V.

Précédemment, nous avons cité ce théorème de M. Mansion :

L'équation de Clairaut est la seule dont on forme l'intégrale en remplaçant y' *par une constante arbitraire* c.

D'un autre côté, comme on vient de le voir :

Toute équation du premier ordre est réductible à l'équation de Clairaut.

Il y a là une sorte de contradiction; mais il y a là aussi, nous semble-t-il, la preuve d'un théorème remarquable, que l'on peut énoncer ainsi :

L'intégrale de toute équation du premier ordre est réductible à la forme

$$f(x, y) = c\,\varphi(x, y) + F(c);\ (^*)\ \ldots\ldots \quad (3)$$

et, par conséquent :

Toute équation du premier ordre peut être mise sous la forme :

$$\varphi^2 \frac{d\left(\frac{f}{\varphi}\right)}{d\varphi} + F\left(\frac{df}{d\varphi}\right) = 0, \ldots\ldots \quad (4)$$

f *et* φ *désignant des fonctions de* x, y.

VI.

En résumé, le petit Mémoire de M. Mansion nous paraît très-digne d'être approuvé par l'Académie, et imprimé dans le *Bulletin* de la séance. »

(*) Cette proposition résulte aussi de la comparaison des équations (1), (2) : celle-ci ne diffère pas, au fond, de l'égalité (3).

Rapport de M. Folie.

« Comme vient de le dire notre savant confrère, la partie du Mémoire de M. Mansion, qui est consacrée aux équations différentielles homogènes, s'occupe surtout de l'extension, aux fonctions d'un nombre quelconque de variables, des propriétés des équations homogènes entre deux variables; mais, en outre, M. Mansion a complété cette théorie, en énonçant et en démontrant quelques propriétés nouvelles qui n'ont pas encore, pensons-nous, été formulées explicitement.

Cette première partie nous a donc paru fort intéressante.

La seconde partie, qui traite de l'équation de Clairaut, a donné lieu à plusieurs observations de la part de notre savant confrère; nous croyons devoir entrer dans quelques détails à leur sujet.

Et d'abord, M. Catalan fait remarquer avec raison que le théorème principal, établi par M. Mansion, est susceptible de cet énoncé plus général :

Toute équation du premier ordre est réductible à l'équation de Clairaut, en sous-entendant que cette réduction ne peut *s'effectuer* que dans le cas où l'intégrale générale est connue; ce qui n'empêche nullement de démontrer le théorème dans le cas même où cette condition n'est plus remplie.

Peut-être aussi la démonstration de ce théorème :

L'équation de Clairaut est la seule dont l'intégrale s'obtienne en remplaçant y' *par une constante arbitraire*, se tirerait-elle immédiatement, comme le suggère notre savant confrère, de cette simple idée que $\frac{dy}{dx} = c$ représente une droite (*).

Mais, dans l'interprétation géométrique qu'il donne de la réduction d'une équation différentielle à celle de Clairaut, il nous paraît que l'expression a un peu trahi la pensée de M. Catalan; il dit que cette équation

$$Y = CX + f(C)$$

représente une série de droites (**); cela n'est exact que si Y et X sont des fonctions linéaires des coordonnées rectilignes x et y, auquel cas les fonctions φ et ψ, et, par suite, la fonction F elle-même, sont également linéaires en x et y.

Au surplus, la proposition énoncée par notre honorable confrère pourrait se généraliser, si l'on donnait à Y la forme $f(X)$, f désignant une fonction quelconque, mais déterminée, et X étant une fonction tout à fait arbitraire, mais déterminée également, des variables x et y.

Il suffit, en effet, pour transformer $F(x, y, c) = 0$ en $Y = f(X)$, quelle que soit la fonction X de x et y,

$$X = \varphi(x, y), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

de poser

$$Y - f(X) = F(x, y, c); \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

(*) En effet, si l'intégrale d'une équation différentielle peut s'obtenir en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par c, il faut que cette intégrale soit identique avec $y = cx + b = cx + f(c)$; et, par conséquent, que l'équation différentielle soit identique avec $y = y'x + f(y')$.

(**) Voir § IV du rapport de M. Catalan. Cela reviendrait à dire que la série des courbes, représentées par l'équation $F(x, y, c) = 0$, peut, à l'aide du simple changement des variables x et y en X et Y, se convertir en une série de droites $Y = CX + f(C)$, et même, peut-on ajouter, de droites parallèles.

les équations (1) et (2) serviront à déterminer les valeurs de x et de y qu'il faudra substituer dans $F(x, y, c) = 0$, pour obtenir la transformation désirée.

Comme cas particulier, on pourrait même ramener $F(x, y, c) = 0$ à $Y = 0$, en prenant pour seconde variable, soit une fonction quelconque X de x et y, soit x ou y; et l'on voit que, dans ce cas, $Y = 0$ n'en continue pas moins à représenter identiquement la même série de courbes que $F(x, y, c) = 0$, tout comme le fait $Y = CX + f(C)$, dans le cas traité par M. Catalan.

Ces remarques, que nous pourrions étendre considérablement au point de vue géométrique, mais auxquelles nous voulons nous borner ici, pour ne pas sortir des limites d'un simple Rapport, feront immédiatement disparaître la sorte de contradiction que notre savant confrère signale entre les deux théorèmes formulés par M. Mansion, et énoncés plus haut dans notre analyse.

Enfin, elles nous semblent pouvoir conduire très-aisément à la généralisation du premier de ces théorèmes.

Toutes simples que paraissent ces idées, il n'en est pas moins vrai que c'est M. Mansion qui a songé le premier à les tirer de son étude sur l'équation de Clairaut, et nous sommes persuadé que la poursuite de ces études, alliée surtout à des considérations géométriques, mettra leur savant auteur sur la voie de nouvelles découvertes.

Nous proposons à la classe d'ordonner l'insertion du travail de M. Mansion dans ses recueils, et d'adresser des remercîments à l'auteur pour son intéressante communication. »

Rapport de M. De Tilly.

« Je me rallie aux conclusions de mes honorables confrères. Je partage, comme M. Folie, l'opinion, exprimée