

## MODELISATION MATHEMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

---

Ir. P.Y. BOLLY (1) (2)  
Ir. A. DASSARGUES (1)

### RESUME

-----

L'emploi de méthodes mathématiques sophistiquées pour l'étude des nappes aquifères est de plus en plus fréquent. Ces modélisations mathématiques se basent sur des méthodes numériques de résolution de l'équation différentielle du second degré régissant les écoulements en milieu poreux. Cette équation est construite à partir de l'équation de continuité (exprimant la conservation de la matière) et de l'équation de Darcy. Les conditions aux frontières de ces modèles doivent être choisies avec soin pour la résolution correcte du problème.

Les principes fondamentaux de la méthode des différences finies et de la méthode des éléments finis sont repris simplement. Une comparaison des deux méthodes, les plus utilisées en hydrogéologie, permet de distinguer leurs avantages et inconvénients respectifs. Une méthodologie est proposée décrivant les étapes successives menant à une modélisation mathématique saine et simulant avec soin la réalité.

---

(1) Ingénieur de recherches aux Laboratoires de Géologie de l'Ingénieur, d'Hydrogéologie et de Prospection Géophysique de l'Université de Liège (LGIH).

(2) Actuellement ingénieur à la Société Intercommunale de Développement Economique du Hainaut Occidental, détaché au Service Géologique de Belgique (SIDEHO/SGB).

# MODELISATION MATHEMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

## INTRODUCTION

-----

Compte tenu d'une part de l'augmentation des besoins, d'autre part de la dégradation croissante de notre environnement, la problématique de l'eau se pose de manière de plus en plus aiguë.

En vue de pouvoir utiliser au maximum la capacité des nappes aquifères, il est donc aujourd'hui nécessaire de pouvoir en suivre l'évolution en fonction des prélèvements et des taux de réalimentation et d'en assurer ainsi une gestion dynamique.

De plus, il s'avère urgent de déterminer les modalités de dispersion d'éventuels polluants afin de définir les schémas adéquats de prévention et lutte des pollutions.

Pour satisfaire idéalement ce double objectif, la Région Wallonne a passé différents contrats afin que soit entreprise prioritairement la modélisation numérique d'un certain nombre d'aquifères.

Les exposés qui vont suivre sont consacrés aux divers aspects que recouvre cette modélisation mathématique des nappes aquifères.

La première partie porte sur les aspects théoriques de la modélisation; elle s'ordonne principalement sur l'établissement de l'équation de diffusivité en milieu poreux ainsi que sur la présentation des deux principales méthodes numériques de résolution de cette équation.

Par ailleurs, la méthodologie qui y est présentée fournit le canevas suivant lequel s'articulent les applications pratiques constituant la seconde partie des exposés.

Ces applications sont présentées suivant un ordre de complexité croissante des modèles proposés

En l'occurrence, elles concernent respectivement les nappes aquifères :

- du Crétacé de Mons
- du Calcaire Carbonifère du bord Nord du Synclinorium de Namur
- du Crétacé de Hesbaye.

## MODELISATION MATHEMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

### GENERALITES

-----

L'écoulement en milieu poreux est, comme bien d'autres phénomènes physiques, régi par une équation aux dérivées partielles du second ordre (type harmonique de Laplace).

Son étude se ramène dès lors à la définition du champ scalaire; dans le domaine de l'espace qu'est la nappe soumise à certaines conditions aux frontières bien définies, ce champ est solution de cette équation (ou du système d'équations) aux dérivées partielles.

Si l'on excepte le cas simple et théorique d'une nappe infinie, homogène et isotrope, on ne peut cependant, compte tenu précisément de l'hétérogénéité des terrains et de la complexité des limites rencontrées en pratique, parvenir à une solution mathématique exacte de l'équation de l'écoulement.

Le champ complet cherché est alors approché par sa détermination en un nombre fini de points, appartenant à un nombre fini de sous-domaines discrétisant le domaine d'intégration qu'est la nappe; ces sous-domaines sont liés par un nombre fini de conditions de continuité et c'est sur chacun d'eux qu'est intégrée l'équation aux dérivées partielles, ou tout autre mode d'expression du problème de champ.

Par ce processus de discrétisation, ce problème physique de champ posé est ramené à la résolution mathématique (exacte ou approchée) d'un système linéaire d'équations.

Deux des méthodes numériques de résolution approchée les plus utilisées sont en l'occurrence celles par différences finies et par éléments finis.

## MODELISATION MATHÉMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

### ETABLISSEMENT DE L'EQUATION DE L'ECOULEMENT EN MILIEU POREUX

---

Cette équation, dont l'intégration fournit la solution au problème de champ posé, s'obtient par combinaison de l'équation de continuité en milieu poreux et de la loi de Darcy.

- a) L'équation de continuité exprime le principe de la conservation de la matière; transposée aux écoulements en milieu poreux, elle se note (notation de la Mécanique des Fluides) :

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho w) + \rho q = 0$$

expression dans laquelle :

•  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

•  $\rho$  est la masse volumique du fluide supposé newtonien

•  $\vec{u}(x, y, z, t)$  est un vecteur dont les composantes scalaires sont celles du champ des vitesses

•  $w$  est le paramètre porosité ponctuelle

•  $q$  est le débit volumique de fluide prélevé ( $q > 0$ ) ou apporté ( $q < 0$ ) par unité de volume.

- b) Sous sa forme la plus générale, déduite de l'intégration des équations de Navier-Stokes, la loi de Darcy établit une relation entre la vitesse de filtration  $\vec{u}$  d'un fluide supposé compressible, et les principales causes du déplacement de ce fluide, en l'occurrence les gradients de pression et gravité :

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu} (\vec{\nabla} p + \rho g \vec{\nabla} z)$$

## MODELISATION MATHEMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

équation dans laquelle :

- .  $\tilde{k}$  est le tenseur perméabilité intrinsèque du milieu poreux
- .  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide
- .  $\vec{\nabla} p$  est le vecteur gradient de pression  $(-\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{\partial p}{\partial z})$
- .  $\vec{\nabla} z$  est un vecteur de coordonnées (0, 0, 1).

Dans l'hypothèse d'une fluide incompressible et compte tenu de la définition du potentiel hydraulique, cette expression devient:

$$\vec{u} = \frac{\tilde{k} \rho g}{\mu} \vec{\nabla} h = -\tilde{K} \vec{\nabla} h$$

avec  $\tilde{K}$  le tenseur coefficient de perméabilité que l'on peut démontrer être également du deuxième ordre et symétrique.

En particulierisant cette équation au cas d'un écoulement s'effectuant en milieu homogène et suivant la direction principale d'anisotropie x, on retrouve bien la classique loi expérimentale de Darcy :

$$u_x = K_x \frac{\Delta h}{\Delta x} \text{ ou encore } u = \tilde{K} \frac{\Delta h}{\Delta l} = K i$$

qui illustre clairement la proportionnalité directe existante entre vitesse de filtration u et gradient hydraulique i.

c) L'équation résultant de la combinaison des deux précédentes diffère en fonction des hypothèses adoptées pour caractériser le comportement du milieu poreux et du fluide qu'il inclut.

Dans l'hypothèse d'une nappe captive, la compressibilité tant de la matrice poreuse que du fluide conduit, au travers d'un long développement, à l'expression simplifiée suivante :

$$\vec{\nabla} (T \vec{\nabla} h) = S \frac{\partial h}{\partial t} + Q$$

avec S le coefficient d'emménagement de l'aquifère (adimensionnel),

T et Q résultant de l'intégration respective de  $\tilde{K}$  et de Q sur épaisseur saturée de l'aquifère,

T est la transmissivité de l'aquifère (dimension : m<sup>2</sup>/sec).

## MODELISATION MATHEMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

Dans l'hypothèse d'une nappe libre, la compressibilité de la matrice poreuse et du fluide peut être négligée de sorte que l'on parvient plus directement à l'expression simplifiée :

$$\nabla (\underline{T} \quad \nabla h) = n_e \frac{\partial h}{\partial t} + Q$$

avec  $n_e$  : la porosité efficace de l'aquifère (adimensionnel).

Cette dernière expression est bien, comme la précédente, celle d'une équation harmonique de type Laplace. Elles diffèrent cependant fondamentalement :

- l'équation de l'écoulement à surface libre est non linéaire en  $h$  : ainsi les composantes de  $T$  ne sont pas constantes mais dépendent de l'épaisseur d'aquifère effectivement saturé;
- $n_e$  traduit un phénomène physique différent de  $S$  :

la translation de la surface piézométrique à masse volumique et porosité constantes, par opposition aux variations de masse volumique et de porosité à surface piézométrique fixe, rencontrées en nappe captive.

Le rapport  $n_e/S$  est généralement compris entre 100 et 10.000.

d) Conditions aux frontières.

Une nappe aquifère a une extension limitée dans l'espace et, sur ces frontières, les échanges d'eau avec l'extérieur sont régis par les conditions aux frontières.

Ces conditions sont de trois types :

1. Condition de Dirichlet ou de potentiel imposé :  $h = \underline{h}$

-----

La valeur du potentiel  $h$  est alors spécifiée sur la frontière considérée; cette condition est typiquement celle d'un contact nappe-rivière, le potentiel constant imposé étant égal à la cote de la surface libre de la rivière.

2. Condition de Neumann ou de flux imposé :

-----

$$\frac{\partial h}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial x} l_x + \frac{\partial h}{\partial y} l_y = \phi$$

avec :

$n$  : la normale extérieure à la frontière considérée,

$l_x$  et  $l_y$  : les cosinus directeurs de cette normale.

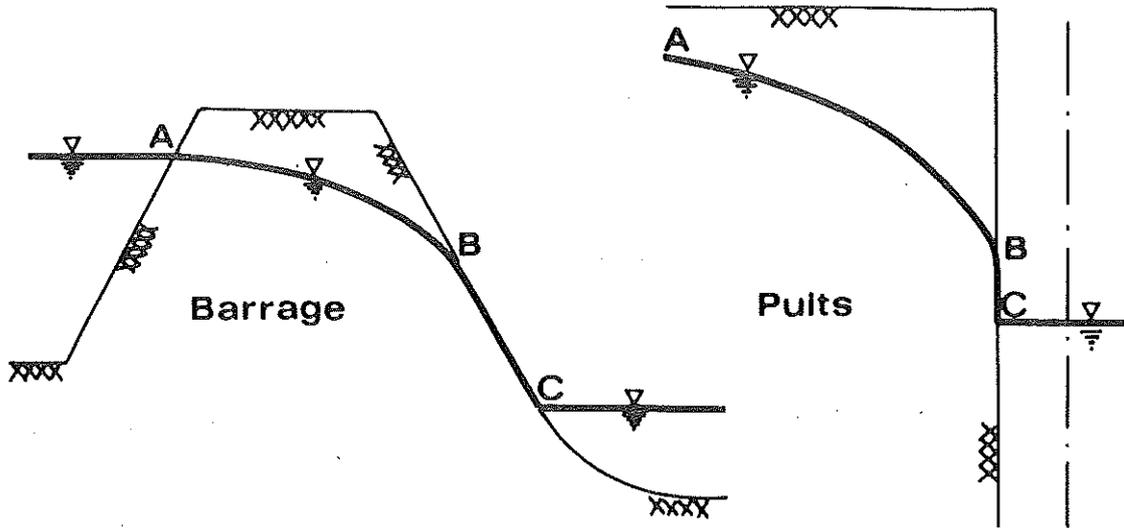


fig 1

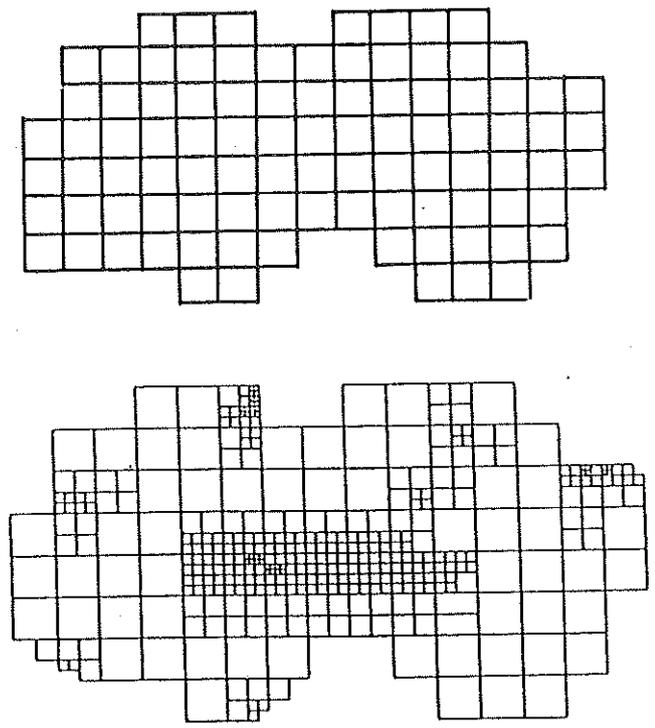
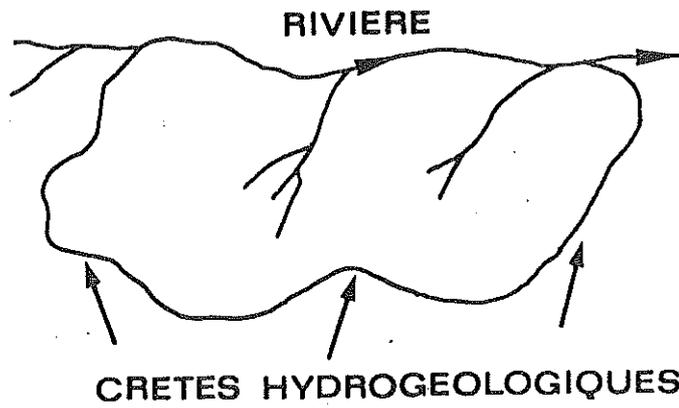


fig 2

## MODELISATION MATHEMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

La valeur du gradient de potentiel normal à la frontière est alors imposée. Dans le cas particulier où  $\phi = 0$ , cette condition exprime, par application de la loi de Darcy, que la composante de  $u$  normale à la frontière est nulle. Les équipotentielles sont donc perpendiculaires à cette frontière et les lignes de flux, parallèles.

### 3. Condition de Fourier ou mixte :

$$h + \lambda \frac{\partial h}{\partial n} \quad \text{imposé.}$$

Ce troisième type de condition permet d'imposer une relation entre le potentiel et le flux, comme cela est le cas lors :

- de la drainance par une frontière séparant la nappe aquifère d'un plan d'eau,
- du suintement à la frontière d'un milieu poreux, au contact de l'atmosphère (figure 1, zones BC).

La définition ad hoc de ces conditions aux frontières est indispensable à la résolution correcte du problème de champ posé.

### METHODE DES DIFFERENCES FINIES INTEGREES

Dans cette méthode, la transformation de l'équation de l'écoulement en équation algébrique s'obtient par un développement limité en série de Taylor.

De manière plus détaillée, considérons une nappe aquifère dont nous supposons connus

- les champs des paramètres  $T$ ,  $S$  et  $q$ ,
- les conditions aux limites et initiales.

Supposons également, pour simplifier (\*), que cette nappe, domaine d'intégration de l'équation soit discrétisée en un nombre fini  $n$  de mailles carrées, de même dimension  $a$  (figure 2).

L'équation de l'écoulement, valide par hypothèses en tout point du domaine, est donc vérifiée en chacune des mailles; le principe de la méthode des différences finies intégrées consiste alors à considérer que seules les intégrales de cette équation étendues à chacune des mailles doivent être satisfaites :

$$\int_{Di} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] dx dy =$$

$$\iint_{Di} \left( S \frac{\partial h}{\partial t} + q \right) dx dy$$

(\*) Cette méthode est en fait utilisable avec des géométries de discrétisation plus complexes.

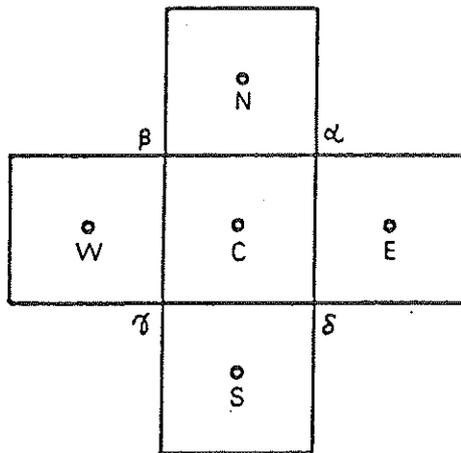


fig 3

## MODELISATION MATHEMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

Di étant le sous-domaine qu'est la  $i^{\text{ème}}$  maille,  
 $i = 1 \rightarrow m$ , avec  $m$  le nombre de mailles de potentiel  $h$  inconnu  
 ( $m < n$ ).

En d'autres termes, l'équation de la diffusivité doit être  
 satisfaite en moyenne sur chaque maille et non en tout point de  
 chaque maille.

Par application du théorème de Green au premier membre, par  
 approximation des dérivées partielles par un développement en  
 série de Taylor limité au premier ordre et en exprimant enfin  
 qu'il y a continuité des composantes de vitesse en des points  
 infiniment voisins situés de part et d'autre des interfaces des  
 différentes mailles, cette équation devient, pour une maille C de  
 voisines notées N, E, S, W (figure 3):

$$T_{nc} (h_n - h_c) + T_{wc} (h_w - h_c) + T_{sc} (h_s - h_c) +$$

$$T_{ec} (h_e - h_c) = a^2 S_c \frac{dh_c}{dt} + Q_c$$

avec  $T_{nc}$  : la moyenne harmonique des transmissivités des mailles  
 N et C

$h_n$  : le potentiel hydraulique au centre de la maille N.

Une telle équation différentielle ordinaire est en fait  
 associée à chacun des  $n$  éléments du maillage, de sorte que la  
 détermination du champ des potentiels de la nappe est bien  
 ramenée à un problème de résolution numérique approchée d'un  
 système de  $n$  équations :

$$T h = S \frac{dh}{dt} + Q$$

avec  $T$  : la matrice des transmissivités

$S$  : la matrice d'emmagasinement.

Deux cas peuvent être distingués :

1. dans l'hypothèse d'un écoulement en régime permanent, c'est-à-dire en considérant le champ des potentiels indépendant du temps, le terme différentiel  $S dh/dt$  est nul de sorte que la relation précédente se réduit au système linéaire :

$$T h = Q$$

avec  $T$  : la matrice de transmissivité

$h$  : le vecteur des potentiels inconnus

$Q$  : le vecteur des débits échangés.

## MODELISATION MATHÉMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

On démontre que  $T$  est une matrice symétrique réelle à diagonale dominante pour peu qu'une des mailles de la discrétisation soit à potentiel imposé; la convergence de méthodes itératives de résolution telles celles de Gauss-Seidel ou de Frankel-Young est de ce fait assurée.

2. Dans l'hypothèse d'un écoulement en régime transitoire, la dérivée  $dh/dt$  est habituellement approchée :

- soit à l'aide de la différence avant (méthode explicite) :

$$\frac{dh}{dt} \Big|_t \approx \frac{h^{t+\Delta t} - h^t}{\Delta t} + R_n$$

- soit à l'aide de la différence arrière (méthode implicite)

$$\frac{dh}{dt} \Big|_{t'} = \frac{h^{t'} - h^t}{t'} + R_n \text{ avec } t' = t + \Delta t$$

- soit encore en intégrant analytiquement le système d'équations sous forme d'un opérateur matriciel construit sur base de la matrice  $T$  (méthode dite de simulation rapide).

Une approximation polynomiale de cet opérateur matriciel permet alors, quelque soit  $t > t_0$ , de calculer  $h_t$ .

Dans le cas de simulations d'écoulements à surface libre, la linéarisation de l'équation de l'écoulement et donc du système d'équations est approchée itérativement.

En régime permanent, la matrice  $T$  est recalculée proportionnellement aux valeurs de  $h$  itérées, selon une fréquence donnée; en régime transitoire, ce réajustement a lieu à chaque pas de temps.

Il en résulte évidemment un allongement du temps de calcul.

## MODELISATION MATHÉMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

### METHODE DES ELEMENTS FINIS

-----

La méthode des éléments finis a pour principe d'utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

Cette approximation simple est obtenue :

- en choisissant un ensemble fini de fonctions "approchées" (vis-à-vis des fonctions "exactes" du champ étudié), dépendant de  $n$  paramètres  $a_1$ .
- en déterminant ces paramètres  $a_1, \dots, a_n$  de manière à satisfaire les conditions de compatibilité.

Ainsi, si des valeurs de la fonction exacte  $u_{ex}$  aux noeuds de coordonnées  $x_1, x_2 \dots x_n$  sont appelées  $u_1, u_2 \dots u_n$ , la fonction approchée  $u(x)$  peut s'écrire :

$$u(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 \dots + N_n(x) u_n$$

Cette relation définit une approximation nodale dans laquelle :

- $u_1 \dots u_n$  sont appelées variables nodales
- les fonctions  $N(x)$  sont les fonctions d'interpolation.

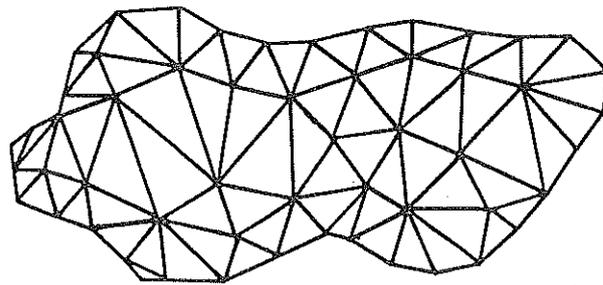
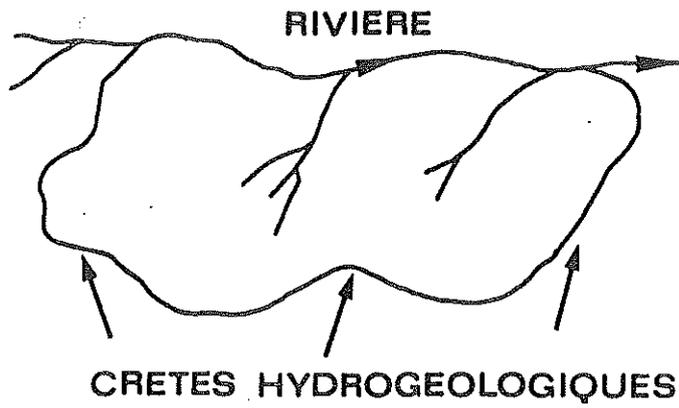
La fonction approchée  $u(x, a_1 \dots a_n)$  est souvent choisie de manière à être facilement évaluée sur ordinateur, intégrée ou dérivée explicitement.

Sa construction est d'autant plus difficile que le nombre  $n$  de noeuds et de paramètres  $u_1$  est important.

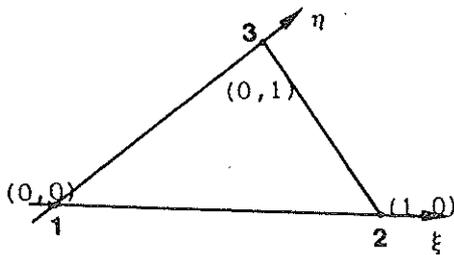
La méthode d'approximation nodale par sous-domaines consiste à identifier un ensemble de sous-domaines du domaine principal et de définir une fonction approchée  $u^e(x)$  différente sur chaque sous-domaine. Cette méthode simplifie la construction de  $u(x)$  et s'adapte très bien au calcul sur ordinateur.

La méthode d'approximation par éléments finis est une méthode particulière d'approximation par sous-domaines qui présente les particularités suivantes :

- l'approximation nodale sur chaque sous-domaine ou élément ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des noeuds situés sur l'élément et sa frontière;

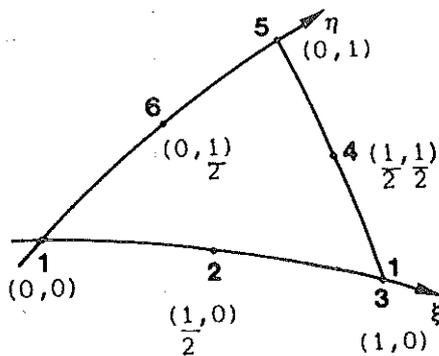


1er degré - 3 noeuds



$$\phi = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

2ème degré - 6 noeuds



$$\phi = \begin{bmatrix} (1 - 2\eta - 2\xi) (1 - \xi - \eta) \\ 4 \xi (1 - \xi - \eta) \\ (2\xi - 1)\xi \\ 4 \xi \eta \\ (2\eta - 1)\eta \\ 4\eta (1 - \xi - \eta) \end{bmatrix}$$

**FIG 5**

## MODELISATION MATHEMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

- les fonctions approchées  $u^e(x)$  sur chaque élément sont construites de manière à être continues sur l'élément et elles satisfont des conditions de continuité entre les différents éléments.

Grâce à la subdivision du domaine en éléments, on peut s'adapter aisément à une forme compliquée de ce dernier, en particulier sur son contour.

L'intégration est en fait réalisée en rendant stationnaire une certaine fonctionnelle  $F(h)$  intégrant les conditions de frontières.

Par le théorème d'Euler du calcul des variations, on peut en effet montrer qu'un problème différentiel de type  $\delta(h) = 0$  peut être mis sous la forme variationnelle  $\delta F(h) = 0$ , laquelle exprime que la solution du problème de champ est telle que toute variation arbitraire  $\delta$  de la fonctionnelle  $F(h)$  est nulle (stationnarité).

Compte tenu de la substitution du champ complet par un nombre fini d'éléments, le problème variationnel est alors approché par la limite d'une problème de valeurs stationnaires d'une fonction d'un nombre fini de variables (paramètres), c'est-à-dire qu'il se transforme en un problème classique de valeurs stationnaires d'une fonction  $f = f(a_i)$  de  $n$  variables, ce qui s'exprime par les équations :

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Comme  $n$  est fini, la solution du problème de variation est approchée.

Enfin, si  $F(h)$  est quadratique, le système d'équations est linéaire.

En conclusion, la résolution du problème de structure est bien ramenée à la détermination d'un nombre fini de paramètres, liés par un système de  $n$  équations algébriques.

A titre d'exemple, considérons la résolution d'un problème d'écoulement à l'aide d'éléments de type "isoparamétrique" (figure 5).

Ces éléments ont pour principales caractéristiques :

- l'emploi de bords courbes facilitant la discrétisation des domaines à géométrie complexe
- l'utilisation de fonctions d'interpolation des coordonnées coïncidant avec celles d'interpolation des potentiels.

## MODELISATION MATHEMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

Dans le cas simple d'un élément triangulaire à 3 noeuds et relativement à un système d'axes (  $\zeta, \eta$  ), ces fonctions définissent en l'occurrence une matrice d'interpolation notée {N} telle que :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - \zeta - \eta \\ \zeta \\ \eta \end{Bmatrix}$$

Si nous supposons cet écoulement permanent et limité à un plan dont les axes de coordonnées sont x et y, l'équation de l'écoulement se résume à :

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \frac{\partial h}{\partial y}) = 0$$

Par application du théorème d'Euler du calcul des variations, on obtient un principe variationnel de la forme :

$$\delta F(h) = \int_V [k_x \frac{\partial h}{\partial x} \delta (\frac{\partial h}{\partial x}) + k_y \frac{\partial h}{\partial y} \delta (\frac{\partial h}{\partial y})] dV + \int_S qShds = 0$$

ou encore, en supposant de plus que q (flux par unité de surface) est imposé nul :

$$\delta F(h) = \int_x \int_y [k_x \frac{\partial h}{\partial x} \delta (\frac{\partial h}{\partial x}) + k_y \frac{\partial h}{\partial y} \delta (\frac{\partial h}{\partial y})] dx dy = 0$$

Si l'on désigne par <N> une matrice ayant pour éléments les fonctions d'interpolation des coordonnées et par {p} un vecteur ayant pour composantes les potentiels (pressions) nodaux, on a :

$$h = \langle N \rangle \{p\}$$

$$\text{donc : } \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} p_i = \langle Ax \rangle \{p\}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} p_i = \langle Ay \rangle \{p\}$$

$$\text{et : } \delta (\frac{\partial h}{\partial x}) = \langle Ax \rangle \{\delta p\}$$

$$\delta (\frac{\partial h}{\partial y}) = \langle Ay \rangle \{\delta p\}$$

$$\delta h = \langle N \rangle \{\delta p\}$$

## MODELISATION MATHEMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

Par conséquent, le principe variationnel simplifié devient :

$$\delta F(h) = \iint_{x,y} [ k_x \langle p^T \rangle \{ A_x^T \} \langle Ax \rangle \{ \delta p \} + k_y \langle p^T \rangle \{ A_y^T \} \langle Ay \rangle \{ \delta p \} ] dx dy = 0$$

La variation  $\delta p$  étant arbitraire, elle peut être choisie non nulle, de sorte que l'on obtient :

$$\iint_{x,y} [ k_x \langle p^T \rangle \{ A_x^T \} \langle Ax \rangle + k_y \langle p^T \rangle \{ A_y^T \} \langle Ay \rangle ] dx dy = 0$$

Enfin, en posant :

$$[ H ] = \iint_{x,y} k_x \{ A_x^T \} \langle Ax \rangle + k_y \{ A_y^T \} \langle Ay \rangle ,$$

on parvient bien à un système linéaire d'équations :

$$[ H ] \{ p \} = 0$$

### ANALOGIE DIFFERENCES FINIES - ELEMENTS FINIS

---

Tout comme la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis est une méthode numérique de résolution approchée des problèmes de champ. L'idée maîtresse en est donc également de réduire le système d'équations différentielles de base, plus les conditions aux limites associées, à un système d'équations algébriques et ce, moyennant notamment une discrétisation préalable.

Elle diffère (\*) toutefois dans la manière d'approcher la solution : alors que celle-ci est exprimée sous la forme d'équations aux différences finies dans la première méthode, la méthode des éléments finis par contre postule un principe variationnel, c'est-à-dire exprime la solution par la stationnarité d'une certaine fonctionnelle  $F(h)$ , définie par intégration, sur le domaine étudié, des paramètres inconnus.

Cette fonctionnelle n'est rendue stationnaire (minimisée) que de façon approchée, le champ complet cherché se voyant substituer par un nombre fini de champs partiels paramétrisés (éléments), liés par un nombre fini de conditions de continuité, exprimées en un nombre fini de noeuds (points communs à plusieurs éléments).

---

(\*) L'analogie est plus grande vis-à-vis des premières méthodes par éléments finis, lesquelles utilisent en lieu et place d'un principe variationnel, une classique formulation de résidus pondérés : les méthodes des différences finies et des éléments finis peuvent alors être considérées comme deux cas particuliers d'une méthode des résidus pondérés.

## MODELISATION MATHEMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

Par ailleurs :

- contrairement à la méthode des différences finies, où les équations différentielles sont résolues par des méthodes mathématiques approchées (développement en série de Taylor), il n'y a pas ici d'approximation mathématique dans le calcul du champ.

En d'autres termes, dans la méthode des différences finies, la discrétisation préliminaire à la résolution numérique est purement mathématique et agit sur les équations à intégrer.

Dans la méthode des éléments, par contre, la discrétisation porte directement sur le domaine à étudier (la nappe), en le partitionnant en éléments finis à l'intérieur de chacun desquels règne, par exemple, un champ homogène de pressions hydrostatiques.

- alors que la méthode des différences finies impose des limitations contraignantes quant à la géométrie de la discrétisation (maillage à mailles carrées toutes identiques ou, au mieux, gigognes), la méthode des éléments finis laisse quasi toute liberté à cet égard. Qui plus est, il n'y a pas obligation d'adopter une "loi de l'écoulement" unique.
- la méthode des éléments finis permet de prendre en compte des concepts tensoriels, ce qui s'avère utile lorsque les directions principales d'anisotropie d'une propriété ne coïncident pas avec les axes du système de coordonnées (cas de non diagonalisation d'un tenseur).
- dans la méthode des éléments finis, les points d'intégration (somme toute, d'évaluation discrète du champ global recherché) sont au nombre de 2, 3, ... 9 et répartis dans l'élément considéré, tandis que dans la méthode des différences finies, ce point est unique et en position centrale de la maille. La précision des éléments finis est en conséquence plus grande, moyennant, il est vrai, un effort et donc un coût de calcul bien plus conséquents.

### METHOLOGIE

-----

La modélisation mathématique des nappes aquifères s'ordonne classiquement en :

- une phase préliminaire d'étude hydrogéologique régionale
- une deuxième phase comportant l'idéalisation, la discrétisation et le calage
- une troisième phase qui consiste en l'exploitation du modèle.

## MODELISATION MATHEMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

L'étude hydrogéologique régionale repose sur la collecte de données scientifiques et techniques concernant principalement :

- l'hydrogéologie de la nappe aquifère
- le bilan hydrique partiel du bassin
- les caractéristiques des ouvrages de captage.

L'importance de cette étude est fondamentale puisque, indépendamment de la formulation mathématique retenue, la validité et la précision des résultats fournis par un modèle dépendent bien évidemment :

- de la manière avec laquelle ce modèle serre la géométrie complexe de l'aquifère
- de l'exactitude des paramètres hydrodynamiques introduits.

La discrétisation est, comme signifié précédemment, l'idée première de la modélisation mathématique par les méthodes des différences finies, éléments finis, ...

Elle porte sur une nappe idéalisée, tant d'un point de vue "topologique" (choix d'une géométrie et de conditions aux limites) que "rhéologique" (choix de l'équation de diffusivité et des paramètres s'y rapportant). Elle est essentiellement guidée par la précision des résultats recherchés (discrétisation plus fine des zones à fortes variations des paramètres de l'écoulement ...), ainsi que par des considérations relatives à l'espace mémoire disponible et au coût de calcul consenti.

Dans la majorité des cas, le calage du modèle porte en fait sur une nappe dont on connaît à priori le champ des potentiels et dont on recherche les caractéristiques de transmissivité, etc.

On procède alors comme suit :

Ayant idéalisé et discrétisé le nappe, on essaie, compte tenu du bilan hydrogéologique établi pour la période considérée, de trouver la répartition des transmissivités -ou de tout autre paramètre- permettant de reproduire les observations piézométriques (\*).

Si ce résultat ne peut être atteint, on modifie alors certaines conditions aux limites ou encore les champs discrets de certains paramètres introduits, jusqu'à ce que le modèle soit enfin calé.

---

(\*) La recherche de ces divers champs s'oriente bien évidemment vers des valeurs compatibles avec les données disponibles (transmissivités mesurées par pompes d'essai, etc...).

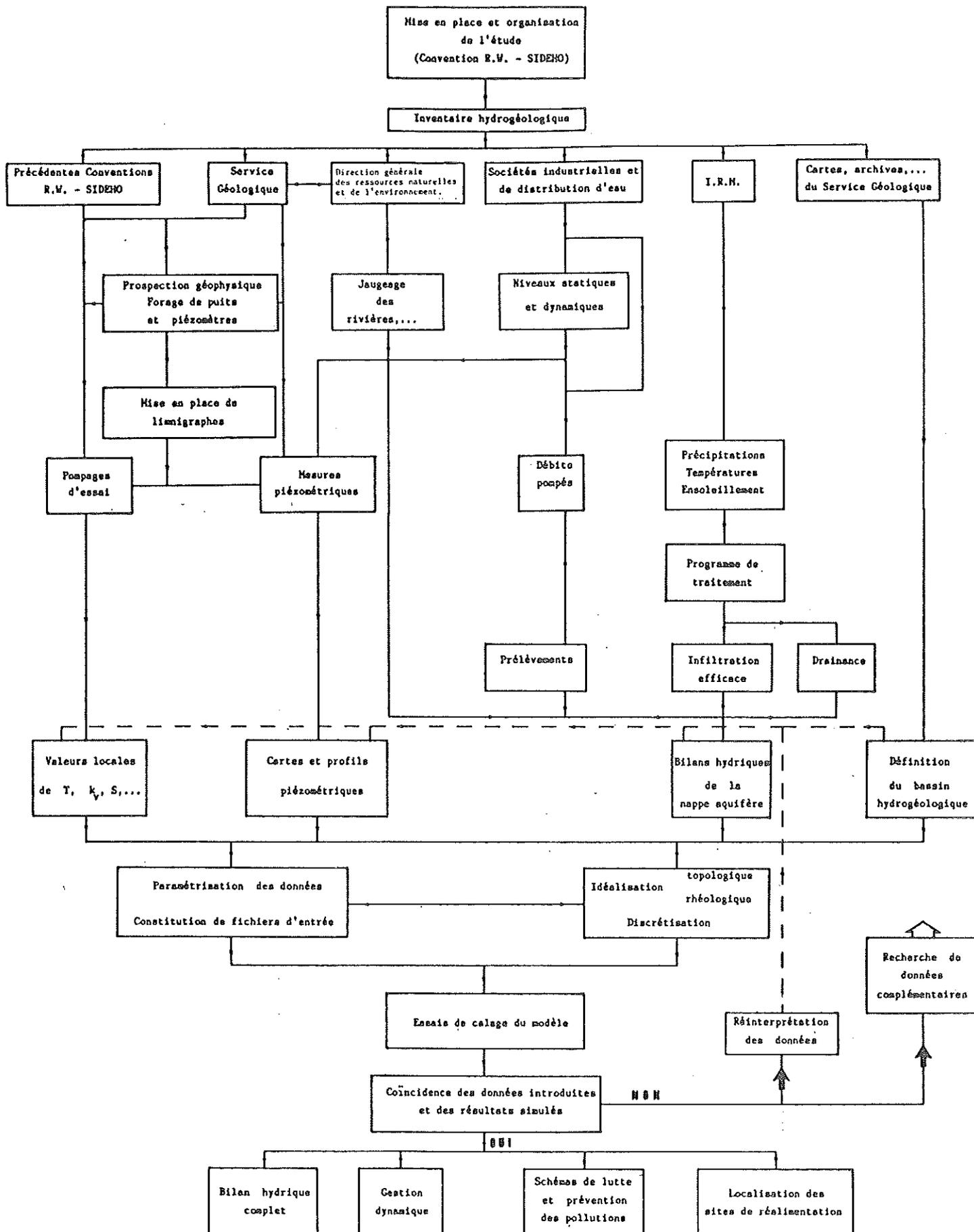


fig 6

## MODELISATION MATHEMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

Après cette phase de calage, on peut enfin passer à une phase d'exploitation du modèle, portant sur la gestion dynamique de la nappe, les répercussions d'ouvrages du génie civil sur son comportement, les dommages résultant de pompages intensifs (puits naturels, tassements différentiels, ...), la prévention ou encore l'étude de la propagation de pollutions, etc.

L'organigramme de la figure 6 illustre l'ordonnancement des divers aspects exposés ci-dessus, en le particularisant à la modélisation du Calcaire Carbonifère du flanc Nord du Synclinorium de Namur.

## MODELISATION MATHEMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

### REFERENCES

-----

- AHMED H. et SUNEDA D.K. , Non linear flow in porous media. Proc. A.S.C.E., Hydraulics Div., 95, HY6, 1847-59 - 1969.
- ASSENS G., Eléments d'hydrogéologie mathématique. Centre d'Informatique Géologique. E.N.S.M.P. 59 p - 1974.
- BLOK S.I.E., LEIJNSE A., Report of the T.N.O. Commission for Hydrological Research. Groundwater Models and Numerical Computer Software. The Hague. 72 p. - 1978.
- BREBBIA C.A., WANG S.Y., Finite Elements in Water Resources. Proceedings of the 5th International Conference Burlington, Vermont, U.S.A. 823 p. - 1984.
- BRUCH E., Résolution par éléments frontières des écoulements permanents en milieu poreux, à surface libre éventuellement indéterminée. Travail de fin d'étude, F.S.A., Université de Liège 1984-1985.
- GHABOUSSI J. et WILSON E.L. , Flow of compressible fluid in porous elastic media. Int. J. Num. Meth. Eng., 5, 419-442-1973.
- LEDOUX E., programme Newsam : principe et notice d'emploi. Centre d'Informatique Géologique. E.N.S.M.P. 55 p. - 1978.
- LEWIS R.W., ROBERT G.K., et ZIENKIEWICZ O.C. A non linear flow and deformation analysis of consolidated problems. Numerical methods in geomechanics. Proc. of the 2d Int. Conf. on Num. Meth. in geomechanics. Ed. C.S. DESAI, pp. 1106-1118. - 1976
- LITT F.X., Analyse numérique. Notes de cours U.Lg. - 1984.
- MONJOIE A., Hydrogéologie. Note de cours U.Lg. - 1984.
- MONJOIE A., Compléments de Géologie de l'Ingénieur et d'Hydrogéologie. Notes de cours. Inédit. - 1985.
- NEUMAN S.P. , Saturated-unsaturated seepage by finite elements. ASCE, Hydraulics Div., 99, HY12, 2233-2250. - 1973.
- NIHOUL J.C.J., WOLLAST R., Hydrodynamic and Dispersion Models. Boundary Fluxes and Boundary Conditions. pp. 11-198. - 1983.

## MODELISATION MATHEMATIQUE DES NAPPES AQUIFERES

PIETTE Ch. Application des éléments finis à la détermination de la surface piézométrique d'une nappe d'eau souterraine. Travail de fin d'étude, F.S.A., Université de Liège - 1976.

PIETTE Ch., et CESCOTTO S., Application des éléments finis à la détermination de la surface piézométrique d'une nappe d'eau souterraine. Journée d'études. La méthode des éléments finis appliquée.

PINDER G.F. et GRAY W.G., Finite element, Simulation in Surface and Subsurface Hydrology, Academic Press, 288 p. - 1977.

SANDHU R.S. et WILSON E.L. Finite element analysis of seepage in elastic media. Proc. A.S.C.E. Engineering Mechanics Div., 95, EM3, 641-651.

SANDHU R.S., LUI H; et SINGH K.J., Numerical performance of some finite element schemes for analysis of seepage in porous elastic media. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech, 1, N° 3, pp. 177-194-1977.

TAYLOR R.L. et BROWN C.B. , Darcy flow solution with a free surface. A.S.C.E., Soil Mechanics and Foundation Div., 98, SM11, pp. 1143-1162 - 1972.

VOLKER R.E., Non linear flow in porous media by finite elements. Proc. A.S.C.E., Hydraulics Div., 95, HY6, 1093-114 - 1969.