Expressions correctes de l'Heure et des Coordonnées des Etoiles dans le système de l'Axe instantané. Par F. Folie, Liège.

(*Communicated by Professor G. H. Darwin.*)

1. Dans le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (janvier 1903) M. Darwin a démontré que, si l'on fait abstraction des forces perturbatrices, l'expression de l'heure, dans le système de l'axe instantané, renferme un terme de période eulérienne (305 j. pour une terre rigide) qui a pour coefficient $0^s{\cdot}01$ multiplié par la tangente de la latitude ; en sorte que, le même jour et au même instant, les heures déterminées en deux observatoires situés sur un même méridien à $+45°$ et à $-45°$ de latitude diffèrent entre elles de $0^s{\cdot}02$.

J'avais pensé que cette raison suffirait pour faire rejeter le système de l'axe instantané.

Mais de bons astronomes persistent à croire qu'il n'y a néanmoins pas lieu de renoncer à ce système.

Je me propose de démontrer qu'il expose à des erreurs telles qu'on doit nécessairement l'abandonner.

2. Pour cela je devrais rechercher les expressions des coordonnées rapportées à l'axe instantané dans le cas de la nature, c'est-à-dire en tenant compte exactement des forces perturbatrices.

Je me bornerai toutefois à envisager le principal effet de ces forces, la précession, puisqu'il est le seul auquel il soit nécessaire d'avoir égard en pratique.

Soient p, q, r les vitesses angulaires de la terre autour des trois axes principaux X, Y, Z ; α', β', γ' les angles de l'axe instantané avec ceux-ci, $\omega=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$.

I. On a $\cos\alpha'=\frac{p}{\omega}$, $\cos\beta'=\frac{q}{\omega}$, $\cos\gamma'=\frac{r}{\omega}$, et $p=\gamma_1\cos\Gamma+c_1\sin\phi$, $q=\gamma_1\sin\Gamma+c_1\cos\phi$, $r=n=c^{te}$. La période de $\Gamma=n\mu t-\sigma$ est de 305 j. pour une Terre rigide.

Des équations précédentes on tire

$$\sin^2\gamma'=\frac{p^2+q^2}{n^2+p^2+q^2},$$ où le dénominateur peut se réduire à n^2 ;

d'où, en faisant $\frac{\gamma_1}{n}=\gamma_1$, $\frac{c_1}{n}=c$:

$$\text{II.}\quad \sin^2\gamma'=\gamma^2+c^2+2\gamma c\sin(\Gamma+\phi)\ \text{et}\ \sin\gamma'=\gamma+c\sin(\Gamma+\phi).$$

Désignons par Γ' l'angle que la projection de l'axe instantané fait avec l'axe des X. On a

$$\cos\alpha'=\sin\gamma'\cos\Gamma',\quad \cos\beta'=\sin\gamma'\sin\Gamma'.$$

En nous bornant aux termes du premier ordre, nous pourrons écrire n au lieu de ω dans les expressions de $\cos\alpha'$ et de $\cos\beta'$, et γ' au lieu de $\sin\gamma'$. Alors

$$\gamma'\cos\Gamma' = \gamma\cos\Gamma + c\sin\phi,$$
$$\gamma'\sin\Gamma' = \gamma\sin\Gamma + c\cos\phi,$$

d'où l'on déduit aisément

III. $\Gamma' = \Gamma - c\cos(\phi + \Gamma)$, $\gamma' = \gamma + c\sin(\phi + \Gamma)$.

Abstraction faite de la précession, γ' se réduit à γ, Γ' à Γ.

3. De
$$\frac{d\theta}{dt} = -p\cos\phi + q\sin\phi.$$
$$\sin\theta\frac{d\psi}{dt} = p\sin\phi + q\cos\phi, \text{ on tire}$$
$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma_1\cos(\Gamma+\phi) \text{ et } \theta = \theta_0 - \frac{\gamma}{1+\mu}\sin(\Gamma+\phi).$$
$$\sin\theta\frac{d\psi}{dt} = \gamma_1\sin(\Gamma+\phi) + c_1 ; \sin\theta(\psi - \psi_0) = c_1 t - \frac{\gamma}{1+\mu}\cos(\Gamma+\phi).$$

Si l'on considère le triangle EE_1F, dans lequel les arcs EF, E_1F, EE_1 appartiennent respectivement à l'équateur géographique, à l'équateur instantané et à l'écliptique, l'angle F sera γ', l'angle E, $\pi-\theta$, l'angle E_1, θ_1 ; le côté EF, ζ, angle compris entre le colure des solstices et le grand cercle des deux pôles ; le côté EE_1, $\psi_1 - \psi$.

Ce triangle donne, en s'arrêtant aux termes du premier ordre

$$\theta_1 - \theta = -\gamma'\cos\zeta, \quad \psi_1 - \psi = \frac{\gamma'}{\sin\theta}\sin\zeta.$$

Remplaçant θ et ψ par leurs valeurs précédentes et désignant par $\Delta\theta_1$ et $\Delta\psi_1$ les quantités $\theta_1 - \theta_0$, $\psi_1 - (\psi_0 + c_1 t)$, on a, en faisant $\frac{1}{1+\mu}$ égal à $1-\mu$:

$$\Delta\theta_1 = -\gamma(1-\mu)\sin(\Gamma+\phi) - \gamma'\cos\zeta,$$
$$\Delta\psi_1 = -\frac{\gamma}{\sin\theta}(1-\mu)\cos(\Gamma+\phi) + \frac{\gamma'}{\sin\theta}\sin\zeta.$$

Or
$$\zeta = \Gamma' + \phi - 3\frac{\pi}{2}.$$

Si l'on remplace γ' par $\gamma + c\sin(\Gamma+\phi)$, on obtient, en écrivant

θ_1 au lieu de θ, puisqu'on se borne aux termes du premier ordre :

$$\Delta\theta_1 = \gamma\mu \sin(\Gamma+\phi) - c\sin(\Gamma+\phi)\cos\zeta,$$

$$\Delta\psi_1 = -\frac{\gamma}{\sin\theta_1}(1-\mu)\cos(\Gamma+\phi) + \frac{\gamma'}{\sin\theta_1}\sin\zeta.$$

4. Comme γ est égal à $0''\cdot15$ environ, μ à $\frac{1}{305}$, on peut négliger $\gamma\mu$; on aurait donc, abstraction faite des forces perturbatrices $\Delta\theta_1=0$, $\Delta\psi_1=0$, ce qu'admettent les astronomes.

Mais il n'en est pas ainsi dans la nature, et l'on doit écrire

$$\Delta\theta_1 = -\gamma\sin(\Gamma+\phi) + \gamma'\sin(\Gamma'+\phi) ;$$

$$\Delta\psi_1 = -\frac{\gamma}{\sin\theta_1}\cos(\Gamma+\phi) + \frac{\gamma'}{\sin\theta_1}\cos(\Gamma'+\phi),$$

ou

$$\Delta\theta_1 = c\sin^2(\Gamma+\phi) ;$$

$$\sin\theta_1\Delta\psi_1 = c\sin(\Gamma+\phi)\cos(\Gamma+\phi).$$

On aura alors

$$\Delta\delta_1 = c\sin(\Gamma+\phi)\cos(\Gamma+\phi-\alpha_1),$$

$$\Delta\alpha_1 = c\sin(\Gamma+\phi)[\cot\theta_1\cos(\Gamma+\phi) - tg\delta_1\sin(\Gamma+\phi-\alpha_1)].$$

L'erreur commise par les astronomes qui posent, avec Oppolzer, $\Delta\delta_1 = 0$, $\Delta\alpha_1 = 0$, peut donc s'élever, sur la déclinaison, à près de $0''\cdot01$ ($0''\cdot085$).

Si l'on considère cette quantité comme négligeable, il n'en peut pas être de même de l'erreur commise sur l'AR de la polaire, par exemple.

A l'époque actuelle cette erreur peut s'élever à $0^s\cdot027$.

Pour λ *Ursæ Min.* elle serait de $0^s\cdot07$.

5. Il me semble donc que le système de l'axe instantané doit absolument être rejeté, et que l'on doit en revenir à celui de Laplace-Bessel, en ajoutant à leurs formules incomplètes les termes de nutation à courte période (diurne ou semi-diurne).

Et cela avec d'autant plus de raison que, dans ce dernier système, on peut définir une heure, non pas à peu près, mais rigoureusement uniforme,* tandis que, dans celui de l'axe instantané,† M. Darwin a démontré que l'heure est sujette à des variations de même ordre et de même période que les variations de latitude, multipliées, de plus, par la tangente de la latitude

* *Revision des Constantes de l'Astronomie stellaire*, p. 93.

† "Je dois rendre à Oppolzer cette justice qu'il a défini l'heure dans un méridien *fixe* et dans l'équateur géographique," *Traité des Orbites*, p. 198.

du lieu, en sorte que les heures qui seraient déterminées au même instant sous les latitudes de $+60°$ et de $-60°$ différeraient entre elles de $0^s\cdot017$; de même que celles qui seraient observées à 12^h d'intervalle en deux lieux situés sous le 60e degré de latitude.

Si l'on tient compte de la précession, la formule des variations périodiques de l'heure donnée par M. Darwin

$$\Delta\tau = -\gamma tg\Phi \sin\Gamma$$

doit s'écrire

$$\Delta\tau = -\gamma' tg\Phi \sin\Gamma' = -tg\Phi[\gamma + c\sin(\Gamma+\phi)]\sin[\Gamma - c\cos(\Gamma+\phi)],$$

ou simplement, en négligeant les termes du second ordre,

$$\cot\Phi\Delta\tau = -\gamma\sin\Gamma - c\sin\Gamma\sin(\Gamma+\phi),$$

formule dans laquelle le second terme, très faible, a une période diurne, tandis que celle du premier est de 305 jours.

6. Dans le tableau suivant nous donnerons, quant aux variations eulériennes,

U) les formules usuelles (incorrectes);

I) les formules correctes relatives à l'axe instantané;

L) les formules absolument rigoureuses de Laplace-Bessel relatives aux axes principaux, l y représentant la longitude orientale du premier méridien (axe X).

Les unes et les autres se rapportent aux observations faites dans le méridien instantané ou dans le méridien fixe. Dans ce dernier cas les signes $\pm$ s'appliquent à un passage $\substack{\text{supérieur}\\\text{inférieur}}$.

A la simple inspection de ces formules on constate immédiatement que, dans ce dernier système, la nutation eulérienne disparaît entièrement dans la somme des coordonnées de deux étoiles de même D à peu près, observées à quelques minutes d'intervalle, l'une au N., l'autre au S.; que la différence de ces coordonnées, au contraire, double ces deux nutations en éliminant les autres: avantages bien précieux que n'offrent pas les formules relatives à l'axe instantané.

Si Oppolzer avait pû prévoir les modifications que l'introduction des forces perturbatrices apportait à ses formules si simples $\Delta\theta_1 = 0$, $\Delta\psi_1 = 0$, il est plus que probable qu'il eût renoncé à substituer le système de l'axe instantané à celui des axes principaux, qu'il a conservés, du reste, dans la définition de l'heure, ce que n'ont pas fait ceux qui l'ont suivi.

Cette définition de l'heure, base fondamentale de l'astronomie, doit être telle que l'heure soit, au même instant, la même en tous lieux, et croisse uniformément avec le temps. Et une telle définition est impossible dans le système de l'axe instantané.

Elle n'existe que dans le système des axes principaux.

Nous n'avons pas à nous occuper des formules usuelles U), qui sont incorrectes.

Si nous comparons les formules correctes I) et L), il nous semble que, même en pratique, la comparaison est toute à l'avantage de ces dernières. Dans les unes comme dans les autres, γ et Γ doivent être déterminés empiriquement. Et ce sera d'autant plus long et plus difficile qu'il existe en réalité deux nutations initiales, l'eulérienne à période de 305 j., la chandlérienne à période de 431 j., comme nous allons le démontrer ci-dessous.

Mais les formules L) ont le grand avantage de permettre la détermination de ces quantités en éliminant toutes les autres variations (nutation et aberration) et c'est une raison de plus pour y revenir.

AR. U) $\Delta\alpha_1 = 0.$

I) $\Delta\alpha_1 = c \sin(\Gamma + l + \alpha)\{\cot\theta \cos(\Gamma + l + \alpha) - tg\,\delta_1 \sin(\Gamma + l)\}$

L) $\Delta\alpha = \pm\gamma\{-\cot\theta\cos(\Gamma + l + \alpha) + tg\,\delta\sin(\Gamma + l)\}.$

D. U) $\Delta\delta_1 = 0.$

I) $\Delta\delta_1 = c\sin(\Gamma + L + \alpha)\cos(\Gamma + l)$

L) $\Delta\delta = \mp\gamma\cos(\Gamma + l).$

Lat^de^. U) $\Phi_1 = \Phi_m + \gamma\cos(\Gamma + l).$

I) $\Phi_1 = \Phi_m + \gamma\cos(\Gamma + l) - c\sin(\Gamma + l + \alpha)\cos(\Gamma + l).$

L) $\Phi = \Phi_m.$

H^re^ U) $\tau_1 = \tau_0 + nt.$

I) $\tau_1 = \tau_0 + nt - tg\,\Phi_1\{\gamma\sin(\Gamma + l) + c\sin(\Gamma + l + \alpha)\}.$

L) $\tau = \tau_0 + nt.$*

7. S'il est une question d'un intérêt capital pour l'astronomie de précision, c'est bien celle de la nutation initiale. Les travaux de Chandler lui ont fait faire un pas de géant par la découverte d'une période de 431 j.

Deux illustres géomètres ont cherché à expliquer comment la période chandlérienne de 305 j., calculée pour une Terre rigide, s'est transformée en celle de 431 j.; l'un en considérant que ce n'est pas pour la Terre entière, mais pour son écorce, qu'on doit calculer la période; l'autre en ayant égard au renflement équatorial occasionné par la force centrifuge.

Leurs raisonnements seraient irréprochables si la période de 305 j. était déduite des moments connus C et A d'une Terre rigide.

Mais cette période a été déduite des constantes de la précession et de la nutation déterminées empiriquement pour la Terre (ou l'écorce terrestre) dans son état actuel, c'est-à-dire ayant subi l'effet de la force centrifuge.

* *Revision des Constantes de l'Astronomie stellaire*, p. 93.

Là n'est donc pas l'explication de la période de 431 j. qui existe indubitablement, mais qui ne s'est pas substituée à celle de 305 j.

Je me propose de démontrer que pour l'écorce il existe deux termes à constantes arbitraires ; la période de l'un est de 305 j., celle de l'autre doit être déterminée empiriquement.*

8. En désignant par M_x, M_y les moments des actions de l'écorce sur le noyau dans les deux plans perpendiculaires à x et à y, par A et C, A′ et C′ les moments principaux du noyau et de l'écorce dans un plan perpendiculaire à l'équateur et dans ce dernier plan, B et B′ étant supposés égaux à A et A′ ; par P et Q les moments des forces perturbatrices perpendiculaires aux axes x et y, par p, q, n les vitesses angulaires d'un point du noyau, par $p+\delta p$, $q+\delta q$, n celles d'un point de l'écorce qu'on supposera sur le prolongement du rayon du premier, les centres de gravité du noyau et de l'écorce étant censés coïncider ; les équations d'Euler s'écriront, pour le noyau

I.
$$A\frac{dp}{dt} = -(C-A)nq+P+M_x,$$
$$A\frac{dq}{dt} = (C-A)np+Q+M_y\,;$$

et pour l'écorce :

II.
$$A'\frac{d(p+\delta p)}{dt} = -(C'-A')n(q+\delta q)+P-M_x,$$
$$A'\frac{d(q+\delta q)}{dt} = (C'-A')n(p+\delta p)+Q-M_y.$$

Nous avons ainsi quatre équations pour déterminer p, q, δp, δq.

9. En négligeant, dans une première approximation, $A'\delta p$ et $A'\delta q$ vis-à-vis de Ap et de Aq, et faisant $A+A'=2A''$, $C+C'=2C''$, la somme des équations précédentes, prises deux à deux, donnera

III.
$$A''\frac{dp}{dt} = -(C''-A'')nq+P,$$
$$A''\frac{dq}{dt} = (C''-A'')np+Q.$$

* J'ai trouvé ces deux nutations initiales dans ma *Théorie du Mouvement de Rotation de l'Ecorce solide du Globe*, 1898. On a contesté la validité de ma démonstration. J'espère que la suivante ne donnera prise à aucune objection. J'ajouterai que j'ai trouvé en plus, pour l'écorce, un terme de nutation *générale* d'une période de 431 j. également ; il n'en sera pas question dans la présente analyse sommaire.

Ne nous occupant que des constantes arbitraires, nous aurons, en faisant

$$\frac{C''-A''}{A''}=\mu\ ;$$

IV. $$p=\gamma_1 \cos(n\mu t-\sigma),\ q=\gamma_1 \sin(n\mu t-\sigma).$$

La différence des équations I. et II. prises deux à deux donne, en admettant provisoirement que $\frac{C'}{A'}=\frac{C}{A}$.

V. $$\frac{d\delta p}{dt}=-\frac{C'-A'}{A'}n\delta q-M_x\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{A'}\right),$$

$$\frac{d\delta q}{dt}=\frac{C'-A'}{A'}n\delta p-M_y\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{A'}\right).$$

Quant aux constantes arbitraires, on tirera de ces équations, en faisant

$$\frac{C'-A'}{A'}=\mu'\ ;$$

VI. $$\delta p=\gamma_1' \cos(n\mu' t-\sigma'),\ \delta q=\gamma_1' \sin(n\mu' t-\sigma').$$

10. Les termes dépendants des constantes arbitraires dans les expressions des vitesses angulaires $p'=p+\delta p$, $q'=q+\delta q$ de l'écorce seront donc

VII. $$p'=\gamma_1 \cos(n\mu t-\sigma)+\gamma_1' \cos(n\mu' t-\sigma'),$$

$$q'=\gamma_1 \sin(n\mu t-\sigma)+\gamma_1' \sin(n\mu' t-\sigma').$$

$\mu=\frac{C''-A''}{A''}$ provient des équations III. qui sont identiquement les mêmes que celles du mouvement de la Terre solide.

La période du premier terme des deux équations VII. est donc de 305 j. environ.*

Mais $\mu'=\frac{C'-A'}{A'}$ dépend des moments d'inertie de l'écorce, qui nous sont absolument inconnus. L'empirisme seul peut le déterminer.

Et puisque M. Chandler a trouvé une période manifeste de 431 j., nous avons admis que $\frac{C'-A'}{A'}=\frac{1}{431}$.

Il existe donc pour l'écorce terrestre deux nutations initiales, l'une eulérienne, l'autre chandlérienne.

* Je dis environ parce que j'ai négligé $A'\delta p$ vis-à-vis de Ap.

11. J'en ai constaté l'existence dans de longues séries d'observations. L'amplitude des variations dans les latitudes de Greenwich de 1880 à 1891, réduites par MM. Thackeray et Turner, est de 1″·15.* En en faisant les sommes à 5 et à 7 mois de distance, elle a été réduite respectivement à 0″·77 et à 0″·845.

La série des latitudes de Poulkova, publiée par M. Ivanof, nous a conduit à une période de 430 j. environ pour la nutation chandlérienne, de 290 j. pour l'eulérienne.†

Or, et j'insiste sur ce fait qui démontre empiriquement l'influence, niée par les astronomes, de la nutation initiale en AR′, *j'ai déduit de la comparaison des observations de Struve en AR* (1824) avec celles de Lindhagen en AR également et de Peters en D (1843),‡

304·8 j. et 318·6 j. pour la période eulérienne,

447·2 j. et 460·3 j. pour la période chandlérienne.§

Les coefficients que j'ai trouvés par la série de M. Ivanof sont

chandlérien	eulérien	annuel
0″·13	0″·09	0″·08

D'après M. Chandler ils seraient

0″·16	0	0″·11

La valeur trop forte de ses deux coefficients provient de la négligence de la nutation eulérienne.

Il nous semble nécessaire que ces coefficients, ainsi que les deux périodes eulérienne et chandlérienne, soient déterminés à nouveau, puisqu'il n'a jamais été tenu compte que de l'une des deux seulement dans les recherches sur la variation des latitudes.

* *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, novembre 1898.

† *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, avril 1900.

‡ Vérification pratique des formules du mouvement de rotation de l'écorce terrestre (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, octobre 1899).

§ Les observations de Struve m'ont conduit à une période de 336 5 j. intermédiaire entre celles de 305 et de 430 j. et à une constante = 0″·08 environ (*Revision des Constantes de l'Astronomie stellaire*, p. 13). Celles de Wagner (qui à fait usage des formules U), quoiqu'elles soient très précises, ont donné pour γ une valeur tout à fait insignifiante 0″·01, d'accord, du reste, avec les formules de réduction incorrectes dont il a fait usage (*Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique*, 1890, p. 302).

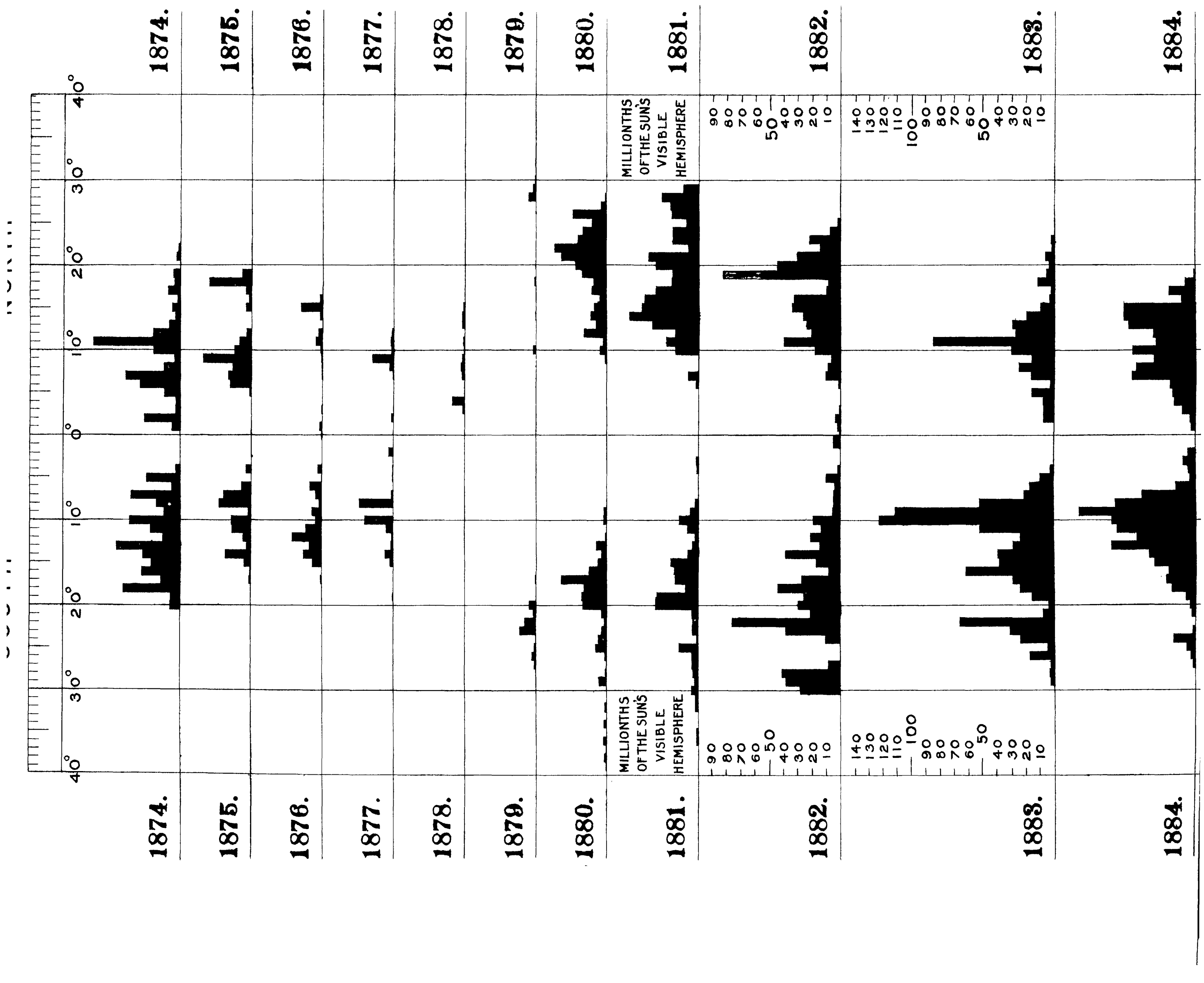
Mean Daily Area of Sun-spots for each Degree of Solar Latitude for each Year from 1874 to 1902 as measured on Photographs at the Royal Observatory, Greenwich.

(*Communicated by the Astronomer Royal.*)

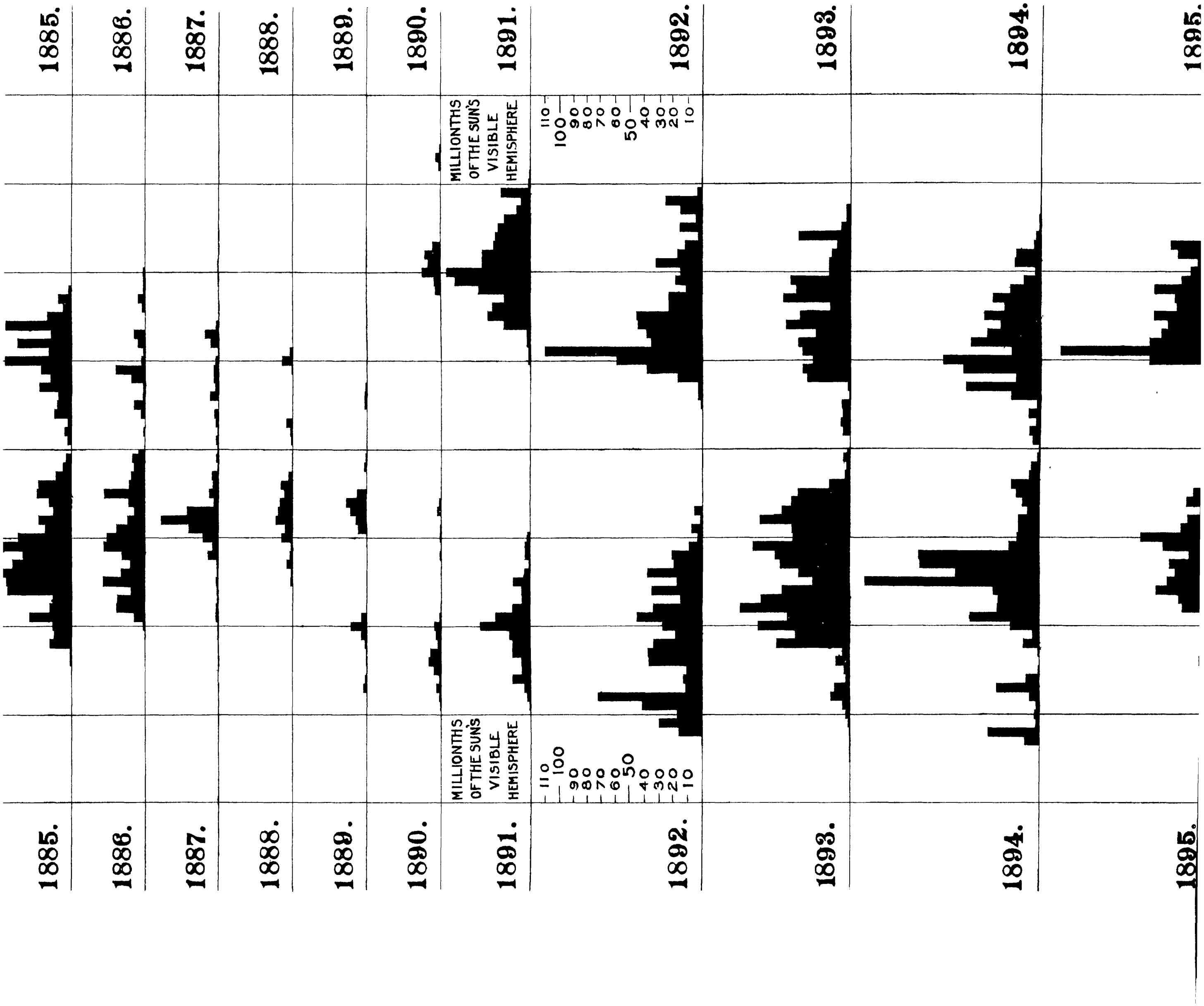
The following paper is an extension of one under a corresponding title communicated to the Royal Astronomical Society in November 1889 and printed in the *Monthly Notices*, vol. l. pp. 10, 11. The table which follows has been formed by taking out the total areas of whole spots as expressed in millionths of the Sun's visible hemisphere for each degree of solar latitude for each year and dividing these by the number of days of observation to give the mean daily area. Plate 15 presents these mean daily areas in graphical form, mean daily areas under 0·7 being omitted. In apportioning the different spots to their respective latitudes the following rule has been observed. If the heliographic latitude of the centre of any single spot, or group of spots when measured as one, showed °·5 or any higher figure in the decimal place, the entire area of the spot was taken as belonging to the next higher whole degree of latitude. If it showed °·4 or any lower figure in the decimal place the entire area of the spot was taken as belonging to the degree of latitude indicated by the integral part of the number. Thus a spot at latitude 7°·5 was taken as wholly belonging to latitude 8°, but one at 7°·4 to latitude 7°.

The diagram and the tables bring out clearly several peculiarities of the distribution of spots. First of all for the period in question, viz. the twenty-nine years from 1874 to 1902 inclusive, spots in a higher latitude than 33° were at all times rare, and when seen were never large or long-lived. Taking them as a class by themselves they were seen irregularly, appearing at times which did not seem to bear any fixed relation to any one of the four chief stages of the sun-spot cycle—minimum, increase, maximum, and decline. Omitting these spots in very high latitudes—a term which would cover a zone 10° wide in each hemisphere, from 33° to 42°, for no spots were observed in a latitude greater than 42°—the years of maximum, 1883 and 1893, showed spots in practically every latitude between 30° N. and 30° S., and they were numerous from about 8° to 24° in both hemispheres. In the years following the maximum a marked tendency was shown for the spots to appear in lower latitudes. Thus in the periods of decline, 1885–8 and 1898–9, and in the corresponding period, 1874–6, of the preceding cycle, 22° was generally the highest latitude shown. In 1876, 1888, and 1899,

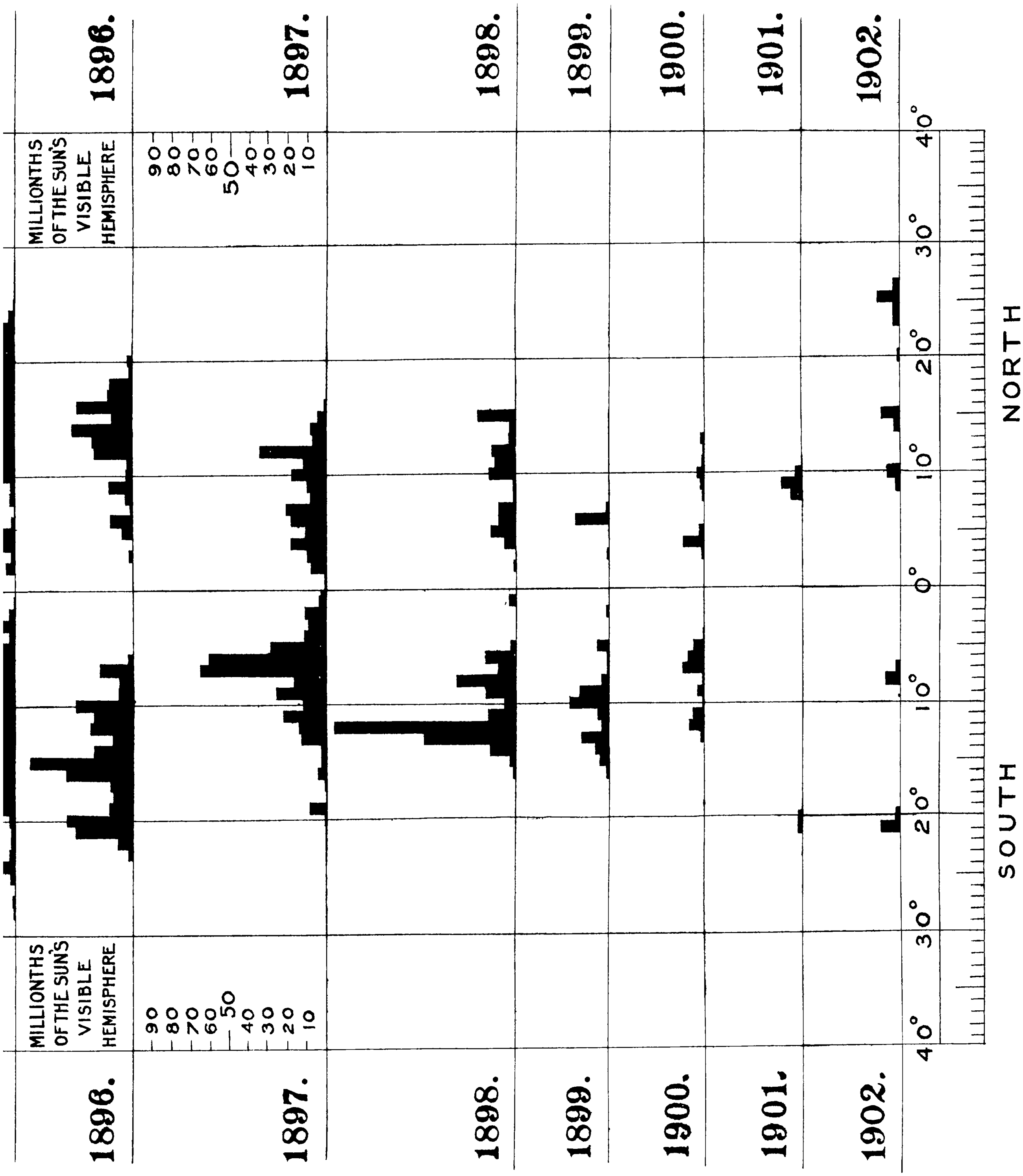
MEAN DAILY AREAS OF SUN-SPOTS FOR EACH DEGREE OF



OLAR LATITUDE FOR EACH YEAR FROM 1874 TO 1902, AS MEASURED ON PHOTOGRAPHS AT THE ROYAL OBSERVATORY, (



iREENWICH.


1896.
1897.
1898.
1899.
1900.
1901.
1902.
MILLIONTHS OF THE SUN'S VISIBLE HEMISPHERE
90
80
70
60
50
40
30
20
10
40°
30°
20°
10°
0°
NORTH
SOUTH