remplies simultanément; si l'une d'elles seulement est remplie, on tombe sur un cas de similitude imparfaite, et l'auteur traite en détail deux de ces cas, savoir :

1° Celui où les axes des couples d'impulsion des mobiles sont parallèles en deux points correspondants des trajectoires : c'est le plus important des deux;

2° Celui où le parallélisme a lieu pour les axes de figure.

La nouvelle note de M. De Tilly me paraît un complément utile, je dirai même indispensable, à ses précédents travaux; elle est écrite avec la clarté et la netteté habituelles à l'auteur, et j'ai l'honneur d'en proposer l'impression dans le *Bulletin* de la séance. »

M. Catalan, second commissaire, ayant adhéré aux conclusions du rapport de M. Liagre, la classe les a adoptées également.

## COMMUNICATIONS ET LECTURES.

*Extension des théorèmes analogues à celui de Pascal à des courbes tracées sur une surface quelconque;* par M. F. Folie, correspondant de l'Académie.

Le théorème de Pascal est peut-être, de tous les théorèmes de la géométrie supérieure, celui qui se prête au plus grand nombre de généralisations, parce que son expression ne renferme que des relations purement descriptives. On pourra donc chercher cette expression dans un système de coordonnées tout à fait arbitraire, quand bien même la distance de deux points s'exprimerait dans ce système par une fonction excessivement compliquée de leurs coordonnées, la connaissance de cette fonction étant complétement inutile à la démonstration du théorème.

Il est vrai que quand nous avons découvert l'extension du théorème de Pascal aux courbes et aux surfaces d'ordres supérieurs, ç'a été en partant d'abord d'une relation métrique analogue à celle qui caractérise l'involution de trois couples de points, relation que nous avons trouvée pour des systèmes de figures inscrites à des courbes ou à des surfaces du $n^e$ ordre, et que nous avons donnée sous le nom d'*extension du théorème de Desargues* (1).

Mais du moment que l'on avait déduit de cette relation les théorèmes analogues à celui de Pascal, il n'était pas malaisé d'en trouver une démonstration qui ne s'appuyât sur aucune relation métrique, et c'est ce que nous avons fait d'une manière très-simple dans une Addition à notre travail (2).

Ces démonstrations des théorèmes analogues à celui de Pascal, indépendantes des théorèmes analogues à celui de Desargues, présentent même sur celles qui en dépendent l'avantage d'être plus directes et plus évidentes; mais surtout elles offrent celui de se prêter à une généralisation qu'on ne peut pas attendre de ces dernières, parce que celles-ci, fondées sur une relation métrique, ne s'appliquent qu'à des systèmes de coordonnées dans lesquels cette relation est aisément exprimable.

Si le lecteur veut bien se donner la peine de lire l'Addition citée plus haut, il se convaincra au contraire aisément

(1) *Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne.* Bruxelles, Hayez, 1872. (Extrait du t. XXXIX des Mémoires in-4° de l'Académie.)

(2) *Ibid*, pp. 50 à 62.



que les démonstrations que nous y avons données des théorèmes analogues à celui de Pascal sont absolument indépendantes du système de coordonnées choisi, et peuvent par conséquent s'étendre à un système de coordonnées curvilignes tracées sur une surface quelconque.

Nous ne croyons pas devoir reprendre ici ces démonstrations, auxquelles il n'y aurait, du reste, pas un mot à changer pour leur donner cette extension considérable, et nous nous bornerons à montrer par un simple exemple la manière dont on peut appliquer nos théorèmes à des courbes tracées sur une surface quelconque.

Prenons pour coordonnées curvilignes d'un point tracé sur une surface de révolution sa longitude $x$ et sa latitude $y$; appelons ligne du premier ordre une ligne tracée sur cette surface, et dont l'équation est du premier degré en $x$ et $y$; polygone du $n^e$ ordre l'ensemble de $n$ de ces lignes; lieu ou courbe du $n^e$ ordre une courbe tracée sur la même surface et dont l'équation est du $n^e$ degré en $x$ et $y$.

Ces définitions étant jointes à celles que nous avons données dans le mémoire cité, nous n'aurons qu'à transcrire les théorèmes que nous avons trouvés pour les courbes planes, et nous obtiendrons autant de théorèmes nouveaux applicables à des courbes tracées sur une surface de révolution.

Voici ces énoncés :

Extension du théorème de Pascal. — *Dans un système de deux polygones conjugués du* $(n+1)^e$ *ordre inscrits à une courbe du* $n^e$ *ordre, les côtés opposés se coupent en* $n+1$ *points situés sur une ligne du premier ordre* (1).

(1) *Mémoire* cité, pp. 18 et 54.

Ce théorème est applicable, d'une manière générale, jusqu'au cinquième ordre.

Seconde extension du théorème de Pascal. — *Dans un système de deux polygones conjugués du* $(n+p)^e$ *ordre inscrits à une courbe du* $n^e$ *ordre, les côtés non adjacents se coupent sur un lieu du* $p^e$ *ordre* (1).

Ce théorème est applicable jusqu'au quatrième ordre inclusivement, relativement à $n$.

Les suivants ne sont soumis à aucune restriction.

Théorème. — *Si* $n-2$ *transversales sont communes à deux systèmes de figures conjuguées du* $n^e$ *ordre inscrites à une courbe de même ordre, ces deux systèmes se couperont en tous points situés sur cette courbe* (2).

Première généralisation du théorème de Pascal. — *Si* $n-3$ *transversales sont communes à deux systèmes de figures conjuguées du* $n^e$ *ordre inscrites à une courbe de même ordre, les points d'intersection de ces figures, qui n'appartiennent pas à cette courbe, se trouveront sur un lieu du premier ordre* (3).

Seconde généralisation du théorème de Pascal. — *Si* $p$ *transversales sont communes à deux systèmes de figures conjuguées du* $n^e$ *ordre inscrites à une courbe de même ordre, les points d'intersection de ces figures, qui n'appartiennent pas à cette courbe, se trouveront sur un lieu de l'ordre* $n-p-2$ (4).

(1) *Mémoire* cité, p. 55.
(2) et (3) *Ibid.*, p. 57.
(4) *Ibid.*, p. 58.



Il est à peine nécessaire d'ajouter que nous avons simplement pris la surface de révolution comme un exemple destiné à faire pénétrer aisément l'esprit de ces extensions nouvelles données à nos théorèmes, et que ceux-ci sont de même applicables à des courbes tracées sur une surface arbitraire, pourvu que leurs équations, dans un système déterminé de coordonnées tracées sur cette surface, soient du même degré que celles dont il est question dans les énoncés précédents.

Pour que ces théorèmes offrent plus qu'un intérêt purement spéculatif, il faut qu'ils s'appliquent à des courbes qui ont déjà éveillé, par d'autres propriétés, l'attention des géomètres; et ce résultat ne pourra s'obtenir que par un choix judicieux de coordonnées.

Dans l'application que nous ferons de notre méthode aux courbes gauches, nous montrerons le parti que l'on peut tirer de l'idée que nous venons d'esquisser.

---

*Note sur la similitude mécanique, et, en général, sur le mouvement d'un corps solide de révolution;* par M. J.-M. De Tilly, correspondant de l'Académie.

Dans le *Bulletin* du mois d'août 1873, j'ai publié une *Note sur la similitude dans le mouvement des corps solides,* etc. Cette Note comprenait deux parties, dont l'une, traitant de la similitude parfaite ou complète, était fort détaillée, tandis que l'autre, relative à la similitude imparfaite (que je considérais comme tout à fait accessoire), était réduite à quelques lignes.