Note sur l'extension des théories de l'involution et de l'homographie; par M. C. Le Paige.

Rapport de M. Folie.

« Dans un travail inséré au *Bulletin* d'octobre 1877, M. Le Paige a développé la notion nouvelle, qui lui est due, de $2n$ points conjugués harmoniques du n^e ordre.

Il revient, dans celui-ci, sur la condition qui exprime cette relation, et lui fait prendre diverses formes, analogues à celles qui caractérisent les points harmoniques du second ordre, au moyen de simples transformations de déterminants.

Partant, d'abord, de la condition, qu'il a donnée précédemment, de l'involution de $(n+1)n$ points, il montre qu'elle peut se réduire à la forme suivante

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} p_i(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n)\equiv 0;$$

et il interprète les constantes, pour toutes les valeurs de n depuis 1 jusque 4; au delà, l'interprétation géométrique de ces constantes ne deviendrait possible qu'en recourant aux variétés à n dimensions de Riemann.

Dans les formes mêmes qu'il trouve, il rencontre des théorèmes très-généraux, dont l'un avait été employé par Hesse, comme un nouveau mode de transformation des figures.

Il passe ensuite du cas de l'involution au cas des points

conjugués harmoniques, ce qui transforme la relation précédente en

$$p_1(x-\lambda)+p_2(x-\mu)^n+p_3(x-\nu)^n+\cdots+p_{n+1}(x-\varpi)^n\equiv 0.$$

Ces relations générales ont, naturellement, comme cas particuliers, celles qui appartiennent au second ordre.

Reprenant les invariants dont il s'était déjà occupé précédemment, et se servant de la notion du rapport anharmonique du n^e ordre, que nous lui avions communiquée il y a quelques jours, M. Le Paige trouve, très-simplement, que ce rapport s'exprime par le quotient de deux invariants.

Considérant une fonction plus générale, à laquelle il donne le nom de *fonction anharmonique*, il retrouve la notion qu'il a précédemment développée, de $2n$ points conjugués harmoniques, et fait voir qu'elle est bien la généralisation de celle de deux couples de points conjugués harmoniques.

Il cherche également quelles sont les relations analogues, pour les ordres supérieurs, à celles qui expriment, dans le second ordre, l'involution de trois couples de points au moyen de l'égalité de rapports anharmoniques; dans le développement des calculs, il se borne à la considération du troisième ordre, en faisant observer que la même marche est tout à fait applicable aux ordres supérieurs; et il trouve des relations qui offrent, en effet, une analogie complète avec celles qui sont connues pour le second ordre.

Le travail se termine par des équations toutes nouvelles, et très-remarquables, de l'homographie, soit pour le second ordre, soit pour les ordres supérieurs.

M. Le Paige a montré, par tous ses travaux, combien la théorie des formes peut rendre de services à la géométrie.

Cette dernière science lui sera fort redevable dans la théorie de l'involution du n^e ordre, qui était demeurée inachevée, depuis qu'elle avait été découverte par Poncelet et appliquée par nous à l'extension des théorèmes de Pascal et de Brianchon; aujourd'hui, on peut la dire aussi complète que celle de l'involution du second ordre, grâce aux travaux de M. Le Paige, et à sa découverte des points conjugués harmoniques du n^e ordre, qui lui donne un complément indispensable; grâce un peu aussi, oserons-nous le dire, à notre notion du rapport anharmonique du n^e ordre, qui permet de rattacher à celui-ci l'involution du même ordre.

Nous proposons à la classe d'adresser à M. Le Paige des encouragements et des remercîments bien mérités, et d'ordonner l'insertion de sa note au *Bulletin.* »

La classe a adopté ces conclusions auxquelles s'est rallié M. Catalan, second commissaire.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

M. Éd. Van Beneden donne lecture d'un travail intitulé : *Contribution à l'histoire du développement embryonnaire des Téléostéens.*

L'impression de cette communication a été différée sur la demande de l'auteur, jusqu'à la prochaine séance.

Un nouveau principe de probabilités; par M. E. Catalan, Associé de l'Académie.

I.

Théorème. *La probabilité d'un événement futur ne change pas lorsque les causes dont il dépend subissent des modifications inconnues* (*).

J'ai appliqué ce théorème, et j'en ai même donné une démonstration, dans une Note insérée au *Journal de M. Liouville* (tome VI). Antérieurement, dans le célèbre *Mémoire sur l'avantage du Banquier, au jeu de trente-et-quarante,* Poisson avait recours, afin d'éviter de longs calculs, à une considération ingénieuse qui ne diffère pas, au fond, de celle qui constitue le *principe* énoncé (**);

(*) Il s'agit ici, bien entendu, de ce que certains Géomètres appellent *probabilité subjective,* et que l'on désignerait plus clairement, me semble-t-il, sous la dénomination de *probabilité extrinsèque,* par opposition à la *probabilité intrinsèque.* Si une urne contient 99 boules blanches et 1 boule noire, la probabilité *intrinsèque* de l'extraction d'une boule blanche est à peu près 1 : il est presque certain que la boule attendue sera blanche. Mais, pour une personne qui saurait, *seulement,* que l'urne renferme des boules blanches et des boules noires, la probabilité, *extrinsèque* cette fois, serait $\frac{1}{2}$.

(**) Cette assertion, émise par M. Émile Mondésir (*Journal de Liouville,* tome II, p. 10), est peut-être trop absolue. En effet, Poisson dit d'abord : « ... lorsque ces cartes ont été mêlées, s'il existe une chance » quelconque pour qu'un événement A arrive au premier coup et un » événement B à un autre coup, au dixième, par exemple, il y a exacte- » ment la même chance pour que l'événement B arrive au premier coup » et l'événement A au dixième; car on peut former un autre arrange- » ment de toutes les cartes, qui ne diffère de celui que le hasard a » donné, qu'en ce que les cartes qui sortent au premier coup sont rem-