

l'Ouro Preto jusqu'à cet endroit, par Franc. de Paula d'Oliveira, ingénieur des mines.

4° Voyage d'études métallurgiques dans le centre de la province de Minas, par Joaquim Candido da Costa Seno, ingénieur des mines.

5° Analyses faites au laboratoire de chimie et de docimasia de l'École d'Ouro Preto.

6° Statistique de la production de l'or dans la province de Minas Geraes, en 1879.

Au texte sont jointes trois cartes géologiques et deux planches de plans et coupes.

On voit que ces documents ne concernent pas seulement l'industrie minérale du Brésil, mais qu'ils sont de nature à intéresser les savants de tous les pays. Nous espérons que le succès couronnera les efforts du savant directeur de l'École d'Ouro Preto. »

RAPPORTS.

Exposition de la méthode de Wronski, pour la résolution des problèmes de mécanique céleste; mémoire par M. C. Lagrange.

Rapport de M. Folie.

« M. Lagrange, astronome à l'Observatoire royal, à qui nos publications doivent déjà de remarquables travaux sur la cause originelle du mouvement de rotation des corps célestes, a eu le courage d'entreprendre une œuvre qui a

rebuté, jusqu'aujourd'hui, tous les analystes, ou qui a résisté à leurs efforts.

Il n'est personne qui n'ait entendu parler des travaux de Wronski; on sait qu'il a attaqué avec virulence tous les géomètres de son époque, et qu'il leur a porté un défi, prétendant résoudre toutes les questions que ceux-ci avaient réputées insolubles; je citerai, par exemple, sa prétendue solution de l'équation du 5^e degré et de l'expression finie de π .

Malheureusement, ses solutions reposaient sur une métaphysique obscure, et leurs résultats étaient compliqués si souvent de transcendantes, qui en rendaient la simplicité tout à fait illusoire, qu'il passa tout au moins pour un rêveur, et qu'on ne songea pas, de longtemps, à étudier ses travaux.

Il y avait cependant là une mine fort riche à exploiter, et quelques-uns ont tenté de le faire de nos jours, mais avec assez peu de succès.

En ce qui concerne la mécanique céleste en particulier, c'est à M. Yvon Villarceau surtout que revient l'honneur d'avoir appelé l'attention des savants sur les résultats obtenus par Wronski, résultats dont il a contrôlé l'exactitude, en les vérifiant par l'application de la méthode connue de la variation des constantes arbitraires.

Ce sont peut-être aussi les notes de M. Y. Villarceau qui ont suggéré à M. Lagrange l'idée de s'attaquer de front à la mécanique céleste de Wronski, de la dégager de considérations philosophiques peu intelligibles, et d'en faire une œuvre qui fût à la portée de tous les analystes.

Tel est l'objet du mémoire que nous examinons en ce moment, et qui ne forme que la première partie du travail,

dans lequel M. Lagrange compte exposer en entier la méthode du profond géomètre polonais.

Dans cette première partie, l'auteur pose les équations fondamentales du problème de la mécanique céleste, suivant les idées de Wronski, mais avec un enchaînement si logique et si aisé, que l'on est tenté de se demander, après l'avoir lu, comment il se fait qu'aucun géomètre n'ait eu, je ne dirai pas l'idée (qui est certainement venue à plusieurs), mais la persévérance et la pénétration nécessaires pour établir ces équations.

Nous ne saurions mieux donner un aperçu de la méthode de Wronski, qu'en reproduisant l'analyse même qu'en fait M. Lagrange.

Cette méthode, dit-il, diffère de celle de la variation des constantes arbitraires :

- « 1^o par une plus grande généralité; c'est-à-dire que ses
- » formules, vraies pour une trajectoire quelconque, constituent des relations concernant la dynamique générale
- » d'un point matériel, et comprennent donc la mécanique céleste comme cas particulier ;
- » 2^o par l'introduction de nouveaux paramètres variables, notamment de la vitesse moyenne, w , entre les
- » vitesses extrêmes sur la conique variable, du paramètre
- » p , de cette conique, et, surtout, de la masse centrale
- » sous l'action de laquelle elle est décrite ;
- » 3^o par un choix nouveau de coordonnées, et principalement par la considération d'une ligne fixe dans le
- » plan de l'orbite variable. »

La méthode consiste à prendre pour variables la force radiale, la force tangentielle, et la force normale au plan de l'orbite, et à passer de la relation $Gdt = -wd\varphi$, qui est l'équation différentielle d'une conique, dans le cas de

$w = c^e$, à la trajectoire réelle, dans laquelle w varie sous l'influence des forces F , T , P (radiale, tangentielle et normale).

Il serait trop long d'entrer dans le détail des procédés au moyen desquels l'auteur parvient à déduire toutes les relations cherchées, des deux principes généraux dont Wronski a fait la pierre angulaire de sa méthode.

Bornons-nous à dire que, non-seulement toutes les déductions de l'auteur sont d'une rigoureuse clarté, mais qu'il a même rectifié certaines expressions dans lesquelles Wronski avait commis des négligences de calcul.

Et il ne s'arrête pas à la simple exposition de la méthode; il la critique chemin faisant, et, tout en reconnaissant la supériorité de celle-ci sur la méthode due à Lagrange, il montre que Wronski a été plus que téméraire en affirmant qu'il avait résolu le problème des trois corps, dont cette dernière méthode était impuissante à trouver la solution.

Il fait voir également que la supériorité de la méthode du géomètre polonais réside surtout dans l'introduction d'une masse fictive variable, au lieu de la masse constante, à laquelle est due la force centripète dans les méthodes ordinaires, et que la conique décrite sous l'influence de l'attraction de cette masse fictive coïncide mieux avec la trajectoire réelle, résultat qui ne semble pas avoir été aperçu par Wronski lui-même.

Signalons enfin, d'une manière toute spéciale, entre les deux notes qui terminent cette première partie, celle dans laquelle l'auteur discute avec sagacité et justesse la prétendue *loi suprême* de Wronski, et montre que les raisonnements par lesquels ce géomètre a cherché à établir la conformité de cette *loi* avec les lois connues de la dyna-

mique, qu'il reconnaît vraies dans le cas du mouvement rectiligne, reposent sur une flagrante pétition de principe.

Nous devons même déclarer que la démonstration, citée par M. Lagrange, nous semble, pour notre part, un véritable escamotage mathématique.

Des travaux de la nature du mémoire actuel sont fort difficiles à analyser d'une manière un peu détaillée: ils renferment trop de calculs, dont il faudrait tout au moins reproduire les principaux résultats.

Mais ce qui précède suffit, pensons-nous, pour faire apprécier l'œuvre du jeune géomètre qui s'est déjà fait si avantageusement connaître.

Son travail actuel figurera dignement à côté du précédent, et avec d'autant plus d'opportunité qu'il ouvre à la mécanique céleste une voie nouvelle, au moment où les recherches originales de Gylden lui en ont également ouvert une de leur côté.

Nous avons l'honneur de proposer à la Classe de voter l'impression du travail de M. Lagrange dans ses Mémoires in-4°, ainsi que des remerciements bien mérités à l'auteur. »

Rapport de M. Van der Mensbrugge.

« Le nouveau travail de M. Lagrange me paraît digne du plus haut intérêt; en effet, comme vient de le dire le savant premier rapporteur, le jeune géomètre s'est imposé la tâche ingrate et pénible de découvrir la clef de la méthode de Wronski pour la solution des problèmes de mécanique céleste; cette méthode était rendue pour ainsi dire inabordable par les considérations philosophiques dont elle était enveloppée, par les lacunes importantes qui la déparaient,