



U N I V E R S I T E D E L I E G E



Faculté des sciences appliquées
Département Aérospatiale et Mécanique

Optimisation topologique de micropoutres en vue de maximiser la tension de pull-in

Etienne Lemaire

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
diplôme d'études approfondies en sciences appliquées

Année académique 2005 – 2006

Remerciements

Je tiens premièrement à remercier Pierre Duysinx pour la disponibilité dont il a fait preuve au quotidien, les nombreux conseils et idées qui m'ont aidé à progresser et la bonne humeur qu'il a su apporter tout au long de cette année de recherche.

Je voudrais remercier ensuite le professeur Claude Fleury pour le support qu'il a apporté au volet optimisation de ce mémoire, ainsi que Véronique Rochus pour toute l'aide et les explications qu'elle a pu fournir à propos de la modélisation multiphysique. De même, mes remerciements vont aux membres d'Open Engineering pour le temps qu'ils ont volontiers consacré à m'initier au logiciel Oofelie.

Finalement, je souhaiterais associer à ces remerciements tous les collègues du LTAS pour l'excellente ambiance qui a régné durant cette année.

Table des matières

Introduction	4
1 Modélisation électromécanique du phénomène de pull-in	6
1.1 Introduction	6
1.2 Phénomène de pull-in dans les microsystèmes électromécaniques	6
1.2.1 Microsystèmes électromécaniques	7
1.2.2 Phénomène de pull-in	8
1.3 Modélisation éléments finis fortement couplée	10
1.3.1 Approche variationnelle	11
1.3.2 Matrice de raideur tangente	12
1.3.3 Résumé	13
1.4 Calcul de la courbe d'équilibre	13
1.4.1 Algorithme de Newton-Raphson	14
1.4.2 Algorithme de Riks-Crisfield	15
1.4.3 Algorithme du normal flow	18
1.5 Conclusion	20
2 Optimisation topologique	21
2.1 Introduction	21
2.2 Méthodes d'optimisation en mécanique	21
2.2.1 Dimensionnement automatique	22
2.2.2 Optimisation de forme	23
2.3 Optimisation topologique	24
2.3.1 Formulation du problème général d'optimisation topologique	24
2.3.2 Régularisation du problème par une approche microstructurale	26
2.3.3 Méthodes alternatives de régularisation	28
2.4 Optimisation topologique de valeurs propres	31
2.5 Optimisation de microsystèmes électromécaniques	34
2.5.1 Optimisation de la tension de pull-in	34
2.5.2 Optimisation topologique d'actionneurs électrothermiques	36
2.5.3 Optimisation topologique d'actionneurs électrostatiques	38
2.6 Conclusion	42
3 Procédure d'optimisation de la tension de pull-in	43
3.1 Introduction	43
3.2 Description du problème d'optimisation	43

3.3	Calcul des sensibilités	45
3.4	Vérification par différences finies	46
3.5	Implémentation de la recherche des conditions de pull-in	48
3.5.1	Algorithme de Riks-Crisfield	48
3.5.2	Algorithme du normal flow	50
3.5.3	Application des méthodes	54
3.5.4	Conclusion	59
3.6	Traitement des modes locaux	59
3.6.1	Loi d'Halpin-Tsai	61
3.7	Conclusion	63
4	Applications	65
4.1	Introduction	65
4.2	Micropoutre bi-encastree	65
4.2.1	Convergence en fonction du maillage	68
4.2.2	Evolution des fréquences propres	68
4.3	Micropoutre encastree-libre	69
4.4	Contrainte de fabrication	71
4.4.1	Contrainte de démoulage	71
4.4.2	Poutre bi-encastree	73
4.5	Conclusion	78
Conclusion et perspectives		79
Conclusion		79
Perspectives		80
Approfondissement de l'approche actuelle		80
Modification de l'approche		81
Bibliographie		83

Introduction

La miniaturisation est une des clés de l'évolution technologique actuelle. Cette réduction d'échelle ouvre de nouveaux horizons ainsi qu'une diminution des coûts et une augmentation de la fiabilité. Depuis une dizaine d'années, l'industrie est ainsi capable de produire des dispositifs de mesure et des actionneurs utilisant une structure mécanique dont les dimensions caractéristiques sont largement inférieures au millimètre. Les défis posés par de tels systèmes ne se situent pas uniquement au niveau de leur fabrication car le passage à l'échelle micrométrique confronte la phase de conception à des comportements inhabituels et parfois inattendus. Ainsi, les phénomènes physiques qui sont soit négligés soit étudiés séparément pour un système de taille macroscopique ne peuvent plus l'être à l'échelle microscopique. Par exemple, une interaction forte entre les phénomènes électrostatiques et mécaniques est fréquemment rencontrée.

Ce travail porte sur l'étude du phénomène de pull-in apparaissant suite au couplage électromécanique introduit dans certains microsystèmes et pouvant éventuellement mener à leur destruction. Le pull-in se caractérise par un comportement instable du dispositif à partir d'une tension électrique critique appelée tension de pull-in. Ce phénomène ainsi que les méthodes permettant sa modélisation seront décrits au cours du premier chapitre.

Dans certains cas, le phénomène de pull-in est indésirable et il peut donc être intéressant de maximiser la tension de pull-in de manière à retarder son apparition. L'objectif de ce travail est d'utiliser l'optimisation topologique à cette fin. La présentation des principes généraux de l'optimisation topologique fait l'objet de la première partie du second chapitre. Outre l'intérêt propre de la maximisation de la tension de pull-in, l'application de l'optimisation topologique à un problème multiphysique représente le second intérêt de ce travail. En effet, les travaux portant sur l'optimisation topologique dans le contexte multiphysique sont encore peu nombreux. Mais, ils sont néanmoins prometteurs quant aux possibilités offertes par cet outil de conception systématique et rationnel. La seconde partie du chapitre 2 propose une revue détaillée des principaux travaux existants dans ce domaine.

Ce travail constitue une étude préliminaire destinée à estimer l'applicabilité de l'optimisation topologique aux problèmes électromécaniques fortement couplés. Afin de procéder par étapes, nous allons dans le cadre de ce travail réduire la difficulté du problème d'optimisation à l'aide d'hypothèses adéquates. Ces hypothèses ainsi que le problème d'optimisation résultant sont présentés au début du chapitre 3. Ensuite, ce chapitre est dédié à la présentation de la procédure d'optimisation et à la justification des choix effectués au cours de sa construction. L'algorithme d'optimisation est développé dans le logiciel *Oofelie* ce qui permet de profiter d'un ensemble d'outils d'analyse multiphysique par éléments finis [28] et de calcul matriciel existants ainsi que d'une interface avec l'optimiseur *ConLin V3* [17].

L'illustration des capacités de l'outil développé est finalement proposée à l'avant dernier chapitre. Les différents cas tests présentés au cours de ce chapitre montrent l'efficacité et la fiabilité de l'algorithme d'optimisation. Toutefois, les solutions obtenues proposent des structures difficilement réalisables à l'aide des procédés de fabrication classiquement utilisés pour les microsystèmes. Dès lors, le chapitre 4 propose également l'ajout au problème d'optimisation d'une contrainte de fabrication. Les principes ainsi que la mise en pratique de cette contrainte font l'objet de la seconde partie de ce chapitre.

Le mémoire se termine par une synthèse des apports des travaux exposés avant de conclure par quelques réflexions sur les perspectives de développement.

Chapitre 1

Modélisation électromécanique du phénomène de pull-in

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation du phénomène de pull-in apparaissant dans les microsystèmes électromécaniques. Ce phénomène résulte du couplage entre les forces électrostatiques d'une part et mécaniques de l'autre. Au delà de certaines valeurs du déplacement mécanique, il en résulte un comportement potentiellement instable du dispositif pouvant mener à son endommagement ou à sa destruction. Dès lors, le pull-in est une caractéristique importante du comportement de ces microsystèmes et de nombreux efforts ont déjà été consacrés à sa simulation. Suite au caractère multiphysique du phénomène d'instabilité de pull-in, les outils de simulation doivent prendre en compte le couplage existant entre les effets électriques et mécaniques. De plus, le caractère fortement non-linéaire du problème étudié impose l'utilisation de méthodes de continuation numérique pour le calcul précis des conditions de pull-in. Dans le cadre de ce travail, une modélisation par éléments finis fortement couplée a été utilisée conjointement avec un algorithme de continuation pour le calcul des conditions de pull-in. La seconde partie du chapitre sera consacrée à la description de la formulation éléments finis ainsi que de deux méthodes de continuation. Mais avant cela, la première partie nous permettra de présenter le phénomène de pull-in.

1.2 Phénomène de pull-in dans les microsystèmes électromécaniques

Les microsystèmes électromécaniques ont pour objectif principal d'intégrer aux circuits électroniques des parties mécaniques pouvant servir par exemple de capteur ou directement d'actionneur. Le fonctionnement de ces parties mécaniques nécessite par nature la production de forces. Cependant du fait du changement d'échelle, les forces prédominantes dans les microsystèmes ne sont pas les mêmes que celles existant à l'échelle macroscopique. Dans le domaine des microsystèmes, des forces d'origine thermique, magnétique ou électrique sont donc fréquemment dominantes. Par conséquent, les microsystèmes mécaniques présentent très souvent un couplage fort entre plusieurs phénomènes physiques.

Dans le cadre de ce travail, les dispositifs utilisant la force électrostatique sont étudiés.

Ceux-ci fonctionnent suivant un principe similaire au condensateur. Deux électrodes sont soumises à une différence de potentiel électrique engendrant une force électrostatique qui tend à rapprocher les électrodes. La déformation obtenue sous cette force peut ensuite être utilisée de différentes manières comme cela est montré dans la suite.

Cependant, le caractère non linéaire de la force électrostatique par rapport au déplacement peut provoquer l'instabilité du dispositif. Ce phénomène porte le nom d'instabilité de pull-in. Le pull-in est intéressant lorsqu'on cherche à fabriquer un système bistable par exemple mais il peut également être nuisible dans d'autres applications puisqu'il peut conduire à la destruction du microsystème. Cet effet sera étudié en détails ci-dessous.

1.2.1 Microsystèmes électromécaniques

Cette section présente quelques microsystèmes où la force électrostatique est mise en œuvre. Les microsystèmes électromécaniques les plus répandus sont les switchs RF (radio fréquence) [36] utilisés principalement dans le domaine des télécommunications. Deux conceptions différentes sont fréquemment rencontrées en fonction de l'utilisation : les switchs série (Fig. 1.1) et les switchs par effet de shunt (Fig. 1.2). Les *commutateurs série* fonctionnent simplement comme un interrupteur classique mis à part le fait qu'une force électrostatique est créée entre la poutre et la grille (Fig. 1.1) afin de fléchir la poutre et d'établir un contact ohmique entre la poutre et le drain. Ces dispositifs présentent l'avantage de fonctionner même si le signal est à basse fréquence.

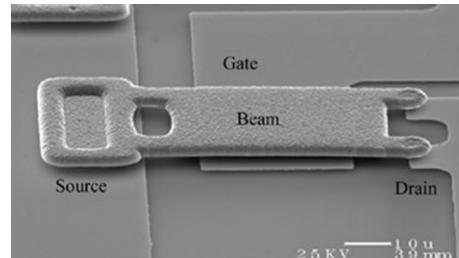


FIG. 1.1 – Micrographie d'un switch série [36]

D'autre part, *les switchs par effet de shunt* se basent sur un couplage capacitif entre une membrane reliée à la masse et la piste conductrice située en dessous. Lorsque la membrane est en position haute, la capacité entre la piste et cette membrane est faible et n'a donc pas d'effet significatif. Par contre lorsque la membrane descend au contact de l'isolant suite à l'application d'une différence de potentiel, la capacité augmente. Pour autant qu'il possède

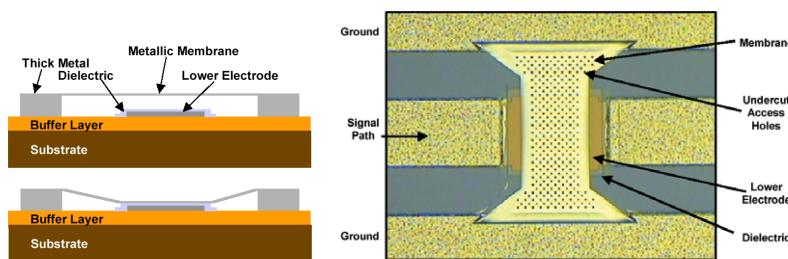


FIG. 1.2 – Schéma et micrographie d'un switch par effet de shunt [36]

une fréquence suffisante, le signal est transmis à la masse à travers cette capacité.

Les deux applications précédentes sont relativement simples du point de vue de la structure mécanique. Afin d'utiliser la force électrostatique dans des applications mécaniquement plus complexes, les peignes électrocapacitifs interdigités sont souvent utilisés (Fig. 1.3). Du fait de leur géométrie, ils fournissent une force pratiquement linéaire en fonction du déplacement. Ce qui est très intéressant car la force électrostatique varie normalement en fonction de l'inverse du carré de la distance entre électrodes. Ces peignes peuvent servir à créer une capacité variable utilisée dans les télécommunications également. Le microsystème est alors composé soit de deux paires de peignes, l'une servant d'actionneur et l'autre de capacité soit d'une seule paire servant à la fois d'actionneur et de capacité. Par ailleurs, les peignes capacitifs sont également inclus dans les résonateurs mécaniques en tant que moyen d'excitation.

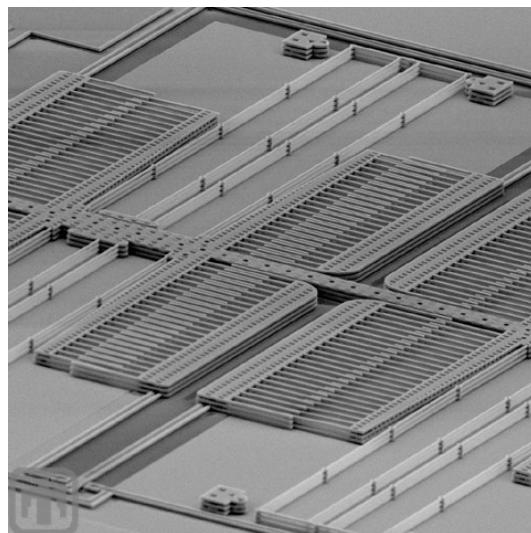


FIG. 1.3 – Micrographie d'un actionneur à peignes capacitifs (source : Sandia, <http://mems.sandia.gov/scripts/images.asp>)

Suite à la non linéarité de la force électrique, les microsystèmes présentés ci-dessus peuvent subir volontairement ou non l'effet de pull-in. La description et l'explication de ce phénomène d'instabilité est effectuée dans la section suivante.

1.2.2 Phénomène de pull-in

Afin de modéliser l'effet qui nous intéresse, prenons l'exemple simple d'une capacité composée de deux électrodes planes séparées par le vide représenté à la figure 1.4. La première électrode est fixe tandis que la seconde est suspendue par l'intermédiaire d'un ressort. Lorsqu'une tension V est appliquée entre les deux armatures du condensateur, il en résulte une force électrostatique f_e donnée, en négligeant les effets de bords, par l'expression

$$f_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{AV^2}{(d_0 - x)^2}$$

avec A la surface d'une armature, d_0 la distance au repos entre les armatures et ε_0 la permittivité du vide. Suite à l'existence de cette force électrostatique, l'électrode mobile se déplace

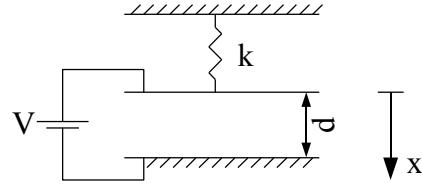


FIG. 1.4 – Exemple simple d'un actionneur électromécanique

et se rapproche de l'électrode fixe jusqu'à ce qu'il y ait équilibre entre la force électrique et la force de rappel du ressort donnée par

$$f_r = -kx$$

où k désigne la raideur du ressort. En égalant l'expression de ces deux forces, il est possible d'obtenir l'équation d'équilibre du système ainsi que l'équation reliant la tension appliquée au déplacement de l'électrode mobile.

$$V = \sqrt{\frac{2kx(d_0 - x)^2}{\varepsilon_0 A}} \quad (1.1)$$

Cette équation permet d'obtenir la courbe d'équilibre normalisée tracée à la figure 1.5. Cette figure montre que la courbe d'équilibre possède un maximum en tension. Le point maximum

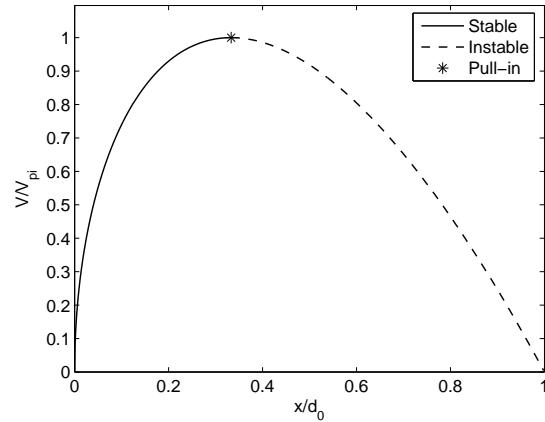


FIG. 1.5 – Courbe d'équilibre du système simple

est appelé point de *pull-in* et correspond à la *tension de pull-in* V_{pi} . Si une tension supérieure à la tension de pull-in est appliquée, la force de rappel du ressort n'est plus en mesure de compenser la force électrostatique qui augmente proportionnellement à l'inverse du carré de la distance entre les électrodes. Il n'existe alors plus de position d'équilibre et l'électrode mobile descend au contact de l'électrode fixe. La courbe d'équilibre est donc divisée par le point de pull-in en deux parties l'une stable et l'autre instable.

Cette inversion de stabilité est vérifiable en calculant la raideur effective du système. La raideur effective aux environs d'une position d'équilibre x_e est calculée en dérivant la

résultante des forces s'appliquant sur l'électrode mobile, ce qui donne,

$$k_{eff} = - \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_e} = k - \frac{\varepsilon_0 A V_e^2}{(d_0 - x_e)^3}$$

et remplaçant V_e par son expression en fonction de x_e (équation (1.1)),

$$k_{eff} = k - \frac{2kx_e}{d_0 - x_e}$$

La force électrostatique revêt à travers le second terme de cette expression une importance significative. En effet, à mesure que les électrodes se rapprochent, ce terme va réduire la raideur effective et mener à l'instabilité. L'évolution de la raideur adimensionnelle $\frac{k_{eff}}{k}$ est tracée à la figure 1.6. Cette figure montre que la raideur linéarisée s'annule en $x_e = \frac{d_0}{3}$ c'est-à-dire au point de pull-in et devient négative pour $x_e > \frac{d_0}{3}$. Par conséquent, à partir du point de pull-in, le système est instable.

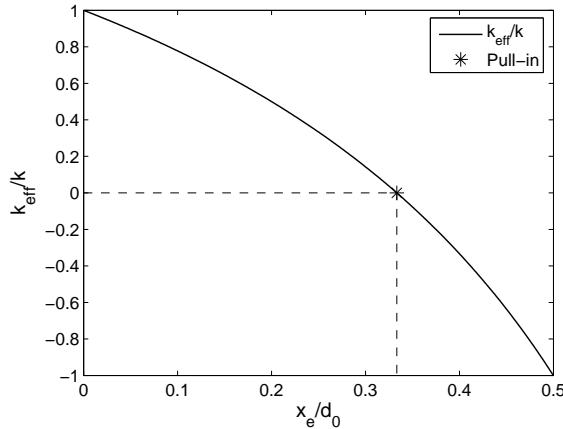


FIG. 1.6 – Evolution de la raideur adimensionnelle avec le déplacement

Le phénomène de pull-in limite donc la plage de tension utilisable pour un tel microsystème. Ce phénomène est parfois recherché dans certains dispositifs comme les switchs capacitifs mais peut également être dommageable dans d'autres cas. En effet dans un microsystème, lorsque les deux électrodes entrent en contact, il n'est pas garanti qu'elles se sépareront une fois la tension annulée, elles peuvent donc rester indéfiniment collées. Dans ce cas, le microsystème est inutilisable.

1.3 Modélisation éléments finis fortement couplée

La méthode des éléments finis va être utilisée dans ce travail en vue de simuler le comportement et de servir de base à l'optimisation de la topologie de structures à géométrie complexe. Cependant, différentes formulations éléments finis sont disponibles et, il convient de choisir la plus adéquate au problème posé. Dans le domaine multiphysique, deux grandes classes de méthodes s'opposent, les méthodes dites *étagées* et les *formulations monolithiques*.

Les méthodes étagées sont a priori les plus faciles à mettre en œuvre. En effet, ces méthodes utilisent un calcul séparé et séquentiel de chacun des champs physiques du domaine d'analyse.

De cette manière, il est possible d'utiliser des codes de calcul séparés pour chacun des domaines physiques et ainsi de profiter de logiciels existants. Plusieurs itérations sont ensuite effectuées de manière à converger vers un équilibre entre les différents domaines physiques.

Cependant, la convergence de la méthode étagée vers l'équilibre devient de plus en plus difficile au fur et à mesure que l'interaction entre les champs physiques s'accroît. Ainsi, l'utilisation d'une formulation fortement couplée est parfois nécessaire. Au contraire du couplage faible, le couplage fort procède à une résolution simultanée de l'ensemble des problèmes physiques. De ce fait les formulations fortement couplées sont également appelées formulations monolithiques. Il n'existe alors plus qu'un seul problème à analyser même si bien sûr suite aux non-linéarités résultant du couplage il est nécessaire d'itérer afin d'obtenir une solution.

1.3.1 Approche variationnelle

Le cas de la modélisation du couplage électromécanique dans un microsystème est discuté par Rochus et Rixen à la référence [28]. Cet article montre tout d'abord qu'il est préférable, voire, nécessaire d'utiliser une formulation éléments finis fortement couplée dans ce cadre. L'article propose également une formulation électromécanique fortement couplée qui sera utilisée dans ce travail. Une approche variationnelle est utilisée en partant de la définition de la densité d'énergie de Gibbs G d'un système électromécanique,

$$G = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{T} - \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{E} \quad (1.2)$$

Le premier terme de cette densité d'énergie correspond à la partie mécanique du problème et contient le produit du tenseur de déformation \mathbf{S} avec le tenseur de contrainte \mathbf{T} . Le second terme reprend la contribution électrique grâce au produit du déplacement électrique \mathbf{D} avec le champ électrique \mathbf{E} . Les lois constitutives reliant ces grandeurs sont les suivantes,

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbf{H}\mathbf{S} \\ \mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E} \end{cases}$$

L'énergie interne du système est obtenue en intégrant la densité d'énergie de Gibbs (1.2) sur l'entièreté du domaine électromécanique Ω ,

$$W_{int} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{T} - \mathbf{D}^T \mathbf{E} \, d\Omega = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{T} \, d\Omega}_{W_m} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega(\mathbf{u})} \mathbf{D}^T \mathbf{E} \, d\Omega}_{W_e}$$

Notons ici la différence entre le domaine d'intégration de l'énergie mécanique W_m et celui de l'énergie électrique W_e . En effet, l'énergie mécanique est intégrée sur le domaine de référence Ω (formulation lagrangienne) tandis que l'énergie électrique va dépendre fortement des déplacements mécaniques \mathbf{u} et doit donc être intégrée sur le domaine déformé $\Omega(\mathbf{u})$. Ces différents domaines d'intégration sont schématisés à la figure 1.7 pour un domaine d'analyse contenant deux matériaux différents.

Les inconnues du problème éléments finis sont d'une part les déplacements aux nœuds pour la partie mécanique et le potentiel électrique en chacun des nœuds pour la partie électrique. Ces inconnues sont reliées aux déformations et au champ électrique par les relations suivantes,

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \mathbf{E} = -\nabla \phi \end{cases}$$

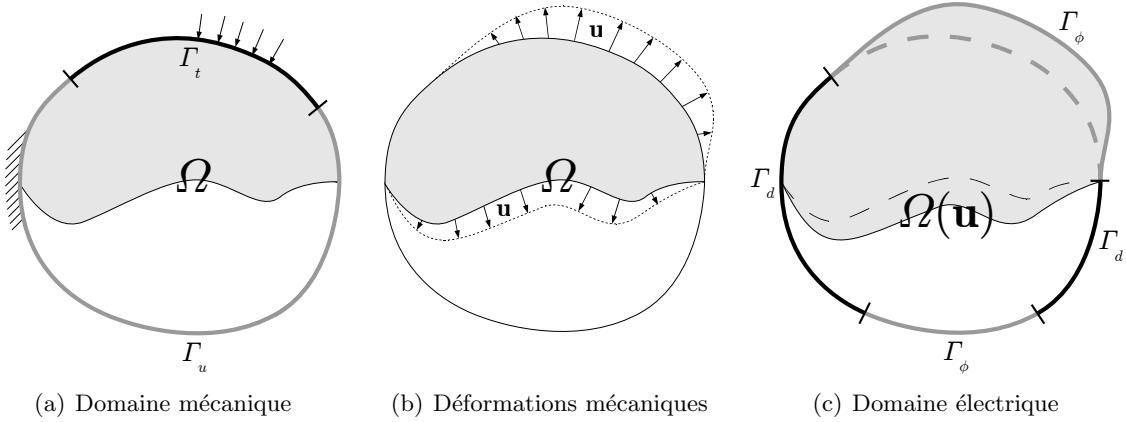


FIG. 1.7 – Description des domaines d'intégration et des conditions aux limites

Les conditions aux limites du problème éléments finis sont par conséquent pour chacun des champs (Fig. 1.7),

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{sur } \Gamma_u \\ \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} & \text{sur } \Gamma_t \end{cases} \quad \begin{cases} \phi = \bar{\phi} & \text{sur } \Gamma_\phi \\ d = \bar{d} & \text{sur } \Gamma_d \end{cases}$$

où \mathbf{t} désigne les forces de surface, d les charges électriques surfaciques tandis que Γ_u , Γ_t , Γ_ϕ et Γ_d sont des portions du contour Γ du domaine électromécanique Ω . Ces quatres ensembles vérifient les relations,

$$\begin{aligned} \Gamma_u \cup \Gamma_t &= \Gamma & \Gamma_\phi \cup \Gamma_d &= \Gamma \\ \Gamma_u \cap \Gamma_t &= \emptyset & \Gamma_\phi \cap \Gamma_d &= \emptyset \end{aligned}$$

L'énergie externe s'exprime alors,

$$W_{ext} = \int_{\omega} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Omega} \phi \bar{\rho} d\Omega - \int_{\Gamma_d} \phi \bar{d} d\Gamma$$

où $\bar{\mathbf{f}}$ désigne les forces de volume imposées et $\bar{\rho}$ la densité de charge imposée sur le domaine Ω . Notons que dans la formulation choisie, les charges électriques aux nœuds jouent le même rôle dans le domaine electrostatique que les forces aux nœuds dans le domaine mécanique.

Le principe des travaux virtuels est ensuite appliqué en perturbant les variables \mathbf{u} et ϕ à l'aides des déplacements virtuels admissibles $\delta\mathbf{u}$ et $\delta\phi$ et en égalant les variations de l'énergie interne δW_{int} et de l'énergie externe δW_{ext} résultantes. Une des principales particularités de ce calcul se situe au niveau du calcul de la variation de l'énergie interne et plus précisément de l'énergie électrique W_e . En effet, W_e dépend du vecteur \mathbf{u} à travers son domaine d'intégration et sera donc influencée par le déplacement virtuel de celui-ci. Il faut donc passer par un changement de variables de manière à calculer l'énergie électrique avec et sans déplacement virtuel $\delta\mathbf{u}$ sur un même domaine d'intégration de référence afin de pouvoir les comparer, les détails du calcul sont disponibles à la référence [28].

1.3.2 Matrice de raideur tangente

L'étude variationnelle du problème fortement couplé mène à une équation de comportement linéarisée aux environs d'une position d'équilibre. Cette expression fait apparaître la

matrice de raideur tangente \mathbf{K}_T , un incrément de déplacements généralisés $\Delta\mathbf{q}$ à partir de la position d'équilibre, et la variation des forces généralisées correspondante $\Delta\mathbf{g}$. Rappelons que les déplacements généralisés sont composés des déplacements mécaniques \mathbf{u} et des potentiels électriques aux nœuds ϕ , par ailleurs, les forces généralisées sont constituées des forces mécaniques \mathbf{f}_m et des charges électriques \mathbf{q}_e .

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W_m}{\partial \mathbf{u}^2} - \frac{\partial^2 W_e}{\partial \mathbf{u}^2} & -\frac{\partial^2 W_e}{\partial \phi \partial \mathbf{u}} \\ -\frac{\partial^2 W_e}{\partial \mathbf{u} \partial \phi} & -\frac{\partial^2 W_e}{\partial \phi^2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}_T} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \phi \end{pmatrix}}_{\Delta \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \phi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{f}_m \\ \Delta \mathbf{q}_e \end{pmatrix}}_{\Delta \mathbf{g}}$$

Comme cela est suggéré dans l'équation précédente, la matrice de raideur tangente peut être découpée en plusieurs blocs. Considérons tout d'abord le bloc \mathbf{K}_{uu} ; il s'agit de la partie de la matrice reliant les déplacements mécaniques aux forces mécaniques. Hormis la contribution classique de l'énergie mécanique (matrice de raideur habituelle), \mathbf{K}_{uu} possède également une contribution du domaine électrique provenant de la dépendance de l'énergie électrique vis-à-vis de déplacements mécaniques. L'influence de l'énergie électrique sur la raideur mécanique est à mettre en relation avec les observations effectuées sur le système à un degré de liberté étudié ci-dessus. En effet, nous avions alors constaté que la raideur linéarisée diminuait lorsque les électrodes se rapprochaient suite à l'effet des forces électrostatiques.

Deuxièmement, les termes non diagonaux de la matrice tangente introduisent un couplage entre les inconnues mécaniques et électriques. Ces termes proviennent également de l'influence des déplacements mécaniques sur l'énergie électrique. Il paraît en effet logique qu'une variation de déplacement résulte en une variation des charges électriques et qu'inversement une variation des potentiels électriques aux nœuds génère une variation des forces électrostatiques.

Enfin, $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ correspond simplement à la matrice de raideur d'un problème électrostatique pur. Ceci découle du fait que l'énergie mécanique ne dépend pas directement du potentiel électrique car si les déplacements mécaniques sont fixés, une modification des variables électriques n'a pas d'influence sur l'énergie mécanique. Par conséquent, la seule contribution à ce bloc provient de l'énergie électrique.

1.3.3 Résumé

L'approche éléments finis fortement couplée permet donc d'obtenir la matrice de raideur tangente du problème électromécanique. Le caractère fortement couplé de la formulation ainsi que la connaissance de la matrice de raideur tangente correspondante sont deux excellents atouts qui vont permettre l'utilisation d'outils de résolution très efficaces tel que les méthodes de continuation numériques. Cette association permettra un calcul précis des conditions de pull-in de la structure étudiée.

1.4 Calcul de la courbe d'équilibre

Comme nous allons le constater dans la suite de ce travail, le calcul des sensibilités de la tension de pull-in par rapport aux variables de conception de l'optimisation topologique nécessite la connaissance des conditions de pull-in. Le comportement d'un microsystème électromécanique étant fortement non linéaire, il est nécessaire d'utiliser un algorithme de calcul adéquat afin d'obtenir les conditions de pull-in. Habituellement, les problèmes non-linéaires sont résolus à l'aide de l'algorithme de *Newton-Raphson* mais comme le montre la

section suivante, cet algorithme n'est pas capable d'atteindre le point de pull-in avec suffisamment de précision et de fiabilité. Par conséquent, d'autres méthodes numériques telles que l'algorithme de Riks-Crisfield [27, 35] ou l'algorithme du normal flow [1, 25] doivent être utilisées pour calculer les conditions de pull-in.

1.4.1 Algorithme de Newton-Raphson

Considérons par exemple, un modèle éléments finis non-linéaire décrit par l'équation d'équilibre,

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{q} = \lambda \mathbf{f}(\mathbf{q})$$

où \mathbf{K} désigne la matrice de raideur, \mathbf{q} le vecteur des déplacements généralisés et \mathbf{f} le vecteur des forces généralisées. Notons que les forces généralisées ainsi que la matrice de raideur dépendent tout deux des déplacements généralisés ce qui confère au système son caractère non-linéaire. De plus, une variable de charge λ est ajoutée de manière à pouvoir appliquer progressivement les forces généralisées d'itération en itération.

Pour résoudre ce type de système d'équation, il est possible d'utiliser la méthode itérative de Newton-Raphson. Cette méthode comme la plupart des méthodes de calcul itératives se compose d'une première phase de prédiction suivie d'une seconde phase de correction. En pratique, la méthode de Newton-Raphson cherche à annuler le vecteur de résidu \mathbf{r} égal à la différence entre les forces internes et les forces externes. Si la matrice de raideur n'est pas fonction du déplacement, l'expression du résidu est simplement,

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}, \lambda) = \mathbf{K}\mathbf{q} - \lambda \mathbf{f}$$

La recherche d'un résidu nul est effectuée en faisant varier le vecteur \mathbf{q} pour λ fixé. Pour ce faire, l'expression du résidu est tout d'abord linéarisée aux environs d'une position connue $(\mathbf{q}_0, \lambda_0)$. La phase de prédiction est en principe effectuée à partir d'un point d'équilibre, ce qui signifie que $\mathbf{r}(\mathbf{q}_0, \lambda_0) = 0$. Le développement en série de Taylor au premier ordre vaut alors,

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}, \lambda_0 + \Delta\lambda) \simeq \underbrace{\mathbf{r}(\mathbf{q}_0, \lambda_0)}_{=0} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \Big|_{(\mathbf{q}_0, \lambda_0)} \Delta\lambda + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{(\mathbf{q}_0, \lambda_0)} \Delta\mathbf{q} = 0$$

soit,

$$\mathbf{K}_{T0} \Delta\mathbf{q}_0 = \Delta\lambda_0 \mathbf{f} \quad (1.3)$$

où la matrice \mathbf{K}_{T0} est appelée matrice de raideur tangente au point (q_0, λ_0) et est définie par,

$$\mathbf{K}_{T0} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{(\mathbf{q}_0, \lambda_0)}$$

L'équation (1.3) permet ainsi de calculer une première estimation de la variation de \mathbf{q} due à l'augmentation de charge $\Delta\lambda_0$ en utilisant une approximation linéaire de la courbe d'équilibre comme cela est montré sur la figure 1.8. Suite à l'approximation linéaire effectuée, le point $(\mathbf{q}_1, \lambda_1)$ n'est pas sur la courbe d'équilibre, il en résulte que les forces internes \mathbf{f}_{int1} correspondant aux déplacements \mathbf{q}_1 ne seront pas égales aux forces externes $\lambda_1 \mathbf{f}$ en ce point. Par conséquent, l'équilibre n'est pas satisfait et le vecteur de résidu est non nul. Le processus itératif doit donc se poursuivre avec la résolution d'un nouveau système d'équations

$$\mathbf{K}_{T1} \Delta\mathbf{q}_1 = -\mathbf{r}_1$$

avec,

$$\mathbf{K}_{T1} = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{(\mathbf{q}_1, \lambda_1)} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{f}_{int1} - \lambda_1 \mathbf{f}$$

Cette première correction donne comme résultat le vecteur \mathbf{q}_2 . Celui-ci n'étant pas encore suffisamment proche de la courbe d'équilibre, le processus itératif doit être poursuivit, jusqu'à ce que la norme du vecteur résidu soit inférieure à la tolérance choisie. Une nouvelle modification de la variable de charge peut alors avoir lieu.

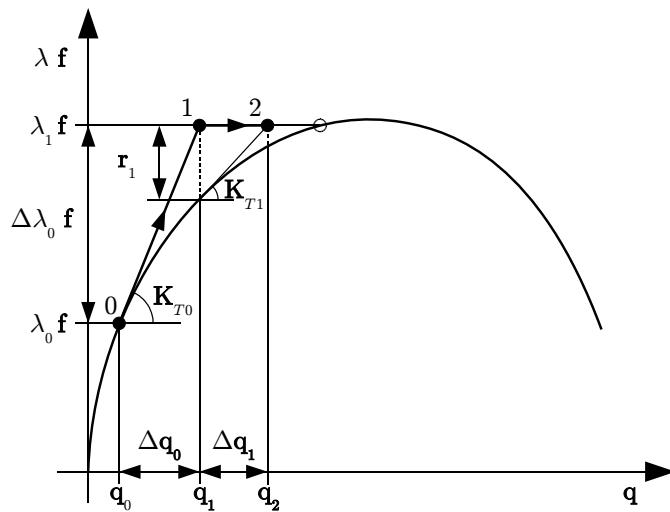


FIG. 1.8 – Schéma d'itération de Newton-Raphson

L'inconvénient de la méthode de Newton-Raphson est que le processus de correction s'effectue à charge constante comme il est possible de le constater sur la figure 1.8, sous l'hypothèse que les forces généralisées ne dépendent pas des déplacements. Par conséquent, si dans l'exemple dessiné un incrément de charge trop important est choisi et que la charge résultante $\lambda_1 \mathbf{f}$ est supérieure au maximum de la courbe, l'algorithme est incapable d'obtenir un nouveau point d'équilibre et diverge.

C'est pourquoi, la méthode de Newton-Raphson n'est pas adaptée au calcul des conditions de pull-in. En effet, le point de pull-in se trouvant au maximum d'une courbe, il est très difficile en pratique d'atteindre ce point avec un tel algorithme comme cela est expliqué aux références [27] et [28]. En effet, la procédure de recherche du point de pull-in est alors basée sur une stratégie d'essais et erreurs. En réalité, c'est le voltage maximal pour lequel le processus itératif parvient à converger qui est déterminé mais sans garantie réelle que celui-ci corresponde à la tension de pull-in.

1.4.2 Algorithme de Riks-Crisfield

La section précédente a montré que la méthode de Newton-Raphson était mal adaptée au problème considéré ici. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle effectue une recherche de la position d'équilibre à charge constante. Dès lors, [27] suggère d'utiliser la méthode de Riks-Crisfield également appelée méthode de Riks-Wemper [35]. Cette méthode considère à la fois le vecteur des déplacements généralisés et la variable de charge en tant qu'inconnues

au cours du processus itératif ce qui permet une plus grande liberté de mouvement et facilite l'obtention d'une solution. La nouvelle inconnue ajoutée au problème nécessite l'introduction d'une nouvelle contrainte, ce qui a donné naissance à plusieurs variantes de la méthode de Riks-Crisfield. La version utilisée et décrite dans ce travail est l'algorithme de Riks-Crisfield qui évolue sur une hypersphère. Ceci signifie que les itérés successifs sont contraints à rester sur une hypersphère de rayon fixé et centrée sur le dernier point convergé sur la courbe d'équilibre. La méthode de Riks-Crisfield est en fait une amélioration de l'algorithme de Newton puisque chaque itération comporte un calcul similaire à Newton-Raphson et une correction de manière à replacer le nouveau point sur la sphère. La figure 1.9 illustre le principe de fonctionnement de la méthode.

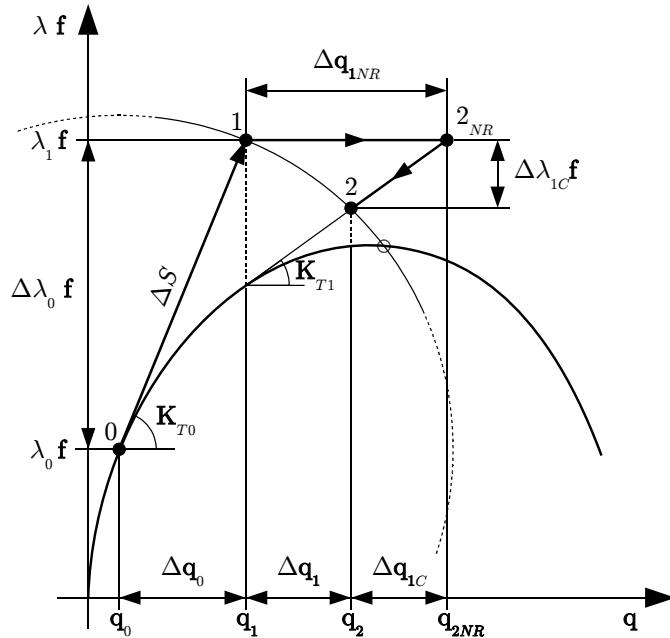


FIG. 1.9 – Schéma de principe de la méthode de Riks-Crisfield

Partant d'une position d'équilibre au point 0, la première itération est identique à celle utilisée par la méthode de Newton-Raphson. Un incrément de charge $\Delta\lambda_0$ est appliqué et une estimation de l'évolution du vecteur des déplacements généralisés est calculée par,

$$\mathbf{K}_{T0}\Delta\mathbf{q}_0 = \Delta\lambda_0\mathbf{f}$$

Cette première itération détermine la position du point 1 et va permettre de déterminer le rayon ΔS de la sphère. Celui-ci est calculé comme étant la norme du vecteur tangent reliant le point 0 au point 1,

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{q}_0 \\ \Delta\lambda_0 \end{bmatrix}$$

L'itéré suivant peut alors être évalué. Ce calcul s'effectue en deux étapes. Tout d'abord, la méthode de Newton-Raphson est utilisée pour calculer un nouvel incrément $\Delta\mathbf{q}_{1NR}$ donné par l'équation habituelle

$$\mathbf{K}_{T1}\Delta\mathbf{q}_{1NR} = -\mathbf{r}_1$$

Cet incrément nous amène au point 2_{NR} . Ensuite, une correction est appliquée de manière à ramener ce point à l'intersection entre la sphère et la tangente à la courbe d'équilibre en \mathbf{q}_1 comme montré sur la figure 1.9. En d'autres mots, puisque le point 2_{NR} se trouve déjà sur la tangente en \mathbf{q}_1 , il faut obtenir deux corrections $\Delta\mathbf{q}_{1C}$ et $\Delta\lambda_{1C}$ tels que premièrement,

$$\mathbf{K}_{T1}\Delta\mathbf{q}_{1C} = \Delta\lambda_{1C}\mathbf{f}$$

de manière à suivre la tangente à la courbe. Et deuxièmement, il faut également se trouver sur le cercle ce qui signifie si le vecteur \mathbf{d}_2 relie le point initial $(\mathbf{q}_0, \lambda_0\mathbf{f})$ au nouvel itéré,

$$\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{d}_2 = \Delta S^2 \quad (1.4)$$

Compte tenu des corrections, les incréments finaux seront exprimés par,

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{q}_1 = \Delta\mathbf{q}_{1NR} - \Delta\mathbf{q}_{1C} \\ \Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_{1C} \end{cases}$$

Si bien que \mathbf{d}_2 peut être écrit comme suit,

$$\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}_1 \\ \Delta\lambda_0 - \Delta\lambda_1 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, la contrainte de positionnement sur la sphère (1.4) devient,

$$(\Delta\lambda_0 - \Delta\lambda_1)^2 + \Delta\mathbf{q}_0^T \Delta\mathbf{q}_0 + 2\Delta\mathbf{q}_0^T \Delta\mathbf{q}_1 + \Delta\mathbf{q}_1^T \Delta\mathbf{q}_1 = \Delta S^2 \quad (1.5)$$

Or ΔS est défini par,

$$\Delta S^2 = \Delta\mathbf{q}_0^T \Delta\mathbf{q}_0 + \Delta\lambda_0^2$$

Et en substituant cette dernière équation dans (1.5) le système d'équation à résoudre,

$$\begin{cases} \Delta\lambda_1^2 - 2\Delta\lambda_0\Delta\lambda_1 + 2\Delta\mathbf{q}_0^T \Delta\mathbf{q}_1 + \Delta\mathbf{q}_1^T \Delta\mathbf{q}_1 = 0 \\ \mathbf{K}_{T1}\Delta\mathbf{q}_{1C} = \Delta\lambda_1\mathbf{f} \end{cases}$$

En partant de la seconde équation et de manière à exprimer simplement $\Delta\mathbf{q}_{1C}$ en fonction de $\Delta\lambda_1$, définissons \mathbf{q}_{1I} tel que,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{1I} &= \mathbf{K}_{T1}^{-1}\mathbf{f} \Leftrightarrow \mathbf{q}_{1C} = \Delta\lambda_1\mathbf{q}_{1I} \\ &\Leftrightarrow \Delta\mathbf{q}_1 = \Delta\mathbf{q}_{1NR} - \Delta\lambda_1\mathbf{q}_{1I} \end{aligned}$$

Dès lors, en explicitant $\Delta\mathbf{q}_1$ dans la première équation, cela donne l'équation du second degré en $\Delta\lambda_1$ suivante,

$$\begin{aligned} (1 + \Delta\mathbf{q}_{1I}^T \Delta\mathbf{q}_{1I}) \Delta\lambda_1^2 - 2(\Delta\lambda_0 + \Delta\mathbf{q}_0^T \Delta\mathbf{q}_{1I} + \Delta\mathbf{q}_{1NR}^T \Delta\mathbf{q}_{1I}) \Delta\lambda_1 \\ + (2\Delta\mathbf{q}_0^T \Delta\mathbf{q}_{1NR} + \Delta\mathbf{q}_{1NR}^T \Delta\mathbf{q}_{1NR}) = 0 \end{aligned}$$

Cette équation du second degré possède deux solutions $\Delta\lambda_1^+$ et $\Delta\lambda_1^-$. Ces deux valeurs donnent lieu à deux vecteurs \mathbf{d}_2^+ et \mathbf{d}_2^- . Le choix entre ces deux vecteurs est effectué en considérant le cosinus de l'angle formé par chacun d'eux avec \mathbf{d}_1 . Il est ainsi possible de s'assurer que le processus itératif va continuer à progresser sur la courbe dans même direction. Les itérations

suivantes sont effectuées en suivant le même principe jusqu'à convergence du processus à l'intersection entre la sphère et la courbe (marqué par un cercle vide sur la figure 1.9). L'équation générale à résoudre à l'itération k est,

$$(1 + \Delta\mathbf{q}_{kI}^T \Delta\mathbf{q}_{kI}) \Delta\lambda_k^2 - 2 (\Delta\lambda_{\text{Tot}} + \Delta\mathbf{q}_{\text{Tot}}^T \Delta\mathbf{q}_{kI} + \Delta\mathbf{q}_{kNR}^T \Delta\mathbf{q}_{kI}) \Delta\lambda_k + (2\Delta\mathbf{q}_{\text{Tot}}^T \Delta\mathbf{q}_{kNR} + \Delta\mathbf{q}_{kNR}^T \Delta\mathbf{q}_{kNR}) = 0$$

avec,

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{q}_{\text{Tot}} = \Delta\mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}_1 + \dots + \Delta\mathbf{q}_{k-1} \\ \Delta\lambda_{\text{Tot}} = \Delta\lambda_0 - \Delta\lambda_1 + \dots + \Delta\lambda_{k-1} \end{cases}$$

1.4.3 Algorithme du normal flow

Cette algorithme fait partie des *méthodes d'homotopie* [2]. Les méthodes d'homotopie ou de continuation sont utilisées pour résoudre un système de N équations non linéaires à N variable exprimé par

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Le principe général de ces méthodes est de créer une fonction continue $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ respectant les conditions,

$$\begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

où $\mathbf{G}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction continue dont les zéros sont connus. A partir d'un point connu $(\mathbf{x}_1, 1)$ solution du l'équation $\mathbf{H} = \mathbf{0}$, l'objectif est alors de suivre une courbe respectant $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ pour obtenir un point $(\bar{\mathbf{x}}, 0)$. Le point $\bar{\mathbf{x}}$ est donc solution de $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. L'idée est donc d'utiliser cette méthode de continuation afin de suivre la courbe d'équilibre du système mécanique $\mathbf{r}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0}$ en partant du point $(\mathbf{0}, 0)$.

Par conséquent, la méthode du normal flow considère également les déplacements généralisés et une variable de charge comme inconnues. L'algorithme du normal flow [1, 25] diffère de la méthode précédente par la procédure de correction utilisée. La correction est cette fois essentiellement basée sur le *Davidenko flow* défini par l'ensemble des solutions de l'équation d'équilibre perturbée suivante

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}, \lambda) = \boldsymbol{\delta}$$

où le vecteur $\boldsymbol{\delta}$ est quelconque. Le Davidenko flow est représenté à la figure 1.10. Sur cette figure la courbe d'équilibre à calculer est tracée en trait continu tandis que les solutions perturbées sont tracées en trait discontinu. Le principe de la méthode du normal flow est de corriger la prédiction tangentielle en suivant une trajectoire normale au Davidenko flow comme cela est également montré sur le schéma.

La phase de prédiction est donc équivalente à celle de Newton-Raphson c'est-à-dire un déplacement tangentiel à la courbe d'équilibre. La phase itérative de correction est ensuite effectuée à partir de l'équation d'équilibre linéarisée,

$$\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{q} - \Delta\lambda \mathbf{f} = -\mathbf{r}$$

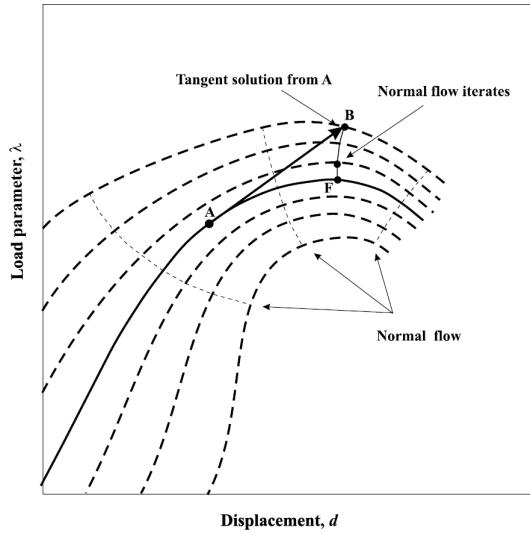


FIG. 1.10 – Schéma de la méthode du normal flow [25]

qui peut être exprimée sous la forme matricielle,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{f} \end{bmatrix}}_{D\mathbf{r}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{q} \\ \Delta\lambda \end{bmatrix}}_{D\mathbf{c}} = -\mathbf{r}$$

Ayant ajouté l'inconnue λ au problème, ce système possède n équations et $n + 1$ inconnues. De manière à pouvoir le résoudre, il faut donc lui rajouter une équation de contrainte. Cette condition supplémentaire permet d'imposer la normalité du vecteur \mathbf{c} par rapport au Davidenko flow. Pour ce faire, la direction tangente au Davidenko flow \mathbf{u} est extraite en calculant le noyau de la matrice $D\mathbf{r}$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{f} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \frac{d\lambda}{ds} \end{bmatrix}$$

avec \mathbf{v} le mode propre de la matrice de raideur tangente \mathbf{K}_T et s l'abscisse curviligne sur la courbe d'équilibre. La normalité de \mathbf{c} par rapport au Davidenko flow est simplement imposée en ajoutant l'équation $\mathbf{u} \cdot \mathbf{c} = 0$. Le système d'équation devient donc,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{f} \\ \mathbf{v}^T & \frac{d\lambda}{ds} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{q} \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{r} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Grâce à ce système d'équation, l'incrément \mathbf{c} obtenu est perpendiculaire au Davidenko flow. Cette étape de correction est répétée jusqu'à obtenir un vecteur de résidu \mathbf{r} suffisamment faible.

Notons finalement qu'au point maximum de la courbe (Fig. 1.10), $\frac{d\lambda}{ds}$ est nul puisque la courbe atteint un maximum en termes de λ . Par conséquent, en ce point, le vecteur \mathbf{v} est égal au premier mode propre de la matrice de raideur tangente \mathbf{K}_T .

1.5 Conclusion

Du fait de leurs petites dimensions, les microsystèmes sont souvent soumis à des phénomènes non linéaires couplés inexistant à l'échelle macroscopique. C'est le cas par exemple de l'effet de pull-in présenté dans ce chapitre. Suite à l'instabilité introduite par le couplage électromécanique, la modélisation du pull-in n'est pas aisée. C'est pourquoi, une formulation éléments finis fortement couplée ainsi que deux méthodes d'homotopie ont été présentées afin de suivre les non linéarités de la courbe tension-déplacement. Ces outils vont permettre dans la suite de ce travail d'obtenir avec précision les conditions de pull-in.

Chapitre 2

Optimisation topologique

2.1 Introduction

L'amélioration des performances a toujours eu une importance fondamentale dépassant le cadre de l'activité humaine. L'évolution naturelle a en effet mené au cours du temps à une efficacité croissante des êtres vivants. De son côté, l'Homme a également toujours été en quête d'une solution répondant au mieux aux problèmes posés pour un coût minimum, c'est ainsi qu'au cours de l'histoire il développa des outils d'optimisation de plus en plus efficaces. Si à leurs débuts, les techniques d'optimisation étaient plutôt simplistes et empiriques, les fondements mathématiques sur lesquels sont basées les méthodes modernes leurs confèrent une grande rigueur ainsi qu'un vaste champ d'application. De plus grâce à l'augmentation fulgurante de la capacité de calcul due à la naissance et à l'évolution rapide de l'informatique nous sommes maintenant en possession d'outils d'optimisation très efficaces et largement éprouvés. Ainsi, à l'heure actuelle, l'utilisation de ces méthodes s'est généralisée à de nombreux secteurs si bien qu'elles sont devenues omniprésentes. Citons par exemple l'ingénierie, le secteur des transports ou le domaine de la finance. Dans toutes ces applications, l'optimisation est dorénavant utilisée de manière extensive en tant qu'instrument d'aide à la décision et à la conception.

Comme déjà mentionné, le métier de l'ingénieur n'est bien évidemment pas en reste. L'optimisation est plus particulièrement utilisée dans des secteurs de pointe tels que l'aéronautique ou le spatial, là où il est important de maîtriser les coûts et le poids. Ces quinze dernières années ont vu l'apparition et l'arrivée à maturité d'une nouvelle méthode d'optimisation bien plus générale que les précédentes, l'optimisation topologique. Appliquée dans un premier temps à la conception de structures mécaniques, l'application de l'optimisation topologique tend maintenant à se généraliser à de nombreux domaines. La description détaillée de l'optimisation topologique fait l'objet de la suite de ce chapitre. Cependant, l'optimisation topologique étant originellement destinée à la mécanique, nous allons tout d'abord présenter les méthodes classiques d'optimisation en mécanique afin de mettre en évidence l'apport de l'optimisation topologique dans ce domaine.

2.2 Méthodes d'optimisation en mécanique

L'optimisation a pour but premier d'affranchir le processus de conception de ses aspects fastidieux et de la part d'arbitraire induite par les choix intuitifs ou empiriques du concepteur.

En mécanique, elle permet ainsi de guider les choix de l'ingénieur et de l'orienter vers une structure plus résistante ou plus raide par exemple. D'une manière générale, l'optimisation sera d'autant plus efficace si elle nécessite peu de choix préalables, même si ceci se payera généralement par un volume de calcul accru. De ce fait, au fil du temps, les méthodes d'optimisation ont évolué et gagné en généralité en parallèle avec l'accroissement de la puissance des outils de calcul.

Les débuts de l'optimisation structurale étaient essentiellement basés sur les critères d'optimalité. Cette méthode suppose que les conditions que doivent satisfaire les variables de conception pour assurer l'optimalité sont connues *a priori*. Un système d'équation dont les variables de conception sont les inconnues peut alors être obtenu et résolu. Les critères d'optimalité sont utilisés et développés depuis les années soixante et le sont encore de nos jours. Le plus réputé d'entre eux étant le *Fully Stressed Design*. Cependant, ils ne sont adaptés que pour un nombre limité de problèmes d'optimisation comme par exemple l'optimisation de treillis ou de structures minces. De plus ils ne fournissent pas toujours la solution exacte du problème d'optimisation.

La difficulté de l'optimisation structurale provient du caractère non linéaire et implicite des problèmes qui en résultent. Par conséquent, au début des années soixante, Schmit [29] proposa d'utiliser la combinaison d'une analyse de sensibilité et d'un algorithme de programmation mathématique afin de résoudre de manière itérative les problèmes d'optimisation structurale. A chaque étape du processus itératif, les dérivées des réponses appelées sensibilités sont calculées sur base de l'analyse précédente, un problème approché mais explicite est alors construit à partir de ces sensibilités et ensuite résolu par programmation mathématique. La nouvelle structure obtenue est alors réanalysée et le processus se poursuit jusqu'à l'optimum. Cette méthode présente l'avantage de fournir une grande vitesse de convergence vers l'optimum. De plus, les algorithmes d'optimisation ainsi obtenus sont beaucoup plus flexibles et généraux que ceux utilisant les critères d'optimalité puisque la seule partie spécifique au problème d'optimisation est dorénavant l'analyse de sensibilité. Les algorithmes de programmation mathématique appliqués aux structures les plus célèbres sont ConLin [17], MMA [33] ou le SQP [30].

2.2.1 Dimensionnement automatique

Le dimensionnement automatique des structures est une des premières méthodes modernes d'optimisation en mécanique en ce sens qu'elle fut un des premiers domaines d'application des critères d'optimalité. Et qu'il suivit l'avènement de l'informatique et de la méthode des éléments finis.

Le dimensionnement automatique s'applique à des cas simples d'optimisation où la forme et la connectivité de la structure sont déjà déterminées *a priori*. Les variables de conception sont généralement les dimensions transversales des éléments structuraux comme par exemple des épaisseurs de plaques ou des sections de barres. Si le processus d'optimisation nécessite plusieurs itérations avant de parvenir à l'optimum, le maillage élément fini utilisé pour la simulation peut être conservé d'une itération à l'autre puisqu'il n'y a pas de modification de la géométrie en dimensionnement. Un grand nombre de travaux ont été consacrés à l'application des critères d'optimalité dans le cadre du dimensionnement automatique. Le plus connu des critères d'optimalité est le *Fully Stressed Design* (FSD) où l'optimiseur cherche à atteindre la contrainte maximale dans chaque élément structural. Pour un treillis de barres de sections a_i

une expression simple de ce critère est,

$$a_i^* = \frac{\sigma_i}{\bar{\sigma}}$$

ce qui donne la nouvelle section a_i^* de la barre i avec σ_i la contrainte actuelle dans cette barre et $\bar{\sigma}$ la contrainte maximale acceptable. Ce critère permet d'obtenir une solution exacte en une itération pour un treillis isostatique. En revanche, un treillis hyperstatique nécessitera plusieurs itérations et donnera lieu à une solution approchée de l'optimum. D'autres critères d'optimalité plus efficaces et plus complexes permettant de prendre en compte plusieurs contraintes de déplacement par exemple ont été développés dans la suite par entre autres Berke [7], Taig [34] et Fleury [15].

Dans un même temps, le dimensionnement automatique a également profité des progrès de la programmation mathématique dans le domaine de l'optimisation. Ainsi la combinaison de la programmation mathématique avec les méthodes duales donna lieu à une équivalence avec les critères d'optimalité pour le dimensionnement automatique des structures [16].

2.2.2 Optimisation de forme

Alors que le dimensionnement automatique ne s'intéresse qu'aux dimensions transversales des composants de la structure, l'optimisation de forme a un but plus ambitieux. En effet, l'objectif est maintenant d'optimiser la forme des frontières intérieures ou extérieures d'une structure sans pour autant modifier sa topologie, c'est-à-dire sans ajouter ou supprimer de trous et sans changer le nombre d'éléments structuraux. Les variables de conception peuvent alors être simplement les dimensions géométriques de la pièce (épaisseur, rayon ...), ou de manière plus générale les points de contrôle d'une B-spline ou d'une NURBS par exemple. Le développement de cette méthode basée sur la programmation mathématique et le calcul de sensibilités remonte aux années septante, avec Zienkiewicz et Campbell [38] elle a ensuite subit une évolution rapide et continue pour finalement devenir un outil industriel.

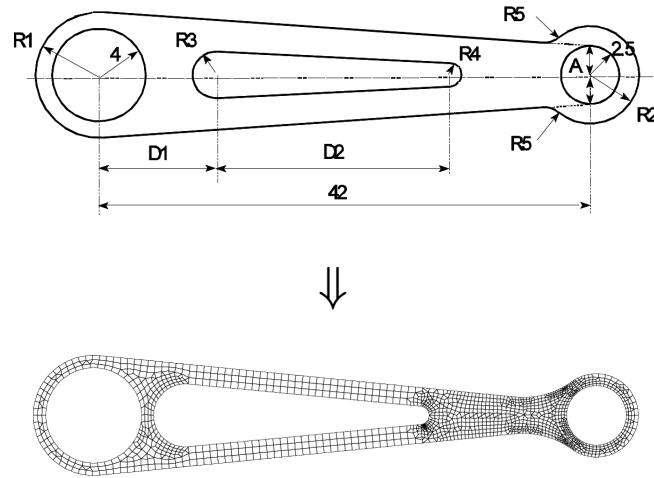


FIG. 2.1 – Optimisation de forme d'une bielle avec contrôle d'erreur [13]

La première difficulté de cette méthode se situe au niveau de l'évaluation des sensibilités. En effet, lorsque les frontières du domaine mécanique se déplacent suite à la modification d'une variable de conception, il faut également connaître le mouvement correspondant

des points intérieurs pour calculer les réponses mécaniques ainsi que leurs sensibilités. Par conséquent, les sensibilités doivent généralement être calculées par un procédé semi-analytique [12]. Deuxièmement, le maillage éléments finis doit être adapté au cours du processus d'optimisation suite au mouvement des bords de la pièce. Dans un premier temps, le maillage était simplement déformé pour suivre le mouvement du contour avec le risque d'obtenir après quelques itérations des éléments très mal conditionnés. Ensuite, grâce à l'apparition de meilleures automatiques de fiabilité croissante, des méthodes de remaillage et de contrôle d'erreur ont été ajoutées au processus d'analyse permettant un contrôle efficace de la qualité du maillage et de la précision des résultats au cours du processus d'optimisation [13].

2.3 Optimisation topologique

Les deux méthodes d'optimisation structurale décrites précédemment souffrent d'une limitation commune qui est la conservation de la topologie de la structure optimisée. En effet, le dimensionnement automatique et l'optimisation de forme n'appliquent à une structure que des transformations homéomorphes et ne sont pas en mesure de modifier la topologie de la structure c'est-à-dire la connectivité du domaine ou encore les relations de voisinage au sein de celui-ci. Suite à cette restriction, le résultat du processus d'optimisation n'est au final qu'une amélioration de la structure de départ sans modification fondamentale de cette dernière. Dans ce cadre, les choix initiaux effectués par le concepteur influencent lourdement le résultat du processus d'optimisation. Pourtant, la topologie d'une structure est un facteur des plus déterminants de la performance finale. Idéalement, le processus d'optimisation devrait pouvoir choisir de lui-même en toute liberté la connectivité de la structure ainsi que les éléments structuraux dont elle est composée. L'optimisation topologique a été développée au cours des vingt dernières années et les références [14, 6] proposent une large revue des nombreux travaux qui lui ont été consacrés.

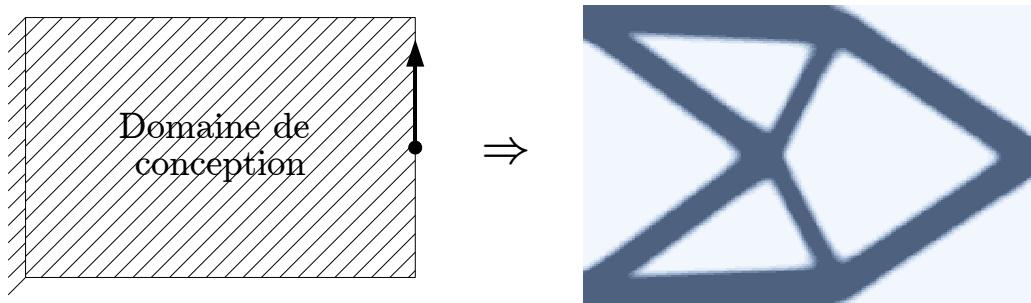


FIG. 2.2 – Minimisation de la compliance par optimisation topologique

2.3.1 Formulation du problème général d'optimisation topologique

Une des pistes pour obtenir une méthode d'optimisation topologique est de supprimer tout paramétrage de la surface ou du contour de cette structure. Le problème d'optimisation topologique peut alors être formulé comme étant la recherche de la distribution optimale de matière dans un volume de conception fixé. La distribution de matière est représentée par une fonction de pseudo-densité définie sur le domaine de conception. Cette fonction détermine la présence ou non de matière en un endroit du domaine, elle est égale à 0 lorsque cet endroit

est vide et à 1 lorsqu'il est solide. En pratique pour des raisons numériques, l'optimisation topologique se base sur un maillage d'éléments finis du domaine de conception et la distribution de pseudo-densité est approchée par une approximation dans laquelle une variable de densité est affectée à chaque élément. Dans ce cadre, le problème d'optimisation s'exprime mathématiquement comme suit,

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\mu}} f(\boldsymbol{\mu}) \\ \text{avec } & \begin{cases} c_j(\boldsymbol{\mu}) \leq \bar{c}_j \quad \forall j = 1, \dots, m \\ \mu_i \in \{\mu_{\min}, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

où f est la fonction objectif à maximiser dans le cas présent, les c_j sont les contraintes à respecter et le vecteur $\boldsymbol{\mu}$ reprend l'ensemble des pseudo-densités discrétisées. Notons qu'en pratique, de manière à éviter toute singularité de la matrice de raideur, la pseudo-densité ne prend jamais une valeur nulle mais une valeur très petite notée μ_{\min} .

Malheureusement, le problème en variables entières 0-1 est mathématiquement mal conditionné et l'existence de la solution n'est pas garantie. Par exemple, la solution obtenue est alors dépendante du maillage. En effet, l'algorithme tend généralement à créer la microstructure la plus fine possible en fonction de la taille des éléments du maillage. Une modification de la taille des éléments se traduit alors nécessairement par une modification de la structure et de sa topologie. Par ailleurs, d'une manière générale, les problèmes d'optimisation en variables discrètes sont même à l'heure actuelle encore fort difficiles à résoudre. De ce fait, le nombre relativement important de variables requises en topologie a été très pénalisant pour cette approche.

Par contre, il est possible d'obtenir un problème d'optimisation correctement conditionné en relaxant le problème discret c'est-à-dire en élargissant l'espace de conception aux densités non entières comprises entre 0 et 1. Ces densités intermédiaires peuvent alors être interprétées comme représentant un matériau possédant une microstructure poreuse. Ce principe basé sur la méthode de l'homogénéisation fut proposé par Bendsøe et Kikuchi dans la référence [5]. Le problème général peut alors être formulé comme suit,

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ \text{avec } & \begin{cases} c_j(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \leq \bar{c}_j \quad \forall j = 1, \dots, m \\ x_i \in [x_{i,\min}, x_{i,\max}] \quad \forall i = 1, \dots, k \end{cases} \end{aligned}$$

ou le vecteur \mathbf{x} désigne les variables de conception c'est-à-dire l'ensemble des paramètres de la microstructure sur chaque élément fini. Ces paramètres varient continûment entre les bornes $x_{i,\min}$ et $x_{i,\max}$ dépendantes de leur nature. Par conséquent, les pseudo-densités $\boldsymbol{\mu}$ peuvent également varier continûment puisqu'elles sont calculées sur base des variables microstructurales \mathbf{x} .

Une seconde solution est d'utiliser une contrainte sur le périmètre ou une méthode de filtrage des sensibilités empêchant la formation d'une microstructure. Ces méthodes alternatives combinées avec la relaxation du problème discret permettent d'obtenir un problème correctement posé et résultant en une structure plus réaliste. Beckers [3] a également montré qu'avec de telles contraintes, le problème discret était soluble à l'aide d'une méthode duale. La description générale de ces deux solutions fait l'objet de la section suivante.

2.3.2 Régularisation du problème par une approche microstructurale

L'approche microstructurale consiste donc à relaxer le problème discret d'optimisation topologique en autorisant les variables de conception à prendre une valeur comprise entre 0 et 1. Les densités non entières représentent alors un matériau composite fait de vide et de solide dont la proportion varie en fonction de la pseudo-densité. Cette approche fut initialement développée à l'aide d'un matériau microperforé par Bendsøe et Kikuchi en 1988 [5] et en utilisant une microstructure feuillettée 2D par Bendsøe en 1989 [4]. Ces deux types de matériaux étant par nature orthotropes l'angle d'orientation du matériau sur chaque élément est également ajouté aux variables de conception.

Matériaux microporéférés

Le premier matériau considéré par Bendøe et Kikuchi [5] est obtenu à partir d'un matériau isotrope dans lequel des microperforations rectangulaires sont creusées périodiquement comme montré à la figure 2.3. Les cavités étant rectangulaires, deux paramètres α_1 et α_2 sont nécessaires afin de définir leurs dimensions. De plus, comme déjà mentionné, à ces deux paramètres s'ajoute l'orientation θ de la microstructure. Grâce à ces microperforations de taille variable, il est possible de représenter toutes les densités intermédiaires, la densité du composite étant alors donnée par la relation

$$\mu = 1 - \alpha_1 \alpha_2$$

Il est donc possible d'obtenir un matériau purement solide avec $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et vide lorsque $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Ces deux paramètres sont avec l'angle θ les variables de conception du problème d'optimisation.

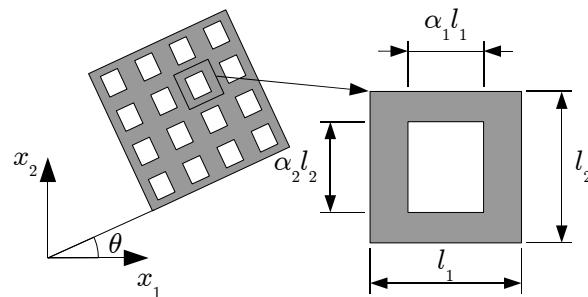


FIG. 2.3 – Schéma de la microstructure du matériau microporéférés

De manière à pouvoir étudier et optimiser le comportement d'une structure mécanique composée de matériaux composites microporéférés, il faut pouvoir calculer le comportement équivalent d'un échantillon macroscopique quelconque. Cette étape fait appel à la méthode de l'homogénéisation qui permet de calculer un tenseur de Hooke équivalent en fonction de la microstructure du composite définie ici par les trois paramètres α_1 , α_2 et θ . Ceci est effectué en faisant tendre la longueur caractéristique de la microstructure (l sur la figure) vers 0 pour un volume de composite donné. L'échantillon de composite est alors percé d'une infinité de cavités microscopiques.

Matériaux feuilletés

Une seconde classe de matériaux utilisés en optimisation topologique sont les matériaux feuilletés (référence [4]). En toute généralité, ces matériaux composites sont constitués de deux matériaux de raideurs différentes. En optimisation topologique, le matériau le moins raide est généralement du vide ou tandis que le plus raide est un matériau classique au choix. Le matériau feuilleté le plus simple est constitué d'une superposition alternée de couches des deux matériaux, il est appelé d'ordre un. Le premier paramètre de ce composite est simplement la proportion α du matériau le plus raide dans un volume donné de composite. De plus, ce matériau étant évidemment orthotrope, l'angle d'empilement des couches successives est également un paramètre. Une microstructure d'ordre un est schématisée à la figure 2.4(a). En optimisation topologique le second matériau étant du vide, la pseudo-densité est simplement égale au paramètre α .

Le matériau d'ordre deux est quant à lui constitué de feuilles successives du matériau le plus raide en proportion volumique α_2 et d'un stratifié d'ordre un. Le stratifié d'ordre un de paramètre α_1 est considéré comme étant homogène à l'échelle du composite d'ordre deux dont il fait partie. Ce qui signifie que l'épaisseur des couches successives est nettement plus faible pour le stratifié d'ordre un. En définitive, le composite d'ordre deux est en réalité constitué d'un matériau raide et d'un second matériau moins raide. Par ailleurs, le matériau d'ordre deux n'a pas nécessairement la même orientation que le matériau d'ordre un dont il est constitué. Il existe donc deux angles d'orientation θ_2 pour le composite d'ordre deux et θ_1 pour le composite d'ordre 1. Ceci donne lieu à la représentation donnée à la figure 2.4(b). La pseudo-densité peut quant à elle être aisément calculée par,

$$\mu = \alpha_1 + (1 - \alpha_1) \alpha_2$$

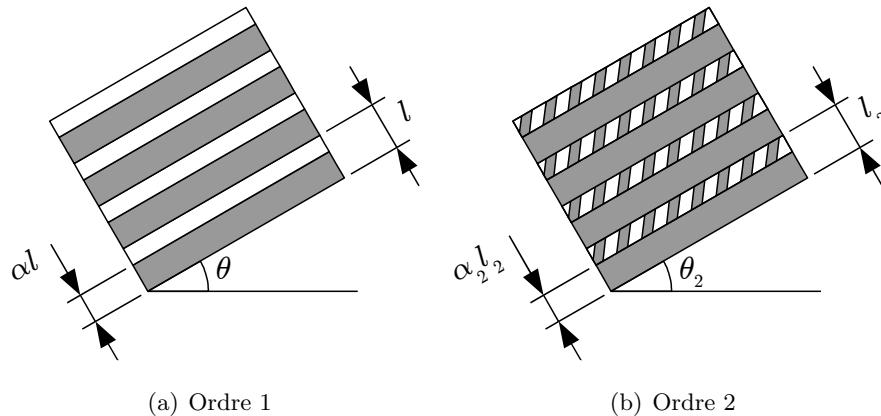


FIG. 2.4 – Schéma des matériaux feuilleté d'ordre un et deux

En suivant le même procédé, il est possible de créer un matériau feuilleté d'ordre n . De même, il est possible d'étendre ce schéma à un matériau tridimensionnel. Les propriétés mécaniques des matériaux feuilletés peuvent également être évaluées en moyenne par la méthode d'homogénéisation. Pour l'optimisation de la compliance, dans le cas bidimensionnel, il est possible de montrer qu'il est inutile d'utiliser un matériau d'ordre supérieur à trois car ces matériaux suffisent pour couvrir l'ensemble des tenseurs de raideur résultants d'un

matériau d'ordre $n \geq 3$. De plus, sous un seul cas de charge, l'utilisation d'un matériau d'ordre deux avec orientations orthogonales est optimale. Si plusieurs sollicitations sont appliquées il faut alors passer à l'ordre trois.

Notons finalement que les matériaux feuillets fournissent une relaxation totale du problème d'optimisation topologique uniquement pour l'optimisation de la compliance ou de fréquences propres. Dans un cas plus général, ils ne fournissent qu'une relaxation partielle. Cependant, les matériaux feuillets présentent une grande facilité d'utilisation. En effet, leurs propriétés homogénéisées peuvent être obtenues analytiquement alors que dans le cas général, comme pour les matériaux microperforés, il faut recourir à un calcul numérique coûteux.

2.3.3 Méthodes alternatives de régularisation

L'utilisation de composites homogénéisés pour la relaxation du problème d'optimisation présente deux inconvénients principalement d'ordre pratique. Premièrement, l'approche microstructurale possède le désavantage de fournir un résultat faisant souvent largement appel aux densités intermédiaires. Par conséquent, la structure optimale utilise des matériaux microperforés difficiles à mettre en œuvre en pratique. Par ailleurs, le coût de calcul parfois élevé requis par la procédure d'homogénéisation mène à la recherche de lois analytiques et explicites reliant la pseudo-densité au tenseur de Hooke du matériau. La fonction d'interpolation la plus célèbre ainsi obtenue est la loi SIMP (Solid Isotropic Microstructure with Penalty) proposée par Bendsøe [4]. Cette loi utilise une fonction de type puissance de la pseudo densité pour relier le module de Young réel E_0 du matériau de conception au module de Young E du pseudo-matériau. Plus précisément, elle est exprimée par,

$$\begin{aligned} E &= \mu^p E_0 \\ \rho &= \mu \rho_0 \\ 0 &\leq \mu \leq 1 \quad \text{et} \quad p > 1 \end{aligned}$$

Cette loi permet de relaxer le caractère discret de l'optimisation topologique en fournissant une interpolation du comportement mécanique pour les pseudo-densités non entières. De plus, suite à l'utilisation d'un exposant p supérieur à un, la raideur donnée par une pseudo-densité comprise entre 0 et 1 est faible vis-à-vis du coût en termes de volume de matière évalué sur base de ρ . De ce fait, la loi SIMP pénalise l'utilisation des pseudo-densités intermédiaires et favorise par conséquent les valeurs entières 0 et 1. L'élimination des densités intermédiaires est extrêmement intéressante en pratique puisqu'elle donne lieu à une structure beaucoup plus réaliste et facile à interpréter en vue de sa fabrication. Cette tendance déjà observée avec certains composites microstructuraux associée à la simplicité du modèle, fut à l'origine du succès de la loi SIMP en optimisation topologique. D'une manière générale, une valeur de l'exposant égale à 3 ou 4 est recommandée.

Malheureusement suite à son caractère artificiel, l'interpolation SIMP ne garantit pas la relaxation totale du problème et de ce fait, le résultat obtenu peut être dépendant du maillage éléments finis utilisé. L'influence du maillage sur la solution s'exprime généralement par l'apparition de nouveaux membres structuraux de plus en plus fins lorsque le maillage est lui-même raffiné. Le processus d'optimisation tend en réalité à recréer une microstructure optimale de lui-même mais la taille des éléments agit comme une contrainte et l'en empêche.

De plus, un problème numérique déjà présent avec l'approche microstructurale apparaît à nouveau ici. Cette erreur numérique se manifeste par l'apparition de structure de type

damier dans la solution d'optimisation topologique. Cet effet indésirable est illustré à la figure 2.5 où plusieurs zones sont recouvertes d'une alternance de cases blanches et noires. Il est évident qu'en pratique, une telle structure est loin d'être réaliste et optimale du fait des concentrations de contraintes qu'elle pourrait engendrer. Diaz et Sigmund [8] ont suggéré que l'apparition de cette structure était due à une surestimation de sa raideur par la méthode des éléments finis, principalement lors de l'utilisation d'éléments du premier degré. De même ils ont également montré qu'il était possible de supprimer le phénomène dans de nombreux cas par l'utilisation d'éléments de degré deux. Cependant, comme nous allons le voir dans la suite, les outils permettant d'éliminer la dépendance de la solution en fonction de la taille du maillage permettent dans un même temps d'éviter l'apparition de damier dans la solution. C'est pourquoi, afin de réduire le coût de l'analyse nous utiliserons malgré tout des éléments finis d'ordre un.

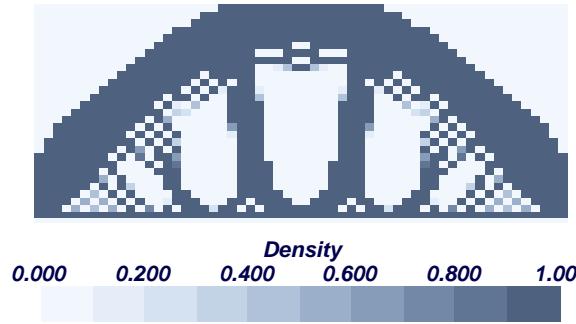


FIG. 2.5 – Exemple de structure de damier

Plusieurs méthodes ont donc été proposées au cours de ces dernières années afin d'obtenir un problème d'optimisation bien conditionné et exempt d'instabilités numériques. Les deux méthodes les plus réputées vont être présentées dans cette section. La première méthode est basée sur la limitation du périmètre de la structure mécanique et la seconde utilise une méthode de filtrage issue des techniques de traitement d'image pour lisser les sensibilités du problème d'optimisation.

Méthode du périmètre

L'apparition de membres structuraux plus fins et plus nombreux dans la structure optimale suite à un raffinement du maillage éléments finis se traduit par une augmentation du périmètre de cette structure. De même l'introduction d'une structure en damier provoque également un accroissement du périmètre. Par conséquent, il paraît judicieux de chercher à limiter le périmètre de la structure afin d'éviter ces deux problèmes. De manière à évaluer le périmètre d'une structure mécanique possédant éventuellement des densités non entières, Haber et ses coauteurs [18] proposèrent d'utiliser une fonction inspirée de la fonction de variation totale de la densité définie par,

$$P(\boldsymbol{\mu}) = \int_{\Omega \setminus \Gamma_i} \sqrt{\nabla \boldsymbol{\mu}^T \nabla \boldsymbol{\mu} + \left(\frac{\xi}{h}\right)^2} - \frac{\xi}{h} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \sqrt{\langle \boldsymbol{\mu} \rangle^2 + \xi^2} - \xi d\Gamma_i$$

Le premier membre de cette fonction correspond à l'intégrale du gradient de la pseudo-densité sur les régions où elle varie continûment. En effet, Ω désigne le domaine de conception et

Γ_i les courbes sur lesquelles la pseudo-densité est discontinue. Cependant, en optimisation topologique classique, la densité est généralement constante sur les éléments. Par conséquent, ce premier terme est généralement nul. Grâce à l'opérateur $\langle \cdot \rangle$, le second membre sert à intégrer le saut de pseudo-densité sur les discontinuités c'est-à-dire sur les frontières des éléments. La fonction $P(\mu)$ diffère de la variation totale par l'introduction du paramètre de lissage ξ . Cette variable est ajoutée afin de rendre la fonction $P(\mu)$ différentiable, car la fonction de variation totale est non différentiable puisqu'elle contient des valeurs absolues. Le paramètre ξ est donc fixé à une faible valeur positive. Enfin, le paramètre h est une longueur caractéristique du maillage élément finis.

En tenant compte de l'annulation du premier membre et du caractère spatial discret de l'optimisation topologique, l'expression de la fonction périmètre peut se réduire à une somme sur les k interfaces entre les éléments, c'est-à-dire,

$$P(\mu) = \sum_k l_k \left(\sqrt{\langle \mu \rangle_k^2 + \xi^2} - \xi \right)$$

avec $\langle \mu \rangle_k$ la variation de pseudo-densité à travers l'interface k de longueur l_k . Notons que sous l'hypothèse d'une distribution entièrement discrète de pseudo-densités, la valeur de P est égale à celle du périmètre de la structure puisqu'alors, $\langle \mu \rangle_k$ vaut 1 sur le contour de la structure (si $\xi = 0$).

Pratiquement, une contrainte supplémentaire est ajoutée au problème d'optimisation topologique afin de limiter la valeur de la fonction périmètre à une borne supérieure \bar{P} . Les figures 2.6 tirées de la référence [9], montrent la capacité de la contrainte de périmètre à supprimer les structures en damiers mais aussi à rendre la topologie insensible à un changement de maillage tout comme cela a également été fait par Haber [18]. Cependant cette méthode pose quelques problèmes au niveau de son utilisation. Premièrement, le caractère global de la contrainte introduite peut autoriser dans certains cas la formation de très fins éléments structuraux. Deuxièmement, le choix de la borne supérieure sur le périmètre est relativement difficile a priori et nécessite parfois quelques itérations. Finalement, l'introduction de cette contrainte peut déstabiliser la convergence du processus d'optimisation [10].

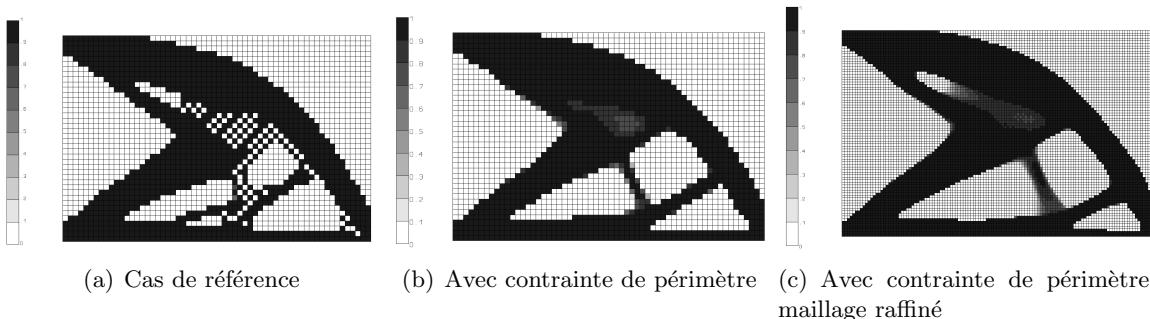


FIG. 2.6 – Application de la méthode du périmètre [9]

Filtrage

Cette seconde méthode de régularisation est inspirée des techniques de traitement d'images. Le filtrage des sensibilités proposé par Sigmund [31] a pour but de lisser ou de

rendre plus floue la distribution des sensibilités sur le domaine de conception. Ce lissage est effectué en modifiant la sensibilité correspondant à chacun des N éléments en tenant compte de la sensibilité associée à ses voisins, selon l'expression suivante.

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \mu_k} = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{H}_{ki} \mu_i \frac{\partial f}{\partial \mu_i}}{\mu_k \sum_{i=1}^N \hat{H}_{ki}} \quad \text{avec} \quad \hat{H}_{ki} = \max(0, r_{max} - \text{dist}(k, i))$$

Il s'agit donc essentiellement d'une moyenne pondérée des sensibilités sur le voisinage de chaque élément, le coefficient de pondération diminuant avec la distance. La distance r_{max} est choisie par l'utilisateur, elle permet de définir le voisinage à prendre en compte lors du filtrage pour chaque élément. Afin de prévenir l'apparition de damier dans la solution, la bonne pratique suggère de donner à r_{max} une valeur au moins égale à 1.5 fois la dimension des éléments. De cette manière, pour un maillage quadrangulaire régulier, les 8 voisins directs de chaque élément sont pris en compte lors du lissage des sensibilités. Ceci empêche de trop fortes différences de sensibilité entre éléments voisins et par conséquent évite la création de damier.

La technique de filtrage donne également de bons résultats en terme de stabilité de la topologie obtenue vis-à-vis du maillage éléments finis. En conservant une distance absolue de filtrage constante lors d'un raffinement du maillage, le lissage des sensibilités empêche l'ajout de nouveaux éléments structuraux plus fins. Par ailleurs, ce filtre peut également permettre de prendre en compte une contrainte de fabrication portant sur la dimension minimale des membres structuraux.

Par rapport à la méthode du périmètre, la méthode de filtrage présente le grand avantage d'agir localement et donc d'empêcher toute apparition d'une pièce trop fine dans la structure. De plus, le choix du paramètre r_{max} est très facile a priori et ne nécessite généralement pas de procédure d'essais et erreurs. Malheureusement, cette méthode ne possède pas de base théorique elle est donc classée dans les méthodes heuristiques. En effet, le lissage des sensibilités modifie le problème d'optimisation résolu. Néanmoins, cette méthode a déjà été appliquée dans de nombreux cas de figure et a toujours fourni de bonnes performances, la structure finale étant sans damier et indépendante du maillage. Finalement, suite au lissage des sensibilités, les résultats d'optimisation topologique possèdent généralement une frontière floue entre la structure et le vide. La distribution de densité obtenue n'est donc pas strictement entière, mais ce léger inconvénient peut également retarder la tendance du modèle SIMP à se bloquer dans une conception entièrement 0-1 [6].

2.4 Optimisation topologique de valeurs propres

Un des problèmes aux valeurs propres couramment résolu en mécanique est l'extraction des fréquences propres d'une structure. De fait, l'environnement d'utilisation possédant toujours des sources d'excitation oscillatoires, il faut éviter qu'au cours de son utilisation la pièce soit victime de phénomènes dynamiques invalidants ou destructeurs. Par conséquent, les fréquences de résonance d'une structure mécanique sont parfois une des premières préoccupations lors de l'étape de conception. L'intervention des méthodes d'optimisation dans ce domaine est donc naturelle. Le plus souvent, l'optimisation a pour but de repousser les

fréquences propres au delà d'une fréquence fixée ou bien d'exclure la présence de fréquences à l'intérieur d'une bande dangereuse.

D'une manière générale en mécanique, l'extraction des fréquences propres ν est effectuée en résolvant le problème aux valeurs propres suivant,

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{x} = 0 \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}$$

Les matrices \mathbf{K} et \mathbf{M} désignent respectivement la matrice de raideur et la matrice de masse du modèle éléments finis associé. Outre le problème dynamique, cette équation aux valeurs propres est également utilisée en stabilité linéaire pour le problème du flambement, le problème aux valeurs propre est alors exprimé par $(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{x} = 0$. Sans perte de généralité, l'équation aux valeurs propres permet d'obtenir l'expression de la sensibilité d'une valeur propre unique λ_k vis-à-vis de la pseudo-densité μ_k suivante [9],

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \mu_k} = \frac{1}{m_k} \mathbf{x}_k^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mu_k} - \lambda_k \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mu_k} \right) \mathbf{x}_k \quad \text{avec} \quad m_k = \mathbf{x}_k^T \mathbf{M} \mathbf{x}_k$$

A partir de cette expression des sensibilités, il est possible d'obtenir un algorithme d'optimisation topologique des valeurs propres. Cependant, à la différence des autres méthodes d'optimisation, l'optimisation topologique rencontre une difficulté particulière au cours du processus d'optimisation en particulier lorsque la loi SIMP est utilisée. En effet, comme cela est montré par N. Pedersen [23], la réduction de la pseudo-densité sur de larges plages du domaine de conception entraîne une forte diminution de la raideur sur ces zones. Or, l'interpolation SIMP donne un rapport très faible entre la raideur et la masse pour les faibles pseudo-densités. L'exposant p étant généralement égal à 3, et la densité réelle étant simplement proportionnelle à μ , cela donne un rapport raideur sur masse en μ^2 qui s'approche donc très rapidement de zéro lorsque μ est faible. Ceci a pour conséquence de créer des zones très souples mais relativement massives qui peuvent donc vibrer à basse fréquence.

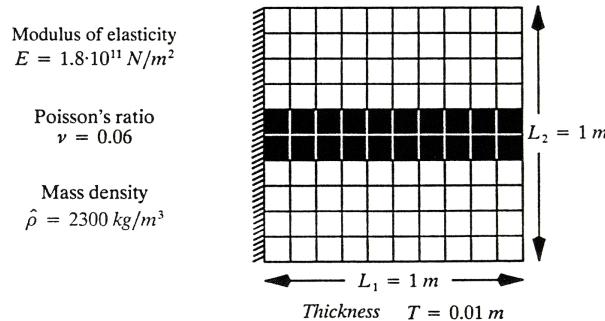


FIG. 2.7 – Schéma de la poutre et du domaine d'optimisation [23]

Un exemple de mode local est proposé à la référence [23]. La figure 2.7 représente la poutre rectangulaire placée dans un domaine d'optimisation topologique. La poutre est donc entourée d'éléments vides auxquels une pseudo-densité de 0.001 est affectée. Comme il est possible de le constater sur la figure 2.8, le premier mode propre de la poutre placée dans le domaine d'optimisation (figure 2.8(a)) est très éloigné du mode propre réel de la poutre (figure 2.8(b)) du point de vue fréquentiel et géométrique. Le rôle joué par les régions de faible

densité entourant la poutre est clairement visible sur la figure 2.8(a). En effet, l'essentiel des déformations relatives au premier mode propre se produisent dans ces régions ce qui explique la faible fréquence de résonance correspondante.

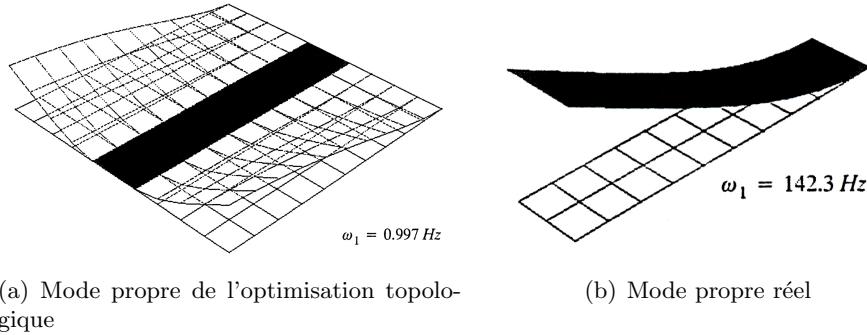


FIG. 2.8 – Modes propres de la poutre [23]

Différentes possibilités sont envisageables pour contourner ce problème. La solution la plus simple a priori est de d'augmenter la pseudo-densité minimale μ_{min} l'inconvénient étant que les éléments "vides" conservent alors une raideur beaucoup plus élevée. Le problème d'optimisation se transforme alors plutôt en un problème de renforcement. Une autre possibilité est de retirer les éléments vides du domaine de calcul au cours du processus d'optimisation. Cependant cette méthode est un peu trop contraignante puisqu'elle empêche l'optimiseur de revenir en arrière et de remplir les trous qu'il avait précédemment créés. Une seconde solution plus complexe utilise une méthode de suivi du mode structural à l'aide du coefficient de corrélation modal (MAC) [20]. Il est ainsi possible de retrouver parmi les modes propres le mode structural d'intérêt à chaque itération, en sélectionnant le mode possédant le coefficient de corrélation le plus élevé avec le mode structural de l'itération précédente.

N. Pedersen envisage une approche différente. D'une part certains degrés de liberté sont ignorés lors du calcul des modes propres. Ces degrés de libertés sont ceux des noeuds entourés d'éléments possédant une faible densité. D'autre part, il utilise une modification de la loi SIMP de manière à empêcher une diminution excessive du rapport raideur sur masse. Pour ce faire, la loi SIMP est remplacée par une loi linéaire pour les faibles densités. Ce qui donne une loi de la forme,

$$E = f(\mu) E_0 \quad \text{avec} \quad f(\mu) = \begin{cases} \mu^3 & \text{si } 0.1 \leq \mu \leq 1 \\ \mu/100 & \text{si } \mu_{min} \leq \mu \leq 0.1 \end{cases}$$

Il en résulte un rapport constant entre la raideur et la masse pour les faibles densités. Cette loi présente l'inconvénient de ne pas être différentiable au point $\mu = 0.1$ ce qui peut éventuellement perturber le processus d'optimisation. Toutefois, grâce à la combinaison de ces deux modifications, le calcul des modes propres peut être mené à bien.

D'autres précautions doivent également être prises lors de l'optimisation de modes propres. Par exemple, lorsqu'un seul des modes propres est optimisé, il faut malgré tout surveiller l'évolution des modes voisins de manière à prévenir un croisement des fréquences propres. D'autre part, l'approche décrite ci-dessus doit être modifiée en présence de valeurs propres multiples, car le problème est alors non différentiable

2.5 Optimisation de microsystèmes électromécaniques

Les méthodes d'optimisation ont bien entendu déjà été appliquées au domaine des microsystèmes. Ce travail portant sur les microsystèmes électromécaniques, cette section est plus particulièrement consacrée aux travaux appliquant l'optimisation structurale à ces microsystèmes.

2.5.1 Optimisation de la tension de pull-in

L'optimisation de la tension de pull-in de micropoutre a déjà été effectuée par Abdalla et ses coauteurs [1]. Cet article propose d'utiliser une méthode de dimensionnement de manière à maximiser la tension de pull-in d'une micropoutre en modifiant l'évolution de son épaisseur ou de sa largeur. Différentes conditions d'appuis sont considérées. Le schéma général du microsystème étudié est repris à la figure 2.9.

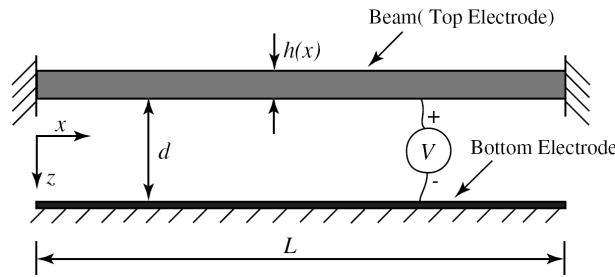


FIG. 2.9 – Schéma de la micropoutre optimisée dans [1]

Modélisation électromécanique

Le microsystème électromécanique est modélisé à l'aide d'éléments finis de poutre. Chacun des éléments de poutre possède une épaisseur et une largeur supposées constantes sur l'élément. La force électrostatique est calculée sur base de l'équation reliant la tension appliquée entre deux électrodes et la force résultante sans prendre en compte les effets de bords. Ce qui donne à l'abscisse x de la poutre une force,

$$p(x) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 b(x) V^2}{(d - w(x))^2}$$

La largeur $b(x)$ de la poutre est bien entendu reprise dans cette expression car elle influence la surface de celle-ci. De même, la déformation de la poutre $w(x)$ apparaît également dans cette expression suite à la modification de la distance séparant les électrodes qu'elle implique. Par contre, l'épaisseur h qui est aussi éventuellement variable le long de la micropoutre n'est pas reprise dans le calcul de p . La distance entre les électrodes au repos est donc supposée constante quelque soit la distribution d'épaisseur de la poutre. Les conditions de pull-in sont calculées sur base du modèle éléments finis à l'aide de l'algorithme du *normal flow* [25].

Problème d'optimisation

Le rôle du processus d'optimisation sera donc de déterminer les épaisseurs ou largeurs optimales de chaque élément de manière à obtenir une tension de pull-in maximale. Le problème

d'optimisation considéré est formulé comme suit,

$$\max_{y(x)} \lambda_{cr}$$

avec $\begin{cases} \int_0^1 y \, dx = 1 \\ \underline{y} - y(x) \leq 0 \end{cases}$

La fonction objectif λ_{cr} correspond à la charge critique de pull-in adimensionnelle et est proportionnelle au carré de la tension de pull-in. Les variables de conception $y(x)$ correspondent soit aux épaisseurs adimensionnelles $\frac{h(x)}{h_0}$ soit aux largeurs adimensionnelles $\frac{b(x)}{b_0}$. Deux contraintes sont imposées. Premièrement, une contrainte sur le volume de matière disponible fixant ce volume au volume initial. Et deuxièmement, une borne inférieure sur les variables de conception permettant de prendre en compte une contrainte de fabrication sur la plus petite dimension usinable. L'optimisation est menée sur base d'un critère d'optimalité issu de l'expression du lagrangien du problème d'optimisation.

Applications

Partant d'une distribution initiale uniforme $y = 1$, les principaux résultats obtenus sont présentés aux figures 2.10 en ce qui concerne l'optimisation sur l'épaisseur et 2.11 pour l'optimisation de la largeur. Sur ces figures, la configuration initiale, qui correspond également à la borne sur le volume, est tracée en trait discontinu.

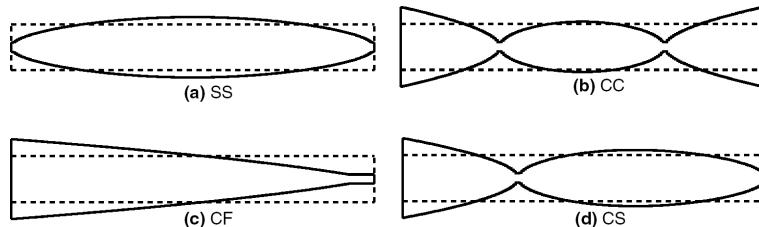


FIG. 2.10 – Distributions optimales d'épaisseur pour différentes conditions d'appuis [1]

Les exemples proposés d'optimisation de l'épaisseur sont calculés avec une borne inférieure sur l'épaisseur $h = 0.2$. Le tableau 2.1 compare les λ_{cr} optimisés aux λ_{cr} initiaux. Remarquons que pour les quatre configurations, le gain dépasse pratiquement systématiquement 50%. L'analyse des distributions obtenues figure 2.10 montre une tendance logique de l'optimiseur à placer la matière afin de maximiser la raideur de l'ensemble.

	SS	CC	CF	CS
Initiale	1,1492	5,8413	0,1401	2,7880
Finale	1,700	10,0136	0,3391	4,4405
Augmentation (%)	47,93	71,32	142,06	59,27

TAB. 2.1 – Evolution de λ_{cr} suite à l'optimisation de l'épaisseur

L'optimisation de la largeur offre à l'optimiseur un degré de liberté supplémentaire puisqu'il peut également modifier la distribution des forces électrostatiques sur la structure. En effet, en modifiant, la largeur d'un élément il modifie également sa surface et par conséquent

la force électrostatique qui s'y applique. Dès lors, comme le montrent les figures 2.11, l'optimiseur tend à rapprocher la matière des encastrements de manière à minimiser le bras de levier de la force électrostatique tout en continuant à chercher une raideur maximale. Grâce à la possibilité de déplacer le point d'application des forces électrostatiques, l'augmentation de λ_{cr} obtenue est plus élevée que précédemment et peut atteindre plus de 400% dans le cas encastré libre.

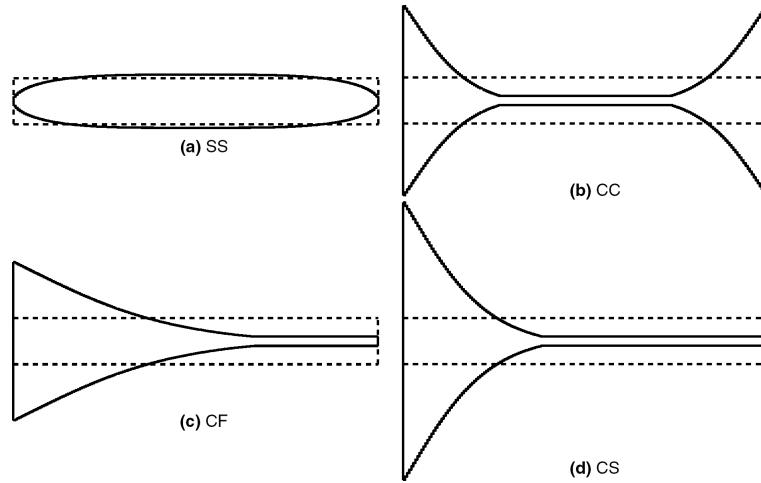


FIG. 2.11 – Distributions optimales de largeur pour différentes conditions d'appuis [1]

2.5.2 Optimisation topologique d'actionneurs électrothermiques

Tout comme les forces électrostatiques, les forces électrothermiques sont fréquemment utilisées dans les microsystèmes. Les actionneurs électrothermiques fonctionnent sur base de l'effet Joule généré par un courant électrique traversant une partie du dispositif. Il en résulte une augmentation de la température de la portion du système soumise au passage du courant et par conséquent une dilatation de celle-ci. L'application de l'optimisation topologique à la conception de tels actionneurs a été considérée par Sigmund [32], Yin [37] et Mankame [21].

Le problème d'optimisation est bien entendu multiphysique puisque trois phénomènes interviennent simultanément à savoir, la conduction électrique, le transfert de chaleur et la déformation mécanique. Cependant, le couplage entre ces différents phénomènes est purement séquentiel et unidirectionnel car il suit toujours l'ordre suivant,



Dès lors, la simulation numérique du dispositif peut être effectuée suivant un schéma étagé sans nécessiter d'itération en résolvant chacun des problèmes physiques dans l'ordre logique.

Sigmund [32] et Yin [37] traitent le problème de la maximisation du déplacement d'un point du domaine pour un milieu continu. L'interpolation des propriétés du matériau entre le vide et le solide est effectuée pour chaque domaine physique sur base d'une loi de type puissance. La conception de microsystèmes bi-matériaux est également envisagée par les deux références. La présence de deux matériaux permet de profiter de deux coefficients de dilatation différents ce qui augmente les possibilités de design et les performances du microsystème. De

plus, Sigmund montre que la procédure d'optimisation peut être utilisée avec plusieurs cas de charge. Ces cas de charge peuvent différer par la position des électrodes et par la direction du déplacement résultant. Un exemple est présenté figure 2.12. Le premier cas de charge correspond à un déplacement horizontal pour une tension appliquée à l'électrode V_1 tandis que le second impose un déplacement vertical si l'électrode V_2 est sollicitée. Yin propose quant à lui une modélisation plus élaborée de la perte de chaleur par convection et montre l'influence de cette modélisation sur l'optimum obtenu.

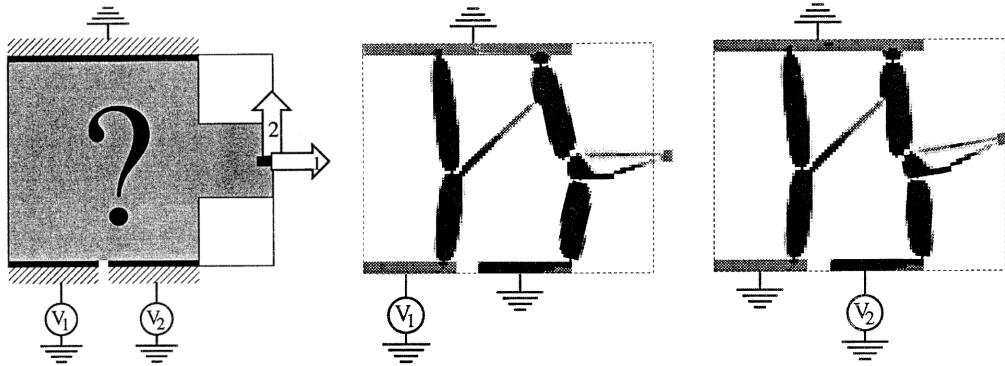


FIG. 2.12 – Schéma du problème d'optimisation en milieu continu et déformées de la structure optimale pour chacun des cas de charge [32]

Le problème de l'optimisation d'un treillis de barres est considéré par Mankame [21]. Hormis l'avantage que la structure optimale est généralement plus claire qu'avec l'optimisation d'un milieu continu, l'intérêt de l'utilisation d'éléments de barre est qu'ils permettent une modélisation plus simple des phénomènes électriques et des transferts de chaleur. Toutefois, le problème d'optimisation obtenu est soumis à des contraintes géométriques supplémentaires puisque l'emplacement des membres structuraux est fixé a priori. La figure 2.13 reprend une des applications présentées à la référence [21]. Le schéma de gauche présente les fixations disponibles, l'emplacement des deux électrodes ainsi que le noeud dont le déplacement doit être maximisé. La structure déformée obtenue est dessinée à droite, sur cette figure les traits discontinus représentent les éléments de barre ayant atteint leur borne inférieure et ne participant donc pas à la structure.

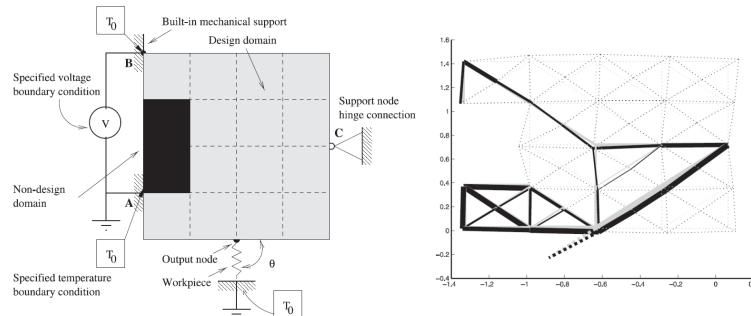


FIG. 2.13 – Schéma d'un problème d'optimisation de treilli et déformée du treilli résultant [21]

2.5.3 Optimisation topologique d'actionneurs électrostatiques

Les travaux d'Abdalla *et al.* [1] présentés précédemment considèrent l'application d'une technique d'optimisation de dimensionnement dans le cadre d'un couplage entre les effets électrostatiques et les phénomènes mécaniques. Cependant, Raulli et Maute [26] ont montré qu'il est également possible d'adapter l'optimisation topologique à ce type de problèmes multiphysiques. Cette approche, décrite ci-dessous, permet d'obtenir un problème d'optimisation très général où le processus d'optimisation peut jouer sur la conception des deux domaines physiques à la fois.

La modélisation électromécanique utilisée par Raulli est basée sur une méthode étagée. Ceci signifie que les deux problèmes physiques sont résolus séparément, l'équilibre entre le domaine mécanique et le domaine électrique n'étant rétabli qu'à l'aide d'un processus itératif.

Modification de la loi SIMP

En dehors d'un algorithme d'optimisation topologique, un problème électromécanique peut être résolu de manière étagée en maillant séparément la structure mécanique et le vide qui l'entoure. Le problème mécanique est alors simplement résolu à partir du maillage de la structure tandis que les équations de l'électrostatique sont solutionnées uniquement sur le maillage du vide.

Cependant, lorsqu'une procédure d'optimisation topologique est ajoutée, il n'est plus possible de mailler a priori et individuellement les deux domaines. En effet, à chaque itération, la topologie des domaines physiques est modifiée. De plus, suite à la présence de pseudo-densités non entières représentant un mélange de vide et de matière, il est difficile de séparer clairement les deux domaines physiques.

De manière à contourner ces deux obstacles, Raulli [26] propose d'étendre le maillage électrostatique à l'entièreté du domaine de conception. La figure 2.14 représente cette superposition de maillages, où E_0 représente le domaine purement électrostatique dans lequel le processus d'optimisation ne place pas d'éléments mécaniques et E_δ le maillage électrostatique recouvrant le domaine d'optimisation.

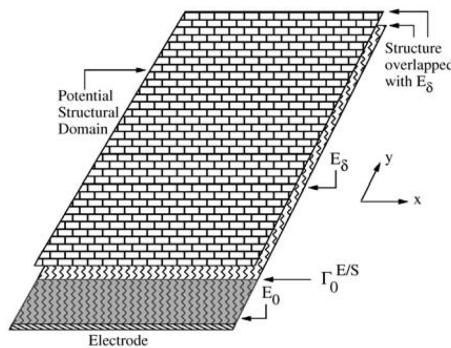


FIG. 2.14 – Représentation schématique des domaines de calcul [26]

Il faut alors tenir compte de la présence de deux matériaux différents (vide et solide) sur le domaine électrostatique. Par analogie avec l'optimisation topologique mécanique, la transition entre ces deux matériaux est effectuée en modifiant la permittivité du matériau de chaque élément sur base de sa pseudo-densité. La structure étant considérée parfaitement

conductrice, la permittivité ε_{max} y est très grande (théoriquement infinie) par rapport à celle du vide fixée à $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$. Les lois du comportement matériel deviennent donc,

$$\begin{cases} E = \mu^{p_E} E_{solide} \\ \varepsilon = \varepsilon_{max} (\mu - \mu_{min})^{p_\varepsilon} + \varepsilon_0 \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{max} = \frac{\varepsilon_0}{\mu_{min}^{p_E}} \end{cases}$$

La permittivité de la structure ε_{max} étant calculée pour que son rapport avec ε_0 soit équivalent au rapport entre E_{solide} et E_{vide} c'est-à-dire $\mu_{min}^{-p_E}$.

De plus, de nouvelles variables de conception sont également ajoutées sur le domaine pu-remment électrique (E_0) afin d'optimiser la topologie de l'électrode inférieure. Ces variables de conception permettent de simuler l'introduction d'une couche d'isolant sur l'électrode inférieure en modifiant la permittivité des éléments du domaine E_0 . L'isolant, permet de masquer l'électrode inférieure de manière à annuler l'effet des parties recouvertes. L'interpolation de la permittivité est simplement donnée par

$$\varepsilon_i = \mu_i * \varepsilon_0 \quad \text{avec} \quad \mu_{min,\varepsilon} \leq \mu_i \leq 1$$

En outre, un troisième maillage coïncidant avec le maillage électrique est adjoint au modèle. La résolution d'un problème mécanique fictif sur ce dernier maillage est utilisée afin d'adapter le maillage électrostatique aux déplacements de la structure mécanique.

Les deux difficultés principales sont ensuite d'appliquer d'une part le voltage imposé au domaine de calcul électrique et d'autre part, les forces électrostatiques à la structure mécanique. Ces deux conditions aux limites doivent normalement être imposées à la frontière entre la structure et le vide. Cependant, suite à l'existence de densités intermédiaires, cette frontière est généralement mal définie. De ce fait, il n'est pas possible d'appliquer les conditions aux limites suivant un schéma "on/off" ce qui de surcroît déstabilisera l'optimisation. Les solutions proposées par Rauli permettent d'imposer les conditions aux limites en tenant compte de la présence de densités intermédiaires. Ces solutions sont parfois artificielles et compliquent l'interprétation physique de la modélisation. Néanmoins, l'application présentée à la fin de cette section montre l'efficacité et l'intérêt de la méthode développée.

Voltage imposé

La condition aux limites de voltage aux noeuds doit donc être appliquée de manière progressive. Pour ce faire, chaque noeud est relié à un élément ou plus précisément à la pseudo-densité de cet élément. En fonction de cette pseudo-densité, une modification du problème électrostatique est utilisée de manière à imposer artificiellement la condition de voltage au noeud. Le problème électrostatique original s'écrit,

$$\mathbf{K}\phi = \mathbf{q}$$

avec ϕ le vecteur des potentiels aux noeuds, \mathbf{q} le vecteur des charges électriques et \mathbf{K} la matrice de permittivité du problème électrostatique, les modifications suivantes sont appliquées,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}_{jj} &= w^{v0} \mathbf{K}_{avg} \frac{\mu_j - \mu_{min}}{1 - \mu_{min}} + \mathbf{K}_{jj} \\ \hat{\mathbf{q}}_j &= w^{v0} \mathbf{K}_{avg} \frac{\mu_j - \mu_{min}}{1 - \mu_{min}} \phi_{0j} + \mathbf{q}_j \end{aligned}$$

Dans ces équations, \mathbf{K}_{avg} désigne la moyenne des éléments de la matrice et ϕ_{0j} le potentiel imposé au noeud j . De cette manière, pour une valeur du paramètre de pondération w^{v0} suffisamment grande pour que les termes initiaux de la matrice \mathbf{K} soient négligeables par rapport à $\hat{\mathbf{K}}_{jj}$ et \mathbf{q}_j négligeable vis-à-vis de $\hat{\mathbf{q}}_j$, la $j^{\text{ième}}$ équation du système devient,

$$\begin{aligned} w^{v0} \mathbf{K}_{avg} \frac{\mu_j - \mu_{min}}{1 - \mu_{min}} \phi_j &= w^{v0} \mathbf{K}_{avg} \frac{\mu_j - \mu_{min}}{1 - \mu_{min}} \phi_{0j} \\ \Leftrightarrow \phi_j &= \phi_{0j} \end{aligned}$$

de sorte que ϕ_j est progressivement imposé à ϕ_{0j} lorsque μ_j tend vers 1. Cet artifice permet donc d'imposer la condition aux limites de voltage de manière progressive en fonction de la densité de l'élément.

Calcul des forces électrostatiques

Raulli [26] utilise des éléments d'interface afin de calculer les forces électrostatiques. Ces éléments sont normalement placés uniquement sur la frontière séparant le vide et le solide. Cependant, cette frontière étant mobile et floue, Raulli propose de procéder de la même façon que pour le calcul électrostatique. Le maillage d'éléments d'interface est donc étendu à l'ensemble du domaine d'optimisation comme cela est montré à la figure 2.15. La permittivité des éléments d'interface est ensuite modifiée selon un schéma SIMP de manière à prendre en compte les variations de densité, ce qui donne

$$\varepsilon_j^i = \varepsilon_0 \frac{(\mu_j - \mu_{min})^{p_i}}{(1 - \mu_{min})^{p_i}} \quad (2.1)$$

Cette interpolation a pour conséquence de permettre un calcul normal des forces sur les éléments solides et de l'annuler sur les éléments vides.

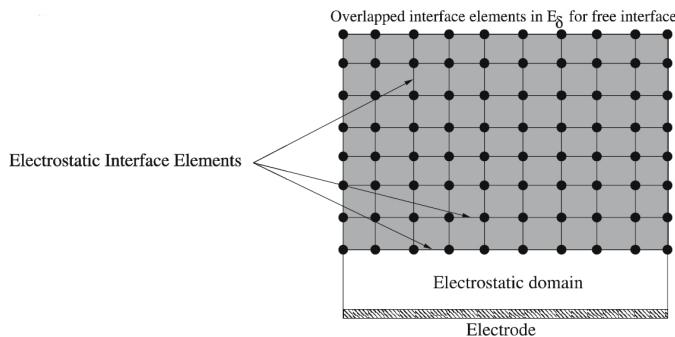


FIG. 2.15 – Position des éléments d'interface pour le calcul des forces [26]

Toutefois, cette modification n'est pas suffisante car le calcul des forces par les éléments d'interface nécessite la connaissance du champ électrique en leurs noeuds. Ces valeurs du champ électrique sont calculées par interpolation à partir du champ électrique connu sur les éléments du maillage électrostatique. Cependant, il faut éviter d'inclure un élément solide dans l'interpolation du champ électrique aux noeuds, le champ électrique de chaque élément est donc multiplié par le facteur de pondération suivant,

$$w_j^e = \frac{1 - \mu_j}{1 - \mu_{min}}$$

de manière à ne pas considérer les éléments solides dans l'interpolation.

Application

Une application de cette méthode présentée à la référence [26], est la conception d'un inverseur de force tridimensionnel. Le schéma du problème d'optimisation est repris à la figure 2.16. L'objectif que doit atteindre la structure est de convertir la force électrostatique agissant vers le bas en un mouvement vers le haut du point t représenté sur la figure.

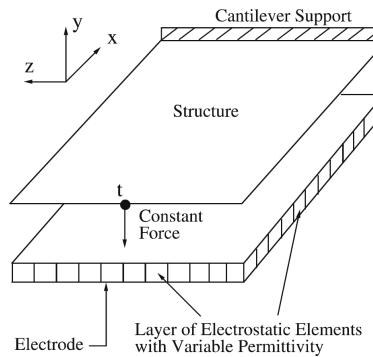


FIG. 2.16 – Schéma du problème d'optimisation de l'inverseur [26]

La distribution matérielle obtenue ainsi qu'une interprétation schématique de la structure sont présentées sur la figure 2.17. Comme il est possible de le constater sur le schéma, la portion de la structure prenant appui au centre du support sert de pivot et ne se déplace pas. Par contre la partie accrochée à l'extrémité du support et située au dessus de l'électrode va permettre de générer une force électrostatique la tirant vers le bas. Ensuite par effet de levier grâce à l'appui fourni par le pivot, le point t se déplace logiquement vers le haut.

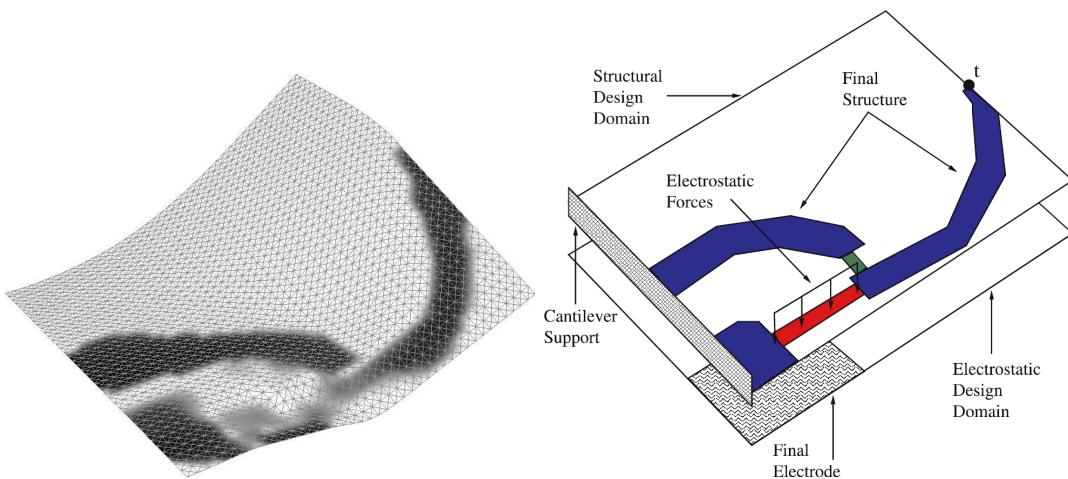


FIG. 2.17 – Résultat d'optimisation de l'inverseur de force [26]

Cet exemple a montré que la méthode développée par Raulli fait preuve d'une grande efficacité pour la conception de systèmes électromécaniques. Les résultats obtenus sont en effet assez originaux et prometteurs. De plus, ils bénéficient d'une flexibilité importante permettant de modifier chacun des domaines physiques. Cependant, il semble que certains points de la méthode pourraient être améliorés comme par exemple l'application du voltage imposé. En

effet, le voltage est imposé de manière très artificielle. Par ailleurs, il pourrait être intéressant de remplacer la méthode étagée par une formulation monolithique afin d'obtenir un problème mieux unifié.

2.6 Conclusion

L'optimisation topologique présente de nombreux avantages par rapport à l'optimisation de forme et au dimensionnement. En effet, grâce à un espace de conception beaucoup plus large, cette technique gagne en efficacité. Cependant, différentes méthodes de régularisation doivent être utilisées. Depuis une dizaine d'années, l'optimisation topologique est arrivée à maturité et commence depuis peu à être industrialisée. Par ailleurs, son champ d'application continue de croître avec des applications de plus en plus ambitieuses comme le montre le dernier article présenté sur l'optimisation topologique de microsystèmes électromécaniques. Cette méthode conserve donc un grand potentiel d'application et de recherche.

Chapitre 3

Procédure d'optimisation de la tension de pull-in

3.1 Introduction

Ce chapitre étudie l'application de l'optimisation topologique au problème de maximisation de la tension de pull-in. Cette fonction objectif a tout d'abord été choisie au vu des inconvénients présentés par le phénomène de pull-in car il limite l'étendue des tensions utilisables sur un microsystème et peu mener à sa destruction. Par ailleurs, suite au caractère multiphysique et non linéaire du pull-in, l'application de l'optimisation topologique à ce problème est un bon test en vue d'une utilisation plus générale de cette méthode dans le domaine multiphysique.

Le présent travail étant une première étude, quelques hypothèses simplificatrices ont été considérées. La première partie de ce chapitre sera donc consacrée à la description du problème d'optimisation choisi ainsi qu'aux hypothèses formulées. Dans le cadre des hypothèses posées, nous montrerons qu'il est possible d'obtenir une expression semi-analytique des dérivées de la fonction objectif vis-à-vis des variables de conception. Afin de vérifier la validité de l'expression semi-analytique, les valeurs des sensibilités calculées selon cette expression seront ensuite confrontées à une analyse de sensibilité par différences finies.

Le calcul semi-analytique des sensibilités nécessitant la connaissance des conditions de pull-in, la seconde partie de ce chapitre étudiera la recherche précise du point de pull-in. Cette recherche pouvant être basée soit sur l'algorithme de Riks Crisfield soit sur celui du normal flow présentées au chapitre 1, nous décrirons tout d'abord son implémentation pour chacune des méthodes. Ensuite, l'efficacité et la fiabilité des deux méthodes seront comparées à l'aide de deux applications. Cette comparaison permettra de vérifier la bonne implémentation de celles-ci et au final de choisir la méthode la plus performante pour le processus d'optimisation.

Enfin, nous verrons que la loi d'interpolation SIMP peut être insatisfaisante dans le cas du problème d'optimisation qui nous occupe. La dernière section de ce chapitre présentera donc la solution utilisée de manière à obtenir un algorithme d'optimisation fonctionnel.

3.2 Description du problème d'optimisation

Le chapitre introductif sur l'optimisation topologique a montré que cette méthode est appliquée avec succès depuis plusieurs années dans le domaine des structures mécaniques. Si

l'application de l'optimisation topologique pour les problèmes ne faisant intervenir qu'un seul champ physique est généralement bien maîtrisée, sa mise en œuvre dans le domaine multi-physique est moins courante et reste parfois délicate comme cela est présenté par l'article de Raulli [26]. Cet article considérant l'optimisation topologique d'un domaine électromécanique a montré que l'interaction entre les différents champs physiques est alors difficile à gérer car l'interface entre les deux domaines n'est pas définie a priori. De plus, la présence de nouveaux phénomènes physiques requiert l'interpolation de propriétés matérielles supplémentaires.

Tout comme les travaux de Raulli, le présent travail porte sur l'optimisation topologique d'un domaine électromécanique. Cependant, dans le cadre de cette étude préliminaire, afin de séparer les difficultés de ce problème complexe, nous avons voulu empêcher le processus d'optimisation de modifier l'interface entre les deux domaines physiques. C'est pourquoi, nous supposons que le domaine d'optimisation est séparé du domaine électrique par une électrode parfaitement conductrice non modifiable par le processus d'optimisation. Le problème général d'optimisation ainsi obtenu est schématisé à la figure 3.1. L'électrode imposée correspond à l'électrode mobile, et isole le domaine d'optimisation du champ électrique. Le domaine d'optimisation est donc purement mécanique et il n'est pas nécessaire d'interpoler les propriétés électriques de la matière. De plus, l'électrode imposée coïncide avec l'interface entre le domaine mécanique et le domaine électrique. Cette interface est clairement définie et non modifiée par le processus d'optimisation. Dès lors, les noeuds sur lesquels sont appliquées les forces électrostatiques ainsi que le domaine de calcul électrique ne seront pas modifiés au cours de l'optimisation. Dans ces conditions, le problème d'optimisation considéré est équivalent à la conception d'une suspension mécanique optimale pour l'électrode mobile. Cependant, cette hypothèse n'affecte pas le caractère multiphysique du domaine de calcul puisqu'un couplage fort entre les deux domaines physiques est toujours présent.

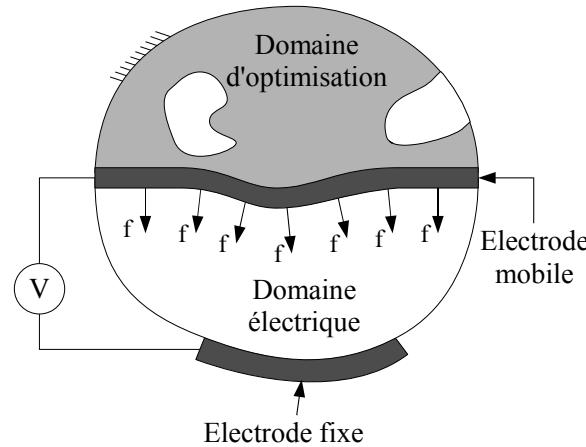


FIG. 3.1 – Schéma de principe du problème d'optimisation

Partant d'une structure répondant aux hypothèses décrites ci-dessus, l'objectif est donc de distribuer la matière dans le domaine de conception mécanique de telle sorte que la tension de pull-in V_{pi} soit maximale. Cependant afin d'éviter une solution triviale, il est nécessaire d'ajouter une contrainte limitant la quantité de matière disponible. Une borne supérieure \bar{v} est par conséquent imposée sur le volume de la structure. Le problème peut alors être formulé

mathématiquement comme suit,

$$\max_{\boldsymbol{\mu}} V_{pi} (\boldsymbol{\mu})$$

avec $\begin{cases} \sum_i \mu_i v_i \leq \bar{v} \\ \mu_{min} < \mu_i < 1 \quad \forall i \end{cases}$

avec μ_i la valeur de la pseudo-densité attachée à l'élément i et v_i son volume.

3.3 Calcul des sensibilités

La connaissance des dérivées de la fonction objectif par rapport aux variables de conception est fondamentale pour un processus d'optimisation basé sur la programmation mathématique. Le problème d'optimisation ainsi que les hypothèses sur lesquelles il repose étant posé, il est maintenant possible d'obtenir une expression générale de ces sensibilités en appliquant une démarche similaire à celle proposée dans la référence [1].

Lors du calcul des sensibilités il faut garder à l'esprit que la modification d'une variable de conception ne va pas seulement modifier la tension de pull-in mais aussi les déplacements de la structure au point de pull-in comme le montre la figure 3.2. Par conséquent, il faut donc tenir compte de la dérivée des déplacements généralisés au point de pull-in vis-à-vis des densités.

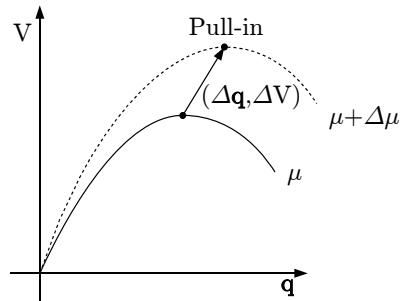


FIG. 3.2 – Influence de la perturbation d'une variable de conception sur la courbe d'équilibre

Le système considéré peut être modélisé par l'équation d'équilibre suivante,

$$\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{f}(V, \mathbf{q}) = 0 \quad (3.1)$$

avec \mathbf{K} la matrice de raideur linéaire du système, \mathbf{q} le vecteur des déplacements généralisés et \mathbf{f} le vecteur des forces généralisées reprenant ici l'ensemble des effets non-linéaires. Ce vecteur des forces généralisées dépend donc de la tension appliquée et des déplacements généralisés. En dérivant cette équation d'équilibre par rapport à la densité μ_i , nous obtenons

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{q} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mu_i} - \frac{\partial \mathbf{f}(V, \mathbf{q})}{\partial \mu_i} = \mathbf{0}$$

Et en explicitant la dérivée des forces généralisées par rapport aux variables de conception, il vient

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{q} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mu_i} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu_i} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mu_i} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial \mu_i} = \mathbf{0}$$

Or, suite à l'hypothèse de séparation entre le domaine d'optimisation et le domaine électrique, \mathbf{f} ne dépend pas directement des densités μ_i et cette dérivée partielle est donc nulle. L'équation précédente peut donc être mise sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial \mu_i} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{q} + \underbrace{\left(\mathbf{K} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right)}_{\mathbf{K}_T} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mu_i} \quad (3.2)$$

La matrice \mathbf{K}_T est la matrice de raideur tangente du système couplé puisqu'elle est égale à la dérivée de l'équation d'équilibre (3.1) du système par rapport aux déplacements généralisés \mathbf{q} . Au point de pull-in, cette matrice est singulière suite à l'instabilité qui caractérise ce point. Dès lors, le premier mode propre \mathbf{r} de la matrice de raideur tangente fait également partie de son noyau. Par conséquent, l'égalité suivante est vérifiée au point de pull-in,

$$\mathbf{K}_T \mathbf{r} = 0$$

De plus, en considérant que le vecteur \mathbf{r} est normalisé de sorte que

$$\mathbf{r}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial V} = 1 \quad (3.3)$$

Et en multipliant l'équation (3.2) au point de pull-in à gauche par \mathbf{r}^T , cela nous donne l'expression de la dérivée de la tension de pull-in par rapport à la variable de conception μ_i .

$$\frac{\partial V_{pi}}{\partial \mu_i} = \mathbf{r}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{q}$$

Cette expression analytique permet un calcul rapide des sensibilités de la fonction objectif. Cependant, il ne faut pas oublier que ce calcul nécessite la connaissance de la dérivée partielle du vecteur des forces généralisées par rapport à V pour normaliser le vecteur propre de la matrice de raideur tangente du système (équation (3.3)). Cette dérivée partielle peut être calculée par différences finies sans grande perte d'efficacité ou de précision. La nécessité d'utiliser des différences finies pour calculer la valeur des sensibilités fait de l'expression obtenue une expression semi-analytique.

3.4 Vérification par différences finies

La validité de l'expression semi-analytique des sensibilités peut-être vérifiée à l'aide d'un calcul des sensibilités par différences finies. Pour ce faire, les dérivées de la fonction objectif sont évaluées numériquement par différences centrées à partir une topologie de référence. La tension de pull-in est donc calculée à deux reprises pour chaque variable de conception avec à chaque fois une perturbation de la variable par rapport à la topologie de référence. La valeur de la perturbation est fixée par expérience à $\pm 10^{-4}$ cette valeur étant suffisamment grande pour donner une variation significative de la tension de pull-in sans pour autant fausser le calcul par différences finies.

La figure 3.3(a) représente les conditions aux limites du problème de référence. A gauche, seule l'électrode imposée est fixée tandis que des conditions aux limites de symétrie sont imposées à droite. Le domaine de conception est constitué d'un maillage quadrangulaire de 13 fois 14 éléments ce qui donne donc 182 variables de conception. De plus, de manière à se placer

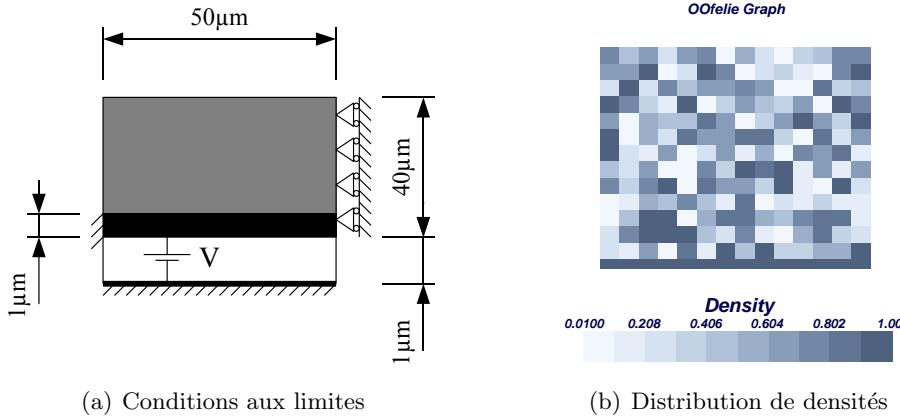


FIG. 3.3 – Configuration de référence

dans une configuration la plus générale possible, une distribution de pseudo-densités aléatoire présentée sur la figure 3.3(b) est imposée. L'interpolation du comportement mécanique du matériau est effectuée par une loi SIMP de paramètre 3.

Les sensibilités obtenues par différences finies et par l'approche semi-analytique sont superposées à la figure 3.4(a). De plus, la figure 3.4(b) présente l'écart en pourcents entre les deux approches. Ces deux figures montrent clairement la validité de l'approche semi-analytique. En effet, les deux courbes sont parfaitement superposées et l'écart entre les sensibilités est toujours largement inférieur au pourcent. Ces différences résultent probablement d'erreurs d'arrondi et d'imprécisions numériques lors du calcul des conditions de pull-in et des sensibilités par voie semi-analytique ou par différences finies. Cependant, au vu de la bonne corrélation entre les sensibilités, nous pouvons conclure que l'expression semi-analytique des sensibilités est correcte.

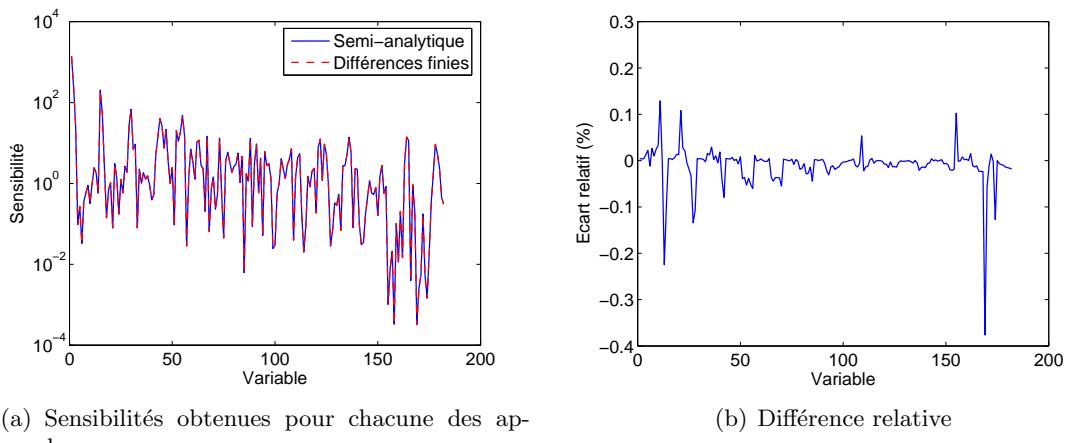


FIG. 3.4 – Comparaison des résultats du calcul de sensibilité

Notons finalement que le temps de calcul requis par l'évaluation des différences finies est considérable en comparaison du temps pris par une analyse de sensibilité semi-analytique. De

fait, malgré le faible nombre de variables du cas de référence choisi, il faut environ 40 minutes pour calculer l'ensemble des sensibilités par différences finies alors que la voie analytique nécessite quelques dizaines de secondes. Par conséquent, il est très avantageux de disposer d'une expression au moins semi-analytique des sensibilités.

3.5 Implémentation de la recherche des conditions de pull-in

L'algorithme de Riks Crisfield et l'algorithme du normal flow ont été présentés au premier chapitre de ce travail. Ces deux algorithmes peuvent être utilisés afin de calculer la courbe d'équilibre d'un système électromécanique. Sur base de ces méthodes de calcul il faut maintenant établir une stratégie permettant de localiser précisément le point de pull-in sur la courbe d'équilibre. Grâce à la connaissance des conditions de pull-in l'analyse de sensibilité pourra ensuite être effectuée.

3.5.1 Algorithme de Riks-Crisfield

L'algorithme de Riks-Crisfield étant déjà implémenté dans *Oofelie* [27], nous n'allons pas entrer ici dans les détails de cette implémentation mais allons directement nous concentrer sur la recherche du point de pull-in. L'étude du système électromécanique à un degré de liberté du chapitre 1 a montré que la raideur effective du système diminuait à l'approche du pull-in pour s'annuler en ce point. Or, la raideur effective calculée pour le système à un degré de liberté correspond en fait à sa raideur tangente. Par ailleurs, l'annulation de la raideur tangente pour le système à un degré de liberté se traduit dans les systèmes à plusieurs degrés de liberté par la singularité de la matrice de raideur tangente au point de pull-in.

Cette propriété pourrait donc permettre de détecter le passage par le point de pull-in. Cependant, au vu du coût de calcul élevé du déterminant d'une matrice, il est équivalent et plus efficace de résoudre le problème aux valeurs propres $\mathbf{K}_T \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$. Toutefois, suite à la présence de degrés de liberté électriques, certaines valeurs propres de la matrice de raideur tangente sont négatives et de faible module ce qui complique la recherche de la valeur propre s'annulant au pull-in. Par contre, pour le problème aux valeurs propres dynamique linéarisé exprimé par,

$$(\mathbf{K}_T - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

\mathbf{M} étant la matrice de masse, toutes les valeurs propres sont positives tant que le système est stable, c'est-à-dire avant de passer le point de pull-in. A partir du point de pull-in, le système devient instable et la première valeur propre dynamique du système devient négative comme illustré figure 3.5. Cette méthode présente l'avantage de ne nécessiter que l'extraction de la première valeur propre, ce calcul pouvant être effectué simplement par un algorithme de la puissance.

La recherche du point d'annulation sur la courbe d'équilibre de la première valeur propre permettra par conséquent de localiser le point de pull-in. A cette fin, la méthode de la *regula falsi* a été couplée avec l'algorithme de Riks-Crisfield. Pour rappel, la *regula falsi* est une méthode itérative de recherche de zéro d'une fonction basée sur un intervalle d'incertitude incluant le zéro recherché. Son principe est illustré à la figure 3.6. L'intervalle d'incertitude est délimité par deux points, α_0 et α_1 , pour lesquels la fonction prend des valeurs de signes différents. Afin d'obtenir un nouveau point α_2 plus proche du zéro, une approximation linéaire de la fonction est effectuée sur base de α_0 et α_1 et de la valeur de f en ces points. Le point

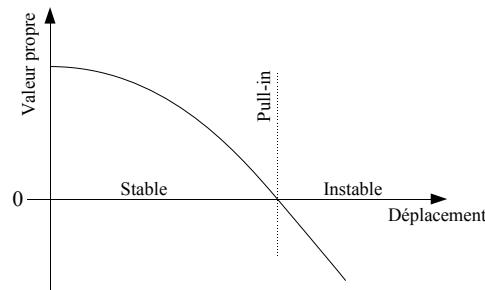


FIG. 3.5 – Evolution de la première valeur propre en fonction du déplacement sur la courbe d'équilibre

α_2 est ensuite défini comme étant le zéro de l'approximation linéaire, ce qui donne,

$$\alpha_2 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{f(\alpha_1) - f(\alpha_0)} f(\alpha_0) \quad (3.4)$$

En fonction du signe de $f(\alpha_2)$, le nouveau point va remplacer α_0 ou α_1 de manière à conserver un intervalle d'incertitude incluant le zéro.

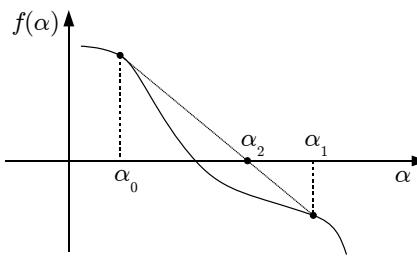


FIG. 3.6 – Principe de la regula falsi

Cependant, l'algorithme de Riks-Crisfield ne peut pas fournir directement deux points donnant lieu à des valeurs propres de signes opposés. Par conséquent, la regula falsi est inactive lors de la première phase de recherche du pull-in qui consiste à suivre la courbe d'équilibre en partant du point de repos. Pendant cette première phase, la première valeur propre est calculée pour chaque point convergé, elle est en principe positive au début. La seconde phase débute dès qu'une valeur propre négative est trouvée. A partir de ce moment, la regula falsi est activée.

La méthode de regula falsi a du être légèrement adaptée pour être couplée à l'algorithme de Riks-Crisfield. Tout d'abord, la regula falsi doit être basée sur le rayon de l'hypersphère de la méthode de Riks-Crisfield puisque c'est la seule variable influençant le pas de progression sur la courbe d'équilibre. Cette variable n'est pas idéale car la regula falsi va supposer que le nouveau point α_2 se trouvera sur la droite reliant α_0 à α_1 . Cependant, ce n'est pas le cas comme le montre la figure 3.7 puisque Riks-Crisfield va ramener ce point sur la courbe d'équilibre. Il n'existe donc pas de correspondance réelle entre le point estimé par la regula falsi et le point obtenu sur la courbe. Il s'en suit une légère erreur qui heureusement doit progressivement diminuer à mesure que l'intervalle d'incertitude se réduit, puisque la courbe d'équilibre sera alors fort proche d'une droite sur cet intervalle.

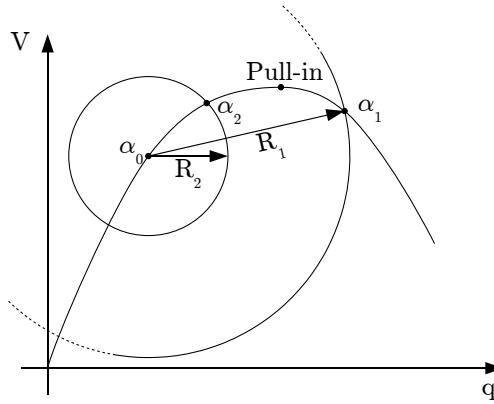


FIG. 3.7 – Non correspondance entre le rayon de l'hypersphère et de l'abscisse curviligne

Par ailleurs, il est préférable de conserver le sens de progression initial sur la courbe d'équilibre suite à la structure interne de l'algorithme de Riks-Crisfield. La procédure est donc la suivante, dès qu'un point donnant une valeur propre négative est trouvé, l'ensemble des données correspondant au dernier point à valeur propre positive rencontré sont conservées de sorte que ce point va servir de point de départ à l'itération suivante. Riks-Crisfield est donc relancé à partir du dernier point à valeur propre positive avec un rayon d'hypersphère réduit selon l'équation (3.4) où α_0 est posé à 0 et α_1 à l'ancien rayon. Le nouveau rayon permet après convergence d'obtenir un nouveau point. Si ce dernier correspond à une valeur propre positive, le point est alors pris comme nouveau point de départ pour les itérations futures. Par contre si la valeur propre est négative, le rayon est simplement à nouveau réduit.

3.5.2 Algorithme du normal flow

La méthode du normal flow a été utilisée avec succès par Abdalla *et al.* [1], afin de localiser le point de pull-in d'une poutre soumise à des forces électrostatiques. De ce fait, il nous a semblé intéressant d'essayer d'appliquer cet algorithme décrit par la littérature comme plus efficace que Riks-Crisfield [1, 25]. Cette méthode, présentée au premier chapitre, se résume simplement à la résolution du système suivant,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\tilde{\mathbf{f}} \\ \mathbf{v}^T & \frac{d\lambda}{ds} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{r} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le calcul des conditions de pull-in est en fait effectué de manière étagée par Abdalla *et al.* [1] car les forces électrostatiques sont calculées séparément sur base d'une formule analytique en fonction du voltage appliqué et de la déformée. La variable de charge λ choisie est logiquement proportionnelle à la tension au carré puisqu'il s'agit de forces électrostatiques. Ceci permet de définir $\tilde{\mathbf{f}}$ comme suit,

$$\tilde{\mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f}}{\lambda}$$

où \mathbf{f} désigne le vecteur des forces électrostatiques. De cette manière, il existe un bon accord entre la prédiction $\Delta\lambda\tilde{\mathbf{f}}$ de l'évolution des forces suite à un $\Delta\lambda$ et les forces résultant du calcul basé sur l'augmentation de tension correspondant au $\Delta\lambda$.

Ce travail utilise une approche plus générale où les forces électrostatiques sont obtenues par résolution d'un problème éléments finis fortement couplé. Par conséquent, il est préférable d'adapter l'algorithme du normal flow afin de résoudre le problème de manière monolithique en vue d'améliorer la stabilité et la vitesse de convergence. Dans une formulation monolithique, le vecteur des forces généralisées inclut les forces électrostatiques sur la structure mécanique ainsi que les charges électriques aux noeuds correspondant au problème électrostatique. Si les forces électriques sont également en première approximation proportionnelles à la tension imposée au carré, les charges électriques sont elles plutôt directement proportionnelles à cette tension. Par conséquent, il est difficile de trouver une expression de la variable de charge λ telle que les forces généralisées lui soient simplement proportionnelles.

Cependant, grâce à la connaissance de la matrice de raideur tangente du problème électromécanique couplé, il est possible de connaître la dérivée des forces généralisées d'origine électrique en fonction du voltage imposé. En repartant du développement en série de Taylor au premier ordre du résidu \mathbf{r} ,

$$\mathbf{r}(\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}, V + \Delta V) \simeq \mathbf{r}(\mathbf{q}, V) + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{q}}\Delta\mathbf{q} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial V}\Delta V = \mathbf{r}(\mathbf{q}, V) + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{q}}\Delta\mathbf{q} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{q}_{V_f}}\frac{\partial\mathbf{q}_{V_f}}{\partial V}\Delta V$$

où \mathbf{q}_{V_f} désigne le vecteur des degrés de liberté de potentiel électrique imposés tandis que \mathbf{q} représente toujours le vecteur des déplacements généralisés libres. L'équation de base du normal flow peut ensuite être écrite comme suit,

$$\mathbf{K}_T\Delta\mathbf{q} + \underbrace{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{q}_{V_f}}\frac{\partial\mathbf{q}_{V_f}}{\partial V}}_{-\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial V}}\Delta V = -\mathbf{r}$$

Le facteur multiplicatif de ΔV correspond au signe près à la dérivée des forces généralisées d'origine électrostatique \mathbf{f} vis-à-vis de la tension appliquée V . Cette dérivée se décompose en deux facteurs. Le premier facteur $\partial\mathbf{r}/\partial\mathbf{q}_{V_f}$ est en fait la portion de la matrice de raideur tangente globale reliant les degrés de liberté libres aux degrés de potentiel électrique fixés, elle est notée $\mathbf{K}_{T(q,V_f)}$. Le second facteur $\partial\mathbf{q}_{V_f}/\partial V = \mathbf{V}_f unit$ est la dérivée des potentiels imposés par rapport à la variable de potentiel imposé. Les composantes du vecteur de potentiel imposé étant soit égales à V soit à 0, les composantes de $\mathbf{V}_f unit$ prennent respectivement la valeur 1 ou 0. La dérivée des forces généralisées peut donc être exprimée sous une forme rappelant le calcul des forces engendrées par des déplacements imposés,

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial V} = -\mathbf{K}_{T(q,V_f)} \cdot \mathbf{V}_f unit \quad (3.5)$$

A partir de cette expression, il est possible d'obtenir la dérivée des forces généralisées par rapport à une variable de charge quelconque dont l'expression en fonction du potentiel imposé est connue et dérivable. Le système d'équations linéaires du normal flow peut alors s'écrire,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\lambda} \\ \mathbf{v}^T & \frac{d\lambda}{ds} \end{bmatrix}}_{D\mathbf{r}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{q} \\ \Delta\lambda \end{bmatrix}}_{D\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{r} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Le choix de la variable de charge étant libre, elle a simplement été prise proportionnelle à la tension appliquée. Ce qui donne,

$$\lambda = NV$$

Le facteur de proportionnalité N permet de normaliser la dérivée des forces de manière à obtenir une matrice $D\mathbf{r}$ homogène. La dérivée des forces généralisées par rapport à λ est donnée par,

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \lambda} = \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial V}$$

L'importance de cette normalisation va être expliquée dans ce qui suit.

Influence de la normalisation

Le noyau peut être séparé en deux parties, d'une part le vecteur \mathbf{v} correspondant aux degrés de liberté mécaniques et d'autre part $\frac{d\lambda}{ds}$, le dernier élément du noyau, se rapportant à la variable de charge. L'équilibre entre les valeurs de ces deux parties dépend directement du facteur de normalisation N . En effet, N définit l'importance relative entre les termes de raideur et de force de la matrice $D\mathbf{r}$ qui se répercute logiquement sur les termes du noyau.

Sur base du noyau, une équation supplémentaire est ajoutée au système d'équations afin qu'il soit déterminé (équation (3.6)). Cette équation impose que l'incrément sur les inconnues $D\mathbf{c}$ soit orthogonal au noyau. Par conséquent, si dans ce noyau, les éléments de \mathbf{v} sont faibles par rapport à $\frac{d\lambda}{ds}$, il s'en suivra un incrément $D\mathbf{c}$ portant essentiellement sur les déplacements mécaniques et ne modifiant que très peu la variable de charge et donc le voltage appliqué.

Cet effet est illustré à la figure 3.8. Les deux courbes correspondent à deux valeurs de N différentes. N étant plus faible pour la figure de gauche, il en résulte un $\lambda_{pull-in}$ également plus faible. D'un point de vue géométrique, le noyau représente la tangente au Davidenko flow. Par ailleurs, le Davidenko flow est lui-même pratiquement parallèle à la courbe d'équilibre. La contrainte supplémentaire sur la correction signifie qu'elle doit être perpendiculaire au Davidenko flow. Dès lors, la courbe de gauche étant très horizontale, les corrections seront pratiquement verticales et n'auront presque aucune influence sur les déplacements généralisés. A l'inverse, la figure de droite montre qu'un facteur de normalisation plus élevé donne lieu à une correction plus horizontale.

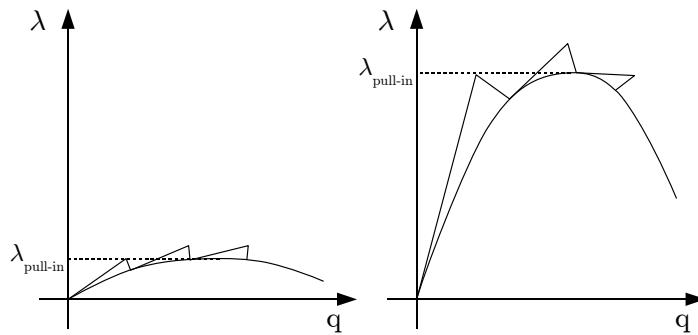


FIG. 3.8 – Influence du facteur de normalisation sur la correction du normal flow : à gauche N faible, à droite N élevé

En réduisant suffisamment N , il est possible de rendre la correction totalement horizontale ce qui peut être problématique pour la résolution du problème. En effet, dans ce cas, la variable de charge n'est absolument plus modifiée par le processus de correction. Cette situation similaire à celle rencontrée avec l'algorithme de Newton-Raphson est à éviter car

lorsque la prédition donne une valeur de λ supérieure à celle du point de pull-in, l'algorithme est incapable de réduire la variable de charge et de converger.

Implémentation

La figure 3.9 décrit l'organisation de la routine implémentée. La phase de prédition est simplement composée d'une progression similaire à Newton-Raphson. Elle est basée sur la matrice de raideur tangente du système et sur la dérivée des forces généralisées par rapport au voltage imposé (3.5). De plus, une routine de déplacement de maillage est ajoutée de manière à conditionner au mieux le maillage électrostatique avant la correction. Ce déplacement de maillage est effectué sur base d'un problème mécanique fictif [28] et est suivi d'un calcul électrostatique.

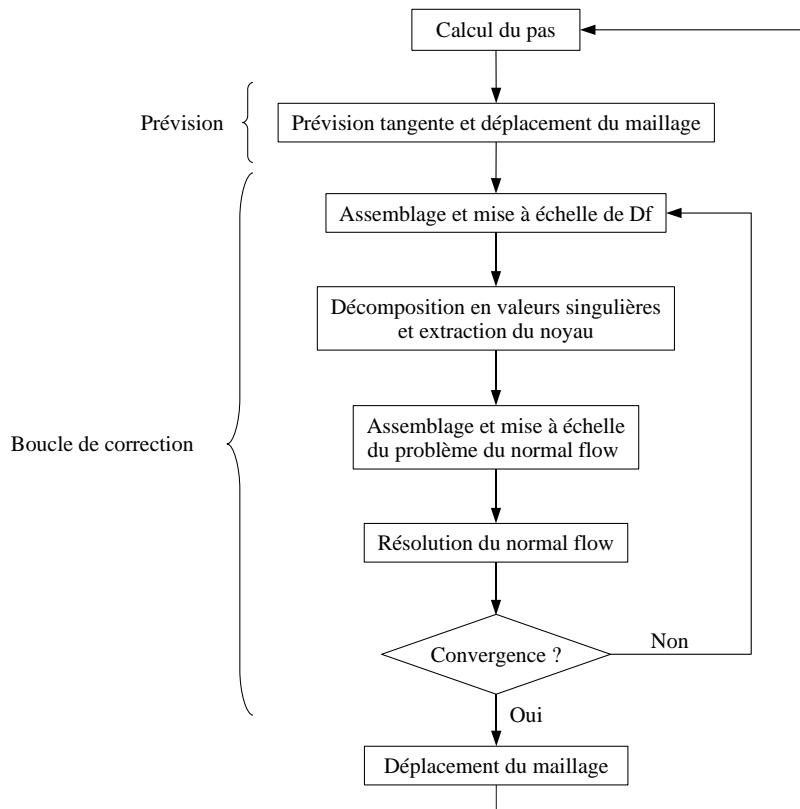


FIG. 3.9 – Implémentation du normal flow

La boucle de correction est ensuite effectuée. Comme cela est montré sur le schéma, le corps de cette boucle est décomposé en plusieurs étapes. Tout d'abord, la partie supérieure de la matrice $D\mathbf{r}$ est assemblée à partir de la matrice de raideur tangente \mathbf{K}_T et de la dérivée du vecteur de forces généralisées.

$$D\mathbf{r}_{sup} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{K}_T & -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \lambda} \end{array} \right]$$

Après mise à échelle de $D\mathbf{r}_{sup}$, le noyau de la matrice est obtenu sur base d'une décomposition en valeurs singulières. Cette procédure d'extraction du noyau a été choisie

car d'une part elle est utilisée par Matlab et d'autre part, la décomposition en valeurs singulières était déjà implémentée dans *Oofelie*. La matrice $D\mathbf{r}_{sup}$ étant rectangulaire, il existe nécessairement une valeur singulière très proche de zéro, le vecteur correspondant à cette valeur singulière est le noyau recherché.

Dès que le noyau est connu, le système d'équation du normal flow est assemblé, mis à échelle et résolu avec un membre de droite égal aux forces internes. La boucle de correction continue ensuite tant que le critère d'arrêt n'est pas satisfait. Ce critère d'arrêt est basé sur la norme des forces internes et permet d'arrêter la boucle lorsque cette norme est suffisamment faible. Finalement, la boucle de correction est éventuellement suivie d'une procédure d'uniformisation du maillage électrique avant de passer à une nouvelle prévision.

Recherche du point de pull-in

Le calcul du pas est effectué sur base d'une regula falsi de manière similaire à celle utilisée avec l'algorithme de Riks-Crisfield. Cependant, le normal flow calcule pendant la phase de correction la valeur de $\frac{d\lambda}{ds}$ c'est-à-dire la dérivée de la variable de charge par rapport à l'abscisse curviligne de la courbe d'équilibre. Le pull-in se produisant pour une valeur maximale de la variable de charge, cette dérivée est par conséquent nulle au pull-in. C'est pourquoi comme suggéré à la référence [1], la procédure de regula falsi cherchera à annuler la fonction $\frac{d\lambda}{ds}$.

Pour le normal flow, lorsque la regula falsi est active, le pas de progression correspond au déplacement du noeud de référence au cours de la prédiction. Le noeud de référence est simplement un noeud de l'électrode imposée choisi au début du processus d'optimisation (le noeud central pour une poutre bi-encastrée par exemple). Ce choix du pas de progression est a priori meilleur que la norme de la prédiction utilisée dans Riks-Crisfield. Mais, au vu de la procédure de correction, la position du noeud de référence n'est pas nécessairement constante au cours de celle-ci. Par conséquent, le point estimé par la regula falsi ne correspondra pas en général au point obtenu à l'itération suivante. Tout comme pour l'algorithme de Riks-Crisfield, la recherche du pull-in sera donc entachée d'une erreur. La procédure de regula falsi est arrêtée lorsque la taille relative de l'intervalle de confiance descend en dessous d'un seuil prédéterminé.

3.5.3 Application des méthodes

Système à un degré de liberté

Les deux méthodes présentées ci-dessus vont être mises en application et comparées sur base d'un cas test simple. Le modèle éléments finis de référence est représenté à la figure 3.10. Il s'agit d'un système à un degré de liberté composé d'un élément ressort de raideur $k = 4 \cdot 10^{11} \text{ N/m}$ et d'un élément électromécanique d'air (en trait discontinu) de permittivité $\epsilon = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ et de raideur très faible (10^{-3} N/m). Le potentiel électrique est imposé aux deux noeuds de l'élément électromécanique ; seul le noeud situé entre les deux éléments reste donc libre de se déplacer. Une expression analytique de l'équation d'équilibre est obtenue simplement à partir de l'étude du système à un degré de liberté effectuée au chapitre 1. La surface étant unitaire, l'équation d'équilibre est donnée par,

$$V = \sqrt{\frac{-2 \cdot 4 \cdot 10^{11}x(10^{-6} + x)}{8,84 \cdot 10^{-12}}}$$

La tension de pull-in théorique est quant à elle égale à $115,7762$ V pour un déplacement de $-1/3 \cdot 10^{-6}$. Au vu de la valeur de cette tension de pull-in, le facteur de normalisation de la méthode du normal flow va être fixé à $5 \cdot 10^{-9}$ de manière à obtenir une variable de charge λ qui soit du même ordre de grandeur que les déplacements du noeud libre.

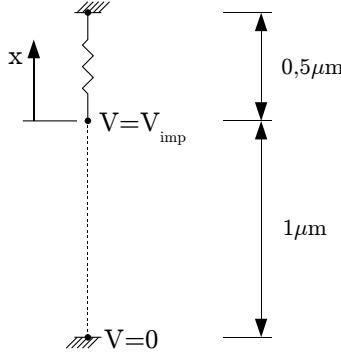


FIG. 3.10 – Schéma du cas test à un degré de liberté

Les deux algorithmes sont d'abord utilisés de manière à obtenir la courbe d'équilibre du système, la regula falsi étant désactivée. La figure 3.11 représente l'ensemble des points suivis par chacun des algorithmes superposés à la courbe d'équilibre analytique. La structure en dents de scie résulte de l'alternance entre les phases de prédiction et de correction. Ces figures permettent tout d'abord de vérifier que malgré le pas relativement grand, les deux méthodes convergent très vite vers la courbe d'équilibre après chaque prédiction et fournissent des résultats fort semblables. De plus, en ce qui concerne le normal flow, il est clairement visible que les corrections sont effectuées en suivant une perpendiculaire à la courbe d'équilibre. C'est afin de mettre en évidence cette perpendicularité que l'ordonnée du graphe est λ pour le normal flow.

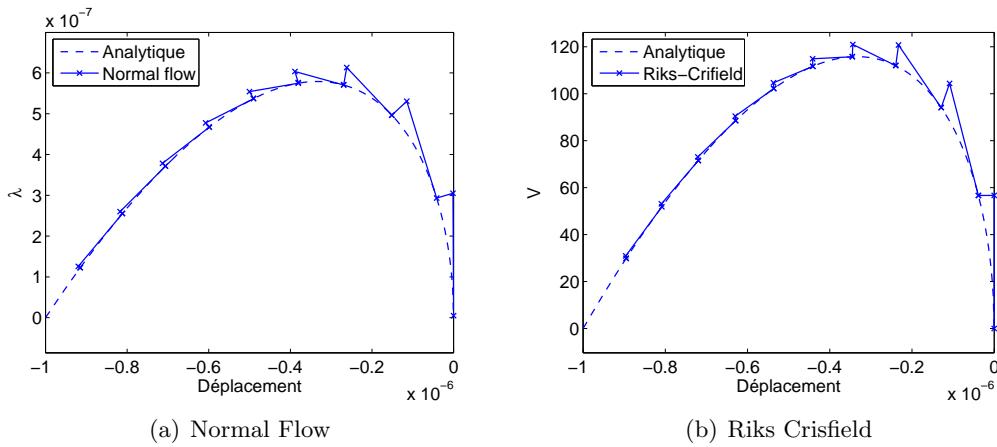


FIG. 3.11 – Courbes d'équilibres obtenues avec chacune des méthodes

En ce qui concerne la recherche du point de pull-in, les deux méthodes fournissent des résultats très similaires. En effet, la tension de pull-in calculée est de $115,78$ V dans les deux cas, avec un déplacement de $3,3335 \cdot 10^{-7}$ pour Riks-Crisfield et $3,3336 \cdot 10^{-7}$ pour le normal

flow. Ces deux dernières valeurs sont acceptables étant donné que la limite d'arrêt est placée à un intervalle de confiance relatif de 10^{-4} . Par contre, le temps de calcul diffère fortement entre les deux méthodes il passe en effet de moins d'une seconde pour Riks-Crisfield à environs trois secondes pour le normal flow.

Cet exemple permet également d'illustrer le comportement de la méthode du normal flow en fonction du facteur de normalisation. Les figures 3.12 reprennent le parcours itératif de l'algorithme pour différentes valeurs de N . La situation de référence (figure 3.12(a)) correspond au facteur de normalisation choisi plus haut. Cette figure montre qu'un choix adéquat du facteur de normalisation permet d'obtenir une correction pratiquement perpendiculaire également dans le plan (\mathbf{q}, V).

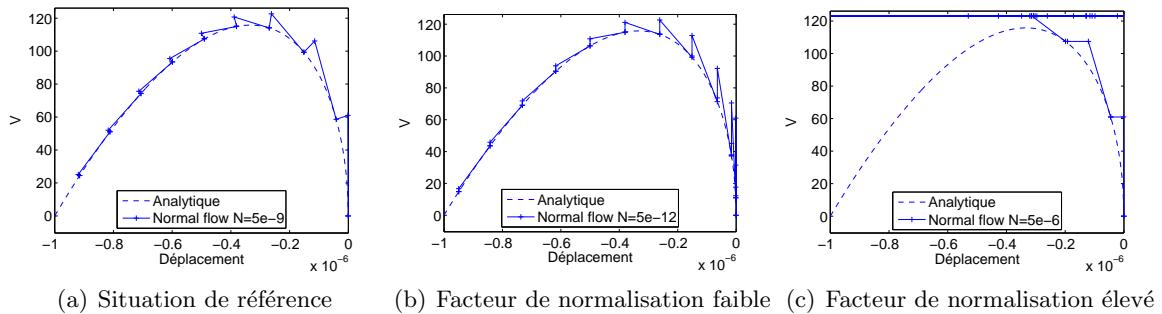


FIG. 3.12 – Influence du facteur de normalisation sur l'algorithme du normal flow

Cependant, ce n'est plus le cas si ce paramètre est réduit d'un facteur 1000 (figure 3.12(b)). Dans ce cas, la correction est pratiquement verticale ce qui ne pose pas de problème important ici. Néanmoins, cette situation doit être impérativement évitée au point de départ étant donné que la tangente est également verticale en ce point. Par conséquent, une correction verticale ramènerait le système au point de départ et l'algorithme serait incapable de progresser sur la courbe.

Logiquement, l'algorithme se comporte de manière opposée lorsque le facteur de normalisation est augmenté d'un facteur 1000 comme le montre la figure 3.12(c). Dans ce cas la correction porte uniquement sur les déplacements et plus sur la variable de charge. La correction étant horizontale, le problème rencontré avec la méthode de Newton-Raphson se pose également. En effet, dès que le voltage prédict est supérieur à la tension de pull-in, l'algorithme n'est plus capable de trouver une position d'équilibre puisqu'il lui est impossible de réduire la tension.

Système électromécanique couplé

L'exemple précédent a permis de vérifier et de comparer le comportement des deux méthodes sur un modèle très simple. Cependant, cet exemple est assez peu représentatif des systèmes qu'il faudra analyser au cours du processus d'optimisation topologique. En effet, les modèles considérés par l'optimisation topologique comportent un nombre de degré de liberté beaucoup plus important. De plus, ces degrés de liberté ne sont pas uniquement mécaniques mais peuvent également être électriques.

C'est pourquoi, les deux méthodes vont maintenant être appliquées à l'analyse du comportement d'une micropoutre électrostatique bi-encastrée schématisée à la figure 3.13(a).

Le modèle de la micropoutre construit à l'aide d'éléments quadrangulaires est quant à lui représenté à la figure 3.13(b). Les deux rangées inférieures d'éléments finis correspondent à la couche d'air de permittivité $\epsilon = 8,84 \cdot 10^{-12}$ F/m avec un module de Young très faible (théoriquement nul) tandis que la dernière rangée correspond au maillage de la poutre en quartz d'un module de Young $E = 86,79$ GPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0,17$. La poutre est maillée à l'aide de 20 éléments non-conformes linéaires.

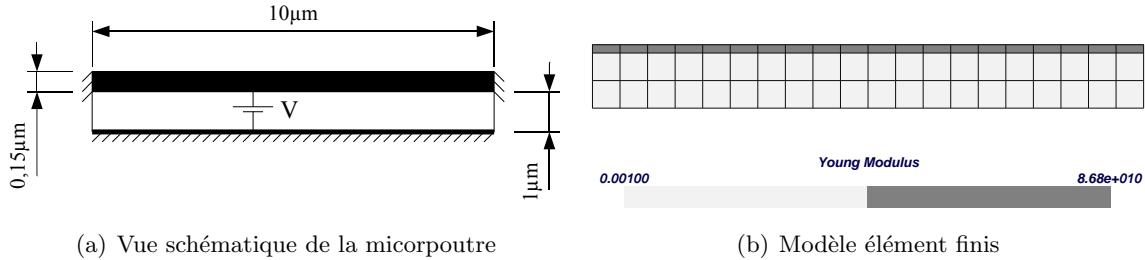


FIG. 3.13 – Micropoutre électromécanique

Ne disposant pas d'expression analytique de la courbe d'équilibre pour ce microsystème, nous allons comparer directement les résultats de la méthode du normal flow avec une courbe d'équilibre de référence calculée à l'aide de Riks-Crisfield. La figure 3.14(a) montre le parcours suivi par le normal flow pour un pas de progression relativement grand tandis que la figure 3.14(b) montre la courbe d'équilibre établie pour un pas plus fin. L'abscisse de ces deux figures correspond au déplacement du nœud central de la poutre et l'ordonnée à la tension appliquée. Cette fois, sur la figure 3.14(a), la correction ne paraît pas perpendiculaire à la courbe d'équilibre contrairement à ce qui était montré précédemment. Cette différence provient du nombre plus important de degrés de liberté du modèle. En effet, la correction est orthogonale au *Davidenko flow* dans l'espace à n dimensions engendré par les n degrés de liberté mais ne l'est plus nécessairement après projection dans un plan. Hormis cette différence, les résultats fournis par le normal flow sont toujours en excellent accord avec ceux fournis par Riks-Crisfield comme en attestent les deux figures.

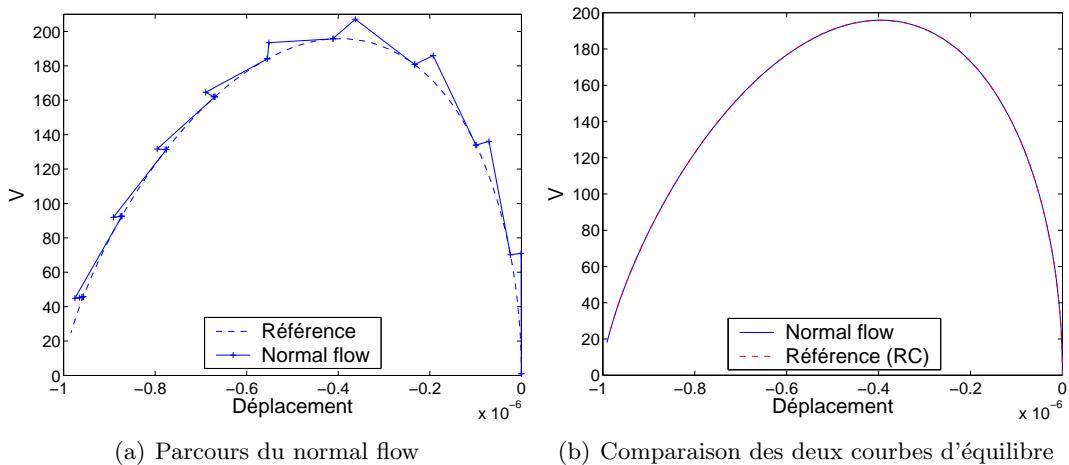


FIG. 3.14 – Courbe d'équilibre de la micropoutre

Cependant, la méthode de décomposition en valeurs singulières rencontre parfois quelques difficultés de convergence qui ont pour conséquence un calcul inexact du noyau. Ces erreurs sont illustrées à la figure 3.15(a) où la direction du noyau est représentée pour chaque itération, l'état du système étant représenté par la croix centrale de chaque segment. En principe, ces segments doivent être tangents au *Davidenko flow* et donc pratiquement parallèles à la courbe d'équilibre au vu de la faible distance qui les sépare. Malheureusement, certains de ces segments ne sont pas du tout tangents à la courbe. Le phénomène se limite à la partie instable de la courbe mais peut également se produire sur la partie stable comme le montre la figure 3.15(b) pour laquelle l'épaisseur de la poutre a été réduite à $0.1 \mu\text{m}$. Or un calcul précis du noyau est très important puisque celui-ci conditionne non seulement la direction de recherche vers une position d'équilibre mais également la recherche du point de pull-in.

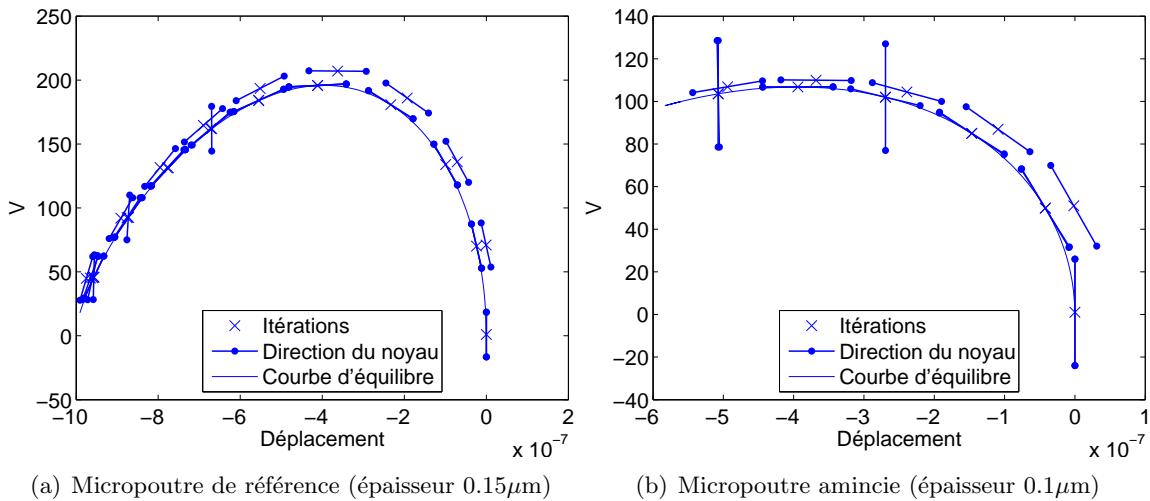


FIG. 3.15 – Direction du noyau au cours des itérations

Considérons maintenant la recherche du point de pull-in de la micropoutre. Une estimation de la tension de pull-in de cette structure peut-être obtenue à l'aide des expressions approchées fournies par la référence [22]. L'analyse proposée par cet article définit une raideur effective K_{eff} et une surface effective A_{eff} qui sont injectées dans l'équation donnant la tension de pull-in d'un système à un degré de liberté. Soit,

$$V_{pi} = \sqrt{\frac{8K_{eff}d_0^3}{27\varepsilon_0 A_{eff}}}$$

d_0 étant égal à la distance entre les électrodes au repos. Dans le cas qui nous occupe, puisqu'il n'existe pas de précontrainte, la raideur effective est calculée en fonction de l'épaisseur h , de la largeur b et de la longueur l par,

$$K_{eff} = \frac{32Ebh^3}{l^3(1-\nu^2)}$$

La surface effective est quant à elle obtenue comme suit,

$$A_{eff} = \sqrt{1-\beta}b \left(1 + 0,65 \frac{(1-\beta)d_0}{b}\right)l$$

où β est pris égal à 0,4 pour les poutres fixées-fixées. De plus, étant donné que la largeur est unitaire pour les éléments 2D utilisés, le rapport d_0/b est négligeable et le facteur relatif aux effets de bords peut être négligé. Ce qui donne

$$A_{eff} \approx \sqrt{1 - \beta bl}$$

Au final, ces expressions donnent une tension de pull-in approchée égale à 204,346 V ce qui est en accord avec les courbes d'équilibre obtenues précédemment.

La méthode de Riks-Crisfield donne une tension de pull-in égale à 195,855 V pour un déplacement du nœud central de la poutre de $-3,954 \cdot 10^{-7}$ m. Pour la méthode du normal flow, le pull-in se produit pour un déplacement de $-3,956 \cdot 10^{-7}$ m et un voltage égal à 195,855 V. Les deux algorithmes donnent donc des résultats concordants, de plus, la tension de pull-in obtenue est proche de l'estimation analytique. Néanmoins la méthode du normal flow s'avère beaucoup moins robuste et toujours plus lente que l'algorithme de Riks Crisfield. Comme nous pouvions nous y attendre, les problèmes de convergence de la décomposition en valeurs singulières provoquent fréquemment l'échec de la recherche du pull-in par le normal flow.

3.5.4 Conclusion

Pour chacune des applications présentées, les deux méthodes de calcul ont montré qu'elles étaient en mesure de fournir les conditions de pull-in. Cependant, suite aux instabilités de la décomposition en valeurs singulières, la méthode du normal flow paraît moins fiable que l'algorithme de Riks-Crisfield. De plus, Riks-Crisfield permet d'obtenir un résultat plus rapidement que le normal flow. Malgré son bon fonctionnement général, la méthode du normal flow nécessite donc encore quelques perfectionnements comme par exemple l'amélioration de la procédure d'extraction du noyau pour atteindre le niveau de la méthode de Riks-Crisfield.

Au vu de l'analyse effectuée au cours de cette section, la méthode de Riks-Crisfield nous semble être la plus adaptée au processus d'optimisation. Par conséquent, c'est cette méthode qui sera utilisée dans la suite de ce travail afin de permettre le calcul des sensibilités.

3.6 Traitement des modes locaux

L'utilisation de la méthode de Riks-Crisfield nécessite le calcul de la première valeur propre du système pour localiser le point de pull-in. L'algorithme de la puissance a été choisi pour effectuer cette tâche. Cependant, il s'est avéré qu'après quelques itérations de l'optimiseur, la première fréquence propre devient indépendante du potentiel électrique imposé et reste constante tout au long du parcours de la courbe d'équilibre. L'algorithme est alors incapable de s'arrêter au point de pull-in et la recherche échoue. La cause de cet échec s'explique par l'apparition d'un mode local possédant une faible fréquence propre comme cela est illustré à la figure 3.16. En effet l'algorithme de la puissance fournit la fréquence propre de plus faible module avec son signe. Par conséquent, si le pas de progression n'est pas suffisamment faible et que la fréquence du mode local est suffisamment petite, la fréquence du mode local est calculée à chaque itération et aucune valeur propre négative n'est jamais obtenue.

Afin d'illustrer ce phénomène prenons l'exemple représenté à la figure 3.17. Ce problème d'optimisation considère une électrode imposée bi-encastrée et un domaine d'optimisation

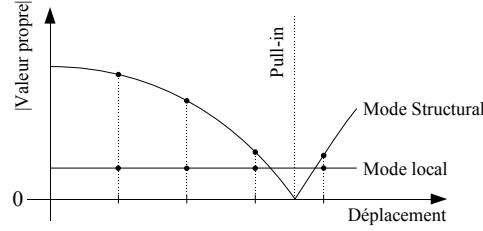


FIG. 3.16 – Evolution de la valeur absolue des valeurs propres

aux frontières totalement libres. Le matériau mécanique est du quartz isotrope avec un module de Young $E = 86790$ MPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0,17$. L'interpolation du comportement du matériau est effectuée par une loi SIMP ; $E = \mu^p E_0$ de paramètre $p = 3$.

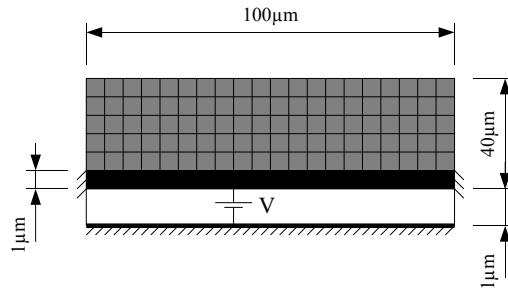


FIG. 3.17 – Conditions aux limites et configuration du problème d'optimisation

Les premières recherches du point de pull-in se produisent normalement. Comme le montre la courbe 3.18(a) correspondant à la première itération, le carré de la pulsation propre s'annule au point de pull-in situé approximativement au tiers de la distance initiale entre les électrodes. Par contre, dès la cinquième itération, la situation change comme le montre la figure 3.18(b) où le carré de la pulsation est pratiquement constant quelque soit le déplacement.

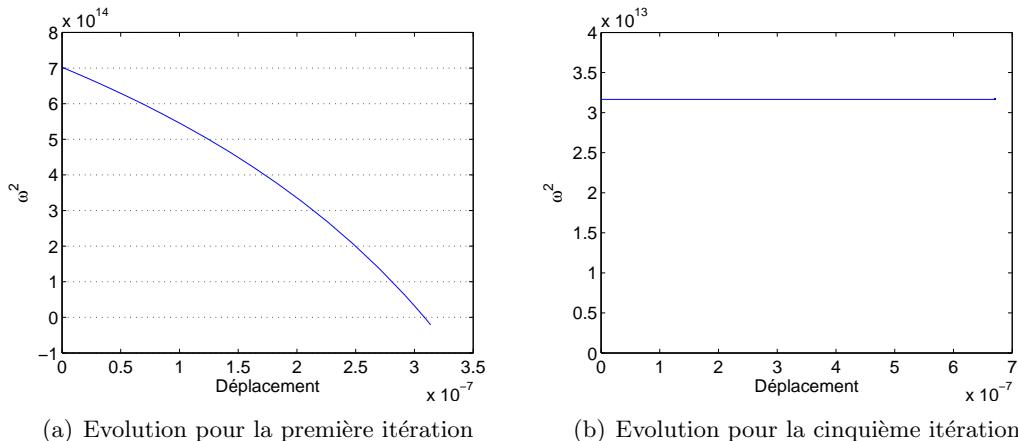


FIG. 3.18 – Différentes évolutions du carré de la fréquence propre en fonction du déplacement

Comme cela a déjà été mentionné plus haut, le phénomène s'explique simplement en met-

tant en relation le premier mode propre et la distribution des densités tout deux représentés à la figure 3.19. Cette figure rappelle fortement les modes locaux rencontrés par N. Pedersen [23] présentés au chapitre précédent. En effet, la majeure partie des déformations du mode propre a lieu dans une plage de faible densité. Ce mode apparaissant dans une zone non structurale est donc tout à fait fictif.

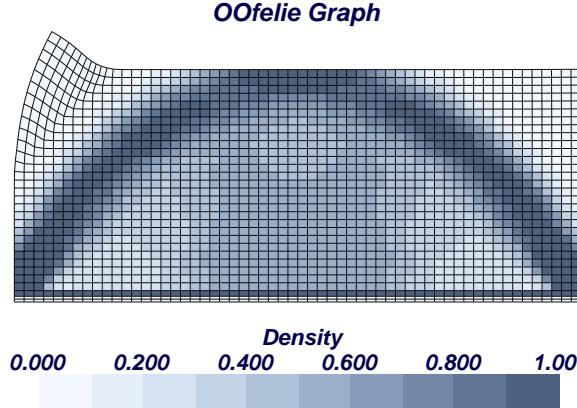


FIG. 3.19 – Premier mode propre

3.6.1 Loi d'Halpin-Tsai

Ce problème pourrait être résolu en remplaçant l'algorithme de la puissance par une autre méthode d'extraction des fréquences propres comme l'algorithme de Lanczos. Cependant d'un point de vue physique, il nous a paru plus propre et plus simple d'éviter l'apparition de modes locaux à trop faible fréquence propre en adoptant une solution similaire à celle proposée par N. Pedersen [23]. Ici ce problème résultant principalement d'une modélisation inappropriée de la raideur et de la masse par la loi SIMP pour les densités proches de zéro, cette loi a été remplacée par la loi d'Halpin-Tsai,

$$f(\mu) = \frac{\xi\mu}{(1 + \xi) - \mu} \quad (3.7)$$

Cette expression est dérivée les équations générales de Halpin et Tsai [19] permettant de prédire les caractéristiques mécaniques d'un matériau composite à fibres unidirectionnelles. Les équations de Halpin et Tsai sont basées sur les nombreuses études théoriques et expérimentales du comportement mécanique de ces matériaux composites ainsi que sur la méthode d'homogénéisation. Dans le plan perpendiculaire aux fibres, Halpin et Tsai proposent la loi suivante pour obtenir le module de Young, le coefficient de Poisson ou le module de cisaillement,

$$M = M_m \frac{1 + \xi\eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{M_f/M_m - 1}{M_f/M_m + \xi}$$

où M_m est la grandeur d'intérêt de la matrice (module de Young, module de cisaillement ...), M_f celle des fibres et M celle du composite contenant une fraction volumique V_f de fibres. Le paramètre ξ est quant à lui représentatif du renforcement ou de l'affaiblissement de la matrice par les fibres.

Dans le cadre de l'optimisation topologique les fibres sont remplacées par du vide, un matériau microperforé est donc obtenu. En posant donc M_f à zéro cela donne $\eta = -1/\xi$ et mène bien à l'équation (3.7) si $\mu = 1 - V_f$. Le paramètre ξ permet d'introduire différentes lois de mélange [9],

- $\xi = 0 \Leftrightarrow f(\mu) = 0$ Equivalent à une mise en série des composants
- $\xi = \infty \Leftrightarrow f(\mu) = \mu$ Equivalent à une mise en parallèle des composants
- $\xi = 1 \Leftrightarrow f(\mu) = \mu/(2 - \mu)$ Le résultat correspond à la raideur diagonale d'un matériau de rang deux pseudo-isotrope
- $\xi = \frac{1}{2(1-\nu^2)}$ Le résultat correspond à l'estimation analytique de la raideur d'un assemblage de cylindre composites

La figure 3.20 montre l'influence du paramètre ξ sur le profil de la loi. Comme nous pouvons le constater, le paramètre ξ permet de modifier la pénalisation des densités intermédiaires. Ce paramètre joue donc un rôle analogue à l'exposant p de la loi SIMP même si la pénalisation évolue en sens inverse par rapport au paramètre.

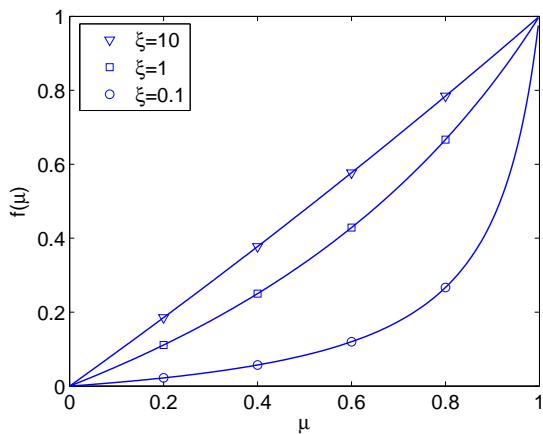


FIG. 3.20 – Evolution de la loi d'Halpin-Tsai en fonction de ξ

L'avantage de la nouvelle loi sur la loi SIMP est illustré aux deux figures 3.21. Premièrement, il est clairement visible sur la figure de gauche que la loi d'Halpin-Tsai permet de conserver une raideur bien plus importante pour les densités approchant de zéro par rapport à la loi SIMP. Nous observons en effet, une décroissance pratiquement linéaire d'Halpin-Tsai pour les faibles densités. Sur cette figure le paramètre ξ a été posé à 0,27 cette valeur a été choisie de manière à minimiser le carré de la différence entre la loi d'Halpin-Tsai et une loi SIMP d'exposant 3. Par ailleurs, le gain de raideur pour les faibles densités est également confirmé par la figure de droite où le rapport raideur sur masse est tracé pour différentes valeurs du paramètre. Avec la loi d'Halpin-Tsai, ce rapport est toujours non nul ce qui n'est pas le cas pour la loi SIMP puisqu'il vaut μ^{p-1} .

Cette loi semble donc intéressante car elle se rapproche de la solution utilisée par N. Peder sen à savoir imposer un rapport constant entre masse et raideur pour les faibles densités. Par contre, elle possède l'avantage de ne pas présenter de point anguleux et d'être par conséquent différentiable quelque soit la valeur de la pseudo-densité. Cependant, étant donné qu'elle fourni une raideur plus importante pour les faibles densités, il faut également veiller à réduire

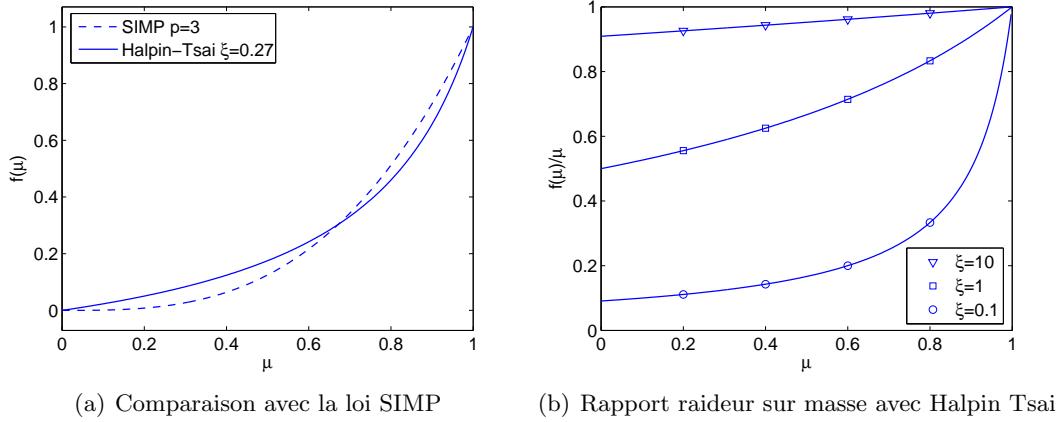


FIG. 3.21 – Avantages de la loi d’Halpin Tsai

la borne inférieure μ_{min} sur les pseudo-densités. La raideur des éléments vides doit en effet toujours être suffisamment faible par rapport à celle des éléments solides. La borne inférieure est donc fixée à 10^{-6} ce qui donne pour $\xi = 0,27$ une raideur relative de $2 \cdot 10^{-7}$.

En utilisant la loi d’Halpin-Tsai avec $\xi = 0,27$, le cas test d’optimisation topologique peut-être relancé et mené à bien. Le résultat obtenu est présenté à la figure 3.22. Malgré les larges régions couvertes par des éléments vides présentées par la structure, aucun mode local n’a cette fois perturbé le processus d’optimisation. Ceci prouve l’efficacité de la loi d’Halpin-Tsai pour résoudre le problème rencontré. De plus, la structure obtenue possède très peu d’éléments à densités intermédiaires ce qui montre que la loi d’Halpin-Tsai offre de bonnes propriétés de convergence.

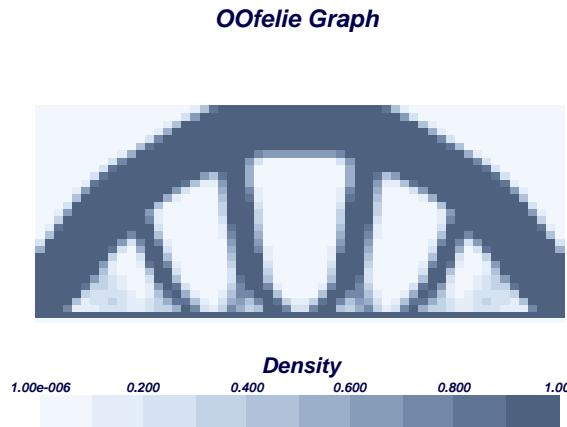


FIG. 3.22 – Résultat d’optimisation obtenu avec Halpin-Tsai

3.7 Conclusion

Ce chapitre a tout d’abord permis de décrire le problème général d’optimisation ainsi que ses hypothèses. Les hypothèses posées dans le cadre de cette étude préliminaire simplifient

fortement le problème d'optimisation en permettant de considérer une interface non modifiable entre les deux domaines physiques. Néanmoins, le problème d'optimisation résultant conserve un caractère multiphysique et sa mise en œuvre constitue donc une étape importante en vue de l'application de l'optimisation topologique à un problème plus général. Sur base du problème d'optimisation décrit, nous avons ensuite pu obtenir et valider une expression semi-analytique des sensibilités.

Le calcul semi-analytique des sensibilités nécessitant la connaissance des conditions de pull-in, deux méthodes basées sur les méthodes de continuation de Riks-Crisfield et du normal flow ont été développées et comparées. A l'issue de la comparaison, nous avons constaté que l'algorithme de Riks-Crisfield est, dans l'état actuel, plus fiable que la méthode du normal flow. Riks-Crisfield a donc été choisi afin de remplir la tâche d'analyse du processus d'optimisation.

Finalement, la dernière section a montré que l'interpolation SIMP est inadéquate lorsque la détection du point de pull-in est basée sur la première fréquence propre du système. En effet, l'apparition de modes locaux empêche la recherche d'être menée à bien Cependant, la loi SIMP peut être remplacée avec succès par une loi d'Halpin-Tsai qui grâce à un rapport raideur-masse plus élevé pour les faibles pseudo-densités évite l'apparition de modes locaux. La recherche du point de pull-in peut alors se terminer correctement.

Chapitre 4

Applications

4.1 Introduction

Sur base des deux premiers chapitres décrivant les méthodes utilisées, le chapitre précédent a permis d'élaborer une procédure d'optimisation topologique de la tension de pull-in. La méthode d'optimisation étant maintenant décrite, nous allons proposer quelques applications permettant d'illustrer cette méthode. Ces applications nous permettront tout d'abord de tester la méthode pour différentes conditions aux limites. Ensuite, afin d'obtenir des solutions plus réalistes une contrainte de fabrication sera ajoutée au problème d'optimisation.

4.2 Micropoutre bi-encastree

Le premier exemple choisi porte sur la conception d'une suspension optimale pour une micropoutre bi-encastree. Comme le montre la figure 4.1, les seules fixations du domaine mécanique sont les encastrements de l'électrode imposée. Le domaine d'optimisation ne comporte par conséquent pas de fixations supplémentaires. La micropoutre considérée est constituée de quartz isotrope de module de Young $E = 86,79 \text{ GPa}$ et d'un module de Poisson $\nu = 0,17$. Le volume de matière disponible est fixé à 40 % du volume du domaine de conception. Par ailleurs, le problème étudié étant symétrique, une seule moitié du domaine est étudiée comme précédemment sur base d'un maillage de 48 par 16 éléments.

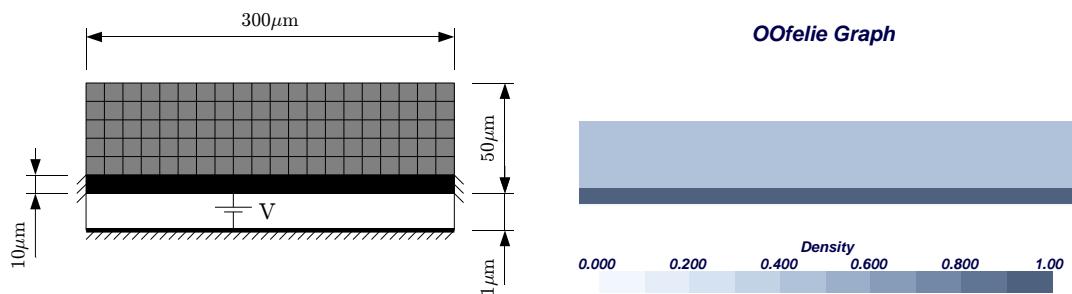


FIG. 4.1 – Dimensions et conditions aux limites du premier cas test

L'optimisation topologique est tout d'abord effectuée avec un matériau de Halpin-Tsai de paramètre $\xi = 0,27$, cette valeur étant équivalente à une loi SIMP de paramètre 3. Le critère

d'arrêt du processus d'optimisation est basé sur la plus grande variation parmi les variables de conception à chaque optimisation. Si cette variation maximale descend en dessous d'un seuil déterminé, l'optimisation est considérée convergée et le processus est arrêté. Dans le cas présent, ce seuil est fixé à 0,01.

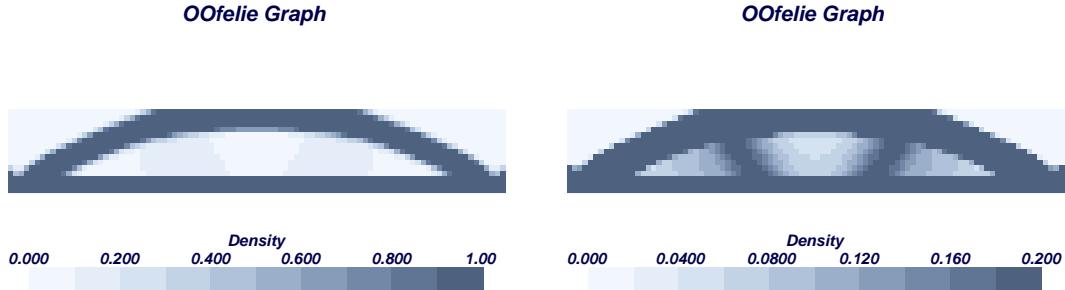


FIG. 4.2 – Résultat de l'optimisation pour $\xi = 0.27$

Dans ces conditions, partant d'une distribution homogène de pseudo-densités, le résultat obtenu est présenté à la figure 4.2. L'optimisation topologique propose une structure en forme d'arche afin d'augmenter la tension de pull-in. Grâce à cette structure, la tension de pull-in initialement égale à 371 V passe à 611 V en quarante itérations. L'évolution de la tension de pull-in au cours de l'optimisation est tracée figure 4.3. Cette courbe montre une augmentation rapide et monotone de la tension de pull-in qui semble ensuite converger vers l'optimum.

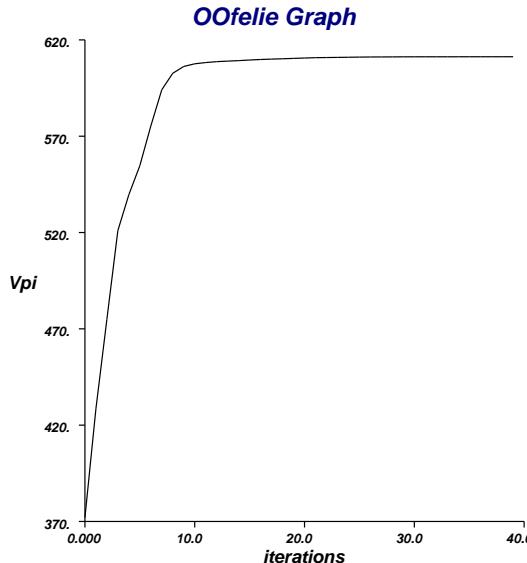


FIG. 4.3 – Evolution de la tension de pull-in au cours des itérations pour $\xi = 0,27$

Cependant, les deux figures 4.2 indiquent la présence de membres structuraux très ténus reliant la partie centrale de l'électrode imposée à l'arche. La présence de larges plages d'éléments possédant une densité intermédiaire révèle que la distribution de pseudo-densité n'est pas suffisamment claire. Il est donc nécessaire de modifier les paramètres afin d'obtenir une structure plus réaliste.

Afin d'éviter l'existence de densités non entières dans le résultat final d'optimisation topologique, nous allons premièrement augmenter la pénalisation de celles-ci en réduisant le paramètre ξ ce qui aura également pour conséquence d'accélérer le processus d'optimisation. D'autre part, la limite d'arrêt portant sur la variation maximale des variables de conceptions est également réduite de manière à permettre au processus itératif de se poursuivre plus longtemps. Par conséquent, le paramètre ξ est donc réduit à 0,15 tandis que le critère d'arrêt est fixé à 0,005. La topologie obtenue avec les nouveaux paramètres est représentée figure 4.4(a). Grâce à l'augmentation de la pénalisation des densités intermédiaires, le domaine d'optimisation est maintenant pratiquement exempt de celles-ci. Par ailleurs la suspente située en dessous de l'arche est clairement définie et présente des densités unitaires.

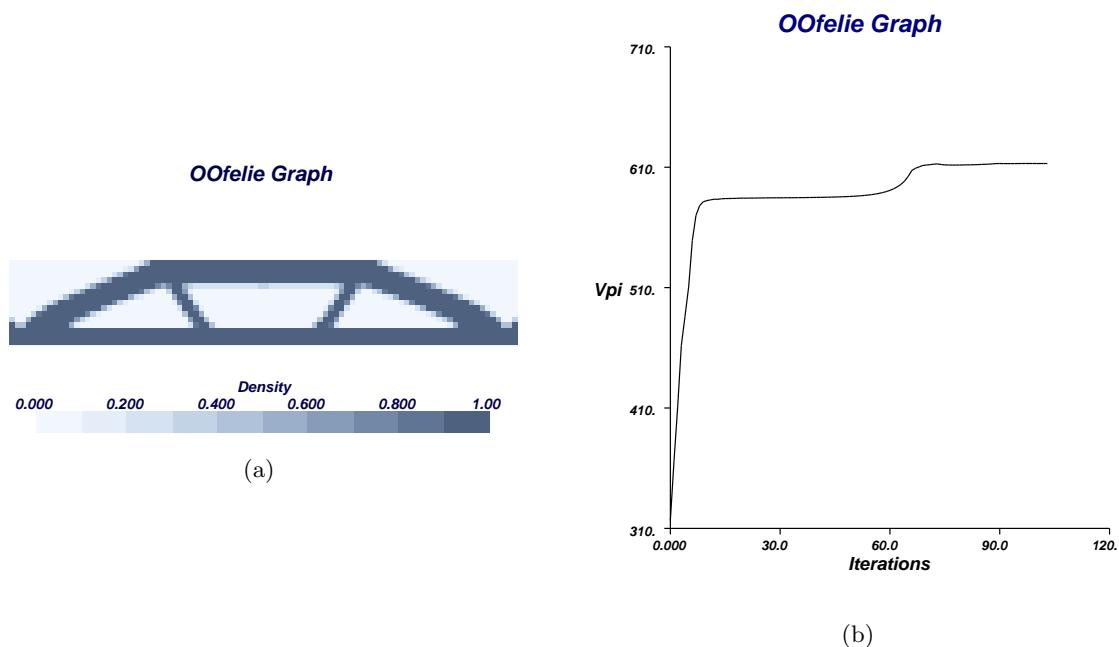


FIG. 4.4 – Résultat de l'optimisation topologique pour $\xi = 0,15$: (a) Structure et (b) Evolution de la tension de pull-in

La figure 4.4(b) présente l'évolution de la tension de pull-in durant l'optimisation. Etonnamment, la tension de pull-in effectue un palier au cours du processus itératif. Durant ce palier, la structure est fort similaire à celle obtenue précédemment avec une pénalisation plus faible (Fig. 4.2). Cependant à la différence du cas précédent l'optimisation se poursuit et transforme la suspente en une structure possédant des densités unitaires. Ceci permet une nouvelle augmentation de la tension de pull-in pour parvenir à 613,3 V soit une amélioration de 94% par rapport à la configuration initiale. Malgré l'amélioration au point de vue structural, la tension de pull-in n'a donc pas fortement évolué par rapport au résultat obtenu précédemment avec $\xi = 0,27$. Ceci est probablement provoqué par la diminution de raideur des éléments à densité intermédiaire résultant de la réduction du paramètre de la loi d'Halpin-Tsai. L'existence d'éléments à densité intermédiaire dans le domaine de conception étant inévitable suite à l'utilisation d'une technique de filtrage.

Notons finalement que la structure obtenue est en accord avec l'observation faite par Bendsøe et Sigmund à la référence [6]. Ces derniers avaient remarqué, dans le cadre de l'opti-

misation de la compliance, que les structures soumises à une seule charge ponctuelle donnaient lieu à un treillis possédant des cellules triangulaires. Par contre, si plusieurs charges sont appliquées dans le même cas de charge, certaines cellules du treillis résultant sont en forme de quadrilatères. Or, dans notre cas, la structure est soumise à une charge répartie. Il n'est donc pas étonnant que la cellule centrale soit trapézoïdale.

4.2.1 Convergence en fonction du maillage

La stabilité de la solution par rapport à une modification du maillage doit également être vérifiée. Celle-ci est principe garantie par l'utilisation d'une méthode de filtrage. Néanmoins, il nous a semblé important de vérifier que notre procédure d'optimisation fournit une topologie insensible à la discréétisation du maillage.

La distance de filtrage choisie précédemment valait une fois et demi la taille des éléments. Cette distance permet une régularisation efficace du problème d'optimisation puisqu'elle évite l'apparition de structures en damier. Par ailleurs, en maintenant la distance absolue de filtrage constante et en raffinant le maillage il est également possible de montrer que la topologie résultante est inchangée. Par exemple, la figure 4.5, compare la structure obtenue précédemment pour un maillage du demi-domaine de 48 par 16 éléments à celle obtenue avec un maillage de 96 par 32 éléments. Ces deux figures prouvent l'efficacité de la méthode de filtrage pour la régularisation du problème d'optimisation puisque les deux topologies sont identiques. Par ailleurs, la tension de pull-in optimale n'est pratiquement pas modifiée par ce raffinement de maillage puisqu'elle passe à 613,7 V.

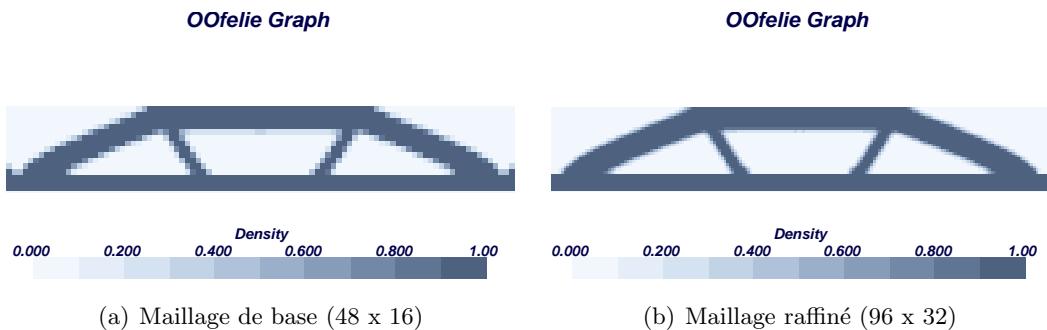


FIG. 4.5 – Influence du maillage sur le résultat d'optimisation topologique

4.2.2 Evolution des fréquences propres

L'optimisation de la tension de pull-in est basée sur le premier mode propre de la matrice de raideur tangente. Cependant, suite aux modifications de la structure engendrée par le processus d'optimisation, il est possible que deux modes propres s'inversent ou deviennent confondus au cours des itérations. Ces deux phénomènes peuvent rendre le problème d'optimisation non différentiable et provoquer des oscillations de l'optimiseur.

Afin de vérifier qu'il n'existe pas d'inversion de valeurs propres ou que la première valeur propre ne se confond pas avec la seconde, l'évolution des quatre premières fréquences propres au point de pull-in a été tracée figure 4.6. Cette figure montre tout d'abord que la première fréquence propre est logiquement toujours nulle au pull-in. Ensuite, nous pouvons constater

que l'évolution des fréquences propres d'ordre supérieur est continue et ne présente pas de croisement. Cependant, la forte diminution des fréquences d'ordre supérieur indique malgré tout qu'une inversion ou une confusion de fréquence propre n'est pas à exclure systématiquement. Ce point devrait donc faire l'objet d'une étude plus approfondie dans le futur.

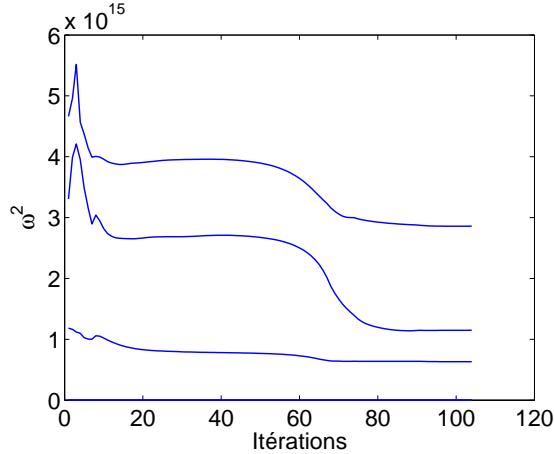


FIG. 4.6 – Evolution du carré des quatre premières pulsations propres au pull-in

Par ailleurs, la figure 4.7 compare le premier mode propre de la matrice de raideur tangente pour la structure initiale et la structure finale. Sur ces figures seule une moitié du domaine de conception est affichée. Les deux modes sont fortement semblables ce qui confirme bien qu'il n'existe pas d'inversion avec un mode d'ordre supérieur au cours du processus itératif. L'optimisation effectuée est donc bien valide.

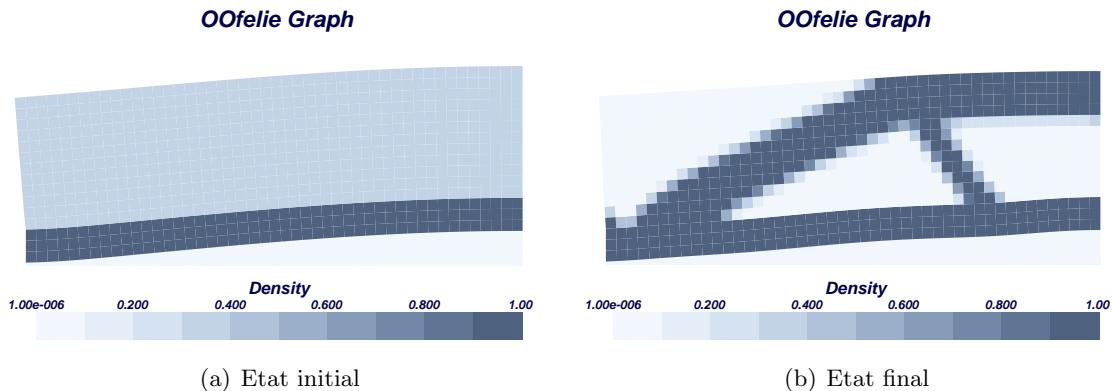


FIG. 4.7 – Premier mode propre de la matrice de raideur tangente

4.3 Micropoutre encastrée-libre

Les conditions aux limites ainsi que les dimensions de cette seconde application sont schématisées figure 4.8. L'électrode imposée est maintenant encastrée uniquement du côté gauche. De plus, de ce côté, des fixations sont également placées sur toute la hauteur du domaine d'optimisation. Une dernière différence par rapport à l'application précédente se

situe au niveau de l'électrode inférieure qui est cette fois située uniquement en dessous de la seconde moitié de l'électrode mobile comme cela est indiqué sur la figure 4.8. Par ailleurs la quantité de matière est limitée à 40 % du volume du domaine de conception pour un matériau identique au précédent. Le paramètre de pénalisation de la loi d'Halpin-Tsai est choisi égal à 0,27. Le domaine mécanique est discréteisé à l'aide d'un maillage de 60 par 24 éléments.

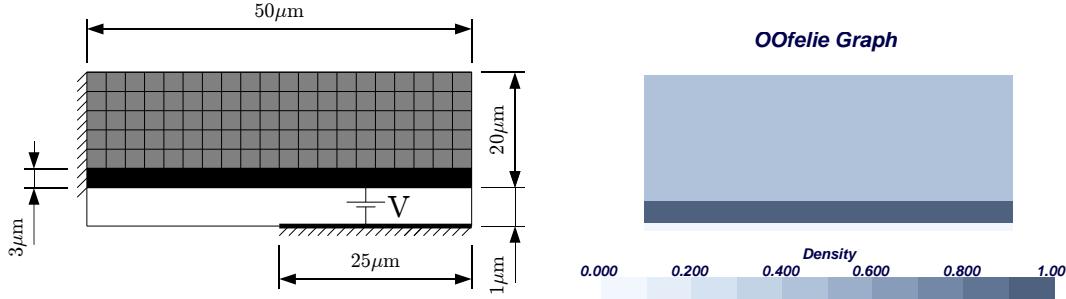


FIG. 4.8 – Dimensions, conditions aux limites et configuration initiale de la seconde application

Le seuil du critère d'arrêt est différent pour cette application car il est apparu que la limite précédente donnait lieu à un nombre d'itérations trop important sans gain significatif au niveau de la tension de pull-in ou de la topologie. La nouvelle limite de variation maximale est donc moins sévère et est placée à 0,02. Le processus d'optimisation s'arrête après 149 itérations et le résultat obtenu est représenté figure 4.9(a).

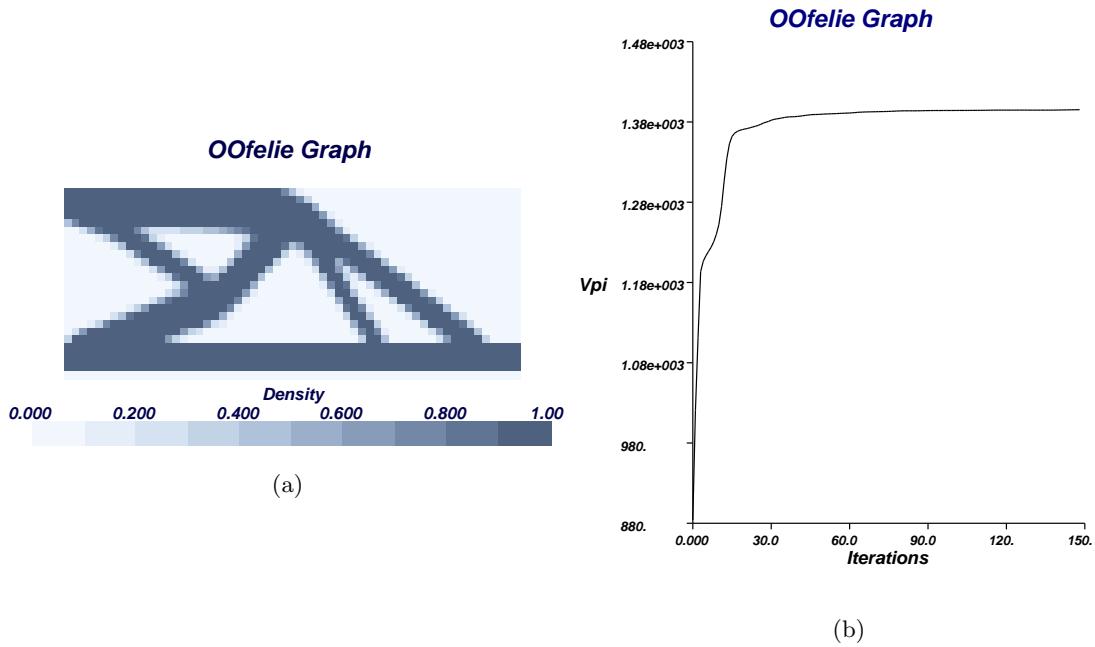


FIG. 4.9 – Résultat de l'optimisation pour la poutre encastrée-libre : (a) Structure et (b) Evolution de la tension de pull-in

La suspension optimale tire pleinement profit des fixations proposées sur le côté gauche du domaine d'optimisation puisqu'elle prend appui dans les coins supérieur et inférieur gauches.

Par ailleurs, suite à la position de l'électrode fixe, la moitié gauche de l'électrode mobile n'est pratiquement soumise à aucune force électrostatique. Il est donc logique qu'elle ne soit pas soutenue. Au contraire, la suspension est ancrée sur l'électrode mobile dans le coin inférieur gauche profitant ainsi de la raideur propre de l'électrode mobile. La seconde moitié est à l'inverse soutenue en deux points. Leur position montre également que l'optimiseur utilise, à cet endroit également, la raideur de l'électrode mobile.

La tension de pull-in obtenue est de 1395 V contre 884 V initialement ce qui correspond à une augmentation relative de 58 %. L'évolution de la tension de pull-in tracée à la figure 4.9(b) présente un long palier de la tension de pull-in avant l'arrêt de l'optimisation. Par conséquent, le critère d'arrêt pourrait encore être relaxé de manière à réduire le nombre d'itérations, car la structure n'évolue plus de manière significative durant ce palier. Toutefois, le problème d'optimisation posé par cette seconde application semble plus simple que le précédent. En effet, la tension de pull-in évolue très rapidement vers le palier final et le domaine de conception ne présente pas de densités intermédiaires malgré la faible pénalisation choisie.

4.4 Contrainte de fabrication

Les procédés de fabrication des microsystèmes les plus souvent utilisés sont basés sur la technique de lithographie. Celle-ci consiste en un dépôt successif de couches de matière sur une gaufrette de Silicium suivies d'étapes de gravure en surface par attaque chimique ou physique. La lithographie donne généralement lieu à des structures essentiellement planes composées de couches successives parallèles à la surface du substrat initial. Malheureusement les résultats obtenus précédemment présentent une structure incluant de nombreuses cavités fermées. De ce fait, ces structures sont trop complexes pour être produites à l'aide des méthodes habituelles de lithographie.

Afin d'obtenir des résultats plus facilement réalisables, il est donc nécessaire d'inclure une contrainte de dépôt dans le problème d'optimisation de manière à éviter la création de poches vides à l'intérieur de la structure. Le problème de fabricabilité rencontré dans cette étude se rapproche fortement d'un problème déjà étudié précédemment en optimisation topologique. Il s'agit de la conception de pièces mécaniques démoulables [24]. De fait, pour qu'une pièce soit démoulable, il est tout d'abord nécessaire qu'il n'y existe aucune cavité fermée. De plus, il faut également que toutes les cavités ouvertes soient orientées suivant une direction déterminée correspondant à la direction de démolage.

Par conséquent, si une telle contrainte est ajoutée à notre problème d'optimisation avec une direction de démolage verticale orientée vers le haut, nous serons certains d'obtenir une structure exempte de cavités fermées. De plus, les seules cavités existantes seront alors nécessairement ouvertes sur la face supérieure du domaine d'optimisation, la structure sera plus facilement "usinable" par dépôt de couches.

4.4.1 Contrainte de démolage

L'obtention d'une structure démoulable en optimisation topologique repose généralement sur l'utilisation d'un maillage transfini aligné suivant la direction de démolage. Cet alignement permet de créer des groupes d'éléments orientés selon la direction de démolage. Nous prenons la convention que la direction de démolage est celle selon laquelle les cavités doivent être ouvertes. Par exemple, si nous considérons une direction de démolage verticale orientée vers le haut, les groupes seront formés à partir des colonnes du maillage éléments finis et les

cavités doivent être ouvertes sur la face supérieure du domaine. La contrainte de démoulage se traduit alors par l'obligation pour les pseudo-densités d'être décroissantes suivant la direction de démoulage sur les éléments de chaque groupe. Par exemple, pour un groupe de n éléments C sur lequel les éléments sont numérotés de 1 à n de proche en proche selon la direction de démoulage (cfr. figure 4.10 dans le cas vertical), nous avons,

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{i-1} \geq \mu_i \geq \mu_{i+1} \text{ si } 2 \leq i \leq n-1 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \geq \mu_n \geq \mu_{min} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Si une distribution entière de pseudo-densités était considérée cela signifierait que dès qu'un groupe contiendrait un élément de densité nulle, les éléments suivants devraient également être vides. De ce fait, il est impossible de refermer une cavité en plaçant un élément solide après un élément vide. Puisqu'à la fin du processus itératif, les pseudo-densités sont en principe entières, toutes les cavités existantes sont nécessairement ouvertes dans la direction de démoulage.

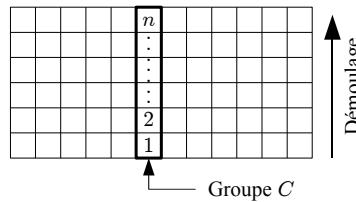


FIG. 4.10 – Contrainte de démoulage verticale orientée vers le haut

Il existe différentes possibilités pour prendre en compte de telles contraintes (4.1) comme par exemple l'utilisation d'un Lagrangien augmenté ou l'utilisation de contraintes de borne. Dans le cadre de ce travail, nous avons choisi d'utiliser les contraintes de bornes car cette méthode permet de continuer à utiliser le même optimiseur tout en fournissant un résultat fiable. Les contraintes de borne sont fournies pour chaque variable à l'optimiseur et précisent quelles sont les limites entre lesquelles l'optimiseur peut modifier chacune des variables. Afin de satisfaire les conditions (4.1) les contraintes de borne sur les variables i du groupe C sont calculées comme suit,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \leq \mu_1 \leq 1 \\ \vdots \\ \mu_i - \frac{\mu_i - \mu_{i+1}}{2} \leq \mu_i \leq \mu_i + \frac{\mu_{i-1} - \mu_i}{2} \text{ si } 2 \leq i \leq n-1 \\ \vdots \\ \mu_{min} \leq \mu_n \leq \mu_n + \frac{\mu_{n-1} - \mu_n}{2} \end{array} \right.$$

La variation maximale d'une variable est donc fonction de l'écart entre celle-ci et la variable voisine. Cet écart est divisé par deux car la variable voisine pouvant également être modifiée, il faut éviter que ces variables se croisent. Par ailleurs, ces contraintes de borne doivent être

mises à jour après chaque itération de manière à prendre en compte les modifications opérées par l'optimiseur.

4.4.2 Poutre bi-encastrée

Cette application est similaire à la première présentée au début de ce chapitre. Cependant, afin de mettre en évidence certains résultats intéressants, l'électrode imposée ainsi que le domaine d'optimisation sont plus longs comme le montre la figure 4.11. Par ailleurs, des fixations supplémentaires sont ajoutées au domaine d'optimisation de chaque côté de celui-ci. Le matériau utilisé est cette fois un quartz isotrope avec un module de Young $E = 77$ Gpa. Le volume de matière disponible est fixé à 75 % du volume du domaine de conception. Le demi-domaine mécanique est divisé par un maillage de 55 par 11 éléments finis.

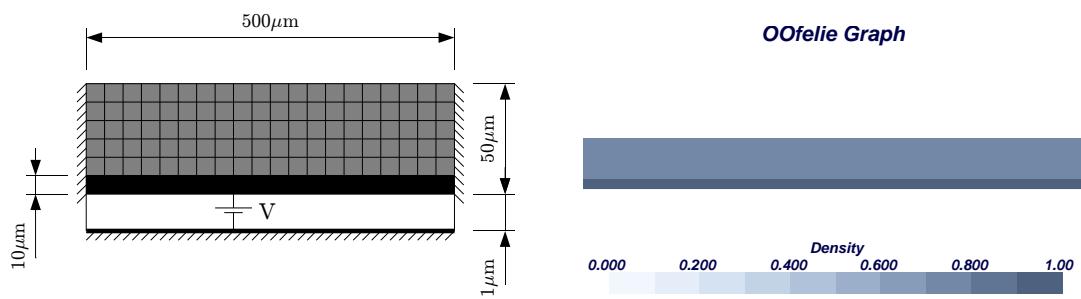


FIG. 4.11 – Dimensions, conditions aux limites et distribution initiale pour la poutre bi-encastrée avec contrainte de démoulage

Une loi de Halpin-Tsai de paramètre $\xi = 0,27$ est tout d'abord utilisée. Le résultat obtenu avec ce paramètre est présenté figure 4.12. Si ce résultat vérifie bien la contrainte de démoulage (4.1), la topologie est loin d'être satisfaisante au vu des grandes zones de densités intermédiaires qu'elle présente.

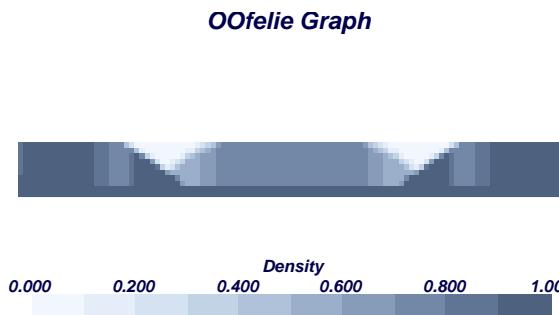


FIG. 4.12 – Résultat pour $\xi = 0,27$

Le résultat précédent indique clairement que la pénalisation des densités intermédiaires est insuffisante. Afin d'obtenir une solution acceptable le paramètre d'Halpin-Tsai a dû être très fortement réduit. En effet, après plusieurs réductions successives, il s'est avéré qu'il était nécessaire de prendre ξ égal à 0,005 pour obtenir une structure clairement définie. La solution obtenue est représentée à la figure 4.13(a). La topologie obtenue est relativement simpliste puisque la structure est essentiellement constituée de deux renforts trapézoïdaux. Cependant,

cette structure ne présente pas de cavités fermées et sa fabrication est donc plus facilement envisageable.

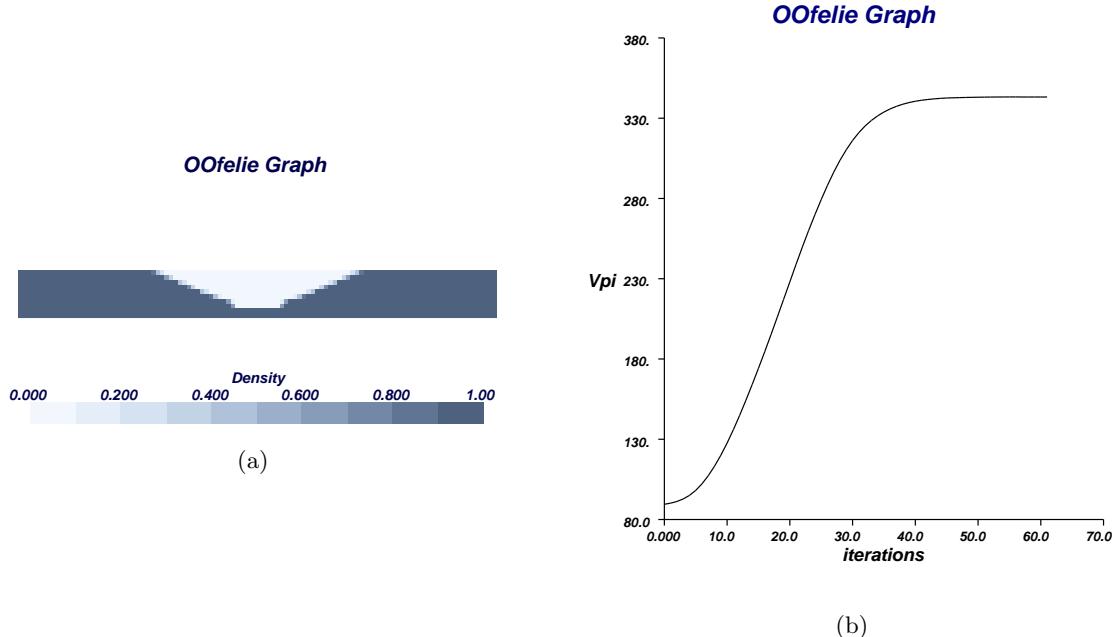


FIG. 4.13 – Résultat pour $\xi = 0,005$: (a) Structure et (b) Evolution de la tension de pull-in

La tension passe de 89,5 V initialement à 343,2 V. Cette augmentation conséquente de la tension de pull-in (284%) provient de la forte pénalisation des densités intermédiaires provoquant une tension de pull-in initiale relativement faible. Néanmoins, l'évolution de la tension de pull-in tracée figure 4.13(b) montre un départ très lent du processus d'optimisation. Cette stagnation initiale de la tension de pull-in provient de la distribution initiale de pseudo-densités. Cette distribution étant uniforme, il s'en suit qu'une grande partie des variables de conception sont bloquées par la contrainte de démolage (4.1) puisque en général $\mu_i = \mu_{i-1} = \mu_{i+1}$. Par conséquent, à la première itération, les seules variables pouvant être modifiées sont celles de la première et de la dernière ligne du domaine d'optimisation. La modification de variables sur ces deux lignes permet ensuite à la seconde itération de débloquer deux lignes supplémentaires et ainsi de suite. De ce fait, il faut donc attendre quelques itérations avant que l'entièreté du domaine d'optimisation soit modifiable.

Distribution initiale en dégradé

L'implémentation utilisée de la contrainte de démolage avec une distribution initiale uniforme ralentit donc le processus d'optimisation. Dès lors, il pourrait être utile de modifier la distribution initiale de manière à libérer toutes les variables à partir de la première itération. A cette fin, la distribution qui semble a priori la plus indiquée est une distribution en dégradé vertical dont un exemple est présenté figure 4.14. Cette distribution est construite de sorte que chaque ligne possède une densité différente en progression arithmétique. Le pas de la progression est calculé de manière à être maximal compte tenu de la densité minimale autorisée, du nombre de lignes et de la quantité de matière disponible.

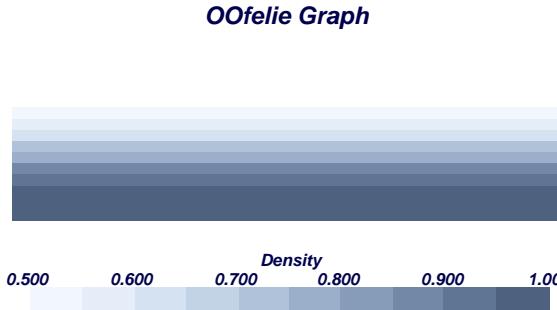


FIG. 4.14 – Distribution initiale en dégradé (demi domaine)

De manière à évaluer l'influence de cette distribution initiale sur le résultat obtenu ainsi que sur l'évolution de la tension de pull-in, l'exemple précédent est relancé avec les mêmes paramètres en partant d'une distribution en dégradé (Fig. 4.14). Il est alors surprenant de constater que le résultat d'optimisation présenté figure 4.15(a) est très différent du résultat obtenu précédemment. Il semble donc que le problème d'optimisation considéré possède plusieurs optimums locaux puisque la solution obtenue dépend du point de départ. Cependant, malgré la différence de topologie existante entre les deux structures, la tension de pull-in obtenue est fort similaire dans les deux cas. En effet, la tension obtenue est cette fois de 344,8 V ce qui est très proche des 343,2 V obtenus précédemment. Mais la tension de pull-in initiale étant cette fois légèrement plus élevée (99,7 V), l'augmentation relative est de 246%.

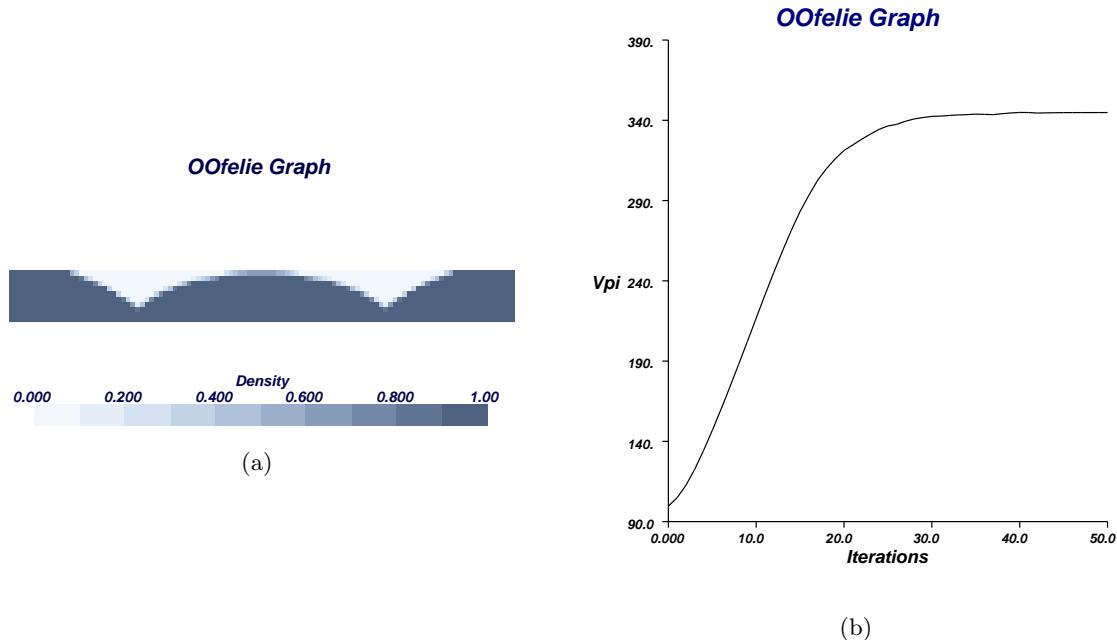


FIG. 4.15 – Résultat d'optimisation pour $\xi = 0,005$ et une distribution initiale en dégradé :
(a) Structure et (b) Evolution de la tension de pull-in

La topologie résultante rappelle fortement le résultat obtenu par Abdalla *et al.* [1] pour une micropoutre bi-encastree présentée au second chapitre. Cette ressemblance est assez logique

puisque la fonction objectif est identique pour les deux approches. Néanmoins, la modélisation ainsi que la méthode d'optimisation utilisées sont très différentes ce qui peut expliquer que les résultats ne sont pas toujours semblables.

Par ailleurs, l'augmentation initiale de la tension de pull-in est maintenant plus rapide comme le montre la figure 4.15(b). La modification de la distribution de densités de départ a donc bien eu l'effet désiré. De plus le nombre d'itérations nécessaire passe de 62 à 51 ce qui représente un gain significatif en temps de calcul.

Distribution initiale sous forme de poutre

Le résultat de l'optimisation étant dépendant de la configuration initiale, nous avons voulu tester une distribution analogue à la configuration de départ utilisée par la référence [1], c'est-à-dire une poutre d'épaisseur uniforme. Les inconnues ont donc été initialisées de telle sorte que les m premières lignes en partant du bas soit solides, la $m + 1^{\text{ère}}$ ligne possède une densité μ_{reste} et les dernières lignes de $m + 2$ à n soient vides ($\mu = \mu_{\min}$). A nouveau, m et μ_{reste} sont calculés en fonction du nombre de lignes, de la quantité de matière disponible et de μ_{\min} . La distribution obtenue pour l'application étudiée est présentée figure 4.16. Pour le problème qui nous occupe, μ_{reste} est très proche de 1 et par conséquent il n'existe pas de différence visible entre les m premières et la $m + 1^{\text{ère}}$ ligne.

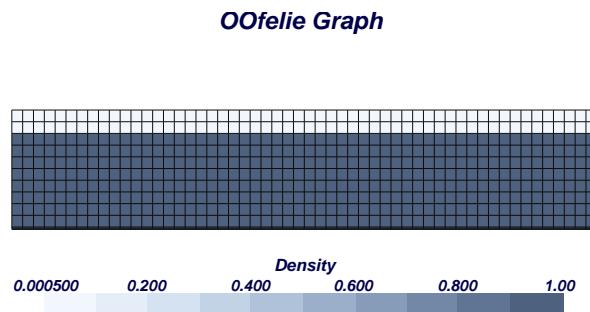


FIG. 4.16 – Distribution initiale similaire à une poutre uniforme (demi domaine)

Le résultat obtenu est proposé à la figure 4.17(a). Celui-ci ressemble également fortement aux résultats obtenus par Abdalla *et al.* [1]. Cette ressemblance conforte notre procédure d'optimisation topologique puisqu'à partir d'un même point de départ elle fournit des résultats similaires à ceux donnés par la procédure de dimensionnement d'Abdalla *et al.*

Par ailleurs l'évolution de la tension de pull-in au début du processus itératif est très rapide comme le confirme la figure 4.17(b). Cette forte augmentation initiale est plutôt inattendue étant donné qu'une grande partie des variables sont bloquées par la contrainte de démoulage. Cependant, la figure indique que la configuration initiale possède une tension de pull-in égale à 278,4 V et donc bien plus élevée que les deux configurations précédentes. La tension de pull-in finale est par contre pratiquement égale aux précédentes et vaut 344,4 V. Par conséquent, l'augmentation relative n'est que de 20%. La poutre d'épaisseur constante est donc probablement beaucoup plus proche de l'optimum ce qui explique l'augmentation rapide de la fonction objectif ainsi que le faible nombre d'itérations nécessaires pour arriver à la convergence.

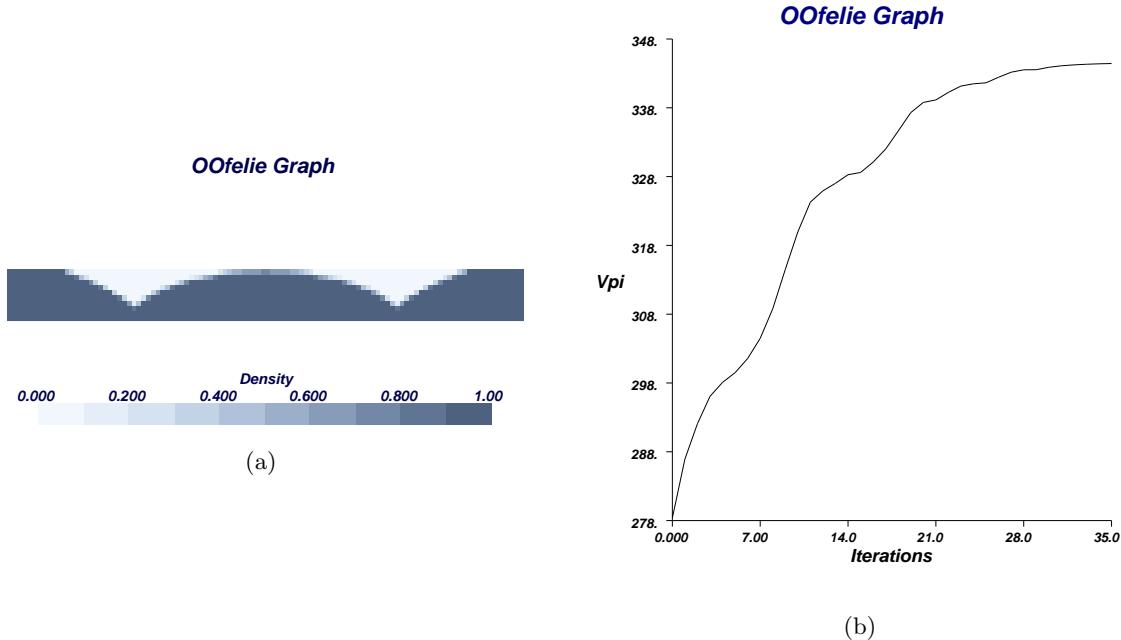


FIG. 4.17 – Résultat obtenu pour une configuration initiale en poutre uniforme : (a) Structure et (b) Evolution de la tension de pull-in

Modification du volume disponible

Nous avons constaté que l’application considérée ci-dessus possédait au moins deux optimums locaux. Ces optimums locaux peuvent donner lieu à des structures fort différentes. Par contre, la variation de tension de pull-in entre les deux résultats n’est pas réellement significative. Toutefois, il s’avère que cet écart n’est pas toujours négligeable. En effet, si sur base de l’application précédente, la quantité de matière disponible est modifiée, la tension de pull-in optimale peut fortement changer en fonction de la distribution de densité initiale. Ce phénomène est illustré à la figure 4.18. Chaque courbe de cette figure donne la tension de pull-in obtenue en fonction de la fraction de volume¹ pour une des trois situations initiales considérées ci-dessus.

Premièrement, nous pouvons constater que les distributions en dégradé et en poutre fournissent toujours des tension de pull-in similaires. De même, les structures obtenues sont également semblables et ressemblent toutes deux au résultat obtenu par Abdalla *et al.* quel que soit la fraction de volume.

Par contre, la distribution uniforme donne lieu à des résultats différents pour une fraction de volume inférieure à 0,84 avec une différence de tension de pull-in pouvant atteindre 11%. En dessous d’une fraction volumique de 0,84, la topologie est la même que celle obtenue précédemment pour cette distribution et une limite en volume de 75 %. Néanmoins, si la fraction volumique disponible est supérieure à 0,84, les résultats du processus d’optimisation sont très proches de ceux obtenus à partir des deux autres points initiaux tant au point de vue de la topologie que de la tension de pull-in. Nous observons donc un basculement de la

¹La fraction de volume est définie comme étant le rapport entre le volume de matière disponible et le volume du domaine de conception

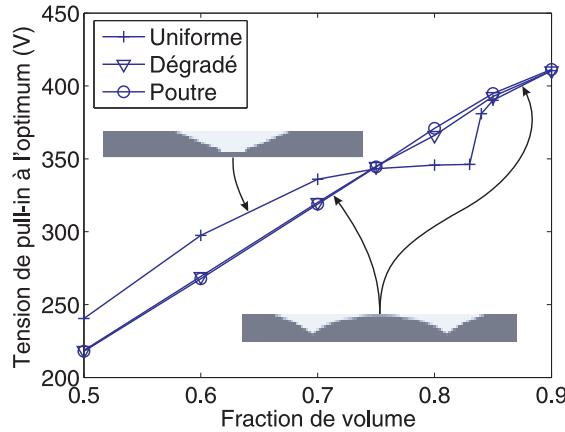


FIG. 4.18 – Evolution de la tension de pull-in en fonction de la fraction de volume

solution vers le second optimum à partir de cette valeur de la fraction volumique.

D'autre part, la topologie la plus efficace varie également en fonction de la fraction de volume disponible. En dessous de 75%, c'est la distribution initiale uniforme qui donne au final la meilleure tension de pull-in. La meilleure topologie est donc celle faisant appel à deux renforts trapézoïdaux. A l'inverse, pour une quantité de matière disponible supérieure à trois quarts du volume du domaine de conception, une solution semblable à celle obtenue par Abdalla *et al.* avec des poutres est plus performante.

4.5 Conclusion

La procédure d'optimisation topologique élaborée au cours de ce travail a été mise en pratique dans ce dernier chapitre à l'aide de différentes applications. Pour certains de ces exemples, un ajustement initial des paramètres s'est avéré indispensable afin d'obtenir un résultat valable. Cette phase de réglage peut nécessiter quelques itérations. Cependant, la procédure a finalement permis de maximiser la tension de pull-in pour chaque application donnant lieu à un gain relatif sur la tension de pull-in pouvant atteindre plus de 200%.

Par ailleurs, la robustesse de la méthode d'optimisation a également été évaluée. Nous avons ainsi pu vérifier que la structure optimale était bien indépendante du maillage. Toutefois, le comportement des modes propres d'ordre supérieur de la matrice de raideur tangente pourrait éventuellement poser problème dans certaines applications en provoquant des oscillations de l'optimiseur si une des valeurs propres d'ordre supérieur s'inverse avec la première. Cet aspect mérite donc une étude plus poussée.

Néanmoins, les structures créées par l'optimiseur sont trop complexes pour les procédés classiques de fabrication utilisés à l'échelle microscopique. Dès lors, une contrainte de fabrication inspirée du problème de démolage a été ajoutée au problème d'optimisation. Grâce à l'introduction de cette contrainte, les résultats obtenus sont plus réalistes. Cependant, la modification du point de départ sous cette contrainte de démolage a révélé la présence d'optimums locaux. L'existence d'optimums locaux est d'autant plus gênante que la tension de pull-in peut varier fortement d'un maximum à l'autre.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Ce travail a débuté par une revue bibliographique portant sur l'effet de pull-in présent dans les microsystèmes électromécaniques ainsi que sur la simulation numérique de ce phénomène. Les difficultés posées par l'obtention des conditions de pull-in proviennent du couplage fort existant entre les phénomènes électrostatiques et mécaniques. Cependant, il est possible sur base d'une modélisation éléments finis monolithique d'utiliser une méthode de continuation pour atteindre avec précision le point de pull-in. Dans ce cadre, afin d'obtenir la recherche du point de pull-in la plus performante possible, la fiabilité et l'efficacité de deux méthodes de continuation, *Riks-Crisfield* et le *normal flow*, ont été comparées sur base de deux modèles éléments finis. Il est ressorti de cette comparaison que la méthode de Riks-Crisfield est à la fois la plus rapide et la plus robuste des deux méthodes dans l'état actuel de leurs implémentations respectives. Par conséquent, c'est l'algorithme de Riks-Crisfield qui a été incorporé à la procédure d'optimisation.

Ce travail propose une étude préliminaire en vue de l'application de l'optimisation topologique aux systèmes électromécaniques couplés. Dans le contexte de cette première approche, des hypothèses provisoires ont été posées afin de dépouiller le problème d'optimisation de certaines complexités accessoires. Une expression semi-analytique des sensibilités a ensuite été obtenue et validée par une comparaison avec une analyse de sensibilité par différences finies. Cette expression permet de profiter de l'efficacité des optimiseurs basés sur la programmation mathématique tel que ConLin. Néanmoins, il est apparu que la procédure d'optimisation proposée peut être incompatible avec la loi d'interpolation SIMP classiquement utilisée en optimisation topologique. En effet, le faible rapport entre la raideur et la masse donné par la loi SIMP pour les densités proches de zéro provoque l'apparition de modes locaux à faible valeur propre empêchant la recherche du point de pull-in d'aboutir. Dès lors, la loi SIMP a été remplacée par une loi d'Halpin-Tsai donnant lieu à un rapport raideur sur masse plus élevé. Cette nouvelle loi évite l'apparition de modes locaux à trop basse fréquence et permet donc l'obtention du point de pull-in de manière habituelle.

La méthode d'optimisation élaborée a ensuite été mise en pratique. Les résultats obtenus sont de bonne qualité. En effet, pour chacun des cas test, il a été possible d'obtenir une distribution de matière pratiquement exempte de densités intermédiaires. De plus, la stabilité de la solution en fonction de la finesse du maillage a été vérifiée avec succès pour l'une des applications. Par ailleurs, afin de réduire la difficulté de fabrication des structures obtenues, une contrainte de fabrication a été incorporée au problème d'optimisation. Grâce à cette contrainte de dépôt en couche, la production des structures obtenues est plus facilement

envisageable. Cependant, la présence de deux optimums locaux a été observée lorsque cette contrainte est ajoutée au problème d'optimisation. Les perturbations provoquées par ces optimums locaux peuvent être relativement importantes car la variation de tension de pull-in peut atteindre 10 %. Néanmoins, le dernier chapitre montre l'efficacité de la procédure d'optimisation développée. De plus, nous avons pu constater qu'en l'état de l'avancement actuel il n'existe pas d'obstacle majeur à l'application de l'optimisation topologique aux problèmes électromécaniques.

Perspectives

Approfondissement de l'approche actuelle

Valeurs propres multiples

Un premier point intéressant à approfondir est l'évolution des valeurs propres d'ordre supérieur de la matrice de raideur tangente. L'analyse de sensibilité se basant sur le premier mode propre, un croisement de valeurs propres risque de déstabiliser processus d'optimisation. Dans ce cas, il faudrait envisager d'utiliser un procédure d'optimisation de type "min-max" de manière à solutionner les problèmes provoqués par ce croisement de valeurs propres.

Contraintes de tension

L'ajout d'une borne maximale sur les contraintes mécaniques est également une extension possible de l'approche actuelle. Cet aspect, qui n'a pas été envisagé au cours de ce travail, pourrait améliorer le réalisme du problème de conception. Si ce type de contrainte n'est pas implémentée actuellement pour l'optimisation topologique dans *Oofelie*, sa mise en œuvre en optimisation topologique est néanmoins bien développée dans la littérature comme le montre la figure 4.19 provenant de la référence [11]. L'ajout d'une contrainte sur les tensions mécaniques permettrait d'éviter l'apparition de membres structuraux trop fins qui ne seraient pas assez résistants pour supporter la charge existante lors de l'utilisation.

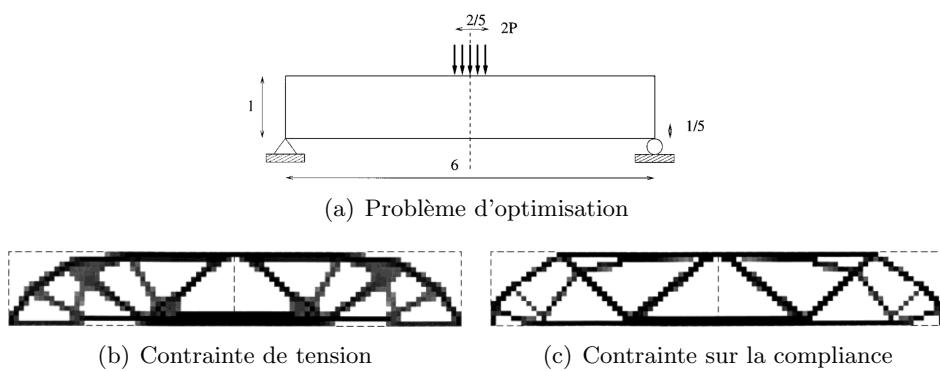


FIG. 4.19 – Problème de minimisation du volume de matière pour la poutre MBB [11]

Contrainte de fabrication

L'implémentation effectuée ici de la contrainte de fabrication permet de conserver l'optimiseur utilisé précédemment. Cependant, elle est loin d'être optimale car un traitement de

ces contraintes intégré à l'optimiseur existe depuis peu dans une nouvelle version de *ConLin*. Cette implémentation interne présente l'avantage d'être beaucoup moins contraignante que celle utilisée dans ce travail. Il serait donc intéressant de vérifier qu'avec le nouvel optimiseur, le processus d'optimisation aboutit toujours à des solutions différentes en fonction du point de départ.

Algorithme de résolution des problèmes non linéaires

Enfin, l'augmentation de la fiabilité de la méthode du normal flow est également un sujet intéressant. A cette fin, il ressort de ce travail que l'utilisation d'une méthode d'extraction du noyau plus robuste et plus efficace pourrait déjà apporter une amélioration. L'obtention d'un algorithme du normal flow pleinement fonctionnel pourrait permettre de pallier aux difficultés occasionnellement rencontrées par la méthode de Riks-Crisfield.

Modification de l'approche

La perspective la plus importante est bien sûr la suppression de l'hypothèse séparant le domaine d'optimisation du domaine électrique. Dans ces conditions, le domaine d'optimisation pourra couvrir tout le domaine électrique et mécanique. Dès lors, le comportement électrostatique d'un élément sera également fonction de sa pseudo-densité. Ceci nécessitera l'interpolation des propriétés électriques de la matière en fonction des pseudo-densités. Grâce à cette amélioration, l'optimiseur sera en mesure de modifier le point d'application des forces électriques. Le processus d'optimisation bénéficiera alors d'une liberté et d'une généralité accrues ce qui se solde habituellement par une augmentation des performances optimales. Des problèmes aussi généraux que ceux traités par Raulli [26] pourront alors être considérés. Par exemple, la figure 4.20 reprend le problème d'optimisation d'un inverseur de force traité par Raulli [26]. La figure de droite montre clairement que l'électrode imposée ne couvre plus qu'une partie de la largeur du domaine permettant au champ électrique d'entrer dans le domaine d'optimisation.

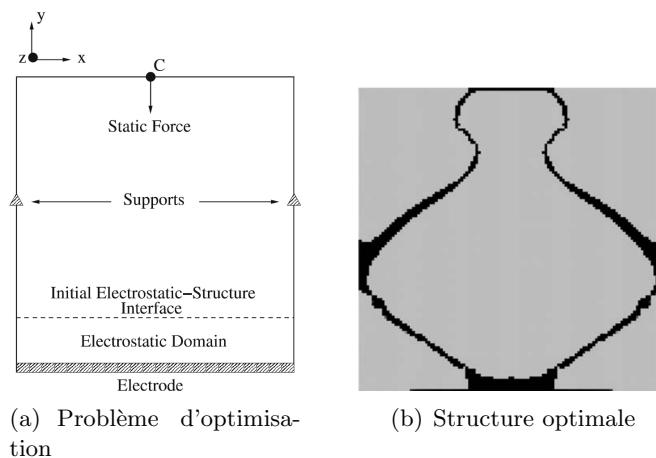


FIG. 4.20 – Inverseur de force électromécanique [26]

Optimisation d'une électrode plane

Dans ce travail, le problème de conception est toujours placé dans le plan perpendiculaire aux électrodes. Cependant, avec l'extension du domaine électrique au domaine d'optimisation, il sera possible d'optimiser la géométrie d'une électrode plane. Une application semblable dont l'interprétation est rappelée figure 4.21, a été présentée au second chapitre au cours de la description des travaux de Raulli. La structure obtenue étant nécessairement plane, sa fabrication à l'aide de dépôt de couches est en principe très aisée.

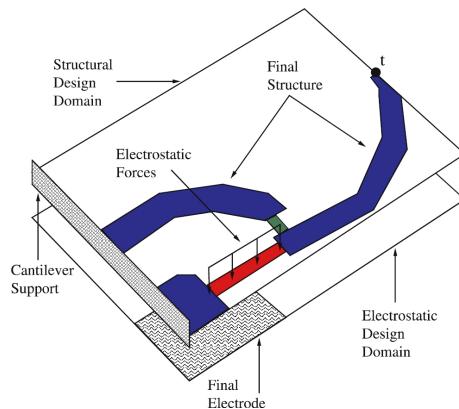


FIG. 4.21 – Optimisation d'une électrode plane [26]

Contrainte de fabrication

Cependant, il ne faut pas oublier que l'électrode mobile doit être libérée du substrat durant la fabrication. La libération est effectuée par attaque chimique du matériau sacrificiel placé entre l'électrode mobile et le substrat. Néanmoins, la distance de pénétration de l'acide sous l'électrode mobile est limitée. D'un point de vue géométrique, cela signifie que tout point de l'électrode doit être suffisamment proche d'un des bords de celle-ci pour pouvoir être libéré. Si ce n'est pas le cas, les concepteurs de microsystèmes percent volontairement l'électrode supérieure afin de permettre à l'acide d'éliminer l'entièreté du matériau sacrificiel (Fig. 4.22). Cette contrainte de fabrication pourra donc être inclue dans le processus d'optimisation afin de rapprocher le résultat d'une structure réaliste.

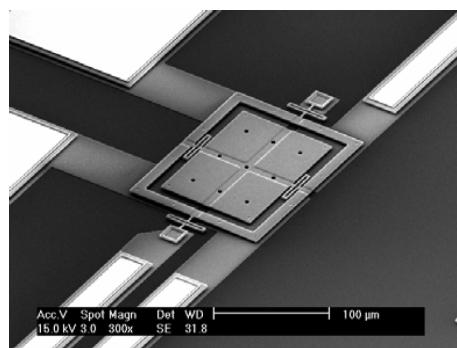


FIG. 4.22 – Exemple de structure perforée afin de permettre sa libération (source : IEF)

Bibliographie

- [1] M.M. ABDALLA, C.K. REDDY, W. FARIS et Z. GURDAL : *Optimal design of an electrostatically actuated microbeam for maximum pull-in voltage.* Computers and Structures, 83:1320–1329, 2005.
- [2] E.L. ALLGOWER et K.GEORG : *Introduction to numerical continuation methods.* SIAM, 2003.
- [3] M. BECKERS : *Topology optimization using a dual method with discrete variables.* Struct. Opt., 17(1):14–24, février 1999.
- [4] M.P. BENDSØE : *Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem.* Struct. Opt., 1:193–202, 1989.
- [5] M.P. BENDSØE et N. KIKUCHI : *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method.* Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 71(2):197–224, 1988.
- [6] M.P. BENDSØE et O. SIGMUND : *Topology Optimization : theory, methods, and applications.* Springer Verlag, 2003.
- [7] L. BERKE : *An efficient approach to the minimum weight design of deflection limited structures.* USAF Technical Memorandum, AFFDL-TM-70-4-FDTR, 1970.
- [8] A. DIAZ et O. SIGMUND : *Checkerboard patterns in layout optimization.* Struct. and Mult. Opt., 10(1):40–45, août 1995.
- [9] P. DUYNSINX : *Optimisation topologique : Du milieu continu à la structure élastique.* Thèse de doctorat, Université de Liège, 1996.
- [10] P. DUYNSINX : *Layout optimization : a mathematical programming approach.* DCAMM rapport 540, 1997.
- [11] P. DUYNSINX et M.P. BENDSØE : *Topology optimization of continuum structures with local stress constraints.* Int. J. for Num. Meth. Eng., 43:1453–1478, 1998.
- [12] P. DUYNSINX, W.H. ZHANG et C. FLEURY : *Sensitivity analysis with unstructured free mesh generators in 2D shape optimization.* Structural Optimization 93, The World Congress on Optimal Designe of Structural Systems, Rio de Janeiro (Brazil), août 1993.
- [13] P. DUYNSINX, W.H. ZHANG, H.G. ZHONG, P. BECKERS et C. FLEURY : *Structural shape optimization with error control.* Proceedings of 1994 ASME, Design Technical Conference, Minneapolis, MN 11 - 14, pages 51–59, septembre 1994.
- [14] H. A. ESCHENAUER et N. OLHOFF : *Topology optimization of continuum structures : A review.* Applied Mechanics Reviews, 54(4):331–390, juillet 2001.
- [15] C. FLEURY : *Le dimensionnement automatique des structures élastiques.* Thèse de docto-
rat, Université de Liège, 1978.

- [16] C. FLEURY : *A unified approach to structural weight minimization.* Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 20(1):17–38, 1979.
- [17] C. FLEURY : *CONLIN : an efficient dual optimizer based on convex approximation concepts.* Struct. and Mult. Opt., 1(2):81–89, juin 1989.
- [18] R.B. HABER, C.S. YOG et M.P. BENDSØE : *Variable-topology shape optimization with a control on perimeter.* Advances in Design Automation, 69:261–272, septembre 1994.
- [19] J.C. HALPIN et S.W. TSAI : *Effects of environmental factors on composite materials.* AFML-TR, 67(423), juin 1969.
- [20] T.S. KIM et Y.Y KIM : *MAC-based mode-tracking in structural topology optimization.* Computer and Struct., 74:375–383, janvier 2000.
- [21] M.D. MANKAME et G.K. ANANTHASURESH : *Topology synthesis of electrothermal compliant mechanisms using line elements.* Struct. and Mult. Opt., 26:209–218, 2004.
- [22] S. PAMIDIGHANTAM, R. PUERS et H.TILMANS : Pull-in voltage analysis of fixed-fixed beams. In *MME2001*, pages 269–272, 2001.
- [23] N. PEDERSEN : *Maximization of eigenvalues using topology optimization.* Struct. and Mult. Opt., 20(1):2–11, août 2000.
- [24] F. PONCELET : Optimisation topologique : applications pratiques et prise en compte de contraintes non structurales. Mémoire de D.E.A., Université de Liège, 2005.
- [25] S.A. RAGON, Z. GURDAL et L.T. WATSON : *A comparison of three algorithms for tracing non linear equilibrium paths of structural systems.* Int. J. Solids Struct., 39:689–698, février 2002.
- [26] M. RAULLI et K. MAUTE : *Topology optimization of electrostatically actuated Microsystems.* Struct. and Mult. Opt., 30(5):342–359, novembre 2005.
- [27] V. ROCHUS : *Finite element modelling of strong electro-mechanical coupling in MEMS.* Thèse de doctorat, Université de Liège, 2006.
- [28] V. ROCHUS, D. J. RIXEN et J.-C. GOLINVAL : *Monolithic modelling of electro-mechanical coupling in micro-structures.* Int. J. for Num. Meth. Eng., 65(4):461–493, 2006.
- [29] L.A. SCHMIT : *Structural design by systematic synthesis.* Proceedings of the 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, pages 105–132, 1960.
- [30] K. SCKITTKOWSKI : *NLPQL : A Fortran subroutine solving constrained nonlinear programming problems.* Annals of Operation research, 5(2):485–500, juin 1986.
- [31] O. SIGMUND : *On the design of compliant mechanisms using topology optimization.* Mech. Struct. Mach., 25(4):493–526, 1997.
- [32] O. SIGMUND : *Design of multiphysic actuators using topology optimization - Part I : One material structures. - Part II : Two-material structures.* Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 190(49–50):6577–6627, 2001.
- [33] K. SVANBERG : *The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization.* Int. J. for Num. Meth. in Eng., 24(2):359–373, 1987.
- [34] I.C. TAIG et R.I. KERR : *Optimization of aircraft strucutres with multiple stiffness requirements.* AGARD Second Symposium on Structural Optimization, AGARD CP 123 : paper 16, 1973.

- [35] J.E. WARREN : *Nonlinear stability analysis of frame-type structures with random geometric imperfections using a total-lagrangian finite element formulation.* Thèse de doctorat, Virginia Polytechnic Institute and State University, janvier 1997.
- [36] J.J. YAO : *RF MEMS from a device perspective.* J. of Micromech. and Microeng., 10(4):R9–R38, 2000.
- [37] L. YIN et G.K. ANANTHASURESH : *A novel topology design scheme for the multi-physics problems of electro-thermally actuated compliant micromechanisms.* Sensors and Actuators, 97–98:599–609, avril 2002.
- [38] O.C. ZIENKIEWICZ et J.S. CAMPBELL : *Shape optimization and sequential linear programming*, pages 109–126. John Wiley & Sons, New York, 1973.