This page intentionally left blank.

VI. — *Exposition nouvelle des principes du calcul différentiel et du calcul intégral,*

PAR

J. B. BRASSEUR.

AVANT-PROPOS.

Notre intention, en écrivant cet avant-propos, n'est pas de faire l'histoire du calcul différentiel et du calcul intégral, ni d'exposer les progrès que cette immense découverte a fait faire à toutes les sciences auxquelles s'applique l'analyse mathématique; nous voulons seulement essayer d'analyser brièvement les différents points de vue sous lesquels on peut envisager ces calculs, et montrer en quoi le nouveau point de vue, découvert par Brasseur, diffère de tous les précédents.

Comme il est des auteurs qui veulent retrouver le germe du calcul différentiel jusque dans la méthode d'exhaustion des anciens, nous citerons les principaux géomètres qu'on peut regarder comme ayant contribué à éveiller cette nouvelle idée, et nous indiquerons en quelques mots les progrès réels qu'ils ont fait faire à la science jusqu'à l'apparition de Newton et de Leibnitz.

Kepler (1615) introduisit le premier l'idée de l'infini en mathématiques, et s'en servit avec succès pour déterminer des surfaces et des volumes de révolution qui avaient échappé à Archimède.

C'est lui également qui signala le principe des maxima et minima.

Cavalleri (1635), par sa géométrie des indivisibles, étendit beaucoup plus encore le champ de la géométrie; mais sa méthode, bien que plus rapide et plus féconde que celle d'Archimède, se ramène au fond à celle-ci, comme il le fait voir lui-même dans ses *Exercitationes mathematicæ.* Il peut être considéré comme l'un des précurseurs de la méthode des limites.

Roberval définit la tangente à une courbe : la direction du mobile qui la décrit, à chacun de ses points; et par la génération des courbes au moyen de mouvements composés, il détermine d'une manière très-aisée leurs tangentes; mais sa méthode était en défaut pour les courbes dont il ne connaissait pas une loi simple de génération.

Torricelli fait simultanément la même découverte.

Fermat pose, dans sa méthode des tangentes et des maxima et minima, le principe des infiniment petits.

Huyghens et de Sluse, en simplifiant la méthode de Fermat, trouvent la règle des dérivées.

Descartes résout les mêmes problèmes au moyen de sa méthode des indéterminées.

Mais toutes ces méthodes, analogues à celle du calcul différentiel, ne s'appliquaient en général qu'aux courbes algébriques dont l'ordonnée est une fonction rationnelle et entière de l'abscisse.

C'est à Wallis (1655) que revient l'honneur de leur avoir donné une extension plus grande par son Arithmétique des infinis, où il emploie l'interpolation pour trouver la quadrature des courbes dont l'ordonnée est une fonction irrationnelle de l'abscisse.

Enfin Barrow (1669), le maître de Newton, applique aux courbes algébriques la méthode des infiniment petits, d'une manière tellement analogue à celle du calcul différentiel, qu'il n'existe entre les deux qu'une simple différence de notations.

Jusqu'alors les recherches s'étaient bornées aux tangentes, aux maxima et minima, et aux quadratures. Wallis seul avait entrepris une rectification de courbe. Il était réservé à Newton et à Leibnitz de fonder réellement le nouveau calcul, de lui donner toute sa puissance, et de l'appliquer à toutes les sciences qui s'occupent de grandeurs continues. (1).

Ce court exposé suffit pour montrer qu'il n'a été trouvé, avant ces grands génies, aucune idée qui ne puisse se ramener à celle des infiniment petits, ou des limites, si l'on en excepte toutefois la méthode des mouvements composés de Roberval et Torricelli, qui présente plus d'analogie avec le calcul des fluxions, mais dont l'application, comme nous l'avons dit, s'était bornée à quelques cas particuliers; et quant au calcul des différences finies, dont il semblerait, au premier abord, qu'il a dû précéder le calcul différentiel, il n'a été imaginé qu'en 1715 par Taylor.

Enfin Lagrange établit, le premier, sur l'analyse finie, les règles du calcul des dérivées et du calcul inverse, qui ne sont au fond que le calcul différentiel et le calcul intégral.

Les conceptions sur lesquelles ces calculs ont été fondés jusqu'à ce jour peuvent toutes se ramener à l'une des suivantes :

1° La conception des *infiniment petits* considérés comme doués d'une existence réelle. Quoique les idées de Leibnitz aient surtout servi à la propager sur le continent, il résulte clairement

(1) Il est universellement reconnu aujourd'hui que, quoique Newton ait été dès 1666 en possession de son *Calcul des Fluxions*, Leibnitz n'en avait pas eu connaissance lorsqu'il inventa, en 1677, son *Calcul différentiel*.

d'un passage de ce philosophe (1) qu'il ne l'a jamais envisagée sous cette forme absurde que Fontenelle a essayé de défendre, mais que pour lui cette conception revenait, au fond, à celle des limites. Aussi, ne citons-nous que pour mémoire ce procédé commode, sans doute, mais entièrement dépourvu de rigueur.

2° La conception des *limites*, dont Newton s'était déjà servi accessoirement, et que Mac-Laurin a prise pour base de son *Traité des Fluxions*. Elle a été développée par d'Alembert, et adoptée par la plupart des analystes modernes.

3° La conception des *fluxions*, qui est tout entière l'œuvre de Newton, et qui n'a jamais été développée sur le continent, sans doute parce que l'ouvrage de Newton n'a paru qu'après sa mort, et que les frères Bernoulli et l'Hôpital avaient déjà fait connaître en Allemagne et en France la méthode de Leibnitz.

Toutefois, cette conception profonde a été prise par M. Lamarle pour base de son *Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante* (2).

4° Enfin la conception des dérivées, due à Lagrange.

Il serait trop long d'exposer en détail les principes de chacune

---

(1) Sentio autem et hanc et alias (methodos) hactenùs adhibitas omnes deduci posse ex generali quodam meo dimetiendorum curvilineorum principio, quòd figura curvilinea censenda sit æquipollere polygono infinitorum laterum; undè sequitur, quidquid de tali polygono demonstrari potest, sive ita, ut nullus habeatur ad numerum laterum respectus, siveità, ut tantò magis verificetur, quantò major sumitur laterum numerus, ità ut error tandem fiat quovis dato minor; id de curvâ posse pronuntiari. (Acta erudit. 1684, p. 585.)

(2) Tout en reconnaissant le mérite avec lequel M. Lamarle a su dégager le calcul des fluxions de toute idée étrangère à celle de la génération même d'une fonction, nous n'avons pas pensé que sa méthode différât assez de celle de Newton pour la classer en dehors de celle-ci. Depuis longtemps, du reste, on avait interprété la méthode des fluxions en en rejetant toute considération de mouvement, comme on le voit par différents passages de Montucla. (V. surtout t. II, p. 369 à 375).

de ces quatre méthodes ; nous nous bornerons à en donner une idée, afin de pouvoir les comparer à la méthode de Brasseur ; et pour que la comparaison soit plus aisée, nous ne les envisagerons qu'au point de vue géométrique, quoique ce ne soit évidemment pas de là qu'il faille partir dans l'exposition du calcul.

Soit donc donnée une fonction continue y d'une variable indépendante x :

$$y = f(x);$$

le calcul différentiel a pour objet l'étude de la génération de cette fonction, c'est-à-dire de la manière continue dont elle passe d'un état à un autre. Envisagée au point de vue géométrique, supposons que

$$y = f(x)$$

soit l'équation d'une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires. Si nous donnons à x l'accroissement Δx, y prendra un accroissement correspondant :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

et nous obtiendrons un autre point de la courbe ; le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ représentera le coefficient angulaire de la droite qui unit ces deux points ; mais il s'agirait de déterminer la direction qu'a suivie le point générateur à partir du point x, y pour décrire la courbe d'une manière continue.

Dans la première méthode, on suppose que Δx devienne infiniment petit, et on le représente par dx ; Δy deviendra de même un infiniment petit dy ; et les deux points x, y et $x + dx$, $y + dy$, appartiendront à la fois à la tangente, à l'arc et à la courbe qui se confondront. Cette méthode est en contradiction avec son principe, puisque ces deux points doivent se confondre en vertu de ce principe même, et par suite la génération de la courbe par infiniment petits est impossible.

Dans la deuxième méthode, on constate qu'à mesure que Δx et Δy décroissent, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers une limite qu'il ne peut jamais atteindre; cette limite est le coefficient angulaire de la tangente, puisque cette droite peut se définir la limite des positions d'une sécante qui tourne autour d'un de ses points d'intersection de manière que l'autre se rapproche indéfiniment du premier. Cette limite se trouvera en faisant, dans l'expression du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\Delta x = 0$.

Il n'y a rien à reprocher à cette méthode, au point de vue de la rigueur, et elle est assez commode dans les applications. Toutefois, « on se demandera, sans doute, dit Lacroix, ce qu'on peut entendre par le rapport des quantités qui ont cessé d'exister » et cette objection, quoique spécieuse, se présente d'abord à l'esprit (1). Il en est une plus sérieuse à opposer à cette méthode : elle devrait commencer par montrer que c'est sur l'étude même de la limite de ce rapport que repose la génération de la fonction, et ceci nous semble assez malaisé à établir; car, pour rester dans l'exemple que nous traitons, il n'y a plus de génération si le second point vient se confondre avec le premier; à quoi tient dès-lors l'importance extrême de cette limite ? Nous pourrions ajouter que, si cette méthode donne une idée rigoureuse de la dérivée, il n'en est pas de même quant à la différentielle. On

(1) Lagrange fait également cette objection à la méthode des limites. Cette méthode, dit-il, a le grand inconvénient de considérer les quantités dans l'état où elles cessent, pour ainsi dire, d'être des quantités; car, quoiqu'on conçoive toujours bien le rapport de deux quantités, tant qu'elles demeurent finies, ce rapport n'offre plus à l'esprit une idée claire et précise, aussitôt que ces termes deviennent l'un et l'autre nuls à la fois.

écrit $\frac{dy}{dx} = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x}$: que sont dy et dx? Pas nuls apparemment; sans quoi les équations différentielles n'auraient plus de sens. Nous ne dirons pas qu'ils sont infiniment petits, ce qui n'en a pas davantage. Ils sont donc finis, mais alors le point $x + dx$, $y + dy$ cesse d'appartenir à la courbe pour passer à sa tangente, et l'on se trouve en présence de la difficulté signalée plus haut : pourquoi l'étude d'une courbe doit-elle nécessairement commencer par celle de sa tangente? Enfin, nous dirons même que la méthode des limites, envisagée sous ce dernier point de vue, c'est-à-dire en laissant dx et dy finis, ce qui est le seul point de vue rigoureux, revient au fond à celle des fluxions, à part qu'elle est beaucoup moins philosophique et moins directe.

La conception de Newton, en effet, aborde directement le problème de la génération d'une fonction. Nous la supposerons débarrassée des idées étrangères de mouvement sur lesquelles Newton l'avait fondée, et nous continuerons, dans cet exposé sommaire, à ne traiter que l'exemple géométrique proposé. Si nous nous demandons comment le point x, y engendre la courbe, il est clair que c'est en suivant une direction variable à chaque instant; pour nous former une idée claire de celle qu'il suit à un instant donné, nous supposerons que cette direction reste constante à partir de cet instant, et nous aurons la tangente à la courbe au point considéré. Or, si nous considérons deux positions successives x, y et $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ du point, la direction qu'il aurait suivie en passant en ligne droite de l'une à l'autre serait donnée par le coefficent angulaire $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, dont l'expression se compose d'une fonction de x indépendante de Δx, et d'une autre fonction de x affectée du facteur Δx. Cette direction varie donc avec l'intervalle Δx; la direction indépendante de cet intervalle est celle qui a pour coefficient angulaire le premier terme de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Si nous représentons ce premier terme par $\frac{dy}{dx}$, pour nous conformer à la notation en usage, dx et dy seront ce que Newton appelle les fluxions de x et de y ; et ces quantités, comme on le voit, peuvent être aussi grandes que l'on voudra. Comme dx est tout-à-fait arbitraire, la détermination de dy reviendra à celle du rapport $\frac{dy}{dx}$, rapport que l'on peut trouver, si l'on veut, en prenant la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, comme Newton l'a souvent fait lui-même.

Cette méthode peut s'appliquer avec la même rigueur à l'étude purement analytique des fonctions, comme à la mécanique, et part toujours de l'idée même de la génération d'une fonction continue.

Nous ne nous arrêterons pas à la méthode de Lagrange, qui a présenté à son auteur des difficultés telles dans l'application, que lui-même l'a abandonnée dans sa *Mécanique analytique* pour y substituer celle des infiniment petits.

De toutes les manières d'envisager le calcul différentiel, nous n'en connaissons pas de plus philosophique que celle de Newton. Mais elle exige, pour être bien comprise, des esprits préparés aux spéculations métaphysiques; nous avons connu en effet de bons analystes qui ne l'ont jamais saisie, quoiqu'ils eussent étudié aux meilleures sources.

La grande difficulté du calcul différentiel, c'est qu'il essaie d'analyser l'idée de continuité ; il cherche à exprimer comment une fonction passe d'une manière continue d'un état à un autre ; et c'est ce passage qui a donné naissance à l'idée contradictoire des infiniment petits, à l'idée indirecte des limites, enfin à l'idée philosophique de Newton.

Brasseur a évité cette grande difficulté; il a réussi à rendre la méthode de Lagrange, qui n'emploie que l'analyse finie, aussi commode dans les applications et aussi rigoureuse que celle des limites ou des fluxions. Nous dirons même que sa méthode a, au point de vue de l'enseignement, sur celle des fluxions l'avantage de n'exiger aucune notion métaphysique, et sur les limites, celui d'être beaucoup plus directe et de ne donner prise à aucune attaque, même spécieuse.

Au lieu d'analyser l'idée de continuité, il étudie deux états successifs d'une fonction continue; et la continuité n'intervient qu'en ce que la différence entre ces deux états peut devenir aussi petite que l'on voudra, sans qu'elle devienne jamais nulle, comme il semble que cela a lieu dans les limites, ni infiniment petite dans l'ancienne signification du mot, signification tout simplement absurde.

Si nous reprenons notre exemple, en appelant $f'(x)$ la dérivée de $y = f(x)$, nous aurons, suivant la conception des fluxions (ou suivant celle des limites en y regardant dx et dy comme finis) :

$$dy = f'(x)\,dx,$$

où $x + dx$ et $y + dy$ sont les coordonnées du point pris sur la tangente en x, y à la courbe, et correspondant au point de la courbe qui a pour abscisse $x + dx$ et pour ordonnée $y + \Delta y$, Δy étant nécessairement différent en général de dy.

Brasseur écrit, au contraire, immédiatement :

$$\Delta y = f'(x)\,dx + \text{etc.}$$

où $x + dx$, $y + \Delta y$ sont les coordonnées d'un second point de la courbe. On le voit, il étudie deux états successifs quelconques de la fonction y : celui qui répond à la valeur x de la variable, et celui qui répond à la valeur $x + dx$, dx étant arbitraire, et pouvant, en vertu de la continuité, devenir plus petit que toute quantité donnée.

Pour les commençants, c'est là un avantage très-précieux. Dans les applications, en effet, les différentielles, considérées au point de vue des limites, ou les fluxions paraissent se former par des procédés essentiellement différents pour chaque fonction. C'est ainsi que la différentielle ou la fluxion de l'arc d'une courbe plane se compte sur la tangente, tandis que celle de l'aire se prend en transportant l'ordonnée, prise comme constante, parallèlement à elle-même, etc. Dans la méthode de Brasseur, au contraire, le procédé est toujours uniforme, il forme la *différence* de l'arc, de l'aire, etc., en leur donnant un accroissement arbitraire; si nous reprenons en effet l'équation

$$\Delta y = f'(x)\, dx + \text{etc.}$$

nous voyons que Δy est l'accroissement de la fonction correspondant à l'accroissement quelconque dx de la variable; or, comme on le verra dans l'*Exposition*, il n'est nécessaire dans les applications que de connaître le premier terme $f'(x)\, dx$ du développement, terme qui s'appelle la *différentielle* de y; et la connaissance de ce seul terme permet de remonter à la fonction y sans qu'il soit nécessaire d'écrire le reste du développement.

La lucidité avec laquelle Brasseur a développé cette idée nous dispense d'entrer, à ce sujet, dans de plus grands détails; nous en avons été vivement frappé, et nous sommes convaincu que celui qui lira sans préjugé cette *Exposition* devra reconnaître qu'il n'en est pas de plus simple et de plus rigoureuse à la fois; nous ajouterons même qu'aucune des méthodes connues n'a donné d'une manière bien nette la signification de l'équation différentielle d'une courbe, signification que Brasseur met dans tout son jour (1).

Si, cherchant à nous rappeler les entretiens dont nous avons eu le bonheur de jouir avec ce géomètre éminent, nous nous demandons quelle est la voie par laquelle il est arrivé à cette conception, il nous semble que nous pourrons en indiquer au moins les principaux jalons, et donner quelque apaisement à la curiosité légitime de ceux qu'intéresse le développement de la science.

Son esprit, d'une rigueur toute géométrique, n'avait pas été satisfait des différentes méthodes par lesquelles on avait cherché à établir l'exactitude du calcul différentiel.

Profondément philosophe, comme le témoignent tous ses travaux, il allait toujours au fond des choses, et il s'était dit que, si l'invention du calcul différentiel a sa source dans une idée métaphysique, le calcul en lui-même doit pouvoir être débarrassé de toute notion étrangère. Il nous répétait souvent qu'il n'y avait pour lui qu'une théorie parfaitement irréprochable, sous ce rapport, en calcul différentiel, celle des maxima et minima. Aussi avait-il fait table rase, ce sont ses propres expressions, des idées qui lui étaient venues du dehors, pour fonder la science sur de toutes nouvelles bases. Cette science lui apparut alors comme dédoublée : une partie, le calcul pur, ou l'algorithmie, avait été établie par Lagrange sur l'algèbre seule ; cette partie ne laissait rien à désirer ; l'autre était à refaire : il s'agissait de trouver, dans les applications de ce calcul, la signification précise des opérations qu'on y effectue ; ça été pour lui le sujet de longues

---

(1) Pour ne pas anticiper, nous renverrons à la note que nous avons ajoutée à l'article premier des applications géométriques.

méditations ; il a été frappé du terme *d'équations imparfaites* dont s'est servi Carnot pour désigner les équations différentielles, et il a vu dans cette idée un premier pas vers la vérité. Il ne s'agissait plus dès lors que d'établir clairement ce que Carnot n'avait fait qu'entrevoir d'une manière assez vague, c'est-à-dire de rétablir l'exactitude de ces équations imparfaites. Habitué à méditer sur les rapports des sciences entre elles, il avait vu une grande analogie entre le développement de l'accroissement d'une fonction suivant les puissances croissantes de l'accroissement de la variable, et les fractions périodiques : celles-ci, en effet, ne peuvent jamais s'écrire que sous forme imparfaite, et cette forme, toutefois, permet de retrouver exactement la génératrice. C'est cette idée simple et lumineuse qu'il a fait passer dans le calcul différentiel ; l'exactitude de ce calcul ne provient donc pas, comme le croyait Carnot, de ce qu'il y a compensation d'erreurs dans les termes qu'on néglige, mais au contraire de ce qu'on sous-entend simplement ces termes au lieu de les négliger.

La nouvelle idée sur laquelle devaient se fonder les applications du calcul était dès lors trouvée : il fallait maintenant ramener toutes les questions d'application à une méthode uniforme.

Cette méthode repose entièrement sur quelques principes fort simples, relatifs surtout aux indéterminées, et se rapprochant pour la forme de ceux de la méthode des limites. Cependant, Brasseur a eu soin d'éviter de tomber, soit dans cette méthode, soit dans celle des infiniment petits.

Il est un de ces principes surtout auquel il attachait la plus grande importance, et qui est peut-être le germe de sa méthode : c'est le principe VI, dont il s'est servi pour démontrer tous les théorèmes de géométrie pour lesquels on a recouru successivement à la méthode d'exhaustion, à la réduction à l'absurde, aux limites et aux infiniment petits. Nous avons trouvé dans ses manuscrits les développements de ce principe et de ses applications, et nous les avons insérés en appendice à la suite de *l'Exposition.*

Nous sera-t-il permis d'entrer dans quelques détails historiques, si l'on peut ainsi dire, sur la publication de cet ouvrage, détails qui nous permettront, du reste, d'expliquer les quelques légères modifications que nous avons cru devoir lui faire subir.

Brasseur avait conçu son idée dès 1829. Il étudiait alors à Paris. Un jour il exposa à un célèbre professeur d'analyse ce qu'il entendait par infiniment petit (1), et celui-ci lui répondit que telle était aussi sa manière de voir; Brasseur craignit alors que cet analyste n'eût d'un bout à l'autre les idées mêmes qu'il lui développerait, et se proposa de se taire.

Pendant de longues années il médita son ouvrage. Feu M. Pagani, l'un de nos meilleurs analystes, lui conseillant un jour de publier, Brasseur lui communiqua son manuscrit, que Pagani approuva et désira voir imprimer dans les Mémoires de l'Académie. Mais ce n'était là qu'un premier jet dont l'auteur se proposait alors de faire sortir un traité complet de calcul différentiel et intégral. Jamais Pagani n'a rien laissé transpirer de son secret, et Brasseur, préoccupé de ses découvertes en géométrie supérieure, l'ensevelit de nouveau pour longtemps. Une circonstance peu connue explique ce silence presque absolu qu'il a gardé sur sa découverte : il existe telle édition récente d'un ouvrage admirable à laquelle il a contribué plus que tout autre peut-être, et qui ne porte cependant pas son nom.

Les manuscrits des différents chapitres qui forment le présent ouvrage sont tous d'une main différente; ayant une grande peine

---

(1) Il a remplacé depuis lors cette expression par celle *d'indéfiniment petit*, qui a l'avantage de ne donner lieu à aucune confusion.

matérielle à écrire, il se faisait aider par ceux de ses élèves en qui il avait le plus de confiance, et il n'était pas bien sûr qu'involontairement peut-être il ne fût échappé à l'un d'eux un mot qui pouvait mettre un analyste sur la voie.

Nous l'avons vu se repentir plus d'une fois de n'avoir pas publié sa découverte, lorsque l'apparition d'un nouveau traité de calcul différentiel lui faisait craindre que l'auteur n'eût deviné son idée à demi-mot; et nous saisissions toutes les occasions pour l'engager vivement à la mettre au jour.

Ce n'est que cette année toutefois qu'il se décida à nous la développer tout entière, en nous priant de lui faire les observations que sa méthode pourrait nous suggérer.

Il en est une capitale que nous lui fîmes relativement à la notation et à la terminologie; le manuscrit porte même des indications qui se rapportent à cette observation. La maladie l'empêcha malheureusement de donner suite à l'exécution de son projet, et il nous a été impossible de savoir quel est le parti qu'il aurait pris quant aux modifications que nous lui avions proposées. Que ne lui a-t-il été donné de pouvoir mettre lui-même au jour cette œuvre qu'il avait méditée pendant quarante ans, et qu'il avait toujours réservée comme son œuvre de prédilection, ainsi qu'il le disait à Pagani! Nous eussions échappé à cette perplexité où nous nous trouvons plongé par la crainte de ne pas rendre son idée avec tous les développements que lui seul était capable de lui donner. Dans cette triste circonstance, nous avons agi sous l'inspiration de nos sentiments d'affectueuse vénération, ainsi que des conseils d'hommes éclairés, dévoués comme nous à sa mémoire; et nous avons apporté au texte quelques modifications et quelques additions qui nous ont été indiquées et que nous avons crues utiles au succès de l'ouvrage. Nous avons fait en sorte toutefois que le lecteur pût avec facilité restituer le texte primitif: toutes les modifications que nous avons faites sont entre parenthèses, toutes les additions et les notes destinées à éclaircir le texte sont de nous.

La seule modification un peu importante, comme nous l'avons dit, est relative à la notation et à la terminologie; nous allons l'expliquer en quelques mots.

Brasseur, en donnant à la variable x l'accroissement arbitraire dx, appelait *différentielle* l'accroissement correspondant de la fonction y, et le dénotait par dy; il posait donc :

$$y=\varphi(x);\ dy=\varphi' \cdot dx+\varphi''\frac{dx^2}{1.2}+\text{etc.}$$

et il dénotait φ', φ'', etc., qu'il appelait dérivées avec Lagrange, par

$$\left(\frac{dy}{dx}\right),\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),\ \text{etc.}$$

pour les distinguer des rapports complets

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \text{etc.}$$

Mais, comme nous le lui faisions remarquer, c'était là renverser toutes les notations et toute la terminologie adoptées depuis Leibnitz; et ce qui paraît établir que lui-même en voyait le danger, c'est que nous avons trouvé souligné, probablement de sa main, le paragraphe suivant de Carnot (1) :

« Il paraîtrait bien difficile maintenant de quitter la route qui » nous a été ouverte par ces illustres géomètres; de se rompre à

(1) *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, p. 207, § 166.

» une nouvelle manière de voir, à une nouvelle notation, à de » nouvelles locutions. »

Aussi n'avons-nous pas voulu exposer son œuvre à une critique (1) qu'il eût sans doute évitée lui-même au moyen d'une légère modification de forme, en écrivant comme nous l'avons fait :

$$\Delta y = \varphi' dx + \varphi'' dx^2 + \cdots$$

$$\frac{\Delta y}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{1.x} + \cdots$$

On comprend aisément pourquoi nous avons laissé partout dx, sans le changer en Δx; cette modification non-seulement eût été superflue, mais eût même contribué à allonger l'exposition et à la rendre moins claire par cela seul.

Il ne nous reste plus qu'à expliquer pourquoi cette œuvre a paru dans les Mémoires de la Société royale des sciences de Liége. Brasseur avait d'abord eu l'intention de la publier à la suite de son *Précis de Mécanique appliquée*. Il nous fit l'honneur de nous con-

---

(1) Nous pourrions citer à l'appui de notre manière de voir celle de Lacroix, qui a analysé avec beaucoup de sagacité les différentes notations successivement proposées en calcul différentiel ; nous nous bornerons à extraire de son grand traité les passages suivants :

« Je demande la permission de faire observer que c'est un principe avoué de » tout le monde, qu'il ne faut changer les signes reçus que lorsqu'ils sont en » contradiction manifeste avec les idées qu'ils doivent représenter, ou lorsqu'on » peut les abréger notablement, ou enfin lorsqu'en les modifiant, on les rend » propres à développer de nouveaux rapports qu'on n'aurait pas aperçus sans cela.

. . . .

« Avant donc d'innover dans les signes déjà si multipliés en analyse, que l'on » veuille bien penser à l'embarras qu'éprouvent ceux qui l'étudient et qui vou» draient en embrasser l'ensemble, d'avoir sans cesse à rapprocher des formules » et des opérations analogues rendues par des caractères différents. C'est la crainte » de voir ouvrir cette nouvelle source de difficultés qui m'a engagé dans des détails sulter à ce sujet, et nous lui conseillâmes de la faire paraître dans les Mémoires de l'une de nos Sociétés savantes. Des raisons de convenance personnelle le décidèrent en faveur de la Société de Liége, et nous nous sommes fait un devoir de respecter sa volonté.

F. FOLIE.

Liége, juillet 1868.

» dont la longueur sera justifiée par l'influence que ne peut manquer d'exercer » l'homme célèbre (Lagrange) qui semblait avoir projeté une révolution à cet » égard, et l'on trouvera tout simple qu'en attendant l'époque où des progrès bien » caractérisés légitiment d'une manière incontestable l'emploi de signes nouveaux, » on tâche de défendre ceux avec lesquels la *Mécanique analytique* et la *Méca-* » *nique céleste* sont écrites. » (LACROIX, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, t. I, p. 248, n° 83).