relativement proche du spectre théorique. Notons enfin, à titre d'information, que des résultats tout à fait similaires sont obtenus avec les autres ondelettes de Daubechies comme illustré à la figure 4.8 avec celles d'ordre deux, quatre et six utilisées pour analyser D_1 .

4.6 Conclusions

Nous avons pu constater tout au long de cette section que notre méthode et notre programme nous permettent de déterminer avec une bonne précision l'exposant de Hölder des fonctions mono-Hölder considérées, l'erreur commise étant de l'ordre de quelques centièmes. L'ondelette qui a donné ces résultats convaincants est l'ondelette de Daubechies de second ordre, c'est donc celle-ci que nous allons utiliser à la section suivante. Les résultats sont particulièrement bons avec cette ondelette lorsque nous avons analysé les fonctions de Weierstrass et les mouvements browniens fractionnaires, ce qui est important car, comme nous pourrons le constater, les données que nous allons analyser au chapitre suivant auront le même type de comportement.

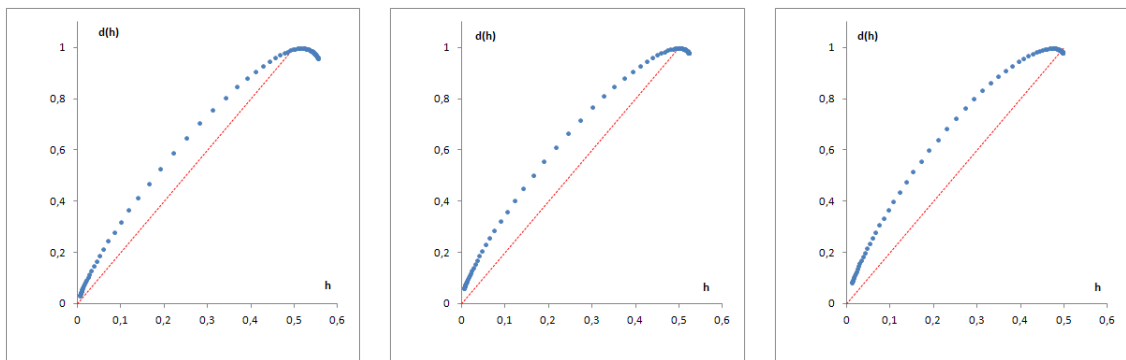


FIGURE 4.8 – Spectres obtenus pour D_1 avec les ondelettes de Daubechies d’ordre deux, quatre, et six.

Chapitre 5

Application à des données de températures

Dans cette section, nous allons appliquer le processus décrit et testé à la section précédente à des données de températures. A notre connaissance, une telle démarche n'a jamais été entreprise, cette section est donc entièrement originale.

L'idée principale qui a motivé cette recherche est la suivante. Il est bien connu que le climat d'une région est fortement influencé par la proximité d'une mer ou d'un océan, ceux-ci régissant en partie la régularité du climat régional. Par régularité du climat, nous sous-entendons l'idée que le climat d'une région est régulier lorsque les conditions météorologiques varient généralement peu d'un jour à l'autre, et ce, tout au long de l'année. Nous pensons que la proximité de l'océan Atlantique ou de la mer Méditerranée a une influence sur la régularité du climat en Europe. Via une analyse de la régularité hölderienne telle que présentée dans ce travail, nous allons tenter de voir à quel point la régularité d'une série de données de températures reflète le type de climat subi par la station étudiée. Dans un premier temps, nous allons détailler la collecte des données de températures, puis les analyser, les comparer selon le type de climat et voir ce que nous pouvons en déduire.

5.1 Collecte des données

Nous avons collecté nos données de températures sur le site internet <http://eca.knmi.nl/>¹, qui est une base de données climatologiques européennes. Nous nous intéressons aux températures moyennes journalières des quelque 2000 stations disponibles. Afin d'analyser des données aussi comparables que possible, nous ne sélectionnons parmi ces 2000 stations que celles dont les températures moyennes disponibles comprennent les années 1951 à

1. European Climate Assessment and Dataset.



FIGURE 5.1 – Les 168 stations répondant à nos exigences, parmi les quelque 2000 stations disponibles.

2003, et dont la valeur a été obtenue de la même manière, à savoir

$$t_{moyenne} = \frac{t_{min} + t_{max}}{2},$$

c'est-à-dire comme étant la moyenne de la température minimale et maximale de la journée. Ce calcul est celui qui a été utilisé dans la majorité des stations européennes recensées sur notre site, ce qui nous a permis d'avoir un large éventail de stations analysables. De plus, nous ne considérons que des données non-blindées, i.e. une donnée manquante n'est pas comblée par une valeur approximative basée sur les données précédentes et suivantes ou sur les données des stations les plus proches. Compte tenu de toutes ces considérations, nous avons passé en revue une à une les stations disponibles et sélectionné celles qui remplissent les critères que nous avons exposés. Cela nous a procuré un jeu de données de 168 stations réparties sur l'ensemble du continent européen, comme illustré sur la figure 5.1.

Pour chaque station, nous n'avons gardé que les données comprises entre 1951 et 2003 afin d'avoir le même intervalle de temps et à peu près le même nombre de données pour chacune. Bien que les méthodes de mesure ont changé durant les années considérées, et qu'il est possible que l'on ait déplacé de quelques centaines de mètres les stations (notamment à cause de l'agrandissement des villes et de l'influence de la pollution), les données du site référencé sont fiables. La figure 5.2 montre quelques représentations graphiques de données de températures, préalablement tronquées pour ne garder que celles comprises

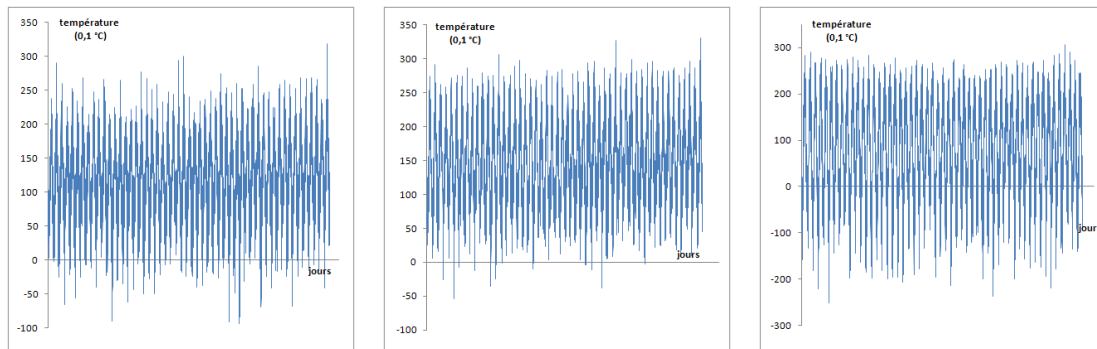


FIGURE 5.2 – De gauche à droite, les courbes de températures de Rennes, Barcelone, Kiev.

entre 1951 et 2003.

Afin de déterminer le climat sous lequel se trouve chacune des stations considérées, nous avons utilisé la classification des climats de Köppen, dont une carte établie pour l'Europe est représentée à la figure² 5.3. Cette méthode de détermination du climat, développée au début du XX^e siècle par Wladimir Köppen, est l'une des plus utilisées en climatologie. En général, on considère une version légèrement améliorée de cette classification, appelée classification de Köppen-Geiger. Elle se base sur le régime pluviométrique et les variations de température enregistrés par une station météorologique ; le lecteur intéressé trouvera de plus amples informations dans [31]. Dans notre travail, afin de déterminer le climat d'une station avec autant de précision que possible, nous avons utilisé le programme disponible à l'adresse³ http://webmap.ornl.gov/wcsdown/dataset.jsp?ds_id=10012, qui a superposé la carte de la figure 5.3 sur le logiciel Google Earth, permettant ainsi une détermination précise du climat station par station. Toutefois, il arrive fréquemment que certaines stations, bien que classées rigoureusement dans une catégorie, soient sous l'influence de deux, voire trois types de climats différents, comme illustré sur la figure 5.4 pour la ville de Montélimar.

La figure B.1 en annexe reprend l'ensemble des stations considérées et le(s) climat(s) qu'elles rencontrent. Nous allons principalement nous intéresser aux trois principaux types de climats qui règnent en Europe, à savoir le climat continental, le climat méditerranéen, et le climat océanique. Comme indiqué sur la figure 5.5, ces trois types de climats sont subdivisés en différentes catégories, qui, dans un premier temps, nous importeront peu. De même, les données issues de stations implantées à Ténérife, de par leur éloignement géographique significatif par rapport au continent européen, ainsi que la ville de Sivas (Turquie), dont le climat est un peu particulier (semi-continental, semi-méditerranéen), ne seront

2. http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Europe_Koppen_Map.png

3. Au milieu du mois d'avril 2013, ce site a rencontré des difficultés. Si les problèmes persistent, le programme mentionné est également disponible à l'adresse <http://people.eng.unimelb.edu.au/mpee1/koppen.html>, où il faut choisir la version "basic info version".

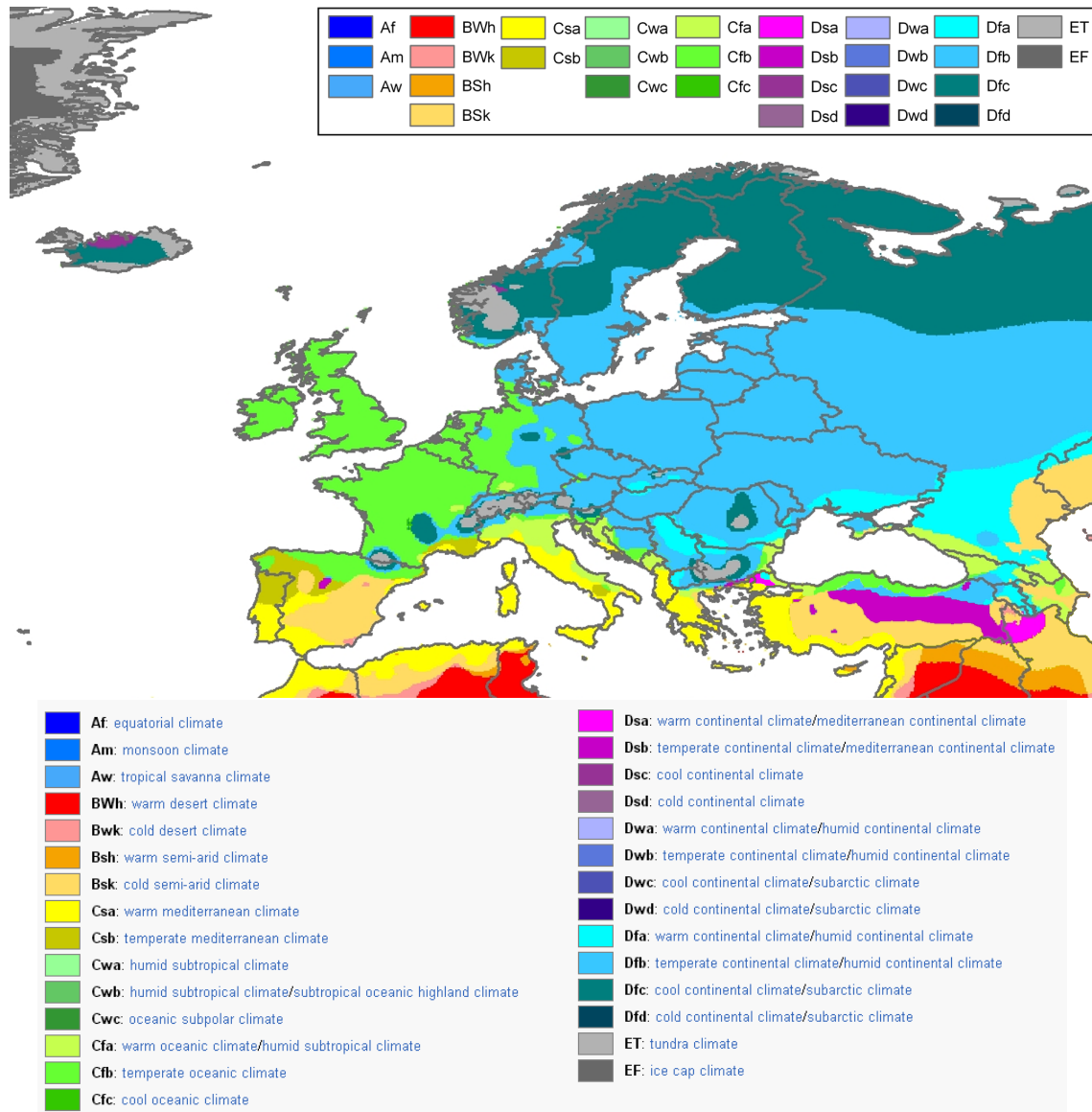


FIGURE 5.3 – La carte de Köppen de l'Europe valable entre les années 1951 et 2000.

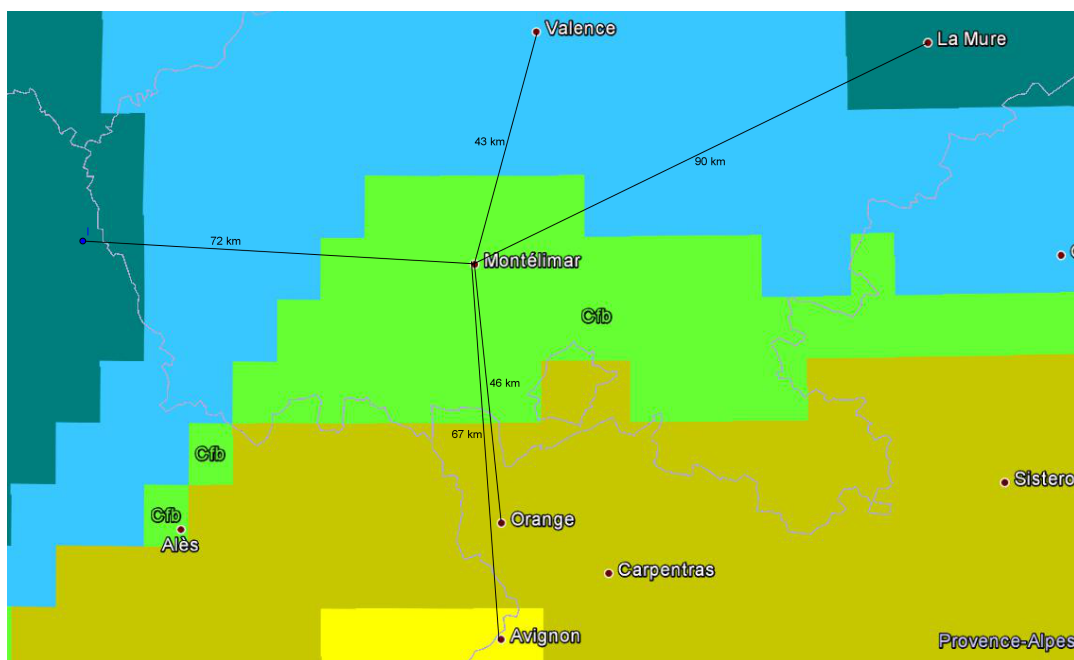


FIGURE 5.4 – La ville de Montélimar est située à la confluence de divers types de climats : océanique tempéré, méditerranéen tempéré, méditerranéen chaud, continental tempéré humide, et même continental froid.

pas utilisées dans nos analyses. De plus, les stations référencées sous le climat “semi-aride froid” sont toutes espagnoles. Dans une première approche, nous pourrions les assimiler à un climat méditerranéen chaud, et, lorsque nous parlerons de climat méditerranéen, il sera sous-entendu que nous incluons également le climat semi-aride. Notons que nous avons référencé à peine une petite dizaine de stations d’altitude ou de haute latitude dont le climat est à considérer comme un climat de toundra. Vu le faible nombre de stations de ce type, nous devons être prudents dans les analyses qui les concernent. Ces considérations étant faites, la figure 5.5 montre que notre jeu de données est relativement bien équilibré, puisque nous disposons à peu près (sans tenir compte des autres climats possibles pour une même station) du même nombre de stations situées en climat continental et océanique. Quant aux stations situées en zone méditerranéenne, elles sont un peu moins nombreuses, et malheureusement la plupart sont situées en Espagne, réduisant de ce fait la diversité géographique de ce type de stations.

Il est important de remarquer que nos analyses se basent uniquement sur les températures des stations considérées, alors que la classification de Köppen tient également fortement compte des précipitations.

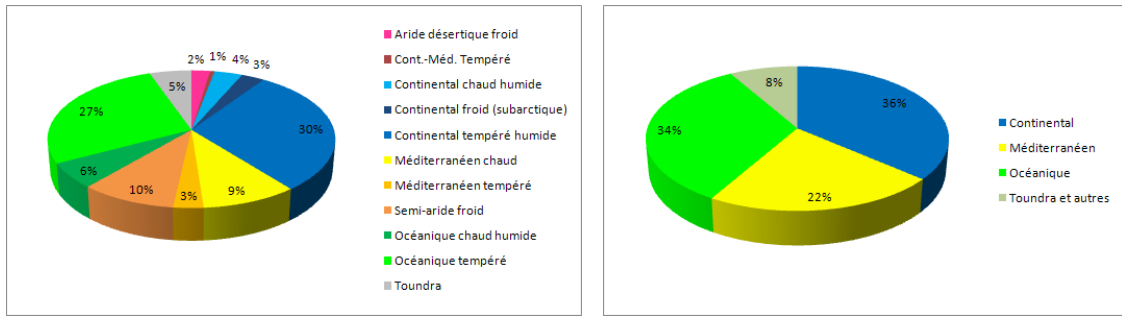


FIGURE 5.5 – Répartition des différents types de climats (selon la classification de Köppen) dans notre jeu de données. *A gauche* : La distinction entre les différents sous-climats est indiquée. *A droite* : Les sous-climats du type océanique ont été rassemblés, de même pour les sous-climats du type continental et méditerranéen. Le climat semi-aride froid a été assimilé au climat méditerranéen.

5.2 Résultats obtenus et analyses

Chaque signal considéré est en fait analysé de deux façons différentes. Nous ne l’analyserons pas sous sa forme brute, pour des raisons que nous expliquons plus loin. Nous analysons d’abord son anomalie climatique, notion fréquemment utilisée en climatologie, qui est définie comme suit. Considérons une série de données de températures, que nous notons $(x_i)_{i=1,\dots,N}$. Nous calculons d’abord la température moyenne de l’ensemble des températures appartenant aux mois de janvier des années considérées, et procédons de la sorte pour les onze autres mois. En termes mathématiques on calcule

$$t_j = \bar{m}_j \text{ (moyenne arithmétique de } m_j\text{),}$$

pour j allant de 1 à 12, où

$$m_j = \{x_i \text{ appartenant au mois } j\}.$$

Cela correspond grossièrement à la partie la plus “régulière” du signal. On retire ensuite à chaque donnée d’un mois donné la température moyenne relative à ce mois calculée précédemment, laissant ainsi l’écart par rapport à cette température moyenne générale pour le mois considéré. Le signal ainsi obtenu, hautement irrégulier donc, s’appelle l’anomalie du signal initial, et correspond à $(y_i)_{i=1,\dots,N}$ où

$$y_i = x_i - t_j,$$

où j est tel que x_i appartient au mois j . L’anomalie en elle-même a généralement peu d’intérêt, la dernière étape est de la “primitiver” afin d’obtenir un signal plus régulier et

plus simple à manipuler, que nous appellerons anomalie primitivée du signal initial, dont nous allons déterminer le spectre des singularités. L'étape de "primitivation" se fait au sens discret, i.e. l'anomalie primitivée correspond à $(z_i)_{i=1,\dots,N}$ où

$$z_i = \sum_{k=1}^i y_k.$$

Finalement, nous analyserons la forme "primitivée" du signal brut, au sens que nous venons de définir. Celle-ci est logiquement celle qui aura la plus grande régularité, et nous verrons qu'elle va s'avérer primordiale dans nos résultats.

La figure 5.6 représente les différents signaux dont nous venons de parler pour les villes de Rennes, Barcelone, et Kiev.

Remarque 5.2.1. Par abus de langage, dans la suite de ce travail, nous appellerons simplement "anomalie" l'anomalie primitivée du signal brut et "primitive" la primitive du signal brut, au sens que nous venons de définir. Afin d'éviter les signaux trop irréguliers et les exposants de Hölder trop petits, nous ne considérerons plus que ces deux types de signaux qui, grâce à l'étape de primitivation, bénéficient d'une plus grande régularité. Cela est aussi justifié par une analyse rapide des résultats obtenus (figure annexe B.2) qui montre que les exposants de Hölder des signaux bruts se situent tous dans un intervalle plus petit et ont un écart-type également plus petit que ceux des anomalies et primitives, rendant plus difficile les distinctions ou classifications des stations. De toute façon, en pratique, c'est toujours une marche⁴ qui est analysée⁵.

Signalons encore que le code en C que nous avons écrit pour transformer les données récoltées en données utilisables et pour déterminer les signaux mentionnés se trouvent dans l'annexe C.

Lorsque nous traçons la fonction w des anomalies ou des primitives des signaux considérés, nous constatons que nous obtenons systématiquement des résultats similaires à ceux présentés à titre d'exemple pour la ville de Rennes sur la figure 5.7. D'après les analyses que nous avons effectuées sur des fonctions irrégulières classiques, grâce à l'allure linéaire de ces fonctions w , nous pouvons affirmer que tous les signaux de températures étudiés sont des signaux mono-Hölder. Ce premier résultat est hautement significatif, puisqu'il implique que tous les signaux de températures ont ce que l'on pourrait appeler une "irrégularité régulière", puisque tous les points du signal ont la même régularité. De plus, nous pourrions dorénavant parler de "l'exposant de Hölder" d'un signal ou d'une station, comme nous le faisons à la section traitant des fonctions irrégulières classiques, que nous pouvons déterminer de la même façon que précédemment. Le fait d'avoir un unique exposant

4. Correspond à un signal primitivé tel que nous l'avons défini.

5. Par exemple en théorie de la turbulence, en finance, et autres domaines. Pour plus d'informations, voir [27] et références internes.

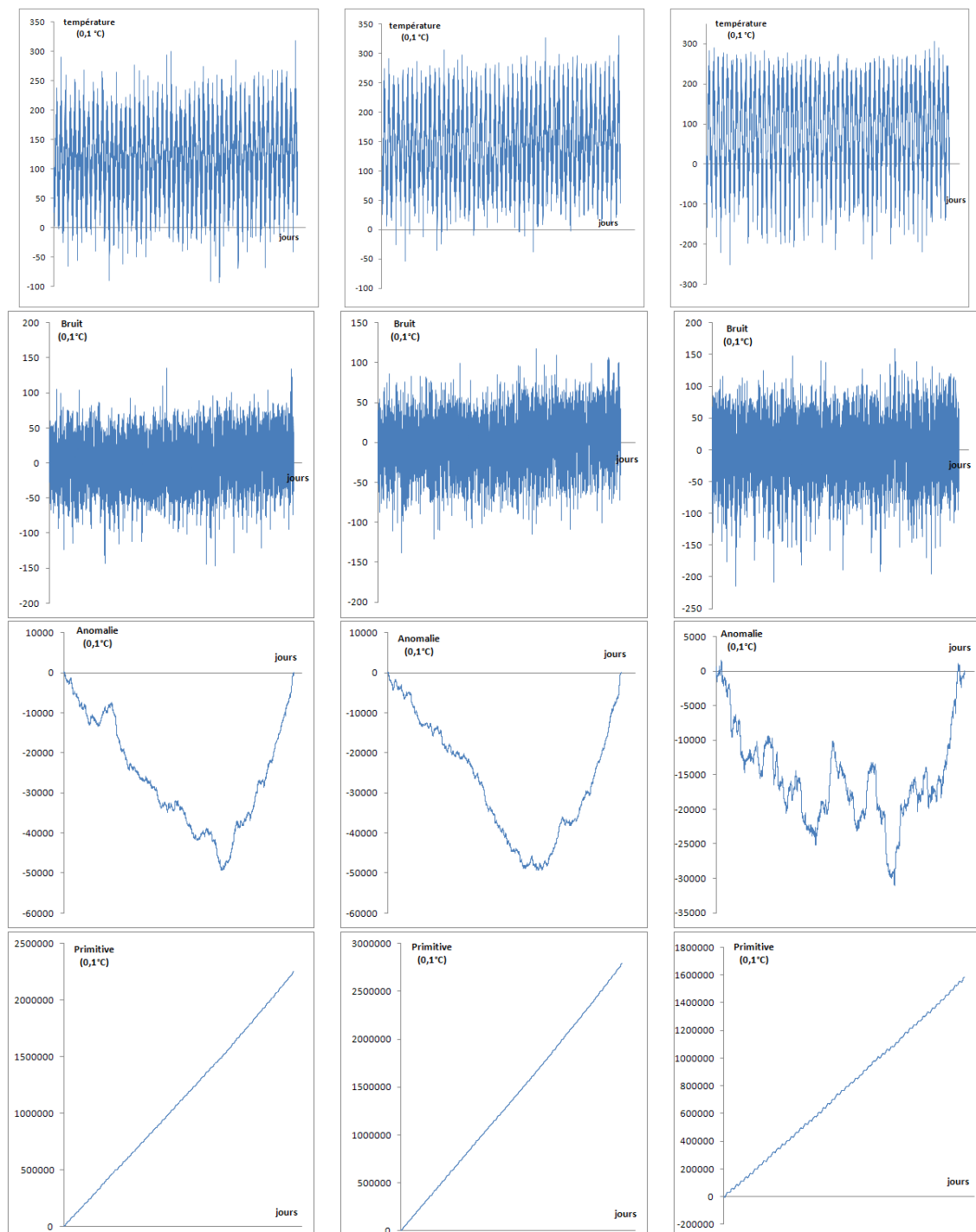


FIGURE 5.6 – De haut en bas : le signal initial brut, son anomalie, son anomalie primitive, sa primitive. De gauche à droite : Les signaux relatifs à la ville de Rennes, Barcelone, Kiev.

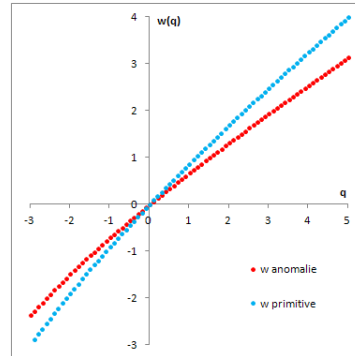


FIGURE 5.7 – Les fonctions w correspondant à l’anomalie et à la primitive des températures de Rennes.

Ville	h moyen anomalie	h moyen primitive
Rennes	0,688109	0,874339

TABLE 5.1 – Exposants de Hölder pour la ville de Rennes.

de Hölder par signal va également nous permettre de réaliser de nombreuses analyses et classifications, afin de voir à quel point cet exposant peut être considéré comme un indice climatique significatif.

Nous calculerons l’exposant de Hölder d’un signal (anomalie et primitive) comme étant le “h moyen” du signal lorsqu’il est préalablement tronqué des 25% des points ayant les ordonnées (valeurs de $d(h)$) les plus éloignées de 1. Puisque le signal est mono-Hölder, nous savons que le $d(h)$ moyen doit être aussi proche de 1 que possible, c’est pourquoi nous tronquons nos signaux selon les ordonnées des points qui les composent. Ainsi, on obtient pour la ville de Rennes les résultats du tableau 5.1.

Les exposants de Hölder moyens de l’ensemble des signaux considérés se trouvent à la figure annexe B.2. En recherchant les valeurs minimales et maximales des exposants de chaque type de signal, nous constatons que les exposants de Hölder moyens pour les anomalies sont compris entre 0,64 et 0,86 et ceux des primitives entre 0,83 et 1,05. Les moyennes et écarts-types obtenus pour les deux types de signaux se trouvent dans le tableau 5.2.

Afin d’avoir une vue globale de la distribution des différents types de climats en fonction

	Anomalies	Primitives
Moyenne	0,722858	0,922557
Ecart-type	0,046178	0,032334

TABLE 5.2 – Moyennes et écarts-types des différents types de signaux considérés.

des exposants de Hölder moyens des anomalies et des primitives, nous pouvons considérer les histogrammes des fréquences représentés à la figure 5.8.

Nous pouvons déjà constater que les différents types de climats sont plus ou moins concentrés chacun dans différents intervalles de valeurs de h . Que ce soit pour les anomalies ou les primitives, les climats océaniques ont tendance à avoir de plus petits exposants de Hölder, ceux des méditerranéens semblent globalement un peu plus grands, et enfin, les climats continentaux semblent avoir les plus grands exposants de Hölder. En ce qui concerne les toundras, la plupart semble avoir de grands exposants pour les anomalies, mais de petits pour les primitives. Afin d'illustrer ces premières constatations, nous avons superposé sur un seul histogramme les histogrammes des trois premiers types de climats, ainsi que les courbes de fréquences que nous pouvons en tirer, pour pouvoir confirmer encore plus clairement ces observations. Cela se trouve sur la figure 5.9

Nos premières observations semblent donc être confirmées par les histogrammes superposés et les courbes de fréquences. Afin de nous conforter dans cette idée, il est opportun de représenter l'ensemble de nos stations et de leur climat par ordre croissant d'exposant de Hölder. Cela est représenté sur la figure 5.10. Il s'agit d'un premier aperçu des résultats obtenus, une représentation plus synthétique est exposée plus loin.

A nouveau, nous constatons clairement que les différents types de climats semblent se regrouper en fonction des exposants de Hölder que nous avons obtenus : les stations en climat océanique, en vert, ont les plus petits exposants, puis, en jaune, celles ayant un climat méditerranéen ou semi-aride, et enfin, en bleu, celles ayant un climat continental. En ce qui concerne les toundras, en gris, leur anomalie associée affiche majoritairement un grand exposant, et leur primitive associée possède systématiquement un petit exposant. On pourrait penser que ces résultats sont dûs à la méthode de calcul utilisée pour déterminer l'exposant de Hölder moyen des signaux, et que d'autres estimations mèneraient à des résultats différents. Pour prouver que ce n'est pas le cas, nous avons également calculé l'exposant de Hölder moyen (en tenant compte de tous les points disponibles), l'exposant de Hölder global (comme calculé pour les fonctions irrégulières classiques), l'exposant de Hölder global tronqué (régression sur les points des fonctions w dont l'abscisse q est comprise entre -1 et 1), et les sommets des paraboles de régressions (tronquées ou non) que l'on peut tracer pour approcher les spectres. Les détails et résultats associés se trouvent à la section annexe B.3, où les mêmes constatations que précédemment sont de mise.

Tous ces graphiques et toutes ces observations nous confortent dans l'idée qu'il devrait être possible de déterminer une classification du climat grâce aux exposants de Hölder ; cela fait l'objet de la sous-section suivante.

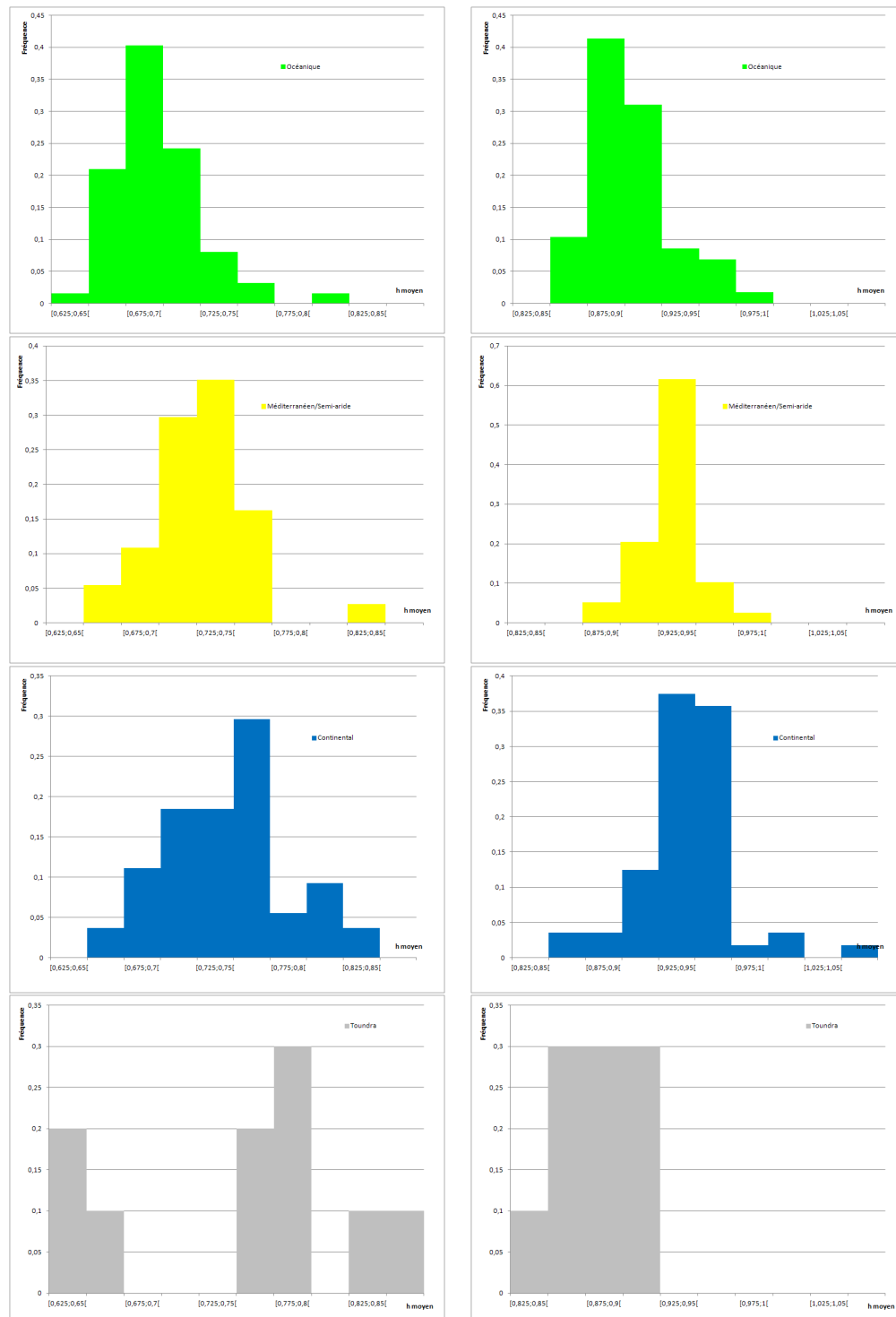


FIGURE 5.8 – *A gauche* : Histogrammes des fréquences des différents types de climats selon l'exposant de Hölder moyen obtenu pour les anomalies. *A droite* : Les mêmes histogrammes selon l'exposant obtenu pour les primitives.

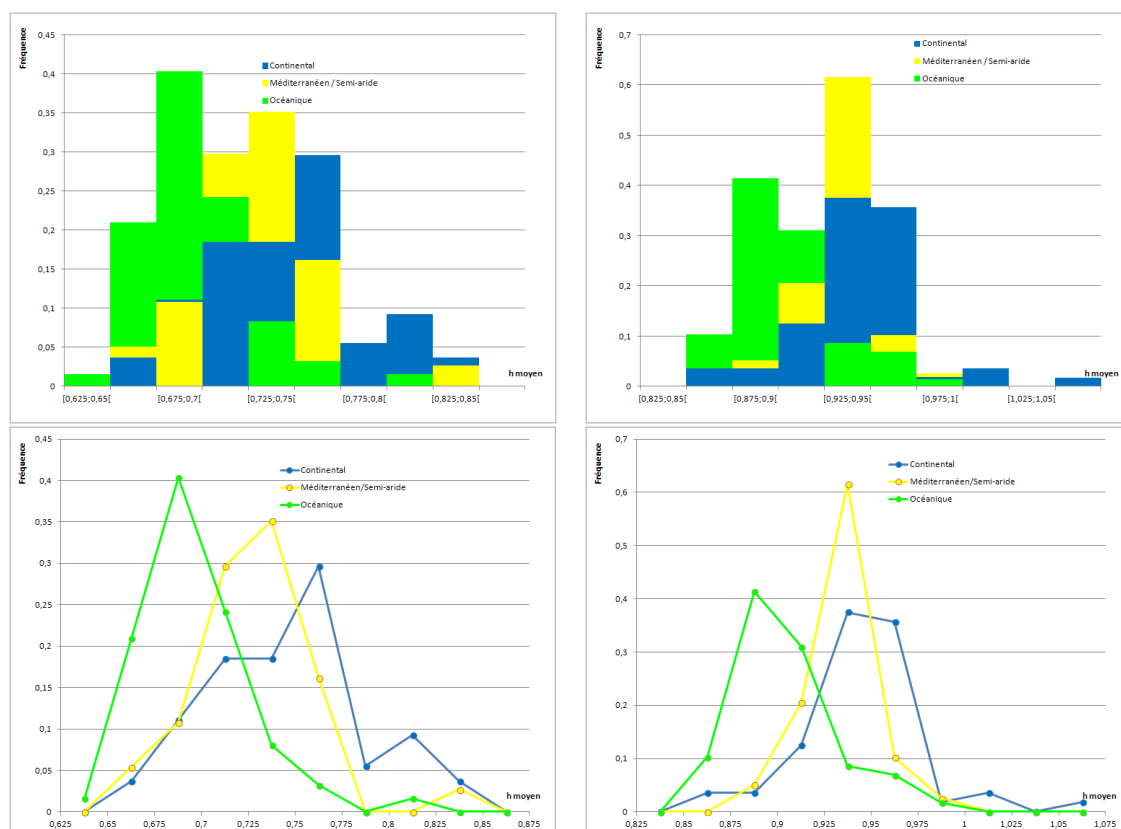


FIGURE 5.9 – *A gauche* : Histogrammes des fréquences superposés des différents types de climats selon l'exposant de Hölder moyen obtenu pour les anomalies, ainsi que les courbes de fréquences associées. *A droite* : Le même histogramme selon l'exposant obtenu pour les primitives, et les courbes des fréquences associées.

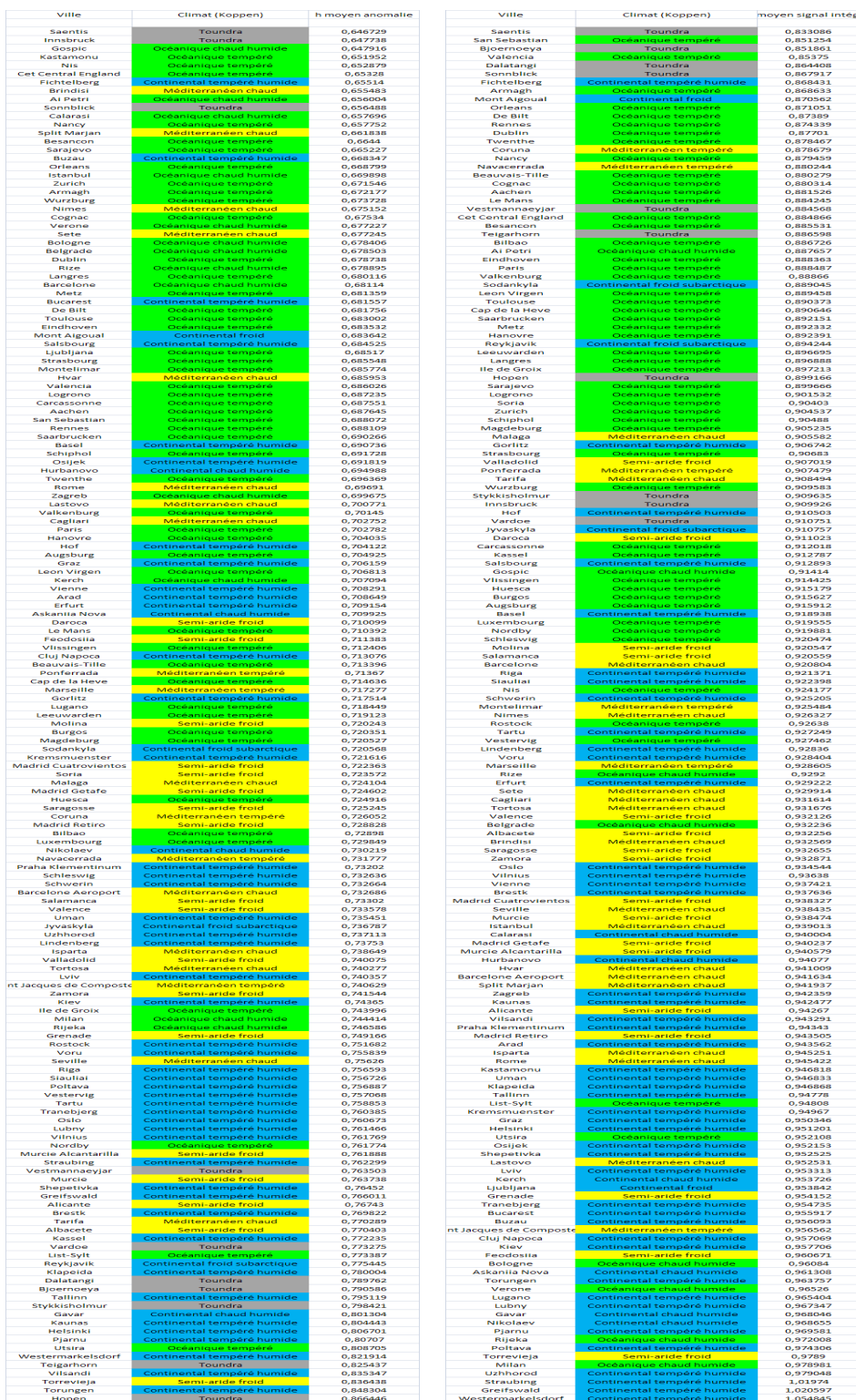


FIGURE 5.10 – Classements des stations en fonction de l'exposant de Hölder obtenu (*h* est croissant de haut en bas), à gauche pour les anomalies, à droite pour les primitives.

TABLE 5.3 – Notre classification des climats selon les exposants de Hölder des anomalies des signaux considérés.

h moyen anomalie	Climat
$h < 0,722$	Océanique
$0,722 \leq h < 0,742$	Méditerranéen
$0,742 \leq h$	Continental

TABLE 5.4 – Notre classification des climats selon les exposants de Hölder des primitives des signaux considérés.

h moyen primitive	Climat
$h < 0,92$	Océanique
$0,92 \leq h < 0,946$	Méditerranéen
$0,946 \leq h$	Continental

5.3 Classification du climat via les exposants de Hölder.

Nous allons dans cette partie établir notre propre classification du climat selon les exposants de Hölder des stations étudiées. Dans un premier temps, nous allons établir cela uniquement sur base des exposants de Hölder des anomalies, puis uniquement sur base de ceux des primitives, les deux classifications étant indépendantes l’une de l’autre. Grâce aux informations fournies par les figures 5.9 et 5.10, nous les déterminons comme indiqué aux tableaux 5.3 (anomalies) et 5.4 (primitives).

Remarquons que, compte tenu des informations que nous avons aux figures 5.9 et 5.10, il nous est impossible d’établir une classe “Toundra” qui tienne la route et s’accorde bien avec les autres classes que nous avons déterminées, que ce soit au niveau des anomalies ou au niveau des primitives.

Nous avons ensuite déterminé le climat de chaque station selon ces deux classifications, et nous avons représenté les résultats sur les cartes des figures 5.11 (anomalies) et 5.12 (primitives), où un point vert (respectivement jaune et bleu) indique que la station est classée sous le climat océanique (respectivement méditerranéen et continental) selon nos critères.

Nous pouvons déjà observer que, dans les deux cas, notre détermination du climat ne semble correspondre avec celle de Köppen que pour la moitié des stations, approximativement. Une analyse détaillée des résultats obtenus se trouve aux tableaux des effectifs 5.5 et 5.6. Signalons que ces tableaux sont réalisés sans tenir compte des éventuels autres climats acceptables pour les stations concernées.

Sur base de ces tableaux, nous pouvons calculer la proportion de stations dont le climat déterminé selon nos méthodes correspond avec la classification de Köppen (correspondance

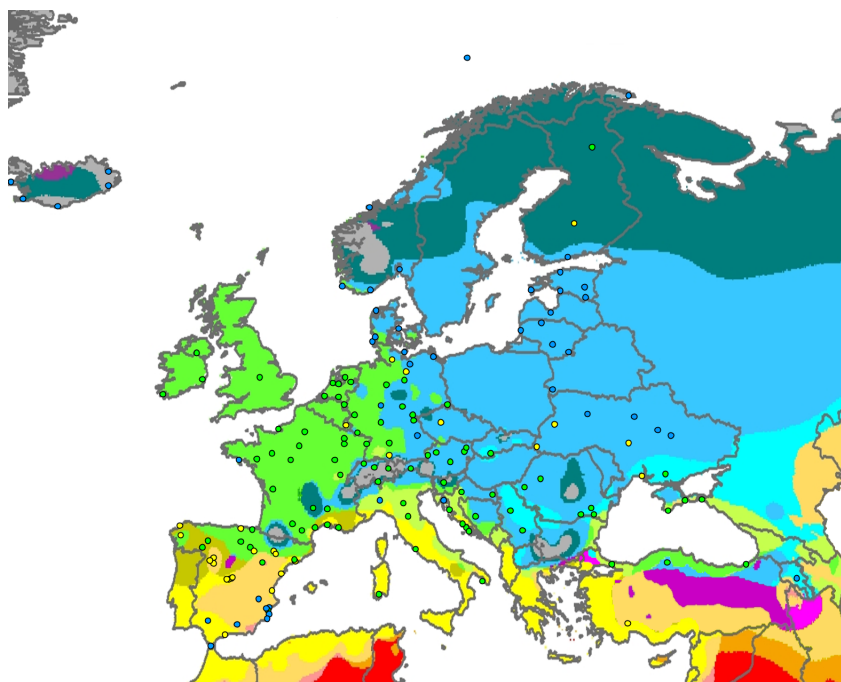


FIGURE 5.11 – Représentation des stations sur la carte de Köppen, où la couleur des points correspond au climat déterminé selon nos critères sur les anomalies.

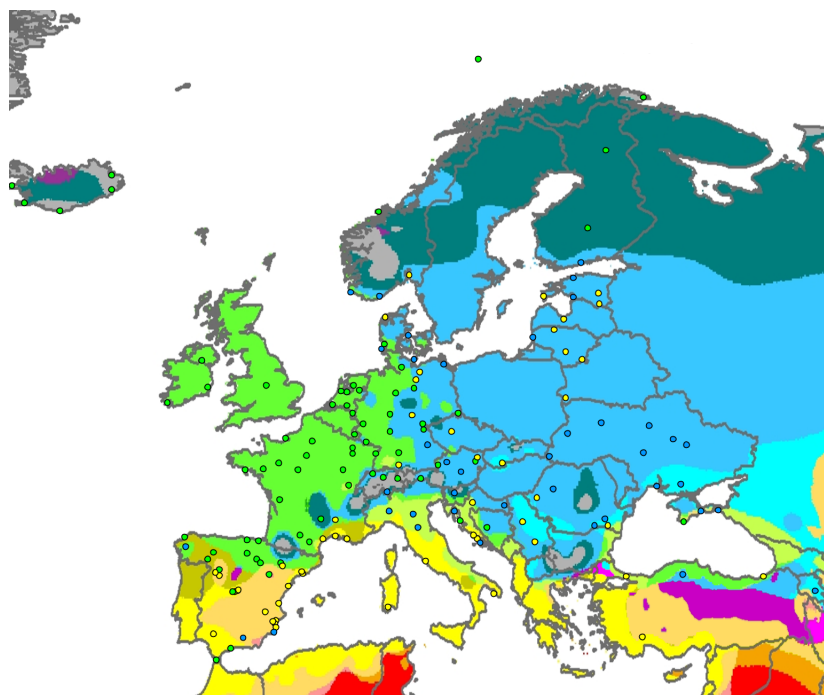


FIGURE 5.12 – Représentation des stations sur la carte de Köppen, où la couleur des points correspond au climat déterminé selon nos critères sur les primitives.

TABLE 5.5 – Effectifs des correspondances entre climats, selon nos critères et ceux de Köppen, pour les anomalies.

Nos critères \ Köppen	Océanique	Médit.	Continental	Toundra
Océanique	43	15	27	2
Méditerranéen	6	14	8	0
Continental	7	8	26	7

TABLE 5.6 – Effectifs des correspondances entre climats, selon nos critères et ceux de Köppen, pour les primitives.

Nos critères \ Köppen	Océanique	Médit.	Continental	Toundra
Océanique	41	8	15	9
Méditerranéen	5	26	19	0
Continental	10	3	27	0

directe). Lorsque ceux-ci diffèrent, nous pouvons vérifier si notre climat correspond à un autre climat acceptable selon la classification de Köppen, lorsque cela a lieu d'être (correspondance secondaire). Ces correspondances sont établies au tableau 5.7

Nous constatons que, lorsque nous étudions la régularité des anomalies et des primitives indépendamment l'une de l'autre, nos classifications donnent des résultats satisfaisants, dans le sens où un lien apparait clairement entre le type de climat selon Köppen et la régularité en question. Cependant, il n'y a que pour 60% des stations seulement que nos classifications correspondent à celles de Köppen. Pour augmenter ce pourcentage, nous allons maintenant combiner les résultats obtenus pour les anomalies et les primitives, afin d'affiner nos critères et gagner en précision dans la détermination des climats. Rappelons que nous ne nous basons que sur les températures des stations étudiées, alors que la

TABLE 5.7 – Proportions des correspondances entre nos climats et ceux de Köppen, lorsque l'on étudie les anomalies et les primitives. Une correspondance directe est une correspondance avec le (premier) climat de Köppen d'une station, une correspondance secondaire en est une avec un autre climat acceptable. Ainsi, que ce soit du point de vue des anomalies ou des primitives, nos critères permettent d'identifier correctement environ 60% des climats.

Type de correspondance	Anomalies	Primitives
Correspondance directe	51%	58%
Correspondance secondaire	9 %	5%
Pas de correspondance	40%	37%

classification de Köppen tient également fortement compte des précipitations. De cette différence résultera inexorablement un certain pourcentage d’erreur de classification de notre part, que nous tenterons de réduire autant que possible.

En analysant les figures 5.9 et 5.10 ainsi que les résultats obtenus séparément pour les anomalies et les primitives, nous décidons d’établir une répartition des exposants de Hölder en différentes zones, reprises dans le tableau 5.8.

TABLE 5.8 – Classement des exposants de Hölder en différentes zones. A titre d’exemple, au vu du tableau 5.1, la ville de Rennes se trouve en zone 1 du point de vue de son anomalie associée, et également en zone 1 du point de vue de sa primitive associée.

h moyen anomalie	Zone	h moyen primitive
$h < 0,708$	1	$h < 0,92$
$0,708 \leq h < 0,722$	1,5	$0,92 \leq h < 0,93$
$0,722 \leq h < 0,742$	2	$0,93 \leq h < 0,942$
$0,742 \leq h < 0,756$	2,5	$0,942 \leq h < 0,946$
$0,756 \leq h$	3	$0,946 \leq h$

Signalons que les zones 1,5 et 2,5 représentent des zones de transition, où se mélangent de façon à peu près homogène des stations de différents types de climats. Les zones 1, 2, 3, quant à elles, représentent en quelque sorte les classes “Climat océanique”, “Climat méditerranéen/semi-aride”, et “Climat continental” des anomalies et primitives. D’ailleurs, il peut déjà être intéressant, à ce stade, de déterminer la composition de ces différentes zones, en termes de climats. Cela est exprimé en pourcentages (arrondis à l’unité) dans le tableau 5.9

TABLE 5.9 – Composition des différentes zones. Que ce soit du point de vue des anomalies ou des primitives, la zone 1 définie pour chacun de ces types de signal est majoritairement composée de stations ayant un climat océanique. Leur zone 2 (resp. 3) comprend principalement des stations méditerranéennes (resp. continentales).

Climat	Anomalies				Primitives			
	Océanique	Méditerranéen	Continental	Toundra	Océanique	Méditerranéen	Continental	Toundra
Zone 1	68%	12%	15%	5%	64%	10%	12%	14%
Zone 1,5	38%	24%	38%	0%	24%	35%	41%	0%
Zone 2	11%	57%	32%	0%	4%	71%	25%	0%
Zone 2,5	37%	25%	38%	0%	0%	44%	56%	0%
Zone 3	7%	15%	60%	18%	15%	12%	73%	0%

Ce tableau provient de la répartition des stations dans les différentes zones, qui se trouve à la figure annexe B.7.

Nous constatons que les zones 1, 2, et 3 représentent globalement bien les différents types de climats, comme nous venons de le signaler. Cette tendance est d’autant plus marquée

dans la composition des zones des primitives, et cela pouvait aussi se voir sur les courbes des fréquences de la figure 5.9, où les pics sont plus distincts et marqués pour les primitives. Les exposants de Hölder des primitives seront donc de bons indicateurs du type de climat que connaissent les stations.

Inversement, il peut être très intéressant de connaître la répartition de chaque type de climat au sein des différentes zones ; c’est ce qu’illustre le tableau 5.10.

TABLE 5.10 – Répartition de chaque climat dans les différentes zones. Il apparaît clairement que les stations ayant un climat océanique ont tendance à avoir un petit exposant de Hölder (situé en zone 1), que ce soit au niveau des anomalies ou des primitives. Le climat méditerranéen (resp. continental) semble être caractérisé par un exposant situé en zone 2 (resp.3) pour les anomalies et primitives. Les anomalies des toundras ont généralement un grand exposant (70% des toundras en zone 3 vis-à-vis des anomalies), et les primitives ont toutes un petit exposant (zone 1).

Zone	Anomalies					Signaux sommés				
	1	1,5	2	2,5	3	1	1,5	2	2,5	3
Océanique	73%	13%	5%	5%	4%	81%	7%	2%	0%	10%
Méditerranéen	22%	14%	43%	5%	16%	18%	15%	44%	10%	13%
Continental	18%	15%	17%	6%	44%	16%	12%	11%	9%	52%
Toundra	30%	0%	0%	0%	70%	100%	0%	0%	0%	0%

Les observations qui en découlent sont les mêmes que précédemment, et les résultats obtenus sont encourageants. Nous allons pouvoir essayer de donner une caractérisation du climat via les exposants de Hölder.

A partir des différentes zones que nous avons déterminées et des résultats “en colonnes” de la figure 5.10, nous décidons de donner notre propre méthode de détermination du climat, basée sur les exposants de Hölder des anomalies et primitives des signaux considérés. Celle-ci est exposée au tableau 5.11.

TABLE 5.11 – Notre méthode de détermination du climat, selon les zones déterminées.

Zone primitive	Zone anomalie	Type de climat
1	1 ou 1,5 ou 2 ou 2,5	Océanique
	3	Toundra
1,5	1	Océanique
	1,5 ou 2	Méditerranéen
	2,5 ou 3	Continental
2 ou 2,5	1 ou 1,5 ou 2	Méditerranéen
	2,5 ou 3	Continental
3	Toutes les zones	Continental

Comme nous l’avons déjà mentionné, les différents types de climats semblent de premier

abord plus facile à distinguer dans la répartition des exposants de Hölder des primitives, c'est pour cela que nous avons choisi ceux-ci comme premier critère de classification. Signalons que nous avons fusionné les zones 2 et 2,5 des primitives car il s'est avéré, après diverses observations, qu'elles donnaient lieu aux mêmes classifications.

En termes d'exposants de Hölder, notre classification est reprise au tableau 5.12.

TABLE 5.12 – Notre méthode de détermination du climat, selon les exposants de Hölder.

Primitive	Anomalie	Type de climat
$h < 0,92$	$h < 0,756$	Océanique
	$0,756 \leq h$	Toundra
$0,92 \leq h < 0,93$	$h < 0,708$	Océanique
	$0,708 \leq h < 0,742$	Méditerranéen
	$0,742 \leq h$	Continental
$0,93 \leq h < 0,946$	$h < 0,742$	Méditerranéen
	$0,742 \leq h$	Continental
$0,946 \leq h$	Tout h	Continental

La figure annexe B.8 reprend l'ensemble de nos stations avec le climat que l'on en déduit sur base de ces critères. Afin d'avoir un rendu visuel de nos résultats et de les comparer, à l'oeil dans un premier temps, avec la classification de Köppen, nous avons placé nos stations sur la carte de Köppen 5.3, en les représentant par un point de couleur selon le climat que notre classification leur attribue. Logiquement, nous avons utilisé un point vert pour les stations classées "océaniques", un jaune pour les "méditerranéennes", un bleu pour les "continentales", et un gris pour les "toundras". Cela se trouve sur la figure 5.13.

Nous constatons d'ores et déjà que notre classification correspond à celle de Köppen pour de nombreuses stations, principalement océaniques et continentales. Le tableau 5.13 permet de quantifier la qualité de notre méthode.

Dans ce tableau, la case "Correspondance directe" signifie que le climat que nous avons déterminé correspond à celui de Köppen, alors que la case "Correspondance secondaire"

TABLE 5.13 – Proportion de stations dont le climat selon nos critères et ceux de Köppen correspondent. Une correspondance directe est une correspondance avec le (premier) climat de Köppen d'une station, une correspondance secondaire en est une avec un autre climat acceptable.

Correspondance directe	66%
Correspondance secondaire	5%
Pas de correspondance	29%

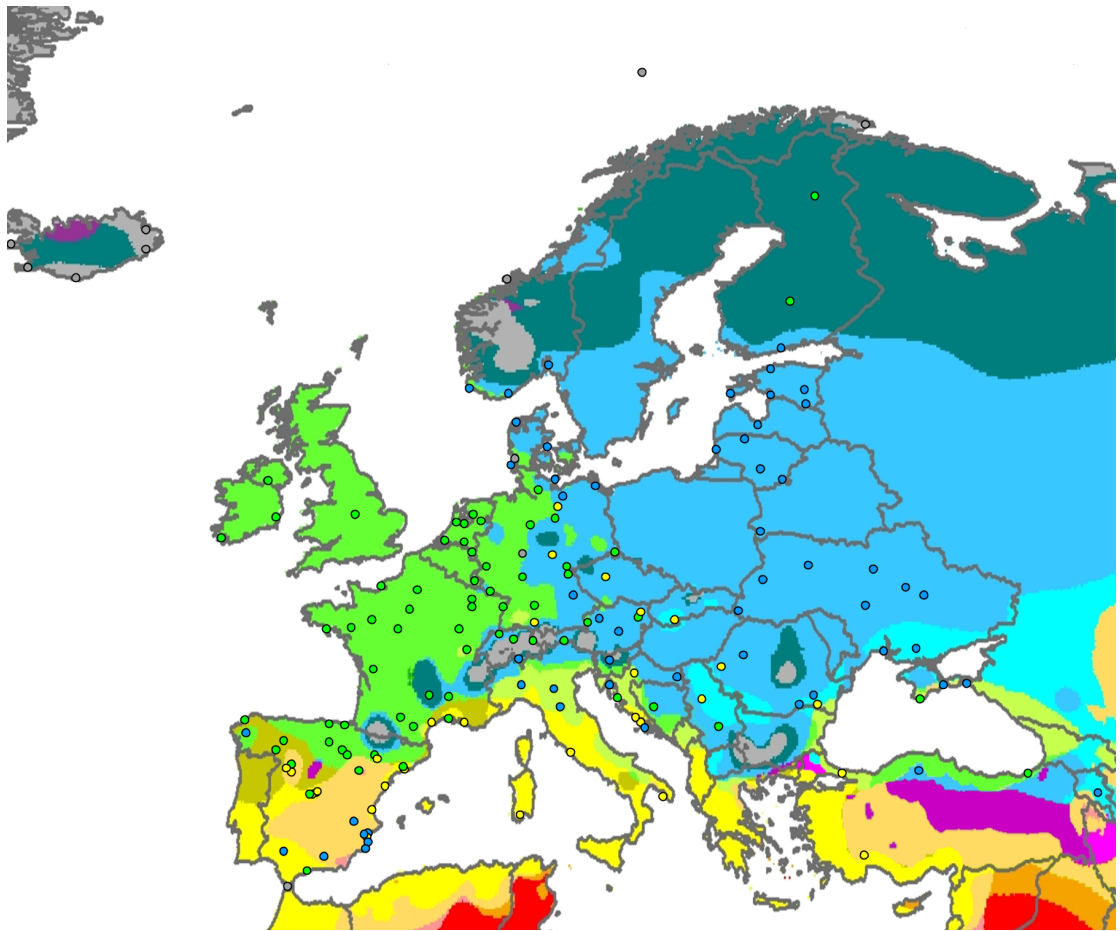


FIGURE 5.13 – Représentation des stations sur la carte de Köppen, où la couleur des points correspond au climat déterminé par nos critères.

signifie que notre climat correspond à un autre climat acceptable pour les stations qui se situent à la confluence de plusieurs types de climats, comme c'était le cas précédemment. Au total, nous pouvons donc considérer que 71% des climats que nous avons déterminés sont en accord avec la classification de Köppen, ce qui est très convaincant. En effet, nos analyses ne se basent que sur la régularité des signaux de températures, alors que la classification de Köppen tient également fortement compte des précipitations. Le tableau 5.13 peut être détaillé climat par climat, c'est ce que montre le tableau 5.14, qui, à un type de climat donné et déterminé par nos critères (colonne de gauche), donne la proportion de stations qui ont ou n'ont pas ce même climat selon la classification de Köppen.

TABLE 5.14 – Le détail des correspondances par climat déterminé selon nos critères.

Climat (Nos critères)	Correspondance	Pas de correspondance
Océanique	73%	27%
Méditerranéen	66%	34%
Continental	71%	29%
Toundra	64%	36%

A nouveau, nous pouvons encore détailler cela pour savoir exactement comment se répartissent les climats que nous avons définis par rapport aux climats déterminés par la classification de Köppen, cela est représenté au tableau 5.15. Ainsi, nous voyons par exemple que, lorsque nous déterminons un climat océanique, méditerranéen, ou continental pour une station, il y a très peu de chances que le climat selon Köppen de cette station soit celui d'une toundra. Aussi, lorsque nous obtenons un climat océanique (resp. continental), il y a à peu près 70% des cas pour lesquels cela est correct, mais si ce n'est pas le cas, il y a à peu près la même proportion de stations qui ont en fait un climat méditerranéen ou continental (resp. océanique ou méditerranéen). Par contre, si nous détectons un climat méditerranéen qui n'en est pas un selon Köppen, alors il y a fort à parier qu'il s'agisse en réalité d'un climat continental.

TABLE 5.15 – Détails des correspondances par climat déterminé selon nos critères.

Nos critères \ Köppen	Océanique	Médit.	Continental	Toundra
	Océanique	73%	11%	13%
Médit.	7%	66%	27%	0%
Continental	14%	15%	71%	0%
Toundra	9%	9%	18%	64%

Les tableaux 5.14 et 5.15 que nous venons de présenter proviennent en fait du tableau des effectifs 5.16, que nous donnons à titre indicatif⁶. En lisant ce tableau “verticalement”,

6. Le lecteur attentif aura remarqué de légères différences avec les informations fournies au début du

nous constatons que nous avons réussi à épingler 82% des climats océaniques, 54% des méditerranéens, 68% des continentaux, et 78% des toundras.

TABLE 5.16 – Tableau des effectifs entre les climats déterminés selon nos méthodes et ceux issus de la classification de Köppen.

Nos critères \ Köppen	Océanique	Médit.	Continental	Toundra	Total
Océanique	49	7	9	2	67
Médit.	2	19	8	0	29
Continental	8	8	40	0	56
Toundra	1	1	2	7	11
Total	60	35	59	9	163

Les résultats et l'ensemble des tableaux et figures présentés nous prouvent donc que notre méthode de classification des climats est relativement efficace et globalement en bon accord avec celle de Köppen.

Comme nous l'avons signalé, il n'y a que 29% des stations étudiées pour lesquelles nos résultats ne correspondent pas à ceux de Köppen. Nous allons à présent nous pencher sur ces erreurs, voir d'où elles proviennent et voir comment nous pouvons les expliquer ou les corriger.

5.4 Analyse des erreurs

Tout d'abord, rappelons que la classification de Köppen tient compte des températures et des précipitations, alors que nous ne tenons compte que des températures, ce qui induit forcément des erreurs dans notre classification. De plus, nous ne pouvons exclure le fait qu'il y a peut-être des erreurs de mesures, ou des méthodes relativement différentes dans les relevés des données. Néanmoins, obtenir 71% de correspondances uniquement grâce à l'analyse de la régularité des signaux de températures est déjà un résultat hautement satisfaisant. Les 29% restants sont composés des stations listées à la figure 5.14.

Parmi ces "erreurs", certaines ne sont pas vraiment à considérer comme telles, c'est ce que nous allons à présent discuter. Pour commencer, nous allons nous pencher sur la façon dont les climats sont déterminés par la classification de Köppen, et comment les précipitations interviennent dans cette classification. A titre d'information, une carte des précipitations annuelles en Europe se trouve à la figure ⁷ 5.15.

La classification de Köppen affecte au climat méditerranéen chaud (resp. méditerranéen

chapitre à la figure 5.5. Cela est dû au fait que, pour réaliser cette dernière, nous n'avons pas pris en compte le second climat possible des stations, alors que pour établir le tableau 5.16, nous avons opté pour le second climat acceptable lorsqu'il correspondait à notre détermination du climat.

7. <http://www.printfree.cn/sites/printfree.cn/files/Image/20090314151759166.jpg>

Pays	Ville	Notre climat	Köppen	
France	Mont Aigoual	Océanique	Continental froid	
Finlande	Jyvaskyla	Océanique	Continental froid subarctique	
Finlande	Sodankyla	Océanique	Continental froid subarctique	
Suisse	Basel	Océanique	Continental tempéré humide	
Allemagne	Fichtelberg	Océanique	Continental tempéré humide	
Allemagne	Gorlitz	Océanique	Continental tempéré humide	
Allemagne	Hof	Océanique	Continental tempéré humide	
Autriche	Innsbruck	Océanique	Continental tempéré humide	Toundra
Autriche	Salsbourg	Océanique	Continental tempéré humide	
Espagne	Malaga	Océanique	Méditerranéen chaud	
France	Nimes	Océanique	Méditerranéen chaud	Méditerranéen tempéré
Espagne	Coruna	Océanique	Méditerranéen tempéré	
Espagne	Navacerrada	Océanique	Méditerranéen tempéré	Méditerranéen chaud
Espagne	Ponferrada	Océanique	Méditerranéen tempéré	
Espagne	Daroca	Océanique	Semi-aride froid	
Espagne	Valladolid	Océanique	Semi-aride froid	Méditerranéen tempéré
Suisse	Saentis	Océanique	Toundra	
Autriche	Sonnblick	Océanique	Toundra	
Roumanie	Calarasi	Médit./semi-aride	Continental chaud humide	Océanique chaud humide
Slovaquie	Hurbanovo	Médit./semi-aride	Continental chaud humide	Continental tempéré humide
Roumanie	Arad	Médit./semi-aride	Continental tempéré humide	
Allemagne	Erfurt	Médit./semi-aride	Continental tempéré humide	
Allemagne	Lindenberg	Médit./semi-aride	Continental tempéré humide	
Rép. Tchèque	Praha Klementinum	Médit./semi-aride	Continental tempéré humide	
Allemagne	Schwerin	Médit./semi-aride	Continental tempéré humide	
Autriche	Vienne	Médit./semi-aride	Continental tempéré humide	
Serbie	Belgrade	Médit./semi-aride	Océanique chaud humide	Continental chaud humide
Croatie	Zagreb	Médit./semi-aride	Océanique chaud humide	Continental tempéré humide
Ukraine	Feodosiia	Continental	Océanique chaud humide	Semi-aride froid
Italie	Bologne	Continental	Océanique chaud humide	
Italie	Milan	Continental	Océanique chaud humide	
Croatie	Rijeka	Continental	Océanique chaud humide	
Italie	Verone	Continental	Océanique chaud humide	
Espagne	St Jacques de Comp.	Continental	Océanique tempéré	Méditerranéen tempéré
Allemagne	List-Sylt	Continental	Océanique tempéré	
Norvège	Utsira	Continental	Océanique tempéré	
Espagne	Albacete	Continental	Semi-aride froid	
Espagne	Grenade	Continental	Semi-aride froid	
Espagne	Alicante	Continental	Semi-aride froid	
Espagne	Murcie	Continental	Semi-aride froid	
Espagne	Murcie Alcantarilla	Continental	Semi-aride froid	
Espagne	Torre Vieja	Continental	Semi-aride froid	
Croatie	Lastovo	Continental	Méditerranéen chaud	
Espagne	Seville	Continental	Méditerranéen chaud	
Islande	Reykjavik	Toundra	Continental froid subarctique	
Allemagne	Kassel	Toundra	Continental tempéré humide	Océanique tempéré
Espagne	Tarifa	Toundra	Méditerranéen chaud	
Danemark	Nordby	Toundra	Océanique tempéré	

FIGURE 5.14 – Liste des stations pour lesquelles notre détermination du climat et celle de Köppen diffèrent.

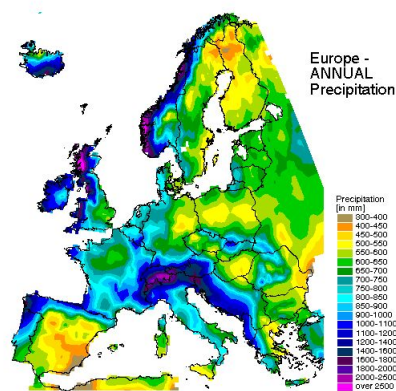


FIGURE 5.15 – La carte des précipitations annuelles en Europe. On peut remarquer certaines similarités avec la carte de Köppen.

tempéré) les lettres “Csa” (resp. “Csb”) et au climat océanique chaud (resp. océanique tempéré) les lettres “Cfa” (resp. “Cfb”). La première lettre, “C”, commune aux quatre cas considérés, indique qu’il s’agit globalement d’un climat tempéré (i.e. pas tropical, sec, continental, ou polaire), elle ne permet pas de distinguer le climat océanique du climat méditerranéen. La seconde lettre est relative aux précipitations, elle ne nous importe donc pas dans notre classification. Enfin, la troisième lettre est relative à la température : la lettre “a” est utilisée pour les stations connaissant des étés chauds (température moyenne du mois le plus chaud supérieure à 22°C), alors que la lettre “b” désigne un été tempéré (température moyenne du mois le plus chaud inférieure à 22°C , et températures moyennes des quatre mois les plus chauds supérieures à 10°C). Ainsi, d’un point de vue des températures uniquement, les climats “Méditerranéen chaud” et “Océanique chaud” sont très proches, comme le sont également les climats “Méditerranéen tempéré” et “Océanique tempéré”. Nous pouvons donc considérer que le climat “Océanique chaud” peut être assimilé à celui de “Océanique chaud à tendance méditerranéenne” et que “Méditerranéen tempéré” est plutôt à comprendre comme “Méditerranéen tempéré à tendance océanique”. Ainsi, si notre détermination du climat classe comme “Océanique” un climat du type “Méditerranéen tempéré”, ou comme “Méditerranéen” un climat du type “Océanique chaud”, nous pouvons considérer qu’il s’agit d’une classification correcte, que nous appellerons correspondance tertiaire.

Dans le même ordre d’idée, nous remarquons étonnamment que de nombreuses stations classées comme semi-arides selon Köppen sont classées comme continentales selon nos critères. La classification de Köppen attribue les lettres “BSk” au climat semi-aride froid, où les deux premières lettres indiquent qu’il s’agit d’un climat de steppe (sec donc), mais ne donnent pas d’informations quant à la température. La lettre “k” signifie que la température moyenne annuelle est inférieure à 18°C , malgré des étés très chauds. En étudiant

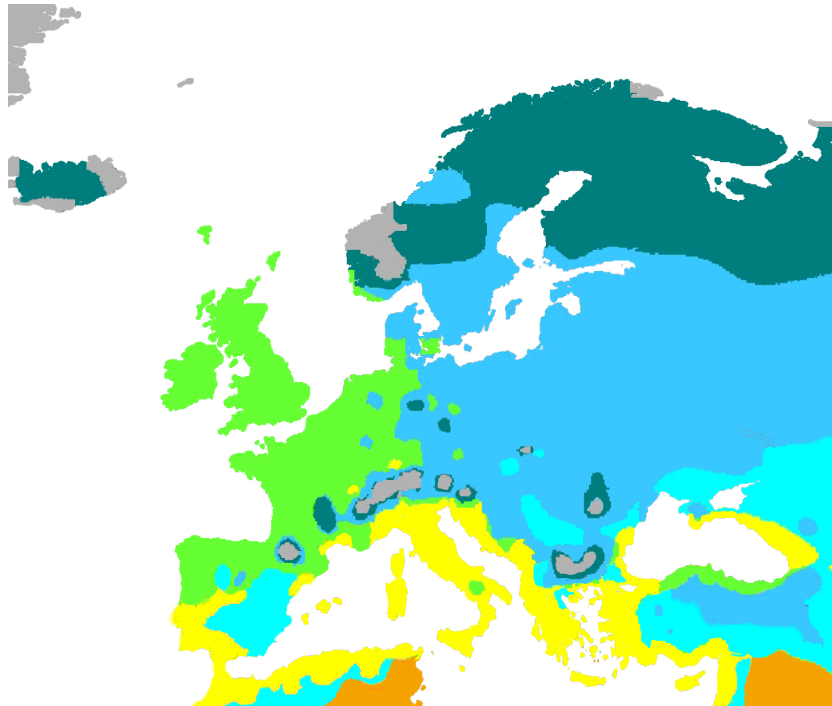


FIGURE 5.16 – La carte de Köppen ne prenant pas en compte les précipitations. Le climat “Méditerranéen tempéré” est associé au climat “Océanique tempéré”, le climat “Océanique chaud humide” au “Méditerranéen chaud”, et le “Semi-aride froid” au “Continental chaud humide”.

plus précisément le climat continental chaud humide (Dfa), on remarque que ses caractéristiques (vis-à-vis de la température) sont, d’une part, la température moyenne du mois le plus froid inférieure à 0°C et d’autre part les températures moyennes des quatre mois les plus chauds supérieures à 10°C , où celle du mois le plus chaud est supérieure à 22°C . Ces conditions sont pratiquement remplies pour les stations semi-arides froides que nous considérons dans notre travail. Généralement, le climat continental chaud humide est considéré comme une version “humide” du climat semi-aride, ce qui ne fait donc que très peu de différences au niveau des températures, et donc au niveau qui nous intéresse. Ainsi, nous pouvons considérer que, si notre méthode classe comme “Continental” une station “Semi-aride froide”, alors il s’agit d’une correspondance tertiaire⁸.

Afin de se faire une idée plus claire de la classification de Köppen lorsqu’elle ne fait pas intervenir les précipitations, nous avons réalisé la carte présentée à la figure 5.16. De plus, afin de mieux visualiser les correspondances tertiaires, nous avons replacé nos stations sur cette carte, avec le climat que nous leur avons attribué, cela se trouve sur la figure 5.17.

L’ensemble des correspondances directes et tertiaires est repris au tableau 5.17.

8. Notons toutefois que le fait d’avoir assimilé le climat semi-aride au climat méditerranéen chaud pour plus de facilité reste acceptable. En effet, ce dernier est simplement plus humide et connaît des hivers un peu moins rigoureux.

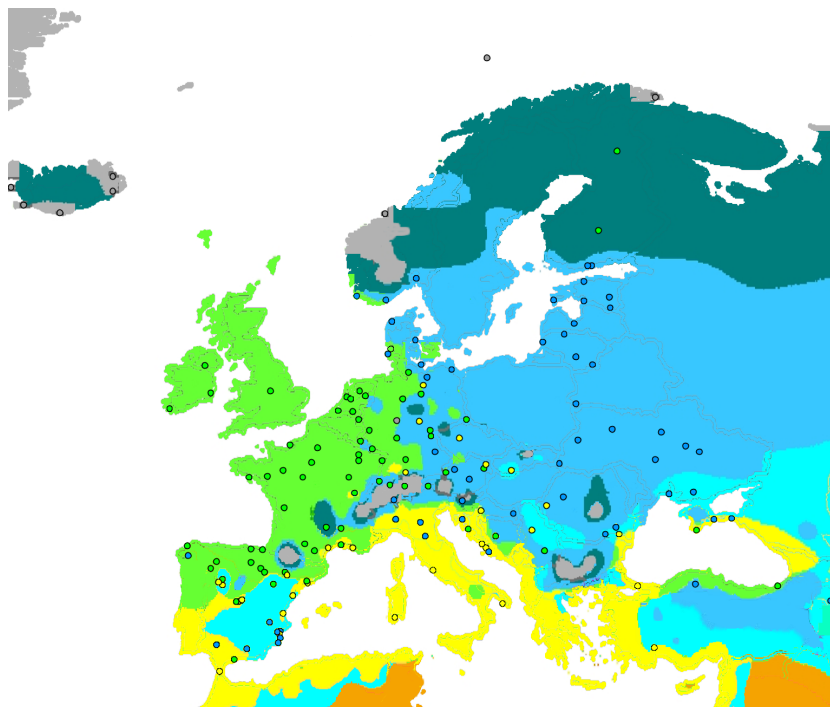


FIGURE 5.17 – Nos stations représentées sur la carte de Köppen ne prenant pas en compte les précipitations, afin de mieux visualiser les correspondances tertiaires.

TABLE 5.17 – Détail des correspondances directes et tertiaires. Les correspondances secondaires sont liées à la proximité géographique des stations par rapport à différents types de climats.

Notre climat	Climat selon Köppen	Type de correspondance
Océanique	Océanique chaud ou tempéré	Directe
	Méditerranéen tempéré	Tertiaire
	Autre	Pas de correspondance
Méditerranéen	Méditerranéen chaud ou tempéré	Directe
	Océanique chaud	Tertiaire
	Autre	Pas de correspondance
Continental	Continental chaud ou tempéré ou froid	Directe
	Semi-aride froid	Tertiaire
	Autre	Pas de correspondance
Toundra	Toundra	Directe
	Autre	Pas de correspondance

TABLE 5.18 – Proportion de correspondances entre notre détermination du climat et celle de Köppen, après les corrections discutées dans le texte.

Correspondance directe	65, 5%	Correspondance totale	82%
Correspondance secondaire	8%	Pas de correspondance	18%
Correspondance tertiaire	8, 5%		
Pas de correspondance	18%		

Remarquons aussi que notre méthode classe comme “Continental” 5 climats du type “Océanique chaud” (5 sur les 10 disponibles dans notre jeu de données), car il apparait que l’exposant de Hölder des primitives de ces 5 stations se situaient en “zone 3”. En y regardant de plus près, nous constatons que plusieurs stations du type “Océanique chaud” (ou pouvant être considérées comme telles) avaient une primitive avec un grand exposant de Hölder (zone 3) et une anomalie avec un petit exposant (zone 1 ou 1,5). Ainsi, peut-être faudrait-il modifier nos critères afin de tenir compte de cette observation. Cependant, dans l’état actuel de notre jeu de données, une telle modification provoquerait plus d’erreurs qu’elle n’en corrigerait, mais cela peut être dû au fait que nous ne disposons que de peu de stations du type “Océanique chaud”. Cette idée est toutefois à garder en tête pour de prochaines recherches.

Le deuxième paramètre nous permettant d’éliminer certaines erreurs est la distance géographique par rapport à d’autres zones climatiques. Lorsque nous avons déterminé le climat de Köppen de nos stations avec le logiciel Google Earth, nous avons jugé qu’il était parfois acceptable d’attribuer deux climats différents à une même station. Le cas échéant, nous avons considéré que nous pouvions faire cela lorsque la station se situait à une vingtaine de kilomètres (à vol d’oiseau) d’un autre type de climat, ce qui est relativement strict. Parmi les stations listées à la figure 5.14, 7 d’entre elles⁹ se situent à moins d’une cinquantaine de kilomètres d’une zone correspondant à notre détermination du climat. Nous pouvons donc, sans prendre trop de risques, supposer que ces stations sont correctement classées selon nos critères (correspondance secondaire).

Compte tenu des remarques que nous venons d’exposer, le tableau 5.18 nous prouve que nous obtenons 82% (134/163 stations) de correspondances avec le climat de Köppen ; les 29 stations restantes sont listées à la figure 5.18.

Pour ces stations, il est difficile d’apporter une explication sur la différence entre notre classification du climat et celle de Köppen. Le cas du climat “Océanique chaud” a déjà été discuté. Le dernier facteur pouvant peut-être expliquer une partie des erreurs listées est l’altitude, indiquée dans la dernière colonne de la figure 5.18. Ces altitudes sont les altitudes exactes des stations analysées, elles sont fournies en même temps que les données de températures. Lorsque nous observons les 11 stations que nous avons classées comme

9. Basel, Gorlitz, Nîmes, Coruna, Feodosiia, Utsira, Reykjavik.

Pays	Ville	Notre climat	Köppen		Altitude (en mètres)
France	Mont Aigoual	Océanique	Continental froid		1567
Finlande	Jyvaskyla	Océanique	Continental froid subarctique		139
Finlande	Sodankyla	Océanique	Continental froid subarctique		179
Allemagne	Fichtelberg	Océanique	Continental tempéré humide		1213
Allemagne	Hof	Océanique	Continental tempéré humide		565
Autriche	Innsbruck	Océanique	Continental tempéré humide	Toundra	577
Autriche	Salsbourg	Océanique	Continental tempéré humide		437
Espagne	Malaga	Océanique	Méditerranéen chaud		7
Espagne	Daroca	Océanique	Semi-aride froid		779
Suisse	Saentis	Océanique	Toundra		2502
Autriche	Sonnblick	Océanique	Toundra		3106
Slovaquie	Hurbanovo	Médit./semi-aride	Continental chaud humide	Continental tempéré humide	115
Roumanie	Arad	Médit./semi-aride	Continental tempéré humide		117
Allemagne	Erfurt	Médit./semi-aride	Continental tempéré humide		316
Allemagne	Lindenberg	Médit./semi-aride	Continental tempéré humide		98
Rép. Tchèque	Praha Klementinum	Médit./semi-aride	Continental tempéré humide		191
Allemagne	Schwerin	Médit./semi-aride	Continental tempéré humide		59
Autriche	Vienne	Médit./semi-aride	Continental tempéré humide		199
Italie	Bologne	Continental	Océanique chaud humide		53
Italie	Milan	Continental	Océanique chaud humide		150
Croatie	Rijeka	Continental	Océanique chaud humide		120
Italie	Verone	Continental	Océanique chaud humide		68
Espagne	St Jacques de Comp.	Continental	Océanique tempéré	Méditerranéen tempéré	370
Allemagne	List-Sylt	Continental	Océanique tempéré		26
Croatie	Lastovo	Continental	Méditerranéen chaud		186
Espagne	Seville	Continental	Méditerranéen chaud		34
Allemagne	Kassel	Toundra	Continental tempéré humide	Océanique tempéré	231
Espagne	Tarifa	Toundra	Méditerranéen chaud		32
Danemark	Nordby	Toundra	Océanique tempéré		4

FIGURE 5.18 – Liste des stations pour lesquelles notre détermination du climat et celle de Köppen diffèrent, après les corrections discutées dans le texte.

océaniques mais qui ne le sont pas selon la classification de Köppen, nous constatons que la plupart (8 sur 11) se situent en région montagneuse, ou au moins en altitude plus élevée que la plupart des stations considérées (les trois stations qui ne sont pas concernées sont Malaga, Jyvaskyla, et Sodankyla). Parmi ces 8 stations, 3 peuvent être considérées comme étant des toundras, à savoir Innsbruck, Saentis, et Sonnblick. Considérons également Mont-Aigoual et Fichtelberg comme des toundras, car ces deux localités possèdent un domaine skiable, elles sont donc situées en altitude et sont régulièrement recouvertes de neige, comme les trois stations que nous venons de citer. Grossièrement donc, nous constatons que nous n’arrivons pas, avec notre classification, à épingler les toundras situées sur le continent, contrairement aux toundras islandaises ou norvégiennes ! Cela signifie qu’il y a en fait deux types de toundras : les toundras “subarctiques”, situées, comme leur nom l’indique, à haute latitude, détectables via les exposants de Hölder, et les toundras “continentales” situées en montagne ou à haute altitude, qui se comportent comme les stations océaniques d’un point de vue de la régularité hölderienne, les rendant donc indétectables via nos méthodes. Cela est probablement dû au fait que les montagnes bloquent ou emprisonnent les nuages, créant ainsi de nombreux micro-climats que la classification de Köppen ou la nôtre ne peuvent détecter. En ce qui concerne les deux stations finlandaises, le résultat obtenu est étonnant et difficile à expliquer.

5.5 Analyses à l'aveugle

Dans cette partie, nous allons “mettre à l'épreuve” notre méthode de détermination du climat. Sur le site internet <http://eca.knmi.nl/>, nous sélectionnons les données de températures de quelques stations que nous n'avons pas encore analysées, réparties sur l'ensemble de l'Europe. Puisque nous avons déjà analysé toutes les stations dont les données comprennent les années 1951 à 2003, nous nous contenterons de celles comprenant autant de données que possible incluses dans cet intervalle. Nous analysons la régularité hölderienne des anomalies et primitives de ces stations, et nous en déterminons le climat selon nos critères (ceux qui se trouvent à la table 5.12).

La figure 5.19 recense les 40 stations nouvellement sélectionnées, et indique le climat que nous avons déterminé et celui selon la classification de Köppen. Signalons que nous avons sélectionné des stations de sorte que les différents climats (selon Köppen) soient représentés à peu près dans les mêmes proportions qu'ils le sont pour les stations précédemment analysées (cfr la figure 5.5, à droite).

Sur les 40 stations répertoriées et analysées, nous constatons que 29 ont le même climat selon la classification de Köppen et selon la nôtre (en tenant compte des correspondances tertiaires), ce qui correspond à 72,5% de correspondances, soit à peu près la même proportion que ce que nous avons obtenu précédemment. Ces analyses “à l'aveugle” renforcent donc les résultats que nous avons déjà obtenus, ainsi que l'efficacité de notre méthode. Les 11 stations non-correspondantes sont reprises à la figure 5.20.

Les observations qui en découlent sont similaires à celles établies précédemment. En effet, par exemple, la ville de Poprad, en Slovaquie, ayant un climat de toundra continentale, est répertoriée comme ayant un climat océanique selon nos critères, comme l'étaient Saentis ou Innsbruck. Etrangement, c'est aussi le cas de la ville de Tassilak (Groenland), qui est une toundra subarctique. Cependant, l'éloignement géographique par rapport à l'Europe est à prendre en compte car, comme mentionné pour les stations de Ténérife, il faudrait peut-être utiliser d'autres critères pour les stations situées hors du continent. Aussi, à l'instar des villes finlandaises Sodankyla et Jyvaskyla, les villes scandinaves d'Inari (Finlande), Linköping (Suède) et Stensele (Suède) sont classées dans la catégorie “Océanique” alors qu'elles ont un climat continental selon la classification de Köppen. Il est intéressant de remarquer que Stockholm et Karlstad, quant à elles, sont classées comme étant des toundras selon nos critères. Cela paraît moins surprenant et moins incorrect que les trois précédentes villes citées, mais on pourrait se demander pourquoi ces cinq villes n'ont pas toutes la même classification selon nos critères. Les stations scandinaves (Groenland compris) composent donc 6 des 11 erreurs de la liste présentée. Signalons encore que nous avons correctement identifié le climat de toutes les stations grecques, britanniques, irlandaises, polonaises et deux des trois stations portugaises considérées dans ce nouveau jeu de données, malgré le fait que ces pays n'étaient pas ou peu

Pays	Ville	Notre climat	Climat selon Köppen	h moyen anomalie	h moyen primitive
France	Biarritz	Océanique	Océanique tempéré	0,704161867	0,847028317
Irlande	Birr	Océanique	Océanique tempéré	0,687601383	0,85417095
Allemagne	Bonn	Océanique	Océanique tempéré	0,74366405	0,884965083
France	Bordeaux	Océanique	Océanique tempéré	0,662080817	0,872026167
France	Bourges	Océanique	Océanique tempéré	0,69000775	0,87499335
Royaume-Uni	Eskdalemuir	Océanique	Océanique tempéré	0,676623167	0,858408183
Allemagne	Francfort	Océanique	Océanique tempéré	0,708669917	0,90728885
Royaume-Uni	Lerwick	Océanique	Océanique tempéré	0,702465833	0,867488333
France	Lyon	Océanique	Océanique tempéré	0,693285717	0,898769917
Irlande	Malin	Océanique	Océanique tempéré	0,6730615	0,8718378
Pays-Bas	Soesterberg	Océanique	Océanique tempéré	0,738957533	0,87680625
Royaume-Uni	Stornoway	Océanique	Océanique tempéré	0,638913483	0,832261717
Royaume-Uni	Valley	Océanique	Océanique tempéré	0,66668435	0,87198235
Royaume-Uni	Waddington	Océanique	Océanique tempéré	0,6555878	0,8877886
Portugal	Lisbonne	Océanique	Méditerranéen chaud	0,7095923	0,878193933
Portugal	Porto	Océanique	Méditerranéen tempéré	0,6894069	0,858091283
Albanie	Tirana	Océanique	Méditerranéen chaud	0,656809717	0,925610267
Portugal	Braganca	Océanique	Méditerranéen tempéré	0,680673217	0,879837433
Allemagne	Berlin	Océanique	Continental tempéré humide	0,718923983	0,914838767
Finlande	Inari	Océanique	Continental froid	0,744788783	0,87932475
Suède	Linkoeeping	Océanique	Continental tempéré humide	0,7490443	0,918902867
Suède	Stensele	Océanique	Continental froid	0,7325242	0,88824705
Groeland	Tassiilak	Océanique	Toundra	0,738192	0,874065633
Slovaquie	Poprad-Tatry	Océanique	Toundra	0,676648883	0,908556417
Grèce	Methoni	Méditerranéen	Méditerranéen chaud	0,71863865	0,9246238
Espagne	Reus	Méditerranéen	Méditerranéen chaud	0,738179383	0,92130385
Grèce	Corfu	Méditerranéen	Méditerranéen chaud	0,7301427	0,9334101
Grèce	Hellinikon	Méditerranéen	Méditerranéen chaud	0,7376237	0,9431349
Grèce	Larissa	Méditerranéen	Méditerranéen chaud	0,6496986	0,945343317
Albanie	Shkodra	Méditerranéen	Méditerranéen chaud	0,6529576	0,945104117
Moldavie	Chisinau	Méditerranéen	Continental tempéré humide	0,694124633	0,937389783
Slovaquie	Kosice	Continental	Continental chaud humide	0,7024322	0,949166367
Roumanie	Sibiu	Continental	Continental tempéré humide	0,717226817	1,01000585
Suède	Falun	Continental	Continental tempéré humide	0,763191983	0,929040717
Finlande	Helsinki	Continental	Continental tempéré humide	0,799870317	1,002507683
Roumanie	Iasi	Continental	Continental tempéré humide	0,764541417	1,013542917
Pologne	Leba	Continental	Continental tempéré humide	0,749773033	1,019428617
Pologne	Siedlce	Continental	Continental tempéré humide	0,760014817	1,009531183
Suède	Karlstad	Toundra	Continental tempéré humide	0,7601288	0,912754183
Suède	Stockholm	Toundra	Continental tempéré humide	0,76379035	0,9185685

FIGURE 5.19 – Analyse d'autres stations, et comparaison entre notre détermination du climat et celle de Köppen. Il apparaît que les climats de 72,5% des stations (29/40) correspondent.

Pays	Ville	Notre climat	Climat selon Köppen
Portugal	Lisbonne	Océanique	Méditerranéen chaud
Albanie	Tirana	Océanique	Méditerranéen chaud
Allemagne	Berlin	Océanique	Continental tempéré humide
Finlande	Inari	Océanique	Continental froid
Suède	Linköping	Océanique	Continental tempéré humide
Suède	Stensele	Océanique	Continental froid
Groeland	Tassiilak	Océanique	Toundra
Slovaquie	Poprad-Tatry	Océanique	Toundra
Moldavie	Chisinau	Méditerranéen	Continental tempéré humide
Suède	Karlstad	Toundra	Continental tempéré humide
Suède	Stockholm	Toundra	Continental tempéré humide

FIGURE 5.20 – Les 11 stations pour lesquelles notre détermination du climat ne correspond pas à celle de Köppen, parmi les 40 stations nouvellement sélectionnées.

représentés parmi notre jeu de données initial. Inversement, seulement 2 stations scandinaves sur les 8 étudiées ici (Groenland compris) ont été correctement identifiées. A titre d’information, si nous ne prenons plus en compte ces 8 stations, alors nous obtenons 84,4% de correspondances (27/32)!

Les 40 stations étudiées pour tester “à l’aveugle” notre méthode sont représentées à la figure 5.21. La couleur des points est celle qui leur est attribuée selon notre classification du climat, comme précédemment. Enfin, les cartes de la figure 5.22 reprennent l’ensemble des 203 stations considérées dans ce travail, sur la carte de Köppen et sur celle qui ne tient pas compte des précipitations, où à nouveau la couleur des points dépend du climat déterminé selon notre classification : un point vert représente une station qui, selon nos critères, est classée comme ayant un climat océanique, un point jaune est utilisé pour les stations que nous avons classées comme méditerranéennes, un point bleu correspond aux stations continentales, et un point gris réfère aux stations que nos critères classent comme ayant un climat de toundra.

5.6 Interprétation des résultats

Nous allons dans cette partie nous pencher brièvement sur les résultats obtenus et sur les mécanismes climatiques pouvant expliquer ceux-ci. Globalement, nous avons vu que le climat océanique (resp. méditerranéen et continental) se caractérise par de plus petits exposants de Hölder (resp. des exposants moyens et de plus grands exposants), tant du côté des primitives que du côté des anomalies des signaux considérés. Cela signifie que le climat est plus instable dans les régions océaniques, il peut varier plus d’un jour à l’autre¹⁰ que dans les régions continentales, qui connaissent parfois de longues périodes dépourvues de variations de température significatives. Comme peut le confirmer l’intuition, le cli-

10. A titre d’exemple, le 25 avril, il faisait à Herve approximativement 27°C, et pas un nuage dans le ciel. Le lendemain, il ne faisait plus que 19°C, et le surlendemain, il faisait 11°C et la grêle tombait.

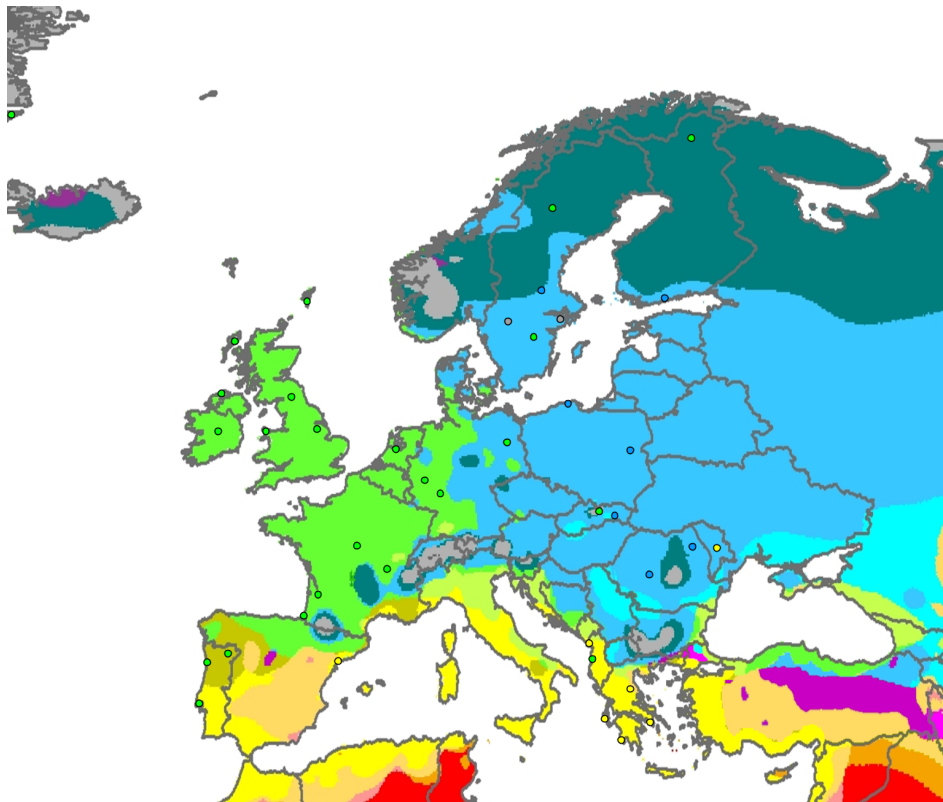


FIGURE 5.21 – Les 40 nouvelles stations utilisées pour tester notre méthode, représentées par un point de couleur selon notre classification, sur la carte de Köppen.

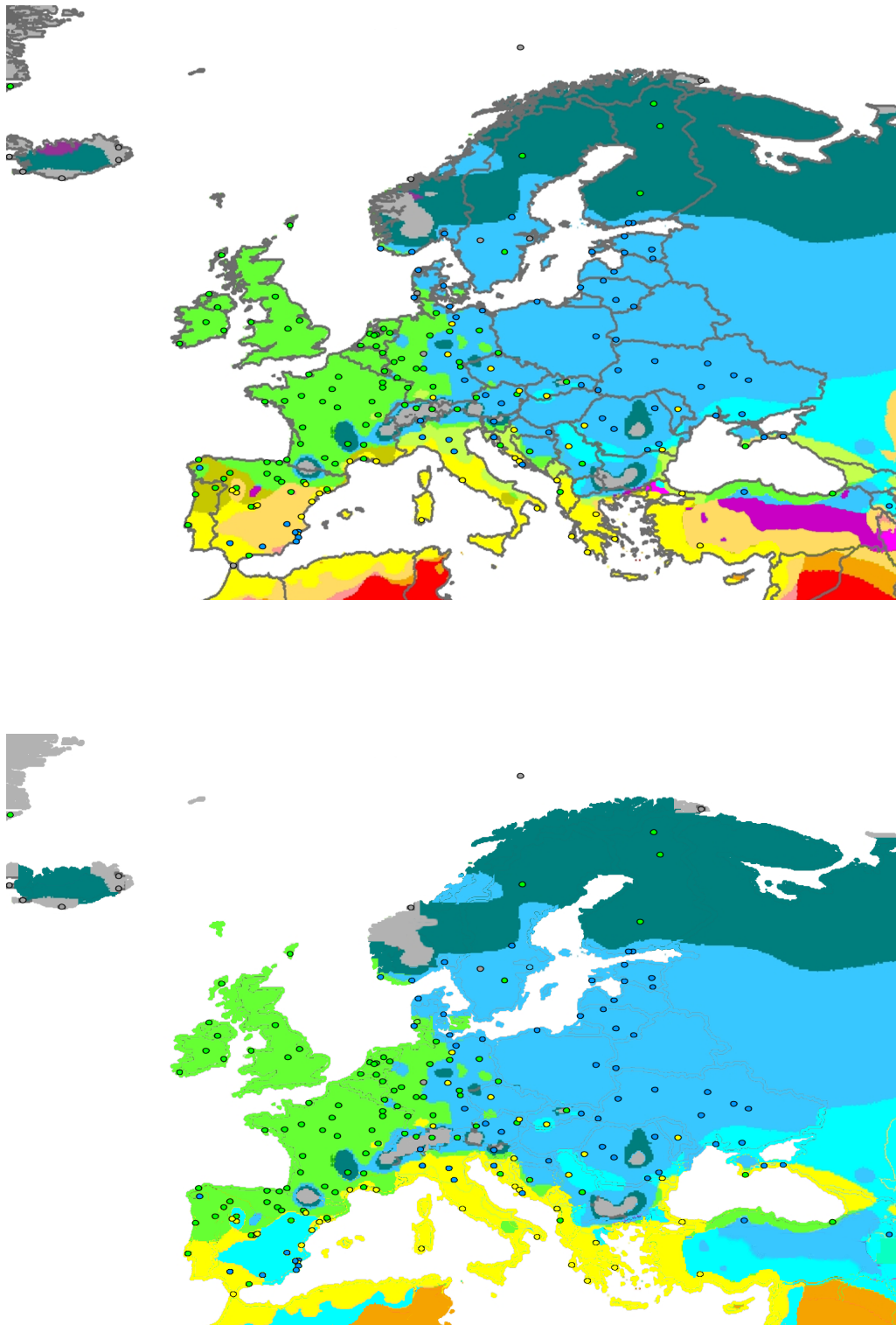


FIGURE 5.22 – *En haut* : L'ensemble des 203 stations considérées dans ce travail, représentées par un point de couleur selon notre classification, sur la carte de Köppen. *En bas* : Les stations représentées sur la carte de Köppen qui ne tient pas compte des précipitations.

mat méditerranéen se situe entre les deux : l'effet de la mer Méditerranée est présent, mais moins important que celui de l'océan Atlantique. Certes le climat y est globalement stable, mais de brusques variations de température y sont fréquentes¹¹.

Nous pouvons à présent nous interroger sur les causes liées à de grands ou petits exposants de Hölder. Vraisemblablement, la proximité de l'océan Atlantique a tendance à diminuer la régularité des signaux considérés, rendant moins stable le climat des régions océaniques. Cela est probablement lié à la NAO¹², l'oscillation nord-atlantique, paramètre basé sur la différence de pression entre l'anticyclone des Açores et la dépression d'Islande, qui décrit l'alternance des zones dépressionnaires et anticycloniques dans l'atmosphère de l'Atlantique Nord, elles-mêmes liées à la circulation atmosphérique et aux courants marins de cette région. La valeur de la NAO permet d'expliquer des variations de pression, la localisation et l'intensité des vents d'ouest, et diverses variations régionales de température et précipitations. Ainsi, plus cet indice est grand, plus la différence de pression entre les Açores et l'Islande est grande, et donc plus les vents d'ouest sont importants, ce qui a évidemment un impact sur les régions côtières. De plus, le climat est plus doux, et les précipitations sont localisées plutôt au nord de l'Europe. Inversement, plus cet indice est petit, plus les vents seront faibles, le climat sera plus froid, et le bassin méditerranéen connaîtra plus de précipitations. Il va de soi que les régions les plus touchées sont celles situées au nord et à l'ouest de l'Europe ; les effets de la NAO s'estompant petit à petit au fur et à mesure que les masses d'air pénètrent dans les terres.

Bien qu'à l'heure actuelle les mécanismes de formation, déplacement et dissipation des nuages ne soient pas très bien compris, nous savons qu'ils jouent un rôle sur le climat d'une région, de par la réflexion des rayons solaires (albedo) et le renvoi vers le sol des infrarouges terrestres (effet de serre). Une région où la couverture nuageuse est fortement variable aura inéluctablement un climat plus variable qu'une région souvent dépourvue de nuages. Ceux-ci se forment lorsque le niveau d'humidité dans l'air atteint le niveau de saturation, ce qui se traduit par la condensation de gouttelettes en suspension dans l'air et, in fine, à la formation d'un nuage. Puisque l'air se charge plus rapidement en humidité au-dessus des océans, et particulièrement lorsque des masses d'air chaud et d'air froid se rencontrent, la formation de nuages sera favorisée dans les régions océaniques, contribuant à nouveau à une moins grande stabilité climatique d'un jour à l'autre. Les régions continentales sont éloignées de l'océan et de son influence, il y a donc moins de facteurs pouvant perturber une situation climatique installée dans une telle région. Les régions méditerranéennes sont influencées par la mer Méditerranée plutôt que par l'océan Atlantique, qui est une mer chaude. Les masses d'air venant du sud y rencontrent moins souvent de masses froides, l'effet de cette mer est présent, mais se fait nettement moins

11. Lors d'une semaine de vacances d'été dans le sud de la France par exemple, il n'est pas rare de connaître un jour de pluie, d'orage, nuageux, où les pulls et vestes sont de mise.

12. Northern Atlantic Oscillation

ressentir que l'effet de l'océan sur les régions océaniques.

Les toundras subarctiques constituent le seul type de climat où les exposants de Hölder des primitives et des anomalies ne sont pas simultanément grands ou petits (par rapport aux autres stations). En effet, pour les primitives, ils sont petits alors qu'ils sont grands pour les anomalies. Nous constatons que, pour une station de toundra donnée, l'exposant de l'anomalie associée est proche de l'exposant de la primitive correspondante. Cela signifie que le climat de toundra est très irrégulier et instable, puisque lorsque l'on prive le signal de sa partie régulière, l'exposant de Hölder n'est pratiquement pas affecté, la partie régulière retranchée est donc quasiment inutile, c'est là le signe d'un climat dont la température est fortement variable, bien qu'il serait intéressant d'étudier l'importance relative des anomalies par rapport aux primitives. L'explication se trouve probablement dans le fait que ces régions sont régulièrement couvertes de neige ou de glace, il serait intéressant de creuser cette piste avec des spécialistes.

5.7 Conclusions

Pour terminer ce travail, voici les conclusions que nous pouvons tirer de notre analyse de la régularité hölderienne des anomalies et primitives des données de températures issues de stations réparties sur l'ensemble de l'Europe.

Nous avons d'abord découvert que ces signaux sont des signaux mono-Hölder, ce qui constitue un résultat étonnant et de première importance, puisque cela implique que ce sont des signaux d'"irrégularité régulière" : tous les points possèdent la même régularité. Cela permet de comparer aisément et efficacement les différents exposants de Hölder obtenus. Nous avons ensuite pu déterminer des critères faisant office de "nouvelle classification du climat", qui se sont avérés être en bon accord avec la classification de Köppen. Nous avons donc pu montrer que, dans de nombreux cas, le climat d'une région réside en grande partie dans la régularité hölderienne des anomalies et primitives des signaux de température considérés.

Nous tenons à insister sur le fait que la démarche que nous avons entreprise n'a jamais été réalisée auparavant, il s'agit d'une première approche purement mathématique, réalisée sans l'aide de climatologues. A l'avenir, il serait intéressant d'affiner notre nouvelle méthode de classification du climat avec des spécialistes en la matière, qui pourraient avoir des idées intéressantes à creuser, comme la façon dont nous pourrions tenir compte des précipitations. Rappelons que celles-ci interviennent dans la classification de Köppen, c'est en partie pour cela que la classification que nous avons présentée diffère de cette dernière. Il pourrait également être intéressant de procéder à des analyses similaires pour les températures d'autres régions du monde, afin de voir quels types de climats il est possible

de détecter grâce à l'analyse hölderienne, et de comparer les résultats avec ceux obtenus pour l'Europe. Cela pourrait finalement mener à une nouvelle classification du climat, à l'échelle mondiale cette fois. D'autres méthodes d'analyse de la régularité de signaux pourraient être utilisées pour confirmer et/ou affiner les résultats que nous avons obtenus. Il est peut-être possible de se diriger vers d'autres pistes, comme celle du réchauffement climatique : peut-on mesurer une différence de régularité significative entre les dernières années et le milieu du siècle passé? Bref, les pistes intéressantes à examiner n'ont comme limite que l'imagination et la créativité de celui qui ose les explorer.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Démonstrations annexes

A.1 Diamètre de l'enveloppe convexe d'un ensemble borné

La proposition suivante se rapporte aux commentaires qui suivent la définition 2.1.1 de l'application \mathcal{H}_ϵ^h , où nous stipulons qu'il est équivalent de considérer des ensembles convexes plutôt que des ensembles quelconques pour recouvrir l'ensemble considéré.

Proposition A.1.1. *Un ensemble borné X et son enveloppe convexe $\langle X \rangle$ ont le même diamètre.*

Démonstration. Soit X un ensemble borné, et $\langle X \rangle$ son enveloppe convexe. Puisque $\langle X \rangle$ est l'intersection de tous les convexes qui contiennent X , on a

$$\text{diam}(X) \leq \text{diam}(\langle X \rangle).$$

Pour montrer l'autre inégalité, il suffit de montrer que, pour tout $d > \text{diam}(X)$, on a $\text{diam}(\langle X \rangle) < d$. Soit donc $d > \text{diam}(X)$. Alors pour tous $x, y \in X$, on a $|x - y| < d$, et donc $X \subset B(x, d)$ pour tout $x \in X$. Par définition de l'enveloppe convexe de X , on a $\langle X \rangle \subset B(x, d)$ pour tout $x \in X$. Ainsi, pour tous $x \in X, y \in \langle X \rangle$, on a $|x - y| < d$ et donc $X \subset B(y, d)$ pour tout $y \in \langle X \rangle$, donc à nouveau par définition, on a $\langle X \rangle \subset B(y, d)$ pour tout $y \in \langle X \rangle$, et donc $|x - y| < d$ pour tous $x, y \in \langle X \rangle$. Ainsi, $\text{diam}(\langle X \rangle) < d$. \square

A.2 Mesure de Hausdorff et union dénombrable de fermés

Nous démontrons ici la proposition 2.1.11, qui montre qu'il est possible d'approcher un ensemble X "par en dessous" avec un ensemble F_σ (union dénombrable de fermés) ayant la même mesure de Hausdorff que X .

Proposition A.2.1. *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble \mathcal{H}^h -mesurable tel que $\mathcal{H}^h(X) < +\infty$, alors il existe $F \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble F_σ tel que $F \subset X$ et $\mathcal{H}^h(F) = \mathcal{H}^h(X)$.*

Démonstration. En utilisant la proposition 2.1.9, il existe $(V_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ une suite d'ouverts contenant X tels que

$$\mathcal{H}^h \left(\bigcap_i V_i \setminus X \right) = {}^1 \mathcal{H}^h \left(\bigcap_i V_i \right) - \mathcal{H}^h(X) = 0.$$

Puisque tout ouvert de \mathbb{R}^n peut s'écrire comme union dénombrable de fermés, on peut supposer que, pour tout $i \in \mathbb{N}_0$, on a

$$V_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_{i,j},$$

où $(F_{i,j})_{j \in \mathbb{N}_0}$ est une suite croissante de fermés.

Puisque X et les $F_{i,j}$ sont \mathcal{H}^h -mesurables, et que \mathcal{H}^h est une mesure sur la σ -algèbre des ensembles \mathcal{H}^h -mesurables, qui contient X (hypothèse) et les $F_{i,j}$ (fermés), on peut utiliser la continuité à gauche de \mathcal{H}^h sur la suite croissante $(X \cap F_{i,j})_{j \in \mathbb{N}_0}$:

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \mathcal{H}^h(X \cap F_{i,j}) = \mathcal{H}^h(X \cap V_i) = \mathcal{H}^h(X).$$

Autrement dit, pour $\epsilon > 0$ fixé et pour tout $i \in \mathbb{N}_0$ fixé, il existe j_i (nous n'écrivons pas la dépendance en ϵ pour l'instant, pour ne pas alourdir les notations) tel que

$$\mathcal{H}^h(X \cap F_{i,j_i}) > \mathcal{H}^h(X) - \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Cette inégalité peut successivement s'écrire

$$\mathcal{H}^h(X) - \mathcal{H}^h(X \cap F_{i,j_i}) < \frac{\epsilon}{2^i},$$

puis

$$\mathcal{H}^h(X \setminus (X \cap F_{i,j_i})) < \frac{\epsilon}{2^i}$$

et enfin

$$\mathcal{H}^h(X \setminus F_{i,j_i}) < \frac{\epsilon}{2^i}, \tag{A.1}$$

et ce, pour tout i . Posons alors

$$F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_{i,j_i},$$

1. On a cette égalité parce que $X \subset \bigcap_i V_i$ et que $\mathcal{H}^h(X) < +\infty$.

qui est un fermé. On a alors successivement

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^h(X) &\leq \mathcal{H}^h(X \cap F) + \mathcal{H}^h(X \cap F^c) = \mathcal{H}^h(X \cap F) + \mathcal{H}^h(X \cap \cup_i F_{i,j_i}^c) \\ &= \mathcal{H}^h(X \cap F) + \mathcal{H}^h(\cup_i (X \cap F_{i,j_i}^c)) \leq \mathcal{H}^h(X \cap F) + \sum_i \mathcal{H}^h(X \cap F_{i,j_i}^c) \\ &= \mathcal{H}^h(X \cap F) + \sum_i \mathcal{H}^h(X \setminus F_{i,j_i}), \end{aligned}$$

et on obtient alors

$$\mathcal{H}^h(F) \geq \mathcal{H}^h(X \cap F) \geq \mathcal{H}^h(X) - \sum_{i=1}^{+\infty} \mathcal{H}^h(X \setminus F_{i,j_i}) > \mathcal{H}^h(X) - \epsilon,$$

où la dernière inégalité résulte de la relation A.1.

De plus, $F \subset V_i$ puisque $F_{i,j_i} \subset V_i$ pour tout i , donc

$$\mathcal{H}^h(F \setminus X) \leq \mathcal{H}^h(\cap_i V_i \setminus X) = 0,$$

donc $\mathcal{H}^h(F \setminus X) = 0$.

Par la proposition 2.1.9, il existe $G = \cap_k W_k$ où les W_k sont ouverts, avec $F \setminus X \subset G$ et $\mathcal{H}^h(G) = 0$. Alors $F \setminus G \subset X$ (donc $\mathcal{H}^h(F \setminus G) \leq \mathcal{H}^h(X)$) et

$$\begin{aligned} F \setminus G &= F \setminus \bigcap_k W_k \\ &= F \cap (\cap_k W_k)^c \\ &= F \cap \cup_k W_k^c \\ &= \bigcup_k (F \cap W_k^c) \\ &= \bigcup_k F_k, \end{aligned}$$

où on a posé $F_k = F \cap W_k^c$ qui est un fermé (intersection de fermés). On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^h(\bigcup_k F_k) &= \mathcal{H}^h(F \setminus G) \\ &\geq \mathcal{H}^h(F) - \mathcal{H}^h(G) = \mathcal{H}^h(F) - 0 \\ &> \mathcal{H}^h(X) - \epsilon. \end{aligned}$$

Il est important de remarquer que F dépend de ϵ . Nous avons donc montré que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble F_ϵ , notons-le F_ϵ , inclus à X , tel que

$$\mathcal{H}^h(X) - \epsilon < \mathcal{H}^h(F_\epsilon) \leq \mathcal{H}^h(X).$$

En remplaçant à présent ϵ par 2^{-j} avec $j \in \mathbb{N}_0$, nous pouvons dire que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe $F_j \subset X$ un ensemble F_σ tel que

$$\mathcal{H}^h(X) - \frac{1}{2^j} < \mathcal{H}^h(F_j) \leq \mathcal{H}^h(X).$$

Si nous posons, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$,

$$G_j = \bigcup_{i=1}^j F_i,$$

alors G_j est un ensemble F_σ inclus à X et, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, on a $\mathcal{H}^h(F_j) \leq \mathcal{H}^h(G_j)$, donc

$$\mathcal{H}^h(X) - \frac{1}{2^j} < \mathcal{H}^h(G_j) \leq \mathcal{H}^h(X).$$

Si on pose $G = \bigcup_j G_j$, alors G est un ensemble F_σ inclus à X , et la croissance des espaces G_j et la continuité de la mesure \mathcal{H}^h impliquent, pour $j \rightarrow +\infty$, les relations

$$\mathcal{H}^h(X) \leq \mathcal{H}^h(G) \leq \mathcal{H}^h(X),$$

ce qui permet de conclure. □

A.3 Orthonormalité des translations d'une fonction

Nous démontrons ici une propriété utilisée dans la démonstration du théorème 3.2.7. Il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante concernant le caractère orthonormé des translations (horizontales) d'une fonction.

Proposition A.3.1. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction telle que \hat{f} est continu. On pose, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $f_j(t) = f(t - j)$. Alors on a*

$$\langle f_j, f_k \rangle = \delta_{j,k} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(w + 2\pi n)| = 1 \quad \forall w \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\langle f_j, f_k \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(t-j) \overline{f(t-k)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f(t-j)} \overline{\widehat{f(t-k)}} dw \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ijw} \hat{f}(w) e^{ikw} \bar{\hat{f}}(w) dw \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(w)|^2 e^{i(k-j)w} dw \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} |\hat{f}(w)|^2 e^{i(k-j)w} dw \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\hat{f}(w+2\pi n)|^2 e^{i(k-j)(w+2\pi n)} dw \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(w+2\pi n)|^2 e^{i(k-j)w} dw.
\end{aligned}$$

La condition est alors suffisante, car si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(w+2\pi n)| = 1 \forall w \in \mathbb{R}$, alors on obtient

$$\langle f_j, f_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)w} dw = \delta_{j,k}.$$

Montrons que la condition est également nécessaire. Si $\langle f_j, f_k \rangle = \delta_{j,k}$, alors

$$\delta_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(w) e^{i(k-j)w} dw, \quad (\text{A.2})$$

où on a posé

$$g(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(w+2\pi n)|^2.$$

La fonction g est donc 2π -périodique et on a $g \in L^2([0, 2\pi])$. Puisque $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inw})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite orthonormée totale de $L^2([0, 2\pi])$, on a

$$g(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle g, e^{in\cdot} \rangle e^{inw} \text{ pp sur }]0, 2\pi[$$

avec

$$\langle g, e^{in\cdot} \rangle = \int_0^{2\pi} g(w) e^{-inw} dw.$$

Au vu de l'équation (A.2), on obtient alors

$$\langle g, e^{i0\cdot} \rangle = 2\pi \quad \text{et} \quad \langle g, e^{in\cdot} \rangle = 0 \quad \forall n \neq 0.$$

La décomposition de g s'écrit alors

$$g(w) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi e^{i0w} = 1 \text{ pp sur }]0, 2\pi[$$

donc pp sur \mathbb{R} vu la périodicité de g . Ainsi,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(w + 2\pi n)| = 1 \text{ pp sur } \mathbb{R}$$

et puisqu'on suppose \hat{f} continu, l'égalité a bien lieu partout sur \mathbb{R} . □

Annexe B

Informations et résultats complémentaires

B.1 Stations sélectionnées et climats associés

Le tableau B.1 reprend la liste des stations sélectionnées, et leur climat selon la classification de Köppen, ainsi que, dans certains cas, un autre type de climat acceptable.

B.2 Exposants de Hölder

Le tableau B.2 reprend les exposants de Hölder des stations considérées. Rappelons que nous considérons ici l'exposant de Hölder moyen de signaux tronqués, comme expliqué à la section 5.2.

B.3 Autres estimations de h et résultats associés

Nous donnons ici les résultats obtenus, directement classés “en colonnes” comme sur la figure 5.10, lorsque nous utilisons d'autres méthodes d'estimation de l'exposant de Hölder des anomalies et primitives des signaux considérés. Nous pourrions constater que, dans chaque cas, nous pouvons observer les mêmes types de comportements que ceux exposés précédemment.

La figure B.3 donne les résultats obtenus lorsque l'on calcule l'exposant de Hölder moyen sans tronquer nos données.

La figure B.4 donne les résultats obtenus lorsque l'on calcule l'exposant de Hölder global, de la même façon que nous le calculions pour les fonctions irrégulières classiques. A gauche, nous avons gardé les fonctions w intactes et régressé sur tous les points disponibles, alors qu'à droite, nous avons tronqué nos données pour ne régresser que sur les points dont les abscisses q se trouvent entre -1 et 1.

Pays	Ville	Climat (Koppen)	Autre climat possible (Koppen)	Pays	Ville	Climat (Koppen)	Autre climat possible (Koppen)
Allemagne	Aachen	Océanique tempéré		Espagne	Huesca	Océanique tempéré	Continental tempéré humide
Ukraine	Ai Petri	Océanique chaud humide		Slovaquie	Hurbanovo	Continental chaud humide	Continental tempéré humide
Espagne	Albacete	Semi-aride froid		Croatie	Hvar	Méditerranéen chaud	
Espagne	Alicante	Semi-aride froid		France	Ile de Groix	Océanique tempéré	
Roumanie	Arad	Continental tempéré humide		Autriche	Innsbruck	Continental tempéré humide	Toundra
Royaume-Uni	Armagh	Océanique tempéré		Turquie	Isparta	Méditerranéen chaud	Semi-aride froid
Ukraine	Askaniia Nova	Continental chaud humide		Turquie	Istanbul	Méditerranéen chaud	Océanique chaud humide
Allemagne	Augsburg	Océanique tempéré	Continental tempéré humide	Tenerife	Izana	Aride désertique froid	
Espagne	Barcelone	Méditerranéen chaud	Océanique chaud humide	Finlande	Jyvaskyla	Continental froid subarctique	Océanique tempéré
Espagne	Barcelone Aéroport	Méditerranéen chaud		Allemagne	Kassel	Continental tempéré humide	Océanique tempéré
Suisse	Basel	Continental tempéré humide		Turquie	Kastamonu	Continental tempéré humide	
France	Beauvais-Tille	Océanique tempéré		Lituanie	Kaunas	Continental tempéré humide	Océanique chaud humide
Serbie	Belgrade	Océanique chaud humide	Continental chaud humide	Ukraine	Kerch	Continental chaud humide	
France	Besancon	Océanique tempéré	Continental tempéré humide	Ukraine	Kiev	Continental tempéré humide	
Espagne	Bilbao	Océanique tempéré		Lituanie	Klapeida	Continental tempéré humide	
Norvège	Bjoernoeya	Toundra		Autriche	Kremsmuenster	Continental tempéré humide	
Italie	Bologne	Océanique chaud humide		France	Langres	Océanique tempéré	
Biélorussie	Brestk	Continental tempéré humide		Tenerife	Las Palmas	Aride désertique froid	
Italie	Brindisi	Méditerranéen chaud		Croatie	Lastovo	Méditerranéen chaud	
Roumanie	Bucarest	Continental tempéré humide	Continental chaud humide	France	Le Mans	Océanique tempéré	Océanique tempéré
Espagne	Burgos	Océanique tempéré		Pays-Bas	Leeuwarden	Océanique tempéré	
Roumanie	Buzau	Continental tempéré humide		Espagne	Leon Virgen	Méditerranéen tempéré	
Sardaigne	Cagliari	Méditerranéen chaud		Allemagne	Lindenberg	Continental tempéré humide	Océanique tempéré
Roumanie	Calarasi	Continental chaud humide	Océanique chaud humide	Allemagne	List-Sylt	Océanique tempéré	
France	Cap de la Heve	Océanique tempéré		Slovénie	Ljubljana	Continental froid	
France	Carcassonne	Océanique tempéré	Océanique chaud humide	Espagne	Logrono	Océanique tempéré	Continental tempéré humide
Royaume-Uni	Cet Central England	Océanique tempéré		Ukraine	Lubny	Continental tempéré humide	
Roumanie	Cluj Napoca	Continental tempéré humide		Suisse	Lugano	Océanique tempéré	
France	Cognac	Océanique tempéré		Luxembourg	Luxembourg	Océanique tempéré	Méditerranéen chaud
Espagne	Coruna	Méditerranéen tempéré		Ukraine	Lviv	Continental tempéré humide	Méditerranéen chaud
Islande	Dalatangi	Toundra		Espagne	Madrid Cuatrovientos	Semi-aride froid	Méditerranéen chaud
Espagne	Daroca	Semi-aride froid		Espagne	Madrid Getafe	Semi-aride froid	Océanique tempéré
Pays-Bas	De Bilt	Océanique tempéré		Espagne	Madrid Retiro	Semi-aride froid	
Irlande	Dublin	Océanique tempéré		Allemagne	Magdeburg	Continental tempéré humide	Méditerranéen chaud
Pays-Bas	Eindhoven	Océanique tempéré		Espagne	Malaga	Méditerranéen chaud	Continental tempéré humide
Allemagne	Erfurt	Continental tempéré humide		France	Marseille	Méditerranéen tempéré	
Ukraine	Feodosia	Océanique chaud humide	Semi-aride froid	France	Metz	Océanique tempéré	
Allemagne	Fichtelberg	Continental tempéré humide		Italie	Milan	Océanique chaud humide	
Arménie	Gavar	Continental chaud humide		Espagne	Molina	Semi-aride froid	Continental tempéré humide
Allemagne	Gorlitz	Continental tempéré humide		France	Mont Aigoual	Continental froid	
Croatie	Gospic	Océanique chaud humide		France	Montelimar	Océanique tempéré	
Autriche	Graz	Continental tempéré humide		Espagne	Murcie	Semi-aride froid	
Allemagne	Greifswald	Continental tempéré humide		Espagne	Murcie Alcantarilla	Semi-aride froid	Méditerranéen chaud
Espagne	Grenade	Semi-aride froid		France	Nancy	Océanique tempéré	
Allemagne	Hanovre	Océanique tempéré	Continental tempéré humide	Espagne	Navacerrada	Méditerranéen tempéré	Méditerranéen tempéré
Finlande	Helsinki	Continental tempéré humide		Ukraine	Nikolaev	Continental chaud humide	Continental tempéré humide
Allemagne	Hof	Continental tempéré humide		France	Nimes	Méditerranéen chaud	
Norvège	Hopen	Toundra		Serbie	Nis	Océanique tempéré	

Pays	Ville	Climat (Koppen)	Autre climat possible (Koppen)	Pays	Ville	Climat (Koppen)	Autre climat possible (Koppen)
Danemark	Nordby	Océanique tempéré		Espagne	Torreveija	Semi-aride froid	Continental tempéré humide
France	Orleans	Océanique tempéré	Continental froid subarctique	Espagne	Tortosa	Méditerranéen chaud	
Croatie	Osijek	Continental tempéré humide		Norvège	Torungen	Continental tempéré humide	
Norvège	Oslo	Continental tempéré humide		France	Toulouse	Océanique tempéré	
France	Paris	Océanique tempéré		Danemark	Tranebjerg	Continental tempéré humide	
Estonie	Pjarnu	Continental tempéré humide		Pays-Bas	Twenthe	Océanique tempéré	
Ukraine	Poltava	Continental tempéré humide		Ukraine	Uman	Continental tempéré humide	
Espagne	Ponferrada	Méditerranéen tempéré		Norvège	Utsira	Océanique tempéré	Méditerranéen tempéré
Rép. Tchèque	Praha Klementinum	Continental tempéré humide		Ukraine	Uzhhorod	Continental tempéré humide	
France	Rennes	Océanique tempéré		Espagne	Valence	Semi-aride froid	
Islande	Reykjavik	Continental froid subarctique		Irlande	Valencia	Océanique tempéré	Océanique tempéré
Lettonie	Riga	Continental tempéré humide	Océanique tempéré	Pays-Bas	Valkenburg	Océanique tempéré	
Croatie	Rijeka	Océanique chaud humide		Espagne	Valladolid	Semi-aride froid	
Turquie	Rize	Océanique chaud humide	Océanique tempéré	Norvège	Vardoe	Toundra	
Italie	Rome	Méditerranéen chaud	Continental tempéré humide	Italie	Verone	Océanique chaud humide	
Allemagne	Rostock	Continental tempéré humide		Danemark	Vestevig	Continental tempéré humide	
Allemagne	Saarbrücken	Océanique tempéré	Méditerranéen tempéré	Islande	Vestmannaeyjar	Toundra	
Suisse	Saentis	Toundra		Autriche	Vienne	Continental tempéré humide	Continental tempéré humide
Espagne	St. Jacques de Compo.	Océanique tempéré		Lituanie	Vilnius	Continental tempéré humide	Océanique tempéré
Espagne	Salamanca	Semi-aride froid		Estonie	Vilsandi	Continental tempéré humide	Continental tempéré humide
Autriche	Salsbourg	Continental tempéré humide	Océanique tempéré	Pays-Bas	Vlissingen	Océanique tempéré	Méditerranéen tempéré
Espagne	San Sebastian	Océanique tempéré	Océanique tempéré	Estonie	Voru	Continental tempéré humide	Océanique tempéré
Espagne	Saragosse	Semi-aride froid		Allemagne	Westermarcksdorf	Océanique tempéré	
Bosnie	Sarajevo	Continental tempéré humide	Continental tempéré humide	Allemagne	Wurzburg	Continental tempéré humide	
Pays-Bas	Schiphol	Océanique tempéré		Croatie	Zagreb	Océanique chaud humide	
Allemagne	Schleswig	Océanique tempéré	Méditerranéen tempéré	Espagne	Zamora	Semi-aride froid	
Allemagne	Schwerin	Continental tempéré humide		Suisse	Zurich	Continental tempéré humide	
France	Sete	Méditerranéen chaud					
Espagne	Seville	Méditerranéen chaud					
Ukraine	Shepetivka	Continental tempéré humide					
Lituanie	Siauliai	Continental tempéré humide					
Turquie	Sivas	Continental - Médit. tempéré	Semi-aride froid				
Finlande	Sodankyla	Continental froid subarctique					
Autriche	Sonnblick	Toundra					
Espagne	Soria	Océanique tempéré					
Croatie	Split Marjan	Méditerranéen chaud					
Tenerife	Sta Cruz	Aride désertique froid					
France	Strasbourg	Océanique tempéré					
Allemagne	Straubing	Continental tempéré humide					
Islande	Stykkisholmur	Toundra	Continental froid subarctique				
Estonie	Tallinn	Continental tempéré humide					
Espagne	Tarifa	Méditerranéen chaud					
Estonie	Tartu	Continental tempéré humide					
Islande	Teigarhorn	Toundra					
Tenerife	Tenerife	Aride désertique froid	Océanique tempéré				

FIGURE B.1 – Stations considérées et climat(s) associé(s).

Ville	h moyen brut	h moyen anomalie	h moyen primitive	Ville	h moyen brut	h moyen anomalie	h moyen primitive
Aachen	0,231381	0,687645	0,881526	Huesca	0,287779	0,724916	0,915179
Ai Petri	0,226163	0,656004	0,887657	Hurbanovo	0,290693	0,694988	0,94077
Albacete	0,297037	0,770403	0,932256	Hvar	0,310764	0,685953	0,941009
Alicante	0,283791	0,76743	0,94267	Ile de Groix	0,240228	0,743996	0,897213
Arad	0,284978	0,708649	0,943562	Innsbruck	0,267188	0,647738	0,909926
Armagh	0,229916	0,672177	0,868633	Isparta	0,276653	0,738649	0,945251
Askaniia Nova	0,306429	0,709925	0,961308	Istanbul	0,286794	0,669898	0,939013
Augsburg	0,261618	0,704925	0,915912	Izana	0,220432	0,736999	0,867546
Barcelone	0,276578	0,68114	0,920804	Jyvaskyla	0,272803	0,736787	0,910757
Barcelone Aeroport	0,287205	0,732686	0,941634	Kassel	0,290758	0,772235	0,912787
Basel	0,276926	0,690736	0,918938	Kastamonu	0,247437	0,651952	0,946818
Beauvais-Tille	0,241893	0,713396	0,880279	Kaunas	0,273415	0,804443	0,942477
Belgrade	0,273146	0,678503	0,932236	Kerch	0,292321	0,707094	0,953726
Besancon	0,264224	0,6644	0,885531	Kiev	0,310215	0,74365	0,957706
Bilbao	0,242037	0,72898	0,886726	Klapeida	0,284895	0,780004	0,946868
Bjoernoeya	0,240619	0,790586	0,851861	Kremsmuenster	0,301194	0,721616	0,94967
Bologne	0,314665	0,678406	0,96084	Langres	0,247595	0,680116	0,896888
Brestk	0,283625	0,769822	0,937636	Las Palmas	0,24004	0,806309	0,918081
Brindisi	0,301585	0,655483	0,932569	Lastovo	0,302146	0,700771	0,952531
Bucarest	0,312849	0,681557	0,955917	Le Mans	0,224528	0,710392	0,884245
Burgos	0,242001	0,720351	0,915627	Leeuwarden	0,251987	0,719123	0,896695
Buzau	0,310432	0,668347	0,956093	Leon Virgen	0,2565	0,706813	0,889458
Cagliari	0,261065	0,702752	0,931614	Lindenberg	0,272448	0,73753	0,92836
Calarasi	0,298761	0,657696	0,940004	List-Sylt	0,317568	0,773387	0,94808
Cap de la Heve	0,231746	0,714636	0,890646	Ljubljana	0,303302	0,68517	0,953842
Carcassonne	0,260085	0,687551	0,912018	Logrono	0,256987	0,687235	0,901532
Cet Central England	0,254687	0,65328	0,884866	Lubny	0,315224	0,761466	0,967347
Cluj Napoca	0,283708	0,713076	0,957069	Lugano	0,32928	0,718449	0,965404
Cognac	0,230755	0,67534	0,880314	Luxembourg	0,254333	0,729849	0,919555
Coruna	0,206925	0,726052	0,878679	Lviv	0,294895	0,740357	0,953313
Dalatangi	0,249706	0,789762	0,864408	Madrid Cuatrovientos	0,292049	0,722363	0,938327
Daroca	0,259269	0,710099	0,911023	Madrid Getafe	0,297048	0,724602	0,940237
De Bilt	0,235935	0,681756	0,87389	Madrid Retiro	0,301279	0,728828	0,943505
Dublin	0,219987	0,678738	0,87701	Magdeburg	0,283875	0,720527	0,905235
Eindhoven	0,256189	0,683532	0,888363	Malaga	0,228781	0,724104	0,905582
Erfurt	0,263637	0,709154	0,929222	Marseille	0,27579	0,717277	0,928605
Feodosiia	0,312092	0,711383	0,960671	Metz	0,255883	0,681359	0,892332
Fichtelberg	0,228574	0,65514	0,868431	Milan	0,33677	0,744414	0,978981
Gavar	0,298531	0,801304	0,968046	Molina	0,268036	0,720243	0,920547
Gorlitz	0,27435	0,717514	0,906742	Mont Aigoual	0,260381	0,683642	0,870562
Gospic	0,257134	0,647916	0,91414	Montelimar	0,267557	0,685774	0,925484
Graz	0,304348	0,706159	0,950346	Murcie	0,265172	0,763738	0,938474
Greifswald	0,282774	0,766011	1,020597	Murcie Alcantarilla	0,270274	0,761888	0,940579
Grenade	0,305998	0,749166	0,954152	Nancy	0,238497	0,657752	0,879459
Hanovre	0,261185	0,704035	0,892391	Navacerrada	0,238718	0,731777	0,880244
Helsinki	0,289646	0,806701	0,951201	Nikolaev	0,310043	0,730219	0,968655
Hof	0,262558	0,704122	0,910503	Nimes	0,272451	0,675152	0,926327
Hopen	0,270912	0,866446	0,899166	Nis	0,27024	0,652879	0,924177

Ville	h moyen brut	h moyen anomalie	h moyen primitive	Ville	h moyen brut	h moyen anomalie	h moyen primitive
Nordby	0,307586	0,761774	0,919881	Torreveja	0,285752	0,836438	0,9789
Orleans	0,240977	0,668799	0,871051	Tortosa	0,270459	0,740277	0,931676
Osijek	0,286287	0,691819	0,952153	Torungen	0,307433	0,848304	0,963757
Oslo	0,295368	0,760673	0,934544	Toulouse	0,258103	0,683002	0,890373
Paris	0,24308	0,702782	0,888487	Tranebjerg	0,292202	0,760385	0,954735
Pjarnu	0,32267	0,80707	0,969581	Twenthe	0,235103	0,696369	0,878467
Poltava	0,293483	0,756887	0,974306	Uman	0,294559	0,735451	0,946833
Ponferrada	0,293731	0,71367	0,907479	Utsira	0,290827	0,808705	0,952108
Praha Klementinum	0,280025	0,73202	0,94343	Uzhhorod	0,282666	0,737113	0,979048
Rennes	0,218346	0,688109	0,874339	Valence	0,259453	0,733578	0,932126
Reykjavik	0,234381	0,775445	0,894244	Valencia	0,20272	0,686026	0,85375
Riga	0,278079	0,756593	0,921371	Valkenburg	0,252513	0,70145	0,88866
Rijeka	0,294038	0,746586	0,972008	Valladolid	0,260968	0,740075	0,907019
Rize	0,274619	0,678895	0,9292	Vardoe	0,246843	0,773275	0,910751
Rome	0,296786	0,69691	0,945422	Verone	0,331042	0,677227	0,96526
Rostock	0,317846	0,751682	0,92638	Vestervig	0,29149	0,757068	0,927462
Saarbrucken	0,286775	0,690266	0,892151	Vestmannaeyjar	0,244911	0,763503	0,884568
Saentis	0,201361	0,646729	0,833086	Vienne	0,342521	0,708291	0,937421
St Jacques de Compo.	0,227245	0,740629	0,956562	Vilnius	0,311977	0,761769	0,93638
Salamanca	0,275736	0,73302	0,920559	Vilsandi	0,317834	0,835347	0,943291
Salsbourg	0,254084	0,684525	0,912893	Vlissingen	0,277897	0,712406	0,914425
San Sebastian	0,202003	0,688072	0,851254	Voru	0,298798	0,755839	0,928404
Saragosse	0,255774	0,725245	0,932655	Westermakelsdorf	0,339602	0,821914	1,054845
Sarajevo	0,252285	0,665227	0,899666	Wurzburg	0,276108	0,673728	0,909583
Schiphol	0,252974	0,691728	0,90488	Zagreb	0,291354	0,699675	0,942359
Schleswig	0,298494	0,732636	0,920474	Zamora	0,273946	0,741544	0,932871
Schwerin	0,276603	0,732664	0,925205	Zurich	0,264426	0,671546	0,904537
Sete	0,268012	0,677245	0,929914				
Seville	0,285882	0,75626	0,938435				
Shepetivka	0,288534	0,76452	0,952525				
Siauliai	0,284882	0,756726	0,922398				
Sivas	0,229621	0,59666	0,881549				
Sodankyla	0,263452	0,720568	0,889045				
Sonnblick	0,22432	0,656488	0,867917				
Soria	0,261299	0,723572	0,90403				
Split Marjan	0,311403	0,661838	0,941937				
Sta Cruz	0,230466	0,796517	0,92615				
Strasbourg	0,249214	0,685548	0,90683				
Straubing	0,2997	0,762299	1,01974				
Stykkisholmur	0,239348	0,798421	0,909635				
Tallinn	0,292603	0,795119	0,94778				
Tarifa	0,252108	0,770289	0,908494				
Tartu	0,276095	0,758853	0,927249				
Teigarhorn	0,222419	0,825437	0,886598				
Tenerife	0,270735	0,75779	0,921466				

FIGURE B.2 – Exposants de Hölder moyens des signaux (tronqués) considérés.

Une dernière façon que nous présentons pour estimer l'exposant de Hölder est la suivante. Les spectres des singularités ont tous une forme parabolique à concavité négative, comme illustré sur la figure B.5 pour la ville de Rennes. L'idée est alors d'estimer l'exposant de Hölder comme étant l'abscisse du sommet de la "parabole de régression" du spectre. A nouveau, cela a été réalisé de deux façons différentes. Dans le premier cas, la parabole de régression a été déterminée sur l'ensemble des points du spectre, alors que dans le second cas, nous avons tronqué nos données pour n'effectuer la régression parabolique que sur les 25% des points ayant la plus grande ordonnée. Le code VBA que nous avons écrit pour effectuer cela grâce au programme Microsoft Excel se trouve dans l'annexe C. Les classements en colonnes obtenus se trouvent sur la figure B.6.

B.4 Climats selon nos critères

La figure B.7 donne la répartition des stations dans les différentes "zones" définies au tableau 5.8.

La figure B.8 reprend l'ensemble des climats que nos critères attribuent à chaque station étudiée.

Ville	Climat (Koppen)	Mean anomaly	Ville	Climat (Koppen)	Mean anomaly
Saentis	Tundra	0,646729	Saentis	Tundra	0,833086
Innsbruck	Tundra	0,647738	San Sebastian	Océanique tempérée	0,851254
Gospic	Océanique tempérée humide	0,659515	Bjernoëya	Océanique tempérée	0,851864
Kastamonu	Océanique tempérée	0,651952	Valencia	Océanique tempérée	0,85375
Nis	Océanique tempérée	0,652879	Dalatangi	Tundra	0,864408
at Central Englat	Océanique tempérée	0,65328	Somblick	Océanique tempérée	0,867917
Fichtelberg	Continental tempérée humide	0,65514	Fichtelberg	Continental tempérée humide	0,868431
Brindisi	Océanique chaud humide	0,655483	Armagh	Océanique tempérée	0,869633
Al Petri	Océanique chaud humide	0,656004	Mont Aigoual	Continental froid	0,870562
Somblick	Tundra	0,656488	Orleans	Océanique tempérée	0,871051
Calarasi	Océanique tempérée	0,657696	De Bilt	Océanique tempérée	0,87389
Nancy	Océanique tempérée	0,657752	Rennes	Océanique tempérée	0,874339
Spitt Marjan	Océanique tempérée	0,668368	Duisbon	Océanique tempérée	0,876931
Besancon	Océanique tempérée	0,6644	Twente	Océanique tempérée	0,878467
Sarajevo	Océanique tempérée	0,66527	Coruna	Méditerranéen tempéré	0,878679
Buzau	Continental tempérée humide	0,668347	Nancy	Océanique tempérée	0,879459
Orleans	Océanique tempérée	0,668799	Navacerrada	Méditerranéen tempéré	0,880244
Istanbul	Océanique tempérée	0,669898	Beauvais-Tille	Océanique tempérée	0,880279
Zurich	Océanique tempérée	0,671546	Cognac	Océanique tempérée	0,880314
Armagh	Océanique tempérée	0,673177	Aachen	Océanique tempérée	0,881526
Wurzburg	Océanique tempérée	0,673728	Le Mans	Océanique tempérée	0,884245
Nimes	Méditerranéen chaud	0,675152	Vestmannaeýjar	Tundra	0,884568
Cognac	Océanique tempérée	0,675234	at Central Englat	Océanique tempérée	0,884806
Verone	Océanique chaud humide	0,677227	Besancon	Océanique tempérée	0,885531
Sete	Océanique tempérée	0,678203	Teigarhorn	Océanique tempérée	0,888398
Bologne	Océanique chaud humide	0,678406	Bilbao	Océanique tempérée	0,888726
Belgrade	Océanique chaud humide	0,678503	Al Petri	Océanique chaud humide	0,889763
Dublin	Océanique tempérée	0,678738	Eindhoven	Océanique tempérée	0,888303
Rize	Océanique chaud humide	0,678895	Paris	Océanique tempérée	0,888487
Langres	Océanique tempérée	0,680116	Valkenburg	Océanique tempérée	0,888666
Barcelona	Océanique chaud humide	0,68114	Sodankyla	Continental froid subarctique	0,889045
Metz	Océanique tempérée	0,681359	Leuwarden	Océanique tempérée	0,889458
Bucarest	Continental tempérée humide	0,681557	Toulouse	Océanique tempérée	0,890373
De Bilt	Océanique tempérée	0,681756	Cap de la Heve	Océanique tempérée	0,890646
Toulouse	Océanique tempérée	0,683002	Saarbrücken	Océanique tempérée	0,892151
Eindhoven	Océanique tempérée	0,683532	Metz	Océanique tempérée	0,892332
Mont Aigoual	Continental froid	0,683542	Hanovre	Océanique tempérée	0,893391
Salsburg	Continental tempérée humide	0,68425	Reykjavik	Continental froid subarctique	0,894244
Ljubljana	Océanique tempérée	0,68517	Leuwarden	Océanique tempérée	0,894635
Straßburg	Océanique tempérée	0,685548	Langres	Océanique tempérée	0,896888
Montelmar	Océanique tempérée	0,685774	Ile de Groix	Océanique tempérée	0,897213
Hvar	Méditerranéen chaud	0,686033	Hof	Océanique tempérée	0,899106
Valencia	Océanique tempérée	0,686026	Sarajevo	Océanique tempérée	0,899666
Logrono	Océanique tempérée	0,686234	Logrono	Océanique tempérée	0,903512
Carcassonne	Océanique tempérée	0,687551	Soria	Océanique tempérée	0,90403
Aachen	Océanique tempérée	0,687645	Zurich	Océanique tempérée	0,904537
San Sebastian	Océanique tempérée	0,688072	Schiffhorn	Océanique tempérée	0,904888
Rennes	Océanique tempérée	0,688109	Magdeburg	Océanique tempérée	0,905235
Saarbrücken	Océanique tempérée	0,688133	Malaga	Méditerranéen chaud	0,905582
Basel	Continental tempérée humide	0,690376	Gerlitz	Continental tempérée humide	0,906742
Schiphol	Océanique tempérée	0,691728	Straßburg	Océanique tempérée	0,906883
Osijek	Continental tempérée humide	0,691819	Valladolid	Semi-aride froid	0,907049
Hurbanovo	Continental chaud humide	0,694988	Ponferrada	Méditerranéen tempéré	0,907479
Twente	Océanique tempérée	0,696369	Tarifa	Méditerranéen chaud	0,908494
Rome	Méditerranéen chaud	0,69691	Wurzburg	Océanique tempérée	0,909583
Zagreb	Océanique tempérée	0,697655	Stykkishólmur	Océanique tempérée	0,909645
Lastovo	Méditerranéen chaud	0,700771	Innsbruck	Tundra	0,909926
Valkenburg	Océanique tempérée	0,70145	Hof	Continental tempérée humide	0,910503
Cagliari	Méditerranéen chaud	0,702925	Vardoe	Océanique tempérée	0,910791
Paris	Océanique tempérée	0,702782	Jyväskylä	Continental froid subarctique	0,910757
Hanovre	Océanique tempérée	0,703925	Daroca	Océanique tempérée	0,911033
Hof	Continental tempérée humide	0,704122	Carcassonne	Océanique tempérée	0,912018
Augsburg	Océanique tempérée	0,704925	Osijek	Océanique tempérée	0,912787
Graz	Continental tempérée humide	0,706159	Salsburg	Continental tempérée humide	0,912893
Leon Virgin	Méditerranéen tempéré	0,706813	Gospic	Océanique chaud humide	0,91414
Kiev	Océanique tempérée	0,707122	Vilssingen	Océanique tempérée	0,91442
Vienne	Continental tempérée humide	0,708291	Huesca	Océanique tempérée	0,915179
Aid	Océanique tempérée	0,708517	Burgos	Océanique tempérée	0,915617
Erfurt	Continental tempérée humide	0,709154	Augsburg	Océanique tempérée	0,915912
Askanija Nova	Continental chaud humide	0,709925	Basel	Continental tempérée humide	0,918938
Daroca	Semi-aride froid	0,710393	Luxembourg	Océanique tempérée	0,919595
Le Mans	Océanique tempérée	0,710392	Nordby	Océanique tempérée	0,919881
Feodosia	Semi-aride froid	0,711393	Schleswig	Océanique tempérée	0,920474
Vilssingen	Océanique tempérée	0,712406	Molina	Semi-aride froid	0,920547
Cluj Napoca	Continental tempérée humide	0,713076	Salamanca	Semi-aride froid	0,920549
Beauvais-Tille	Océanique tempérée	0,713396	Barcelona	Méditerranéen chaud	0,920804
Ponferrada	Méditerranéen tempéré	0,71367	Riga	Continental tempérée humide	0,921371
Cap de la Heve	Océanique tempérée	0,714035	Sialuiti	Océanique tempérée	0,921398
Marseille	Méditerranéen tempéré	0,717277	Nis	Océanique tempérée	0,924177
Gerlitz	Continental tempérée humide	0,717514	Schwertin	Continental tempérée humide	0,924397
Lugano	Océanique tempérée	0,718449	Montelmar	Méditerranéen tempéré	0,925484
Leuwarden	Océanique tempérée	0,719123	Nimes	Méditerranéen chaud	0,926327
Molna	Semi-aride froid	0,720243	Rostock	Océanique tempérée	0,926588
Burgos	Océanique tempérée	0,720351	Tartu	Continental tempérée humide	0,927249
Magdeburg	Océanique tempérée	0,720357	Vestervig	Océanique tempérée	0,927482
Sodankyla	Continental froid subarctique	0,720568	Lindenberg	Continental tempérée humide	0,92836
Kremmunster	Continental tempérée humide	0,721616	Vestervig	Continental tempérée humide	0,928868
Madrid Cuatrovientos	Semi-aride froid	0,721813	Madrid Cuatrovientos	Méditerranéen tempéré	0,928905
Soria	Semi-aride froid	0,723572	Vice	Océanique chaud humide	0,92925
Malaga	Méditerranéen chaud	0,724002	Erfurt	Océanique chaud humide	0,929282
Madrid Getafe	Semi-aride froid	0,724002	Sete	Méditerranéen chaud	0,929914
Saragosse	Semi-aride froid	0,725245	Cagliari	Méditerranéen chaud	0,931614
Coruna	Méditerranéen tempéré	0,726052	Tortosa	Méditerranéen chaud	0,931676
Madrid Retiro	Semi-aride froid	0,726288	Valence	Semi-aride froid	0,932126
Bilbao	Océanique tempérée	0,72698	Belgrade	Océanique tempérée	0,932236
Luxembourg	Océanique tempérée	0,729893	Albacete	Semi-aride froid	0,932256
Nikolaev	Continental chaud humide	0,730219	Brindisi	Méditerranéen chaud	0,932509
Navacerrada	Méditerranéen tempéré	0,731777	Saragosse	Semi-aride froid	0,932655
Oslo Klemmentinu	Continental tempérée humide	0,73202	Zamora	Semi-aride froid	0,932871
Schleswig	Continental tempérée humide	0,732636	Oslo	Continental tempérée humide	0,934544
Schwertin	Continental tempérée humide	0,732636	Vilnius	Continental tempérée humide	0,93683
arcelona Aeroport	Méditerranéen chaud	0,732686	Brestk	Continental tempérée humide	0,937636
Salamanca	Océanique tempérée	0,733082	Madrid Cuatrovientos	Semi-aride froid	0,938327
Valencia	Semi-aride froid	0,733578	Seville	Méditerranéen chaud	0,938435
Uman	Continental tempérée humide	0,735451	Murcie	Semi-aride froid	0,938474
Jyväskylä	Continental froid subarctique	0,735451	Madrid Cuatrovientos	Méditerranéen chaud	0,939093
Uzhhorod	Continental tempérée humide	0,737113	Calarasi	Continental chaud humide	0,940004
Lindenberg	Continental tempérée humide	0,737375	Madrid Getafe	Méditerranéen chaud	0,940317
Isparta	Méditerranéen chaud	0,738649	Murcie Alcantari	Semi-aride froid	0,940579
Valladolid	Semi-aride froid	0,740075	Hurbanovo	Continental chaud humide	0,94077
Tortosa	Semi-aride froid	0,740277	Hvar	Méditerranéen chaud	0,941009
Lviv	Continental tempérée humide	0,740357	Barcelona Aeroport	Méditerranéen chaud	0,941634
acques de Comp	Méditerranéen chaud	0,740357	Spitt Marjan	Méditerranéen chaud	0,941937
Zamora	Semi-aride froid	0,741544	Zagreb	Continental tempérée humide	0,942359
Kiev	Continental tempérée humide	0,743665	Katona	Continental tempérée humide	0,943437
Ile de Groix	Océanique tempérée	0,743996	Alicante	Semi-aride froid	0,94267
Milan	Océanique chaud humide	0,744414	Vilandi	Continental tempérée humide	0,943291
Rijeka	Océanique chaud humide	0,746586	Praha Klemmentinu	Continental tempérée humide	0,943433
Grenade	Semi-aride froid	0,749166	Madrid Retiro	Semi-aride froid	0,943505
Rostock	Continental tempérée humide	0,751682	Arad	Continental tempérée humide	0,943562
Voru	Continental tempérée humide	0,755839	Isparta	Méditerranéen chaud	0,945251
Seville	Méditerranéen chaud	0,75626	Rome	Méditerranéen chaud	0,946422
Riga	Continental tempérée humide	0,756933	Kastamonu	Continental tempérée humide	0,946818
Sialuiti	Continental tempérée humide	0,756726	Uman	Continental tempérée humide	0,946833
Poltava	Continental tempérée humide	0,766887	Klapatka	Continental tempérée humide	0,946888
Vestervig	Continental tempérée humide	0,757068	Tallinn	Continental tempérée humide	0,94778
Tartu	Continental tempérée humide	0,758553	List-Sylt	Océanique tempérée	0,94808
Tranebjerg	Continental tempérée humide	0,760385	Kremmunster	Continental tempérée humide	0,94967
Oslo	Continental tempérée humide	0,760673	Graz	Continental tempérée humide	0,950346
Lubny	Continental tempérée humide	0,761466	Helinski	Continental tempérée humide	0,951201
Vilnius	Continental tempérée humide	0,761769	Utsira	Océanique tempérée	0,952108
Nordby	Océanique tempérée	0,761774	Osijek	Continental tempérée humide	0,952153
Murcie Alcantari	Semi-aride froid	0,761888	Shepetivka	Continental tempérée humide	0,952525
Straubing	Continental tempérée humide	0,762299	Lastovo	Méditerranéen chaud	0,952931
Vestmannaeýjar	Continental tempérée humide	0,763033	Lviv	Continental tempérée humide	0,953313
Murcie	Semi-aride froid	0,763738	Kerch	Continental chaud humide	0,953726
Shepetivka	Continental tempérée humide	0,763738	Ljubljana	Continental froid	0,953842
Greifswald	Continental tempérée humide	0,766011	Grenade	Semi-aride froid	0,954152
Alicante	Continental tempérée humide	0,76743	Tranebjerg	Continental tempérée humide	0,954735
Brestk	Continental tempérée humide	0,769822	Bucarest	Continental tempérée humide	0,955917
Tarifa	Méditerranéen chaud	0,770289	Buzau	Continental tempérée humide	0,956093
Albacete	Semi-aride froid	0,772335	acques de Comp	Continental tempérée humide	0,957706
Kassel	Continental tempérée humide	0,772335	Cluj Napoca	Continental tempérée humide	0,957669
List-Sylt	Océanique tempérée	0,773867	Kiev	Continental tempérée humide	0,957706
Reykjavik	Continental froid subarctique	0,773867	Feodosia	Semi-aride froid	0,960671
Klapatka	Continental tempérée humide	0,775445	Bologne	Océanique chaud humide	0,96084
Dalatangi	Tundra	0,780094	Askanija Nova	Continental chaud humide	0,961308
Bjernoëya	Tundra	0,789762	Torungen	Continental tempérée humide	0,963757
Tallinn	Continental tempérée humide	0,795119	Verone	Océanique chaud humide	0,96526
Stykkishólmur	Continental chaud humide	0,798421	Lugano	Continental tempérée humide	0,965404
Gavar	Continental chaud humide	0,801304	Ljubro	Continental tempérée humide	0,967347
Kaunas	Continental tempérée humide	0,804443	Gavar	Continental chaud humide	0,968046
Helinski	Continental tempérée humide	0,806793	Nikolaev	Continental chaud humide	0,968655
Pjarni	Continental tempérée humide	0,80707	Plarui	Continental tempérée humide	0,968655
Utsira	Océanique tempérée	0,810707	Rijeka	Océanique chaud humide	0,972008
vestermarkelsdo	Continental tempérée humide	0,821914	Poltava	Continental tempérée humide	0,973306
Teigarhorn	Tundra	0,825437	Torreveja	Semi-aride froid	0,9789
Vilandi	Continental tempérée humide	0,835437	Nilani	Océanique chaud humide	0,978981
Torreveja	Semi-aride froid	0,836438	Uzhhorod	Continental tempérée humide	0,979048
Torungen	Continental tempérée humide	0,836438	Straubing	Continental tempérée humide	1,01974
Hopen	Tundra	0,866446	Greifswald	Continental tempérée humide	1,020097
			Westermarkelsdo	Continental tempérée humide	1,054845

FIGURE B.3 – Classements selon les exposants de Hölder moyens des anomalies et primitives (non tronquées) considérées.

Table with 12 columns: Ville, Climat (Köppen), al anomalie, Ville, Climat (Köppen), al signal intégré, Ville, Climat (Köppen), al anomalie, Ville, Climat (Köppen), al signal. It lists various cities and their corresponding climate types and anomalies.

FIGURE B.4 – Classements selon les exposants de Hölder globaux des anomalies et primitives considérées. A gauche, les régressions ont été effectuées sur tous les points disponibles des fonctions w, alors qu'à droite nous n'avons gardé que les points dont les abscisses q se situent entre -1 et 1.

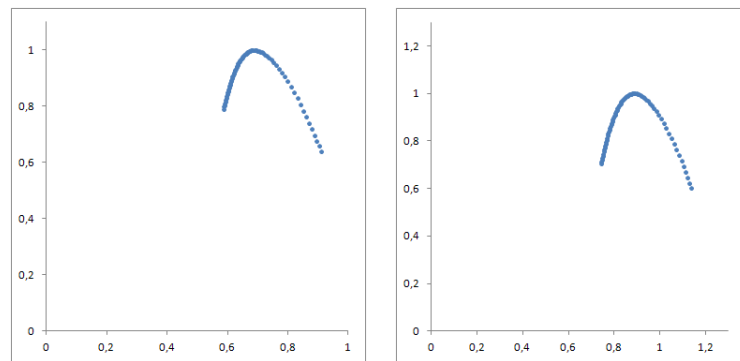


FIGURE B.5 – Le spectre des singularités de l’anomalie et de la primitive de la ville de Rennes.

Ville	Climat (Köppen)	smet anomalie	Ville	Climat (Köppen)	set signal	Ville	Climat (Köppen)	smet anomalie	Ville	Climat (Köppen)	set signal
Sodenavita	Continental frost subarctic	0,6329	Saentis	Toundra	0,86423	Aachen	Océanique tempérée	0,61981	Saentis	Toundra	0,84133
Quebec-Cont	Océanique tempérée	0,67288	Valencia	Océanique tempérée	0,8882	Al Peiri	Océanique tempérée	0,63286	San Sebastia	Océanique tempérée	0,84004
Fichtelberg	Continental tempéré humide	0,68162	San Sebastia	Océanique tempérée	0,88939	Basel	Méditerranéen humide	0,65074	Mont Aligoua	Continental froid	0,8675
Isaura	Continental tempéré humide	0,68549	Fischelberg	Continental tempéré humide	0,9328	Bristol	Continental tempéré humide	0,65238	Bilbao	Océanique tempérée	0,8675
Central Engl	Océanique tempérée	0,68555	Armagh	Océanique tempérée	0,9032	Poltava	Continental tempéré humide	0,65862	Valencia	Océanique tempérée	0,8678
Gespic	Océanique tempérée	0,68656	Mont Aligoua	Continental froid	0,9014	Albacete	Semi-aride froid	0,65905	Dublin	Océanique tempérée	0,87131
Soria	Océanique tempérée	0,68972	Orléans	Océanique tempérée	0,9045	Bucarest	Continental tempéré humide	0,65958	Dalatang	Toundra	0,87398
Al Peiri	Océanique tempérée	0,68978	Sonnblick	Océanique tempérée	0,9059	Rostock	Océanique tempérée	0,65988	Armagh	Océanique tempérée	0,87398
Nordby	Continental tempéré humide	0,69002	Dalatang	Toundra	0,90609	Saarbrücken	Océanique tempérée	0,66802	Fichtelberg	Continental tempéré humide	0,88022
Brindisi	Méditerranéen tempéré	0,69009	Orléans	Océanique tempérée	0,91009	Lastovo	Méditerranéen tempéré	0,66827	Neveacere	Océanique tempérée	0,88383
Beaucon	Méditerranéen tempéré	0,69431	Dublin	Océanique tempérée	0,91097	Saentis	Toundra	0,67121	Aachen	Océanique tempérée	0,88567
Neveacere	Méditerranéen tempéré	0,69509	De Bilt	Océanique tempérée	0,91221	Que de Com	Océanique tempérée	0,67241	Rennes	Océanique tempérée	0,88584
Calarsi	Océanique tempérée	0,69492	Neveacere	Méditerranéen tempéré	0,91482	Salamanca	Semi-aride froid	0,67364	Bjoernevja	Toundra	0,88689
Osjeak	Océanique tempérée	0,69598	Cognac	Océanique tempérée	0,91645	Le Mans	Océanique tempérée	0,67668	Coruna	Océanique tempérée	0,88849
Schiphol	Océanique tempérée	0,69992	Beauvais-Till	Océanique tempérée	0,91886	Lieuwarden	Océanique tempérée	0,67847	Reykjavik	Continental frost subarctic	0,89028
Armagh	Océanique tempérée	0,69996	Le Mans	Océanique tempérée	0,92142	Belgrade	Océanique tempérée	0,67945	Beauvais-Till	Océanique tempérée	0,89292
Cognac	Océanique tempérée	0,70349	Coruna	Océanique tempérée	0,92342	Sarlsburg	Océanique tempérée	0,67728	Al Peiri	Océanique tempérée	0,89509
Buzau	Continental tempéré humide	0,70413	Nancy	Océanique tempérée	0,92107	San Sebastia	Océanique tempérée	0,67773	Orléans	Océanique tempérée	0,89113
Sevill	Méditerranéen chaud	0,70501	Cet Central Engl	Océanique tempérée	0,92169	Sargesse	Océanique tempérée	0,67907	Twenthe	Océanique tempérée	0,89341
Dublin	Océanique tempérée	0,70512	Beaucon	Océanique tempérée	0,92179	Burgos	Océanique tempérée	0,67939	Cognac	Océanique tempérée	0,89387
Niz	Océanique tempérée	0,70624	Al Peiri	Océanique tempérée	0,92245	Ponferrada	Continental tempéré humide	0,67966	Langres	Océanique tempérée	0,89529
Wurzburg	Océanique tempérée	0,70999	Aachen	Océanique tempérée	0,92324	Arad	Océanique tempérée	0,68013	De Bilt	Océanique tempérée	0,89712
Trebnje	Océanique tempérée	0,71027	Endhoven	Océanique tempérée	0,924	Castell	Continental tempéré humide	0,68059	Beaucon	Océanique tempérée	0,89903
Verone	Océanique tempérée	0,71028	Bilbao	Océanique tempérée	0,92401	Sarajevo	Océanique tempérée	0,68179	Cet Central Engl	Océanique tempérée	0,89957
Biologne	Océanique tempérée	0,71078	Paris	Océanique tempérée	0,92421	Callaraz	Océanique tempérée	0,68249	Endhoven	Océanique tempérée	0,90023
Montelmar	Océanique tempérée	0,71208	Toulouse	Océanique tempérée	0,92631	Cap de la Heu	Océanique tempérée	0,68442	Leon Virgen	Océanique tempérée	0,90188
Endhoven	Océanique tempérée	0,71213	Tegshavn	Toundra	0,92674	Schiphol	Océanique tempérée	0,68542	Cap de la Heu	Océanique tempérée	0,90425
Reykjavik	Continental frost subarctic	0,71316	Valkenburg	Océanique tempérée	0,92899	Schiering	Océanique tempérée	0,68592	Valladolid	Semi-aride froid	0,90429
De Bilt	Océanique tempérée	0,71352	Saarbrücken	Océanique tempérée	0,92922	Schvervin	Continental tempéré humide	0,6879	Nancy	Océanique tempérée	0,90511
Libury	Continental tempéré humide	0,71436	Hanovre	Océanique tempérée	0,93145	Lindenberg	Continental tempéré humide	0,68974	Saarbrücken	Océanique tempérée	0,90588
Caracassone	Continental tempéré humide	0,71461	Cap de la Heu	Océanique tempérée	0,93206	Worms	Continental tempéré humide	0,69206	Saarbrücken	Océanique tempérée	0,90781
Innsbruck	Continental tempéré humide	0,71505	Metz	Océanique tempérée	0,93265	Seta	Méditerranéen chaud	0,69032	Schiphol	Océanique tempérée	0,90823
Belone Aero	Méditerranéen chaud	0,71519	Vestmannaey	Océanique tempérée	0,93305	Soville	Continental tempéré humide	0,69107	Metz	Océanique tempérée	0,90887
Milan	Semi-aride froid	0,71569	Sodankylä	Continental frost subarctic	0,9354	List-Syit	Océanique tempérée	0,69155	Luxembourg	Océanique tempérée	0,90778
Murcia	Semi-aride froid	0,71599	Sarajevo	Océanique tempérée	0,93564	Sjutluff	Océanique tempérée	0,69177	Luxembourg	Océanique tempérée	0,90808
Logrono	Océanique tempérée	0,71656	Soria	Continental tempéré humide	0,93737	Stykkisholmu	Continental tempéré humide	0,69217	Toulouse	Océanique tempérée	0,90878
San Sebastia	Océanique tempérée	0,71744	Reykjavik	Continental frost subarctic	0,9377	Sonnblick	Océanique tempérée	0,69291	Vestmannaey	Océanique tempérée	0,91076
Sargosse	Océanique tempérée	0,71857	Lieuwarden	Océanique tempérée	0,93783	Tegshavn	Océanique tempérée	0,69491	Ile de Groix	Océanique tempérée	0,91076
Aachen	Océanique tempérée	0,71877	Zurich	Océanique tempérée	0,94068	Murcia Alcantar	Semi-aride froid	0,69484	Logrono	Océanique tempérée	0,91076
Hurbanovo	Continental tempéré humide	0,72192	Madril Cuatrovros	Océanique tempérée	0,94084	Soria	Océanique tempérée	0,69675	Hanovre	Océanique tempérée	0,91207
San Sebastia	Méditerranéen tempéré	0,72192	Langres	Océanique tempérée	0,942	Sargesse	Océanique tempérée	0,69729	Sarajevo	Océanique tempérée	0,9127
Saentis	Toundra	0,72252	Magdeburg	Océanique tempérée	0,94205	Split Marjan	Méditerranéen chaud	0,69799	Malaga	Méditerranéen chaud	0,91276
Duis	Continental tempéré humide	0,72385	De de Groix	Océanique tempérée	0,94222	Alkama New	Continental tempéré humide	0,69828	Soria	Océanique tempérée	0,91276
Strading	Océanique tempérée	0,7238	Malaga	Méditerranéen chaud	0,94229	Ljubljana	Océanique tempérée	0,70291	Saltzbourg	Continental tempéré humide	0,91387
Schleswig	Océanique tempérée	0,7253	Valencia	Océanique tempérée	0,94299	Strasbourg	Océanique tempérée	0,70295	Saltzbourg	Continental tempéré humide	0,91387
Basel	Continental tempéré humide	0,72638	Daroca	Semi-aride froid	0,94398	Cluj Napoca	Océanique tempérée	0,70305	Saltzbourg	Continental tempéré humide	0,91387
Uman	Continental tempéré humide	0,72788	Schiering	Océanique tempérée	0,94504	Strasbourg	Continental tempéré humide	0,7034	Augsburg	Océanique tempérée	0,92074
Pjarnu	Continental tempéré humide	0,72897	Soritz	Continental tempéré humide	0,94549	Stykkisholmu	Toundra	0,70511	Daroca	Semi-aride froid	0,92134
Cagliari	Continental tempéré humide	0,72916	Huesca	Océanique tempérée	0,94579	Cluj Napoca	Continental tempéré humide	0,707	Sodankylä	Continental frost subarctic	0,92212
Rome	Méditerranéen chaud	0,72979	Caracassone	Océanique tempérée	0,9462	Lubyu	Continental tempéré humide	0,7072	Caracassone	Continental tempéré humide	0,92233
Leuwarden	Océanique tempérée	0,73139	Stykkisholmu	Toundra	0,9503	Cluj Napoca	Continental tempéré humide	0,70734	Caracassone	Continental tempéré humide	0,92233
Valkenburg	Océanique tempérée	0,73234	Hoppon	Toundra	0,951	Tartu	Continental tempéré humide	0,70822	Hof	Continental tempéré humide	0,92293
Rostock	Océanique tempérée	0,73281	Hof	Continental tempéré humide	0,9518	Luigeno	Continental tempéré humide	0,71021	Wurzburg	Continental tempéré humide	0,92367
Graz	Continental tempéré humide	0,7341	Worms	Continental tempéré humide	0,95253	Reykjavik	Continental frost subarctic	0,71292	Verdoo	Toundra	0,92413
Hanovre	Océanique tempérée	0,73645	Strasbourg	Continental tempéré humide	0,9528	Tegshavn	Océanique tempérée	0,71299	Huesca	Océanique tempérée	0,92485
Landenberg	Continental tempéré humide	0,73667	Tarifa	Continental tempéré humide	0,95308	Dalatang	Océanique tempérée	0,71378	Magdeburg	Continental tempéré humide	0,92509
Arad	Continental tempéré humide	0,73683	Salsbourg	Continental tempéré humide	0,95308	Nancy	Méditerranéen tempéré	0,71485	Magdeburg	Continental tempéré humide	0,92784
Daroca	Continental tempéré humide	0,73776	Kassel	Continental tempéré humide	0,95345	Beaucon	Océanique tempérée	0,71527	Verdoo	Continental tempéré humide	0,92809
Hof	Continental tempéré humide	0,73805	Wisslingen	Continental tempéré humide	0,95355	Verone	Océanique tempérée	0,71602	Schwerin	Continental tempéré humide	0,92908
Vienne	Continental tempéré humide	0,73829	Ypsilanti	Continental tempéré humide	0,95361	Navacera	Méditerranéen tempéré	0,71646	Kassel	Océanique tempérée	0,92932
Augsburg	Continental tempéré humide	0,73877	Augsburg	Océanique tempérée	0,95373	De Bilt	Océanique tempérée	0,71713	Visslingen	Océanique tempérée	0,92988
ha Klement	Continental tempéré humide	0,73922	Luxembourg	Océanique tempérée	0,95373	Torrevieja	Semi-aride froid	0,71708	Zamora	Semi-aride froid	0,92988
Erft	Continental tempéré humide	0,74033	Leuwarden	Océanique tempérée	0,95373	Tortosa	Méditerranéen chaud	0,71733	Niz	Océanique tempérée	0,93008
Visslingen	Océanique tempérée	0,74033	Gospic	Semi-aride froid	0,95373	Avignon	Océanique tempérée	0,71771	Landenberg	Continental tempéré humide	0,93178
Cluj Napoca	Continental tempéré humide	0,74033	Barcelona Aero	Semi-aride froid	0,95373	Avignon	Océanique tempérée	0,71771	Barcelona Aero	Méditerranéen chaud	0,93311
Kiev	Continental tempéré humide	0,74499	Molina	Semi-aride froid	0,95484	Reykjavik	Océanique tempérée	0,71778	Gospic	Océanique tempérée	0,93362
Cap de la Heu	Océanique tempérée	0,74572	Nordby	Océanique tempérée	0,95511	Rijeka	Océanique tempérée	0,71856	Osjeak	Océanique tempérée	0,93427
Meiz	Continental tempéré humide	0,74718	Murcia	Continental tempéré humide	0,95521	Dublin	Océanique tempérée	0,71909	Malaga	Semi-aride froid	0,93445
ukania Nov	Continental tempéré humide	0,74733	Schvervin	Continental tempéré humide	0,95624	Endhoven	Océanique tempérée	0,71968	Tarifa	Méditerranéen chaud	0,93545
Mont Aligoua	Océanique tempérée	0,74843	Riga	Continental tempéré humide	0,95633	Valkenburg	Océanique tempérée	0,72007	Belgrade	Océanique tempérée	0,9363
Marseille	Méditerranéen tempéré	0,74847	Reykjavik	Océanique tempérée	0,95633	Toulouse	Océanique tempérée	0,72142	Belgrade	Océanique tempérée	0,9363
Cluj Napoca	Continental tempéré humide	0,74847	Rostock	Océanique tempérée	0,95633	Toulouse	Océanique tempérée	0,72142	Belgrade	Océanique tempérée	0,9363
Goritz	Continental tempéré humide	0,74961	Zamora	Semi-aride froid	0,95633	Reykjavik	Océanique tempérée	0,72275	Rostock	Océanique tempérée	0,93815
Luxembourg	Continental tempéré humide	0,74995	Nimes	Méditerranéen chaud	0,95725	Reykjavik	Océanique tempérée	0,72275	Rostock	Océanique tempérée	0,93815
Malaga	Méditerranéen chaud	0,74998	Nimes	Méditerranéen chaud	0,95725	Rijeka	Océanique tempérée	0,72338	Marseille	Méditerranéen tempéré	0,94017
Feodosia	Continental tempéré humide	0,75017	Nimes	Méditerranéen chaud	0,95725	Valldolid	Semi-aride froid	0,72347	Nordby	Océanique tempérée	0,94032
Burgos	Méditerranéen chaud	0,75133	Cluj Napoca	Continental tempéré humide	0,95725	Feodosia	Semi-aride froid	0,72373	Montelmar	Méditerranéen tempéré	0,9413
Split Marjan	Méditerranéen tempéré	0,75149	Beaucon	Océanique tempérée	0,95725	Feodosia	Semi-aride froid	0,72373	Tartu	Continental tempéré humide	0,94139
Sarajevo	Méditerranéen tempéré	0,75308	Belgrade	Océanique tempérée	0,95524	Madrid Cuatrovros	Semi-aride froid	0,73078	Saragosse	Continental tempéré humide	0,94139
Leon Virgen	Méditerranéen tempéré	0,75368	Basel	Continental tempéré humide	0,95524	Lindenberg	Continental tempéré humide	0,73078	Saragosse	Continental tempéré humide	0,94139
Madrid Gest	Semi-aride froid	0,75386	Lindenberg	Continental tempéré humide	0,95767	Madrid Cuatrovros	Semi-aride froid	0,73078	Saragosse	Continental tempéré humide	0,94139
Langres	Océanique tempérée	0,75402	Marseille	Méditerranéen tempéré	0,95767	Nicolas	Continental tempéré humide	0,73121	Riga	Continental tempéré humide	0,94244
Huesca	Océanique tempérée	0,75485	Saragosse	Semi-aride froid	0,95818	Nicolas	Continental tempéré humide	0,73121	Riga	Continental tempéré humide	0,94244
Leuwarden	Océanique tempérée	0,75509	Albacete	Continental tempéré humide	0,95848	Nicolas	Continental tempéré humide	0,73121	Riga	Continental tempéré humide	0,94244
Luv	Continental tempéré humide	0,75928	Erfurt	Continental tempéré humide	0,95848	Verone	Océanique tempérée	0,73268	Cagliari	Continental tempéré humide	0,94336
Nicolas	Continental tempéré humide	0,75928	Moscow	Continental tempéré humide	0,95848	Verone	Océanique tempérée	0,73268	Valencia	Océanique tempérée	0,94336
Magdeburg	Continental tempéré humide	0,76143	Vestvri	Océanique tempérée	0,97014	Vestvri	Continental tempéré humide	0,73367	Rijeka	Océanique tempérée	0,94324
Sonnblick	Continental tempéré humide	0,76143	Tartu	Continental tempéré humide	0,97121	Vestvri	Continental tempéré humide	0,73367	Prerebraz	Continental tempéré humide	0,94324
Coruna	Méditerranéen tempéré	0,76301	Vienne	Continental tempéré humide	0,97121	Nimes	Méditerranéen chaud	0,73392	Brindisi	Méditerranéen chaud	0,94575
Schiering	Continental tempéré humide	0,76326	Voru	Continental tempéré humide	0,97121	Malaga	Méditerranéen chaud	0,73444	Tortosa	Méditerran	

Pays	Ville	Climat (Köppen)	Zone ano.	Zone primit.	Pays	Ville	Climat (Köppen)	Zone ano.	Zone primit.
Ukraine	Ai Petri	Océanique chaud humide	1	1	Espagne	Burgos	Océanique tempéré	1,5	1
Croatie	Gospic	Océanique chaud humide	1	1	France	Cap de la Heve	Océanique tempéré	1,5	1
Allemagne	Aachen	Océanique tempéré	1	1	France	Le Mans	Océanique tempéré	1,5	1
Royaume-Uni	Armagh	Océanique tempéré	1	1	Pays-Bas	Leeuwarden	Océanique tempéré	1,5	1
Allemagne	Augsburg	Océanique tempéré	1	1	Pays-Bas	Vlissingen	Océanique tempéré	1,5	1
France	Besancon	Océanique tempéré	1	1	Espagne	Ponferrada	Méditerranéen tempéré	1,5	1
France	Carcassonne	Océanique tempéré	1	1	Espagne	Daroca	Semi-aride froid	1,5	1
Royaume-Uni	Central England	Océanique tempéré	1	1	Finlande	Sodankyla	Continental froid subarctique	1,5	1
France	Cognac	Océanique tempéré	1	1	Allemagne	Gorlitz	Continental tempéré humide	1,5	1
Pays-Bas	De Bilt	Océanique tempéré	1	1	Allemagne	Magdeburg	Continental tempéré humide	1,5	1
Irlande	Dublin	Océanique tempéré	1	1	Espagne	Bilbao	Océanique tempéré	2	1
Pays-Bas	Eindhoven	Océanique tempéré	1	1	Espagne	Huesca	Océanique tempéré	2	1
Allemagne	Hanovre	Océanique tempéré	1	1	Luxembourg	Luxembourg	Océanique tempéré	2	1
France	Langres	Océanique tempéré	1	1	Allemagne	Schleswig	Océanique tempéré	2	1
Espagne	Logrono	Océanique tempéré	1	1	Espagne	Soria	Océanique tempéré	2	1
France	Metz	Océanique tempéré	1	1	Espagne	Malaga	Méditerranéen chaud	2	1
France	Nancy	Océanique tempéré	1	1	Espagne	Coruna	Méditerranéen tempéré	2	1
France	Orleans	Océanique tempéré	1	1	Espagne	Navacerrada	Méditerranéen tempéré	2	1
France	Paris	Océanique tempéré	1	1	Espagne	Valladolid	Semi-aride froid	2	1
France	Rennes	Océanique tempéré	1	1	Finlande	Jyvaskyla	Continental froid subarctique	2	1
Allemagne	Saarbrucken	Océanique tempéré	1	1	France	Ile de Groix	Océanique tempéré	2,5	1
Espagne	San Sebastian	Océanique tempéré	1	1	Danemark	Nordby	Océanique tempéré	3	1
Pays-Bas	Schiphol	Océanique tempéré	1	1	Espagne	Tarifa	Méditerranéen chaud	3	1
France	Strasbourg	Océanique tempéré	1	1	Islande	Reykjavik	Continental froid subarctique	3	1
France	Toulouse	Océanique tempéré	1	1	Allemagne	Kassel	Continental tempéré humide	3	1
Pays-Bas	Twenthe	Océanique tempéré	1	1	Norvège	Bjoernoeya	Toundra	3	1
Irlande	Valencia	Océanique tempéré	1	1	Islande	Dalatangi	Toundra	3	1
Pays-Bas	Valkenburg	Océanique tempéré	1	1	Norvège	Hopen	Toundra	3	1
Espagne	Leon Virgen	Méditerranéen tempéré	1	1	Islande	Stykkisholmur	Toundra	3	1
France	Mont Aigoual	Continental froid	1	1	Islande	Teigarhorn	Toundra	3	1
Suisse	Basel	Continental tempéré humide	1	1	Norvège	Vardoe	Toundra	3	1
Allemagne	Fichtelberg	Continental tempéré humide	1	1	Islande	Vestmannaeyjar	Toundra	3	1
Allemagne	Hof	Continental tempéré humide	1	1	Turquie	Rize	Océanique chaud humide	1	1,5
Autriche	Innsbruck	Continental tempéré humide	1	1	France	Montelimar	Océanique tempéré	1	1,5
Autriche	Salsbourg	Continental tempéré humide	1	1	Serbie	Nis	Océanique tempéré	1	1,5
Bosnie	Sarajevo	Continental tempéré humide	1	1	Espagne	Barcelone	Méditerranéen chaud	1	1,5
Allemagne	Wurzburg	Continental tempéré humide	1	1	France	Nimes	Méditerranéen chaud	1	1,5
Suisse	Zurich	Continental tempéré humide	1	1	France	Marseille	Méditerranéen tempéré	1,5	1,5
Suisse	Saentis	Toundra	1	1	Espagne	Molina	Semi-aride froid	1,5	1,5
Autriche	Sonnblick	Toundra	1	1	Allemagne	Erfurt	Continental tempéré humide	1,5	1,5
France	Beauvais-Tille	Océanique tempéré	1,5	1	Espagne	Salamanca	Semi-aride froid	2	1,5

Pays	Ville	Climat (Köppen)	Zone ano.	Zone primit.	Pays	Ville	Climat (Köppen)	Zone ano.	Zone primit.
Allemagne	Lindenberg	Continental tempéré humide	2	1,5	Italie	Bologne	Océanique chaud humide	1	3
Allemagne	Schwerin	Continental tempéré humide	2	1,5	Italie	Verone	Océanique chaud humide	1	3
Allemagne	Rostock	Continental tempéré humide	2,5	1,5	Croatie	Lastovo	Méditerranéen chaud	1	3
Estonie	Voru	Continental tempéré humide	2,5	1,5	Ukraine	Kerch	Continental chaud humide	1	3
Lettonie	Riga	Continental tempéré humide	3	1,5	Slovénie	Ljubljana	Continental froid	1	3
Lituanie	Siauliai	Continental tempéré humide	3	1,5	Roumanie	Bucarest	Continental tempéré humide	1	3
Estonie	Tartu	Continental tempéré humide	3	1,5	Roumanie	Buzau	Continental tempéré humide	1	3
Danemark	Vestervig	Continental tempéré humide	3	1,5	Autriche	Graz	Continental tempéré humide	1	3
Serbie	Belgrade	Océanique chaud humide	1	2	Turquie	Kastamonu	Continental tempéré humide	1	3
Italie	Brindisi	Méditerranéen chaud	1	2	Croatie	Osijek	Continental tempéré humide	1	3
Sardaigne	Cagliari	Méditerranéen chaud	1	2	Ukraine	Feodosia	Océanique chaud humide	1,5	3
Croatie	Hvar	Méditerranéen chaud	1	2	Suisse	Lugano	Océanique tempéré	1,5	3
Turquie	Istanbul	Méditerranéen chaud	1	2	Ukraine	Askania Nova	Continental chaud humide	1,5	3
France	Sete	Méditerranéen chaud	1	2	Roumanie	Cluj Napoca	Continental tempéré humide	1,5	3
Croatie	Split Marjan	Méditerranéen chaud	1	2	Autriche	Kremsmuenster	Continental tempéré humide	1,5	3
Roumanie	Calarasi	Continental chaud humide	1	2	Espagne	St.Jacques de Comp.	Océanique tempéré	2	3
Slovaquie	Hurbanovo	Continental chaud humide	1	2	Ukraine	Nikolaev	Continental chaud humide	2	3
Autriche	Vienne	Continental tempéré humide	1,5	2	Ukraine	Lviv	Continental tempéré humide	2	3
Espagne	Barcelone Aeroport	Méditerranéen chaud	2	2	Ukraine	Uman	Continental tempéré humide	2	3
Espagne	Tortosa	Méditerranéen chaud	2	2	Ukraine	Uzhorod	Continental tempéré humide	2	3
Espagne	Madrid Cuatrovientos	Semi-aride froid	2	2	Italie	Milan	Océanique chaud humide	2,5	3
Espagne	Madrid Getafe	Semi-aride froid	2	2	Croatie	Rijeka	Océanique chaud humide	2,5	3
Espagne	Saragosse	Semi-aride froid	2	2	Espagne	Grenade	Semi-aride froid	2,5	3
Espagne	Valence	Semi-aride froid	2	2	Ukraine	Kiev	Continental tempéré humide	2,5	3
Espagne	Zamora	Semi-aride froid	2	2	Allemagne	List-Sylt	Océanique tempéré	3	3
Espagne	Seville	Méditerranéen chaud	2,5	2	Norvège	Utsira	Océanique tempéré	3	3
Espagne	Albacete	Semi-aride froid	3	2	Allemagne	Westermarcksdorf	Océanique tempéré	3	3
Espagne	Murcie	Semi-aride froid	3	2	Espagne	Torreveja	Semi-aride froid	3	3
Espagne	Murcie Alcantarilla	Semi-aride froid	3	2	Arménie	Gavar	Continental chaud humide	3	3
Biélorussie	Brestk	Continental tempéré humide	3	2	Allemagne	Greifswald	Continental tempéré humide	3	3
Norvège	Oslo	Continental tempéré humide	3	2	Finlande	Helsinki	Continental tempéré humide	3	3
Lituanie	Vilnius	Continental tempéré humide	3	2	Lituanie	Klapeida	Continental tempéré humide	3	3
Croatie	Zagreb	Océanique chaud humide	1	2,5	Ukraine	Lubny	Continental tempéré humide	3	3
Italie	Rome	Méditerranéen chaud	1	2,5	Estonie	Pjarnu	Continental tempéré humide	3	3
Roumanie	Arad	Continental tempéré humide	1,5	2,5	Ukraine	Poltava	Continental tempéré humide	3	3
Turquie	Isparta	Méditerranéen chaud	2	2,5	Ukraine	Shepetivka	Continental tempéré humide	3	3
Espagne	Madrid Retiro	Semi-aride froid	2	2,5	Allemagne	Straubing	Continental tempéré humide	3	3
Rép. Tchèque	Praha Klementinum	Continental tempéré humide	2	2,5	Estonie	Tallinn	Continental tempéré humide	3	3
Espagne	Alicante	Semi-aride froid	3	2,5	Norvège	Torungen	Continental tempéré humide	3	3
Lituanie	Kaunas	Continental tempéré humide	3	2,5	Danemark	Tranebjerg	Continental tempéré humide	3	3
Estonie	Vilsandi	Continental tempéré humide	3	2,5					

FIGURE B.7 – La répartition des stations dans les différentes zones définies au tableau 5.8. Il ne faut pas oublier que, pour certaines stations, un second climat est acceptable selon la classification de Köppen.

Pays	Ville	Climat (Nos critères)	Pays	Ville	Climat (Nos critères)
Allemagne	Aachen	Océanique	Espagne	Huesca	Océanique
Ukraine	Ai Petri	Océanique	Slovaquie	Hurbanovo	Médit./semi-aride
Espagne	Albacete	Continental	Croatie	Hvar	Médit./semi-aride
Espagne	Alicante	Continental	France	Ile de Groix	Océanique
Roumanie	Arad	Médit./semi-aride	Autriche	Innsbruck	Océanique
Royaume-Uni	Armagh	Océanique	Turquie	Isparta	Médit./semi-aride
Ukraine	Askaniia Nova	Continental	Turquie	Istanbul	Médit./semi-aride
Allemagne	Augsburg	Océanique	Finlande	Jyvaskyla	Océanique
Espagne	Barcelone	Océanique	Allemagne	Kassel	Toundra
Espagne	Barcelone Aeroport	Médit./semi-aride	Turquie	Kastamonu	Continental
Suisse	Basel	Océanique	Lituanie	Kaunas	Continental
France	Beauvais-Tille	Océanique	Ukraine	Kerch	Continental
Serbie	Belgrade	Médit./semi-aride	Ukraine	Kiev	Continental
France	Besancon	Océanique	Lituanie	Klapeida	Continental
Espagne	Bilbao	Océanique	Autriche	Kremsmuenster	Continental
Norvège	Bjoernoeya	Toundra	France	Langres	Océanique
Italie	Bologne	Continental	Croatie	Lastovo	Continental
Biélorussie	Brestk	Continental	France	Le Mans	Océanique
Italie	Brindisi	Médit./semi-aride	Pays-Bas	Leeuwarden	Océanique
Roumanie	Bucarest	Continental	Espagne	Leon Virgen	Océanique
Espagne	Burgos	Océanique	Allemagne	Lindenberg	Médit./semi-aride
Roumanie	Buzau	Continental	Allemagne	List-Sylt	Continental
Sardaigne	Cagliari	Médit./semi-aride	Slovénie	Ljubljana	Continental
Roumanie	Calarasi	Médit./semi-aride	Espagne	Logrono	Océanique
France	Cap de la Heve	Océanique	Ukraine	Lubny	Continental
France	Carcassonne	Océanique	Suisse	Lugano	Continental
Royaume-Uni	Cet Central England	Océanique	Luxembourg	Luxembourg	Océanique
Roumanie	Cluj Napoca	Continental	Ukraine	Lviv	Continental
France	Cognac	Océanique	Espagne	Madrid Cuatrovientos	Médit./semi-aride
Espagne	Coruna	Océanique	Espagne	Madrid Getafe	Médit./semi-aride
Islande	Dalatangi	Toundra	Espagne	Madrid Retiro	Médit./semi-aride
Espagne	Daroca	Océanique	Allemagne	Magdeburg	Océanique
Pays-Bas	De Bilt	Océanique	Espagne	Malaga	Océanique
Irlande	Dublin	Océanique	France	Marseille	Médit./semi-aride
Pays-Bas	Eindhoven	Océanique	France	Metz	Océanique
Allemagne	Erfurt	Médit./semi-aride	Italie	Milan	Continental
Ukraine	Feodosiia	Continental	Espagne	Molina	Médit./semi-aride
Allemagne	Fichtelberg	Océanique	France	Mont Aigoual	Océanique
Arménie	Gavar	Continental	France	Montelimar	Océanique
Allemagne	Gorlitz	Océanique	Espagne	Murcie	Continental
Croatie	Gospic	Océanique	Espagne	Murcie Alcantarilla	Continental
Autriche	Graz	Continental	France	Nancy	Océanique
Allemagne	Greifswald	Continental	Espagne	Navacerrada	Océanique
Espagne	Grenade	Continental	Ukraine	Nikolaev	Continental
Allemagne	Hanovre	Océanique	France	Nimes	Océanique
Finlande	Helsinki	Continental	Serbie	Nis	Océanique
Allemagne	Hof	Océanique	Danemark	Nordby	Toundra
Norvège	Hopen	Toundra	France	Orleans	Océanique

Pays	Ville	Climat (Nos critères)	Pays	Ville	Climat (Nos critères)
Croatie	Osijek	Continental	Ukraine	Uzhhorod	Continental
Norvège	Oslo	Continental	Espagne	Valence	Médit./semi-aride
France	Paris	Océanique	Irlande	Valencia	Océanique
Estonie	Pjarnu	Continental	Pays-Bas	Valkenburg	Océanique
Ukraine	Poltava	Continental	Espagne	Valladolid	Océanique
Espagne	Ponferrada	Océanique	Norvège	Vardoe	Toundra
Rép. Tchèque	Praha Klementinum	Médit./semi-aride	Italie	Verone	Continental
France	Rennes	Océanique	Danemark	Vestervig	Continental
Islande	Reykjavik	Toundra	Islande	Vestmannaeyjar	Toundra
Lettonie	Riga	Continental	Autriche	Vienne	Médit./semi-aride
Croatie	Rijeka	Continental	Lituanie	Vilnius	Continental
Turquie	Rize	Océanique	Estonie	Vilsandi	Continental
Italie	Rome	Médit./semi-aride	Pays-Bas	Vlissingen	Océanique
Allemagne	Rostock	Continental	Estonie	Voru	Continental
Allemagne	Saarbrücken	Océanique	Allemagne	Westermarkelsdorf	Continental
Suisse	Saentis	Océanique	Allemagne	Wurzburg	Océanique
Espagne	St Jacques de Compo.	Continental	Croatie	Zagreb	Médit./semi-aride
Espagne	Salamanca	Médit./semi-aride	Espagne	Zamora	Médit./semi-aride
Autriche	Salsbourg	Océanique	Suisse	Zurich	Océanique
Espagne	San Sebastian	Océanique			
Espagne	Saragosse	Médit./semi-aride			
Bosnie	Sarajevo	Océanique			
Pays-Bas	Schiphol	Océanique			
Allemagne	Schleswig	Océanique			
Allemagne	Schwerin	Médit./semi-aride			
France	Sete	Médit./semi-aride			
Espagne	Seville	Continental			
Ukraine	Shepetivka	Continental			
Lituanie	Siauliai	Continental			
Finlande	Sodankyla	Océanique			
Autriche	Sonnblick	Océanique			
Espagne	Soria	Océanique			
Croatie	Split Marjan	Médit./semi-aride			
France	Strasbourg	Océanique			
Allemagne	Straubing	Continental			
Islande	Stykkisholmur	Toundra			
Estonie	Tallinn	Continental			
Espagne	Tarifa	Toundra			
Estonie	Tartu	Continental			
Islande	Teigarhorn	Toundra			
Espagne	Torre Vieja	Continental			
Espagne	Tortosa	Médit./semi-aride			
Norvège	Torungen	Continental			
France	Toulouse	Océanique			
Danemark	Tranebjerg	Continental			
Pays-Bas	Twenthe	Océanique			
Ukraine	Uman	Continental			
Norvège	Utsira	Continental			
Ukraine	Uzhhorod	Continental			
Espagne	Valence	Médit./semi-aride			
Irlande	Valencia	Océanique			
Pays-Bas	Valkenburg	Océanique			
Espagne	Valladolid	Océanique			
Norvège	Vardoe	Toundra			
Italie	Verone	Continental			
Danemark	Vestervig	Continental			
Islande	Vestmannaeyjar	Toundra			
Autriche	Vienne	Médit./semi-aride			
Lituanie	Vilnius	Continental			
Estonie	Vilsandi	Continental			
Pays-Bas	Vlissingen	Océanique			
Estonie	Voru	Continental			
Allemagne	Westermarkelsdorf	Continental			
Allemagne	Wurzburg	Océanique			
Croatie	Zagreb	Médit./semi-aride			
Espagne	Zamora	Médit./semi-aride			
Suisse	Zurich	Océanique			

FIGURE B.8 – Les climats que nos critères associent à chaque station.

Annexe C

Codes personnels

C.1 Mise en forme des différents signaux

Lorsque nous récoltons des données, celles-ci sont écrites dans un fichier *.txt* qui, après effacement des caractères inutiles en début de fichier, s'écrit sous la forme illustrée à la figure C.1.

TABLE C.1 – Forme brute des données recueillies.

1227	101227	19270306	-9999	9
1227	101227	19270307	-9999	9
1227	101227	19270308	-9999	9
1227	101227	19270309	115	0
1227	101227	19270310	168	0
1227	101227	19270311	140	0
1227	101227	19270312	135	0

Les deux premières colonnes nous sont inutiles, ce sont des références concernant la station ; la troisième représente la date, écrite sous la forme AAAAMMJJ. La quatrième colonne est la température moyenne correspondante, et la cinquième un indice de qualité de la température moyenne relevée. Cette dernière colonne peut prendre les valeurs 0 (donnée fiable), 1 (donnée suspecte) et 9 (donnée manquante, auquel cas le nombre -9999 est indiqué au lieu de la température). Il va de soi que nous avons systématiquement éliminé les lignes correspondant à des données manquantes. A partir de ce format de données, nous avons écrit le code suivant, qui sélectionne les données de la période considérée, détermine le bruit, l'anomalie, et la primitive du signal initial. Ce code n'est probablement pas aussi optimisé qu'il pourrait l'être, mais il fonctionne et nous donne les résultats attendus. Le voici :

```
int data_to_signal_bruit_anomalie_somme(int debut,int fin,
```

```
char *name, char *name_signal, char *name_Bruit_signal,
char *name_Anomalie_signal, char *name_Somme_signal)
{
    FILE* data = NULL ;
    FILE* signal = NULL ;
    FILE* bruit = NULL;
    FILE* anomalie = NULL;
    FILE* somme = NULL;
    int *dates, *donnees ;
    int size, a, b, c, d, e, j, i, k, sizerot ;
    int compteur[12] = {0};
    double *aux;
    double moyenne[12] = {0};
    double y=0;

    data = fopen(name, "r+");

    if (data != NULL)
    {

        for(size=0, sizerot=0; !feof(data); size++, sizerot++)
        {
            fscanf(data, " %d,%d,%d, %d, %d\n", &a, &b, &c, &d, &e);
            if(e == 9 || d == -9999) size-- ;
        }
        printf("Donnees totales : %d\nDonnees manquantes :
%d\nDonnees totales disponibles : %d\n\n", sizerot, sizerot-size, size) ;
        rewind(data) ;

        dates = malloc(size*sizeof(int)) ;
        donnees = malloc(size*sizeof(int)) ;

        i = 0 ;

        for(j=0; j<sizerot; j++)
        {
            fscanf(data, " %d,%d,%d, %d, %d\n", &a, &b, &c, &d, &e);
            if(e != 9 && d != -9999)
            {
```

```
    dates[i] = c ;
    donnees[i] = d ;
    i++ ;
}

}

signal = fopen(name_signal,"w+") ;
bruit = fopen(name_Bruit_signal,"w+") ;
anomalie = fopen(name_Anomalie_signal,"w+") ;
    somme = fopen(name_Somme_signal,"w+");

if(debut==0)
{
for(i=0;i<size;i++)
{
    fprintf(signal,"%d %d\n",i,donnees[i]);
    fprintf(somme,"%d %lf\n",i,y+donnees[i]);
    y += (float)donnees[i];
}

y = 0;

for(i=0;i<size;i++)
{
dates[i] = (int) floor((dates[i]%10000)/100) ;
compteur[dates[i]-1]++;
moyenne[dates[i]-1]+= donnees[i];
}

for(j=0;j<12;j++)
{
moyenne[j] /= compteur[j];
//printf("%f\n",moyenne[j]);
}

for(i = 0;i<size;i++)
{
fprintf(bruit,"%d %lf\n",i,donnees[i]-moyenne[dates[i]-1]);
```

```
fprintf(anomalie,"%d %lf\n",i,y+donnees[i]-moyenne[dates[i]-1]);
y += donnees[i]-moyenne[dates[i]-1];
}
}
if(debut>0)
{
aux = malloc(size*sizeof(double)) ;
k = 0;

for(i=0;i<size;i++)
{
aux[i] = dates[i]/10000;

if(debut <= aux[i] && aux[i] < fin+1)
{
fprintf(signal,"%d %d\n",k,donnees[i]);
fprintf(somme,"%d %lf\n",k,y+donnees[i]);
y += donnees[i];
k++;
}
}

y = 0;
k = 0;
for(i=0;i<size;i++)
{
if(debut <= aux[i] && aux[i] < fin+1)
{
dates[i] = (int) floor((dates[i]%10000)/100) ;
compteur[dates[i]-1]++;
moyenne[dates[i]-1]+= donnees[i];
}
}

for(j=0;j<12;j++)
{
moyenne[j] /= compteur[j];
//printf("%f\n",moyenne[j]);
}
```

```
for(i = 0;i<size;i++)
{
if(debut <= aux[i] && aux[i] < fin+1)
{
fprintf(bruit,"%d %lf\n",k,donnees[i]-moyenne[dates[i]-1]);
fprintf(anomalie,"%d %lf\n",k,y+donnees[i]-moyenne[dates[i]-1]);
y += donnees[i]-moyenne[dates[i]-1];
k++;
}
}

fclose(data);
fclose(signal);
fclose(bruit);
fclose(anomalie);
fclose(somme);
return 0;
}
else
{
printf("Impossible d'ouvrir le fichier %s\n",name);
return 1;
}
}
```

C.2 Obtention du sommet de la parabole de régression

Voici le code VBA utilisé pour déterminer l'abscisse du sommet des paraboles de régression des différents spectres, tronqués, pour ne garder que les 25% des points ayant les plus grandes ordonnées.

```
Private Sub Boucle()
```

```
Dim k As Long
```

```
Dim nom As String
```

```
k = 1
```

```
Application.ScreenUpdating = False
ChDir Chemin
Fichier = Dir(Chemin & "*.txt")
Do While Fichier <> ""
    Workbooks.Open Chemin & Fichier
    nom = ActiveWorkbook.Name
    Call Sommet(k)
    Windows(nom).Activate
    ActiveWorkbook.Close False
    Fichier = Dir
    k = k + 1
Loop
Application.ScreenUpdating = True
End Sub

Private Sub Sommet(ligne)

    Dim i As Byte, Nb As Byte
    Dim Cible As String, Resultat As String
    Dim Nombre As Double

    Columns("A:A").Select
    Selection.Replace What:=".", Replacement:=",", LookAt:=xlPart, _
        SearchOrder:=xlByRows, MatchCase:=False, SearchFormat:=False, _
        ReplaceFormat:=False
    Selection.TextToColumns Destination:=Range("A1"), _
        DataType:=xlDelimited, TextQualifier:=xlDoubleQuote, _
        ConsecutiveDelimiter:=True, Tab:=True, Semicolon:=False, _
        Comma:=False, Space:=True, Other:=False, FieldInfo _
        :=Array(Array(1, 1), Array(2, 1)), TrailingMinusNumbers:=True

    Range("A1:B79").Select
    ActiveSheet.Sort.SortFields. _
        Clear
    ActiveSheet.Sort.SortFields.Add _
        Key:=Range("B1:B79"), SortOn:=xlSortOnValues, _
        Order:=xlDescending, DataOption:=xlSortNormal
    With ActiveSheet.Sort
```



```
.SetRange Range("A1:B79")
.Header = xlGuess
.MatchCase = False
.Orientation = xlTopToBottom
.SortMethod = xlPinYin
.Apply
End With

Range("A1:B20").Select
Selection.Copy
Sheets.Add After:=Sheets(Sheets.Count)
ActiveSheet.Paste

ActiveSheet.Shapes.AddChart.Select
ActiveChart.ChartType = xlXYScatter
ActiveChart.SeriesCollection.NewSeries
ActiveChart.SeriesCollection(1).XValues = _
    "'Feuil1'!$A$1:$A$20"
ActiveChart.SeriesCollection(1).Values = _
    "'Feuil1'!$B$1:$B$20"
ActiveChart.SeriesCollection(1).Select
ActiveChart.SeriesCollection(1).Trendlines.Add
ActiveSheet.ChartObjects("Graphique 1").Activate
ActiveChart.SeriesCollection(1).Trendlines(1).Select
With Selection
    .Type = xlPolynomial
    .Order = 2
End With

Selection.DisplayEquation = True
ActiveSheet.ChartObjects("Graphique 1").Activate
Cible = ActiveChart.SeriesCollection(1).Trendlines(1). _
    DataLabel.Text

Cible = Replace(Cible, "y = ", "")
Cible = Replace(Cible, "x2 + ", " ")
Cible = Replace(Cible, "x - ", " ")
Cible = Replace(Cible, "x + ", " ")
```

```
Windows("Sommets paraboles").Activate
Cells(ligne, 1).Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = Cible
Cells(ligne, 1).Select
Selection.TextToColumns Destination:=Cells(ligne, 1), _
DataType:=xlDelimited, TextQualifier:=xlDoubleQuote, _
ConsecutiveDelimiter:=True, Tab:=True, Semicolon:=False, _
Comma:=False, Space:=True, Other:=False, FieldInfo _
    :=Array(Array(1, 1), Array(2, 1), Array(3, 1), _
    Array(4, 1)), TrailingMinusNumbers:= True
b = Cells(ligne, 2).Value
a = Cells(ligne, 1).Value
c = -b / (2 * a)
Cells(ligne, 6).Value = c
Windows("Villes").Activate
Ville = Cells(ligne, 2).Value
Windows("Sommets paraboles").Activate
Cells(ligne, 5).Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = Ville

End Sub
```

Pour ne pas tronquer les données et utiliser la régression parabolique sur tous les points, il suffit d'utiliser le même code, sans le morceau suivant :

```
ActiveSheet.Sort.SortFields. _
    Clear
ActiveSheet.Sort.SortFields.Add _
    Key:=Range("B1:B79"), SortOn:=xlSortOnValues, _
    Order:=xlDescending, DataOption:=xlSortNormal
With ActiveSheet.Sort
    .SetRange Range("A1:B79")
    .Header = xlGuess
    .MatchCase = False
    .Orientation = xlTopToBottom
    .SortMethod = xlPinYin
    .Apply
End With
Range("A1:B20").Select
```


Bibliographie

- [1] ARNEODO A., MUZY J.F., BACRY E. Wavelets and multifractal formalism for singular signals : application to turbulence data. *Physical Review Letters*. 1991, 67, p. 3515–3518.
- [2] ARNEODO A., et al. Wavelet based fractal analysis of dna sequences. *Physica D : Nonlinear Phenomena*. 1996, 96, p. 291–320.
- [3] ARNEODO A., BACRY E., JAFFARD S. MUZY J.F. Singularity spectrum of multifractal functions involving oscillating singularities. *Journal of Fourier Analysis and Applications*. 1998, 4, p. 159–174.
- [4] BEN SLIMANE, M. *Etude du formalisme multifractal pour les fonctions*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996.
- [5] BESICOVITCH, A. On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points. *Matematische Annalen*. 1928, 98, p. 422–464.
- [6] BUNDE A., KROPP J., SCHELLNHUBER H.J. *The science of disasters : climate disruptions, heart attacks, and market crashes, volume 2*. Springer-Verlag, 2002.
- [7] DAUBECHIES, I. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [8] FALCONER, K. *The geometry of fractal sets*. Cambridge University Press, 1985.
- [9] FALCONER, K. *Techniques in fractal geometry*. John Wiley and sons, 1997.
- [10] FETTWEIS X., NICOLAY S. Several years el niño forecast using a wavelet-based mode decomposition. *In : European Geoscience Union General Assembly*, 2012.
- [11] HARDY, G. H. Weierstrass’s non-differentiable function. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1916, 17, n°3, p. 301–325.
- [12] HIDA, T. *Brownian Motion*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [13] JAFFARD, S. Functions with prescribed hölder exponent. *Applied and Computational Harmonic Analysis*. 1995, 2, p. 400–401.
- [14] JAFFARD, S. Multifractal formalism for functions part ii : self-similar functions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1997, 28, p. 971–998.

- [15] JAFFARD, S. Wavelet techniques in multifractal analysis. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. 2004, 72, p. 91 – 151.
- [16] JAFFARD S., LASHERMES B., ABRY P. Wavelet leaders in multifractal analysis. *Wavelet analysis and applications*. 2006, p. 219–264.
- [17] JAFFARD S., NICOLAY S. Pointwise smoothness of space-filling functions. *Applied and Computational Harmonic Analysis*. 2009, 26, p. 181–199.
- [18] KRANTZ, S.G. Lipschitz spaces, smoothness of functions, and approximation theory. *Expositiones Mathematicae*. 1983, 3, p. 193–260.
- [19] KREIT D., NICOLAY S. Generalized pointwise hölder spaces. 2012.
- [20] KREIT D., NICOLAY S. Some characterizations of generalized hölder spaces. *Mathematische Nachrichten*. 2012, 285, p. 2157–2172.
- [21] LASHERMES, B. *Analyse multifractale pratique : coefficients dominants et ordres critiques. Application à la turbulence pleinement développée. Effets de nombre de Reynolds fini*. Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Lyon, 2005.
- [22] LEGRAND, P. *Débruitage et interpolation par analyse de la régularité hölderienne. Application à la modélisation du frottement pneumatique-chaussée*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2004.
- [23] MALLAT, S. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1999.
- [24] MATTLA, P. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces : Fractals and rectifiability*. Cambridge University Press, 1995.
- [25] MEYER, Y. *Ondelettes et Opérateurs I : Ondelettes*. Hermann, Paris, 1990.
- [26] NICOLAY, S. Analyse multirésolution et applications. Master’s thesis, Université de Liège, 2001.
- [27] NICOLAY, S. *Analyse de séquences ADN par la transformée en ondelettes : extraction d’informations structurelles, dynamiques et fonctionnelles*. Thèse de doctorat, Université de Liège, 2006.
- [28] NICOLAY, S. *Cours de théorie de la mesure*. 2011.
- [29] NICOLAY S., MABILLE G., FETTWEIS X. ERPICUM M. Multi-months cycles observed in climatic data. *Climate Change and Variability*. 2010, p. 27–44.
- [30] NICOLAY S., MABILLE G., FETTWEIS X. ERPICUM M. A statistical validation for the cycles found in air temperature data using a morlet wavelet-based method. *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2010, 17, p. 269 – 272.
- [31] RUDLOFF, W. *World Climates*. Taylor et Francis, 1994.
- [32] SEURET S., GILBERT A. Pointwise hölder exponent estimation in data network traffic. 2000.

-
- [33] TORRESANI, B. Analyse continue par ondelettes. *CNRS Editions, Paris*. 1995.
- [34] WENDT H., ABRY P., JAFFARD S. JI H. SHEN Z. Wavelet leader multifractal analysis for texture classification. *ICIP*. 2009, p. 3829–3832.

