Rapport de M. Van der Mensbrugghe.

« Je me joins à mon savant confrère M. Valerius pour déclarer qu'à défaut d'expériences de contrôle, on ne peut se prononcer d'une manière absolue sur la valeur des procédés que propose M. Delaurier d'une part pour transformer l'énergie électrique en chaleur, de l'autre pour concentrer les rayons solaires dans une enceinte de forme déterminée et convenablement protégée contre le refroidissement.

Au surplus, si je ne me trompe, l'auteur a présenté aussi ses deux Notes, ou au moins l'une d'elles, à la Société française de physique où je ne pense pas que les travaux présentés forment l'objet d'un rapport. Pour ces motifs, j'appuie les conclusions du premier commissaire. »

La Classe adopte les conclusions des rapports de ses commissaires.

Note sur l'homographie du troisième ordre; par M. C. Le Paige, professeur à l'Université de Liége.

Rapport de M. Folie.

« Dans le travail actuel, M. Le Paige s'est proposé de résoudre le problème suivant :

Une homographie du troisième ordre et du second rang étant caractérisée par un nombre suffisant de conditions, construire le troisième élément d'un terne dont on connaît deux éléments.

Le cas le plus général est celui dans lequel l'homographie est définie par sept ternes.

Après avoir classé les homographies en homographies de première, de deuxième, et de troisième espèce, l'auteur montre, par le théorème A, que l'homographie de première espèce peut toujours se ramener à une homographie de deuxième espèce.

Le théorème A et son corrélatif A′ peuvent être regardés, en un certain sens, comme analogues, pour les surfaces de troisième degré, aux théorèmes de Pascal et de Brianchon pour les coniques.

Cette première réduction obtenue, les théorèmes B et B′ permettent de remplacer l'homographie de première espèce par une involution du troisième ordre et du deuxième rang.

Les théorèmes B et B′ constituent pour les surfaces du deuxième ordre et de la deuxième classe des analogues des théorèmes de Pascal et de Brianchon, appliqués au tétragone ou au quadrilatère.

Nous nous rallions pleinement au jugement que l'auteur porte lui-même, dans les lignes qui suivent, sur les propriétés nouvelles qu'il a découvertes :

« Nous pouvons faire observer que ces théorèmes sont » précisément ceux qui se prêtent le mieux aux construc- » tions des coniques, puisqu'ils sont applicables même » lorsque quatre des cinq éléments donnés, points ou tan- » gentes, sont remplacés par deux couples imaginaires.

» Le théorème B est susceptible de prendre une forme » qui montre mieux encore son analogie avec le théorème » correspondant pour les coniques.

» Si nous nous reportons à la figure 1, nous voyons que

» SΩ et Λ sont deux droites conjuguées par rapport à la » quadrique.

» En effet, le point S est le pôle de $\delta\delta'\delta''$. De plus, le » plan $x_1y_1z_1$ passe par Λ. Les plans tangents à la sur- » face en x_1, y_1, z_1 sont $x_1y_2z_2$; $y_1x_2z_2$, $z_1x_2y_2$ qui se » coupent deux à deux suivant les droites $z_2\delta$, $x_2\delta'$, $y_2\delta''$. » Or ces trois droites s'appuyant sur SΩ, le pôle de $x_1y_1z_1$ » est sur cette droite.

» Nous pourrons donc énoncer le théorème B de la » manière suivante :

» *Soient* l *et* Λ *deux droites conjuguées par rapport à* » *une quadrique. Si par un point de* l *on mène trois plans* » *tangents à la surface, les arêtes du trièdre ainsi formé* » *sont coupées par tous les plans tangents en des ternes de* » *points qui, joints à* Λ, *donnent une* I^3_2.

» Pour les coniques, on a l'énoncé suivant :

» *Soient* p *et* ϖ *deux points conjugués par rapport à* » *une conique; par* p *menons deux tangentes à la courbe.* » *Les côtés du bilatère ainsi formé sont coupés par les* » *tangentes à la courbe et des couples de points qui, joints* » *à* ϖ *donnent une* I_1^2.

» On pourrait naturellement présenter sous une forme » analogue, le théorème B′ et celui qui lui correspond » dans le plan.

» Nous noterons, en passant, que l'hexagone gauche » $x_1y_2z_1x_2y_1z_2x_1$ est celui qui a été considéré par Dande- » lin, sur l'hyperboloïde seulement, et dont il a fait con- » naître les propriétés (*).

(*) *Mémoire sur l'hyperboloïde de révolution et sur les hexagones de Pascal et de M. Brianchon*, Mém. de l'Acad., t. III, 1825.

» Notre savant collègue, M. Folie, a étendu les pro-
» priétés découvertes par Dandelin aux surfaces quel-
» conques du second ordre (*), et en généralisant dans le
» même sens, aux surfaces des ordres supérieurs.

» Les théorèmes que nous invoquons ici sont donc pré-
» cisément ceux qui constituent, d'après les savants géo-
» mètres que nous venons de citer, l'extension aux surfaces
» des ordres supérieurs.

» Nous sommes heureux de signaler ce rapprochement
» entre les théories que nous exposons en ce moment et
» les découvertes de deux géomètres de l'*École belge*.

» On voit, par là, combien il est utile de considérer les
» différents aspects sous lesquels peut se présenter un
» théorème.

» En effet, en interprétant, d'une certaine manière, le
» théorème de Pascal, on arrive au théorème énoncé par
» Dandelin.

» D'un autre côté, nous sommes conduit, on le voit, à
» un théorème tout différent, qui correspond à un cas par-
» ticulier de cette proposition.

» Ce même cas particulier a été interprété encore,
» d'une façon très-différente, par M. P. Serret, dans son
» beau livre : *Géométrie de Direction*, et le remarquable
» théorème qu'il énonce à la fin de cet ouvrage (**) corres-
» pond, en effet, à une autre manière d'entendre le théo-
» rème de Pascal. »

A l'aide des propriétés dont nous venons de parler, on

(*) *Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne*, p. 87.
(**) P. 517.

a une première solution du problème posé, et en même temps une construction nouvelle et fort élégante de la surface du deuxième ordre et de la deuxième classe, déterminée par neuf points ou neuf plans, ainsi que des surfaces du troisième ordre et de la troisième classe, déterminées par trois droites, et sept points ou sept plans.

M. Le Paige aborde ensuite la solution du problème dans trois cas particuliers où l'homographie est déterminée par :

1° Trois couples neutres et un terne;

2° Deux couples neutres et trois ternes;

3° Un couple neutre et cinq ternes.

Le premier cas est résolu immédiatement, le deuxième se ramène au premier et le troisième au deuxième.

Les cas particuliers deuxième et troisième reviennent à la construction d'une surface du deuxième degré lorsque l'on se donne : 1° cinq points et les deux génératrices passant par un de ces points ; 2° sept points et une génératrice passant par un de ces points.

De là se déduit une autre construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points, et par suite une deuxième solution du problème général.

M. Le Paige fait voir ensuite que l'homographie du troisième ordre et du premier rang peut être représentée par une courbe gauche O_6 de genre 1, complétant l'intersection de deux surfaces du troisième ordre ayant trois droites communes, ou par la développable circonscrite à deux quadriques, ou, ce qui revient au même, par une courbe gauche O_4 de première espèce.

Enfin, comme cas particulier, il arrive à la détermination d'une cubique plane dont on se donne neuf points.

Comme on le voit par la brève analyse qui précède, M. Le Paige, bien connu déjà par ses beaux travaux sur l'analyse et la géométrie modernes, nous expose, dans cette note, des découvertes faites dans un champ beaucoup plus exploré, celui même des surfaces du deuxième ordre, découvertes qui, malgré leur caractère particulier, n'en sont pas moins, de tous les analogues connus du fameux théorème de Pascal, ceux qui se prêtent le mieux à la construction de la surface.

Ainsi que le dit l'auteur, ce n'est, pour ainsi dire, qu'en passant, qu'il s'est occupé, dans son travail, de cette construction.

Il nous laisse espérer qu'il y reviendra par la suite; et nous ne doutons pas que la construction, qu'il fera connaître alors, ne l'emporte de beaucoup en simplicité sur toutes les constructions connues.

Nous sommes persuadé que l'Académie accueillera dans son *Bulletin* le travail actuel avec le même empressement que les précédents, et qu'elle votera à son auteur des remercîments bien mérités. »

La Classe a adopté ces conclusions, auxquelles s'est rallié M. E. Catalan, second commissaire.