CALCUL

DES

PROBABILITÉS

DE

A. MEYER,

PUBLIÉ SUR LES MANUSCRITS DE L'AUTEUR.

PAR

F. FOLIE.

PRÉFACE.

Pendant sa dernière maladie, A. Meyer nous avait chargé de la révision des épreuves de son ouvrage sur la *Théorie analytique des probabilités à posteriori*.

C'est grâce à cette circonstance, sans doute, que M^me veuve Meyer voulut bien nous confier le manuscrit du cours que son mari avait donné à l'Université de Liége, de 1849 à 1857, sur le calcul des probabilités.

Nous espérions que la Société royale des Sciences de Liége, qui avait déjà publié dans ses *Mémoires* d'importants travaux de Meyer, prêterait également son concours à la publication de cette œuvre posthume, la plus considérable peut-être de son auteur. Outre la plupart des anciens collègues de Meyer dans la Faculté des sciences, cette Société comptait en effet dans son sein plusieurs de ses anciens élèves; et tous, collègues et disciples, avaient appris à connaître et à aimer ce savant d'une érudition si vaste, cet homme si bon, ce maître si dévoué. Aussi la publication de son *Calcul des probabilités* n'eût-elle subi aucun retard si les ressources de la Société avaient été suffisantes. Mais ce n'est que dans ces derniers temps que sa situation financière lui a permis de voter l'impression de l'ouvrage.

Quoique les notes de Meyer fussent à peu près complètes, comme elles ne renfermaient parfois presque pas de texte dans les parties relatives au développement des formules, il fallait les revêtir d'un peu plus de forme pour les livrer au public. Nous avons entrepris avec plaisir ce travail, dans lequel nous avons été obligeamment aidé par un ancien élève de Meyer, notre ami M. L. Perard, professeur à l'Université de Liége; et nous avons l'un et l'autre respecté entièrement les idées et, autant que possible, le style serré de notre maître. Nous n'y avons rien mis du nôtre, sauf le redressement de quelques *lapsus* dans les calculs et l'addition de quelques éclaircissements peu importants.

Une partie manquante du manuscrit a pu être remplacée, grâce à l'obligeance d'un de nos anciens condisciples aux cours de Meyer, notre ami M. A. Devivier, professeur à l'Université de Louvain, qui a bien voulu nous communiquer ses notes, dont nous avons pu apprécier toute l'exactitude.

Le manuscrit était divisé en leçons, les unes brèves, les autres longues. Nous avons cru plus convenable, à cause de la nature didactique de l'ouvrage, de partager celui-ci en chapitres et en paragraphes numérotés, afin de faciliter les recherches au lecteur et de pouvoir le renvoyer aux numéros dont la connaissance est nécessaire à l'intelligence du texte.

Quelques parties nous ont paru devoir être détachées du corps de l'œuvre et rejetées à la fin, comme étant des développements donnés à certains points spéciaux, et ne rentrant pas dans la division méthodique de l'ouvrage.

Il en est ainsi de deux théories des erreurs, l'une d'après Laplace, l'autre d'après Bienaymé, que Meyer a ajoutées à celle qui figure dans son Traité; d'une extension du théorème de Bernouilli aux factorielles, qui lui est due, et qui révèle ses qualités comme analyste; enfin de quelques notes destinées à éclaircir des formules dont il fait usage.

Cet ouvrage de Meyer est un résumé très-complet des plus importants travaux de Bernouilli, Moivre, Laplace, Poisson, Gauss, Encke, Bienaymé, etc., sur le calcul des probabilités; et l'on peut hardiment affirmer, pensons-nous, qu'il n'existe aucun traité aussi vaste sur la matière, si l'on excepte la Théorie analytique des probabilités.

Nous croyons devoir signaler tout spécialement à l'attention du lecteur les généralisations de quelques problèmes renfermant de belles applications de l'analyse supérieure et en particulier du calcul aux différences finies; la démonstration du théorème de Bernouilli et sa généralisation; la marche des calculs dans le développement des formules de Laplace, si difficiles à lire dans l'original; enfin des applications très-nombreuses du calcul des probabilités à la population et aux assurances.

Le théorème et le problème de Poisson figurant dans le manuscrit, nous n'avons pas pensé qu'il fallût les supprimer, malgré les doutes que notre maître avait émis au sujet de l'exactitude des approximations du géomètre français : l'expression de ces doutes suffira pour mettre le lecteur sur ses gardes.

L'importance de ce Traité et l'utilité qu'on en pourra retirer dans les applications nous ont engagé à le compléter par un extrait des Tables récentes de mortalité dues au regretté Ad. Quetelet, l'une des plus hautes autorités dans la matière. Cet illustre savant a bien voulu nous y autoriser; nous lui en avons exprimé toute notre gratitude, et ne pouvons malheureusement plus aujourd'hui que rendre un légitime hommage à sa mémoire.

Bien certainement l'œuvre de Meyer sera accueillie avec le plus vif intérêt par les savants, et sa publication réjouira le cœur des nombreux élèves et des anciens amis de notre excellent maître; mais avec quel pieux recueillement surtout elle sera reçue par une famille dont il était adoré!

Celle-ci nous a chargé de témoigner toute sa reconnaissance à la Société royale des Sciences de Liége, et spécialement à ceux des anciens élèves de Meyer qui ont bien voulu nous aider dans l'accomplissement de notre tâche.

Liége, septembre 1874.

F. Folie.

INTRODUCTION (*).

1. Tout événement arrive par suite de deux sortes de circonstances; les unes, connues ou inconnues, sont *nécessaires* à sa production, tandis que les autres, toujours inconnues, n'y contribuent qu'accidentellement.

Les circonstances de la première espèce se nomment causes ou chances; les autres constituent ce que l'on nomme hasard.

Exemple. Si l'événement consiste dans l'extraction d'une boule blanche d'une urne contenant des boules blanches et des boules noires, les causes ou les chances de la sortie d'une boule blanche sont : le nombre total des boules, et celui des boules blanches; tandis que l'arrangement des boules dans l'urne et l'action de saisir une des boules sont la part du hasard.

(*) Le but de l'auteur, dans cette Introduction, est de définir les notions fondamentales dont l'étude fait l'objet du calcul des probabilités. Il lui arrivera donc fréquemment, pour éclaircir les notions qu'il a définies, d'énoncer des principes dont la démonstration se trouvera dans le corps même de l'ouvrage.

Cet ouvrage étant un traité essentiellement didactique, nous avons pensé qu'il ne serait peut-être pas inutile de faire cette remarque pour les commençants. F. F.

2. A tout événement on peut opposer son contraire, de manière que l'existence de l'un exclut celle de l'autre; alors les chances favorables à l'un sont contraires à l'autre. On nomme chances totales l'ensemble des chances favorables et contraires à un événement.

Si une urne renferme, sur douze boules, quatre boules blanches, il y aura quatre chances favorables et huit chances contraires à la sortie d'une boule blanche, et en tout douze chances.

3. S'il s'agit de plusieurs événements dont l'un doit arriver nécessairement, l'ensemble des autres doit être considéré comme un événement contraire au premier.

4. L'arrivée d'un événement est *certaine*, quand aucune chance ne lui est contraire; elle est incertaine quand plusieurs chances lui sont défavorables. Dans ce dernier cas, l'événement est plus ou moins probable, selon qu'il réunit plus ou moins de chances favorables. Donc, quand le nombre total des chances reste le même, *les probabilités de deux événements sont proportionnelles aux nombres de leurs chances favorables.*

Supposons, par exemple, que deux urnes contiennent chacune douze boules; que la première renferme huit blanches sur quatre noires, et la seconde trois blanches sur neuf noires; il sera plus probable d'extraire une blanche de la première urne que d'en extraire une de la seconde, et les probabilités de la sortie d'une blanche des deux urnes seront dans le rapport de 8 à 3.

5. Comme dans le cas de la certitude toutes les chances sont favorables, il sera facile de trouver la mesure de la probabilité d'un événement.

Soient en effet u la probabilité d'un événement certain, P la probabilité du même événement, quand sur un nombre total

$a+b=m$ chances, il n'en aurait que a qui lui soient favorables, on aura la proportion

$$P : u :: a : m$$

d'où

$$\frac{P}{u}=\frac{a}{m}.$$

Soit p la valeur de ce rapport, p sera la mesure de la probabilité P, u étant pris pour unité, on a donc

$$p=\frac{a}{m}.$$

Donc *la mesure de la probabilité d'un événement est une fraction qui a pour numérateur le nombre des chances favorables à son arrivée, et pour dénominateur le nombre total des chances, tant favorables que contraires.*

Il suit de là qu'en nommant Q la probabilité contraire, on aura

$$Q : u = b : m,$$

ou

$$\frac{Q}{u}=\frac{b}{m}.$$

Soit

$$q=\frac{Q}{u},$$

on aura

$$q=\frac{b}{m}$$

et, par suite,

$$p+q=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}=1.$$

D'où il suit que la somme des mesures de deux probabilités contraires est toujours égale à l'unité, et que la somme des probabilités contraires est égale à la certitude, car on a :

$$\frac{P}{u}+\frac{Q}{u}=1, \quad \text{d'où} \quad P+Q=u.$$

On a aussi

$$p : q = a : b = a : m-a.$$

6. Soit k le bénéfice attaché à l'arrivée d'un événement certain, x et y les bénéfices que l'on peut attendre, quand les probabilités de l'arrivée de cet événement seront respectivement égales à p et à q; il est clair qu'on aura les proportions :

$$1 : p = k : x$$

et

$$1 : q = k : y;$$

d'où

$$x = kp, \quad y = kq.$$

Supposons maintenant que l'arrivée d'un événement, dont la probabilité est p, procure à une personne A le bénéfice k, et que sa non-arrivée, ou l'arrivée de l'événement contraire, dont la probabilité est q, procure le même bénéfice k à une personne B.

C'est le cas qui se présente quand deux joueurs font ensemble un fonds commun qui doit devenir la propriété du gagnant.

En conservant toutes les notations précédentes, on aura de même, dans ce cas :

$$x = kp, \; y = kq,$$

d'où :

$$p : q = x : y = a : m - a.$$

Mais si l'on parie g écus pour l'arrivée, et g' pour la non-arrivée de l'événement qui doit procurer les bénéfices x et y, on devra faire $g = x$, $g' = y$, car les paris doivent être égaux aux bénéfices que l'on attend, on a donc :

$$p : q = g : g' = a : m - a.$$

Il suit de là que si la probabilité d'un événement est exprimée par

$$p = \frac{a}{m},$$

on peut parier a contre $m - a$ que l'événement aura lieu.

7. Comme on a

$$x = kp, \quad y = kq, \quad x + y = k(p + q) = k,$$

il s'ensuit que le droit d'un joueur à la mise totale k, quand il a une probabilité p de la gagner, est kp, et il peut vendre ce droit pour la somme kp avant que le sort ait décidé sur l'arrivée de l'événement qui doit le faire gagner ou perdre.

Le produit d'une somme k à espérer par la probabilité p de la gagner, se nomme *espérance mathématique*.

Désignons-la par s. Si l'arrivée d'un événement dont la probabilité est p procure le bénéfice k, l'espérance mathématique correspondante sera donc

$$s = kp;$$

d'où

$$p = \frac{s}{k}.$$

L'espérance mathématique du joueur adverse, à qui la non-arrivée de l'événement procure le bénéfice k, ou la crainte, pour le premier, de perdre la somme k, sera exprimée par le produit

$$(1 - p)\, k = qk.$$

L'avantage ou le désavantage dans un jeu s'obtient en retranchant la mise de l'espérance mathématique.

Exemple. Un joueur A, ayant quatre chances sur six de gagner, dépose cinq francs; et B, qui n'a que deux chances sur six de gagner, dépose trois francs; la mise totale sera huit francs.

Donc espérance de

$$A = 8 \cdot \frac{4}{6} = 5\frac{1}{3},$$

espérance de

$$B = 8 \cdot \frac{5}{6} = 2\frac{2}{3},$$

avantage de

$$A = 5\frac{1}{3} - 5 = \frac{1}{3},$$

désavantage de

$$B = 2\frac{2}{3} - 3 = -\frac{1}{3}.$$

REMARQUE. On peut encore dire que l'avantage d'un joueur s'obtient en retranchant de son espérance de gagner, le risque de perdre.

L'espérance pour A, de gagner 3, est $3 \times \frac{4}{6} = 2$.

La mise de A est 5, la probabilité de la perdre est $\frac{2}{6}$, il risque donc $5 \times \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$, pour gagner 2. Donc son avantage est $2 - 1\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

8. Les chances favorables et contraires à un événement peuvent être connues, soit directement, soit par des données qui permettent de les calculer. Dans ce cas, on pourra toujours obtenir, par des règles que nous enseignerons, la probabilité correspondante de l'événement. La probabilité ainsi calculée se nomme probabilité *à priori.*

Mais si les chances d'un événement nous sont inconnues, la probabilité correspondante ne peut s'obtenir qu'approximativement, à l'aide d'observations ou d'essais répétés un grand nombre de fois. La probabilité ainsi déterminée se nomme probabilité *à posteriori.*

Ce procédé repose sur le principe que *les chances les plus nombreuses finiront toujours par se produire le plus fréquemment dans un grand nombre d'épreuves.*

Si, par exemple, d'une urne contenant m boules, dont a blanches et b noires, on extrait une boule successivement un grand nombre de fois, en remettant chaque fois dans l'urne la boule qu'on en a extraite; si a' et b' désignent respectivement les nombres des boules blanches et des noires sorties après un grand nombre μ de tirages, alors les rapports $\frac{a'}{a'+b'}$, $\frac{b'}{a'+b'}$ différeront d'autant moins des probabilités $\frac{a}{a+b}$, $\frac{b}{a+b}$ du tirage d'une boule blanche et d'une noire à chaque coup, que μ sera plus grand.

Les probabilités sont en général de trois sortes :

1° *Possibilité objective.* La possibilité est objective quand, par la nature même des événements, on voit qu'ils sont possibles dans un rapport donné. Par exemple, au jeu de pile et croix, il est évident que pile et croix sont également possibles;

2° *Possibilité subjective.* La possibilité est subjective quand elle se trouve la considération des motifs qui peuvent nous déterminer à nous prononcer sur l'existence de l'événement. Par exemple : quand on n'a aucune raison de croire qu'un joueur A est plus habile qu'un joueur B, on en conclut que la probabilité pour A de gagner une partie est $\frac{1}{2}$. Ce moyen ne donne que la possibilité relative à l'état de nos connaissances, et non la possibilité réelle de l'événement;

3° *Possibilité à posteriori.* La possibilité *à posteriori* est celle que l'on trouve en répétant un grand nombre de fois l'expérience qui doit amener l'événement, et en examinant combien de fois il est arrivé; ce moyen fera connaître la probabilité des événements, à peu près.

Parmi les circonstances qui concourent à la production d'un événement, il y en a de variables à chaque instant, et dont la connaissance nous échappe, telles que le mouvement que la main imprime aux dés; c'est la réunion de ces circonstances que nous nommons hasard.

Il en est d'autres qui sont constantes, telle que l'habileté des joueurs, le nombre des faces égales d'un dé, etc. Celles-ci forment les possibilités objectives des événements, et la connaissance plus ou moins étendue que nous en avons détermine leurs possibilités subjectives. Seules, elles ne suffisent pas pour les produire, il faut qu'elles soient jointes aux circonstances variables; elles ne font ainsi qu'augmenter la probabilité des événements, sans déterminer nécessairement leur existence.

9. Mise en équation :

1° Lorsque la possibilité des événements simples est connue, la probabilité des événements composés peut souvent se déterminer par la seule *théorie des combinaisons ;*

2° Mais la méthode la plus générale consiste à observer la loi de variation que cette probabilité éprouve par la multiplicité des événements simples, et à la faire dépendre d'une équation aux différences totales ou partielles; l'intégration de cette équation donne l'expression analytique de la probabilité cherchée.

Souvent cette expression devient impossible à cause du grand nombre de ses termes et de leurs facteurs; alors il faut recourir aux méthodes d'approximation pour obtenir des valeurs approchées;

3° Dans un grand nombre de cas, et ce sont les plus intéressants, les possibilités des événements simples sont inconnues; alors il faut chercher, dans les événements passés, quelques indices qui puissent nous guider dans nos conjectures sur l'avenir.

Dans plusieurs problèmes les nombres des chances sont infinis. Cela arriverait, par exemple, si, en projetant une pièce de monnaie sur une surface, on voulait évaluer dans combien de cas le centre de la pièce tomberait sur l'un des points d'une portion désignée de cette surface. Dans cette question, le nombre des cas favorables serait déterminé par le segment désigné, et le nombre de tous les cas possibles par la surface donnée.

10. On dit que deux événements sont indépendants l'un de l'autre, lorsque l'arrivée de l'un n'influe pas sur celle de l'autre.

Si l'on a, par exemple, deux paquets de treize cartes de même couleur chacun, la sortie d'un as du premier paquet est indépendante de la sortie d'un as du second.

Deux événements sont dépendants quand l'arrivée de l'un

influe sur celle de l'autre : tel serait, par exemple, le cas de la sortie du sept d'un paquet de treize cartes d'une même couleur, après en avoir extrait un as. Car alors des treize chances primitives il n'en resterait plus que douze. La probabilité de l'extraction d'un as étant $\frac{1}{13}$, celle de l'extraction d'un sept serait, au contraire, $\frac{1}{12}$. Si l'on remettait la carte extraite dans le paquet, la probabilité d'en extraire un sept au second coup redeviendrait $\frac{1}{13}$, et les deux événements seraient indépendants.

Le mot cause, dans la théorie des probabilités, désigne l'ensemble des circonstances qui donnent à un événement une probabilité déterminée. Si, par exemple, la probabilité mathématique de la naissance d'un garçon, dans un certain pays, restait numériquement la même, on dirait que la cause, ou les causes de la naissance d'un garçon sont constantes. La cause, ainsi entendue, n'est donc pas ce qui produit un effet ou un événement, mais c'est la chose qui donne à un événement la probabilité qui lui est propre. Ce sont les chances en soi de l'événement.

Lorsque la cause est incertaine, sa probabilité sera plus ou moins grande, selon qu'elle donnera à l'événement plus ou moins de chances favorables, en la supposant certaine. Ainsi, toutes choses égales d'ailleurs, *les probabilités des causes, ou des hypothèses, sont proportionnelles aux chances favorables qu'elles donneraient à l'événement observé si elles étaient certaines.*

Soient, par exemple, trois urnes A, B, C, contenant chacune trois boules, savoir : A, une blanche et deux noires; B, deux blanches et une noire; C, trois blanches. Si l'événement attendu est la sortie d'une boule blanche, sans qu'on sache de quelle urne elle a été extraite, la cause de cet événement sera incertaine, et pourra consister dans l'une des trois hypothèses suivantes :

1° Elle est sortie de l'urne A;

2° » » l'urne B;

3° Elle est sortie de l'urne C.

Dans le premier cas, la probabilité de la cause serait proportionnelle à 1, dans le deuxième à 2, et dans le troisième à 3, c'est-à-dire que les probabilités des trois causes ou hypothèses seraient proportionnelles aux chances qu'aurait l'événement, si l'on était certain que la boule sortie est extraite de l'urne A, ou de l'urne B, ou de l'urne C.

11. On nomme *probabilité relative* la probabilité qui se rapporte à un groupe d'événements choisis parmi les événements attendus, en considérant comme nulles les arrivées des autres événements.

On nomme *probabilité absolue* la probabilité de chaque événement lorsqu'on ne fait abstraction d'aucun.

Si, dans un jeu de piquet, on ne veut considérer que les cartes rouges, en regardant comme nulles les sorties des autres couleurs, la probabilité de la sortie d'une rouge sera une probabilité relative.

12. La probabilité de n événements simultanés et indépendants

$$E_1, E_2 .., E_n,$$

est la même que la probabilité de n événements successifs E_1, E_2 .., E_n; car le temps de leur succession ne peut pas influer sur leur probabilité; on peut donc supposer que ce temps est nul.

Exemple. La probabilité de faire une somme s de points, en projetant sur un tapis n dés identiques, est la même que celle de faire cette même somme en projetant n fois successivement sur le tapis l'un de ces dés.

CALCUL DES PROBABILITÉS.

CHAPITRE I.

RÈGLES FONDAMENTALES DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

PROBABILITÉ TOTALE.

13. Première règle. *La probabilité d'un événement, qui peut arriver de plusieurs manières différentes, et indépendantes entre elles, est égale à la somme des probabilités propres à chacune de ces manières.*

Démonstration. Soient

$$p_1 = \frac{\alpha_1}{\mu}, \quad p_2 = \frac{\alpha_2}{\mu} \cdots\cdots p_m = \frac{\alpha_m}{\mu}$$

les probabilités propres aux événements

$$E_1, \quad E_2 \ldots\ldots\ldots E_m;$$

P la probabilité totale de l'arrivée de l'un quelconque de ces événements. Le nombre des chances favorables sera

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_m,$$

et μ sera le nombre total de ces chances; donc

$$P = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m}{\mu} = \frac{\alpha_1}{\mu} + \frac{\alpha_2}{\mu} + \ldots \frac{\alpha_m}{\mu} = p_1 + p_2 + \ldots + p_m.$$

Exemple. On a μ cartes dont a_1 sont marquées 1, a_2 sont marquées 2; ..... a_m sont marquées m, etc. Quelle est la probabilité P d'en tirer une marquée 1 ou 2 ou 3 ... ou m? On a

$$P=\frac{a_1+a_2+...+a_m}{\mu}=\frac{a_1}{\mu}+\frac{a_2}{\mu}+...+\frac{a_m}{\mu}=p_1+p_2+..+p_m.$$

Corollaire I. Soient $p_1, p_2 .... p_m$ les probabilités des événements $E_1, E_2 ... E_m$; si l'un de ces événements doit nécessairement arriver, la probabilité P que cela aura lieu sera 1 ou la certitude; donc

$$P=p_1+p_2+...+p_m=1.$$

Corollaire II. Soient p la probabilité d'un événement E, q celle de son contraire F; comme l'un de ces événements a lieu nécessairement, on a

$$p+q=1, \quad q=1-p.$$

Remarque. On nomme *probabilité relative*, la probabilité qui se rapporte à un groupe d'événements, choisi parmi les événements attendus, en considérant comme nulles les arrivées des événements qui ne font pas partie de ce groupe.

On nomme *probabilité absolue*, la probabilité de chaque événement, lorsqu'on ne fait abstraction d'aucun.

Exemple. Si, dans un jeu de piquet, on ne veut considérer que les cartes rouges, en faisant abstraction des autres, la probabilité qui se rapporte au tirage d'une rouge désignée sera une probabilité relative.

14. **Deuxième règle.** *La probabilité relative d'un événement est égale à sa probabilité absolue, divisée par la somme des probabilités des événements parmi lesquels il doit être pris.*

Démonstration. Soit P la probabilité relative de l'événement E_1, pris dans le groupe $E_1E_2E_3$ des événements $E_1E_2E_3E_4E_5$; soient

$$p_1=\frac{\alpha_1}{\mu}, \quad p_2=\frac{\alpha_2}{\mu}, \quad p_3=\frac{\alpha_3}{\mu}, \quad p_4=\frac{\alpha_4}{\mu}, \quad p_5=\frac{\alpha_5}{\mu}$$

les probabilités absolues de chaque événement. La probabilité P

est la même que celle que l'on aurait si $E_1E_2E_3$ existaient seuls; donc

$$P=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}=\frac{\frac{\alpha_1}{\mu}}{\frac{\alpha_1}{\mu}+\frac{\alpha_2}{\mu}+\frac{\alpha_3}{\mu}}=\frac{p_1}{p_1+p_2+p_3}.$$

Exemple. On a un nombre total μ de cartes marquées 1, 2, ... i .... m; $\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_i ... \alpha_m$ sont les nombres de cartes de chaque sorte; on demande :

1° La probabilité relative de tirer une carte marquée i, en considérant comme nuls les tirages des cartes portant des numéros plus élevés que i;

2° La probabilité de tirer l'une des cartes numérotées de 1 à i;

3° La probabilité de tirer l'une quelconque de tirer l'une des cartes numérotées de 1 à $g<i$.

On a :

$$1^\circ \quad P=\frac{p_i}{p_1+p_2+...+p_i},$$

$$2^\circ \quad P=\frac{p_1+.....+p_i}{p_1+.....+p_i}=1;$$

$$3^\circ \quad P=\frac{p_1+p_2+...+p_g}{p_1+p_2+...+p_i}.$$

PROBABILITÉ COMPOSÉE.

15. **Troisième règle.** *La probabilité d'un événement composé de deux événements consécutifs ou simultanés, est égale au produit des probabilités simples de ces événements.*

Démonstration. Soient E_1, E_2 deux événements indépendants, consécutifs ou simultanés, ayant respectivement α_1 et α_2 chances favorables sur μ et ν chances totales; il est clair que l'événement composé $F=(E_1E_2)$ aura $\alpha_1 . \alpha_2$ chances favorables sur $\mu\nu$ chances totales; donc

$$P=\frac{\alpha_1\alpha_2}{\mu\nu}=\frac{\alpha_1}{\mu}\cdot\frac{\alpha_2}{\nu}=p_1p_2.$$

Première remarque. La combinaison des règles deuxième et troisième conduit souvent à la probabilité cherchée, plus facilement que le calcul direct.

Exemple. Soient plusieurs événements $e_1, e_2, \dots e_m$ ayant les probabilités $p_1, p_2 \dots p_i \dots p_m$. Soit μ le nombre total des chances; $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_i \dots \alpha_m$ les nombres respectifs des chances favorables, la probabilité de e_i sera $p_i = \frac{\alpha_i}{\mu}$.

C'est là le calcul direct de la probabilité p_i; ce calcul n'est pas toujours le plus facile; il est souvent préférable de faire dépendre l'événement e_i du concours de deux autres, savoir :

1° De la sortie de e_i pris dans le groupe $e_1, e_2 \dots e_i$; la probabilité relative de cette sortie est (n° 14) :

$$P' = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \dots + p_i};$$

2° Du choix que l'on fait de l'un des événements du groupe $e_1 e_2, \dots e_i$; la probabilité de ce choix est

$$P = p_1 + p_2 + \dots + p_i; \quad \text{on a donc} \quad p_i = P_1 P'.$$

Seconde remarque. Quand l'événement composé doit résulter du concours de plusieurs événements $E_1, E_2 \dots$ successifs, dont chacun dépend de celui qui le précède, on déterminera la probabilité de chacun d'eux, en supposant que ceux qui le précèdent soient arrivés, puis on formera le produit des probabilités ainsi déterminées.

Soient $E_1, E_2, E_3 \dots E_{n-1}, E_n$ plusieurs événements, dont E_1 arrive le premier; E_2 le second, etc...., E_n le $n^{ième}$; si p_1 est la probabilité de E_1, p_2 celle de E_2 quand E_1 est arrivé, etc., p_n celle de E_n quand $E_1, E_2 \dots E_{n-1}$ sont arrivés, la probabilité P du concours de ces événements sera

$$P = p_1 p_2 \dots p_n.$$

Soit, par exemple, une urne renfermant a boules blanches, et b boules noires : la probabilité d'en extraire une blanche au premier coup sera $p_1 = \frac{a}{a+b}$; en supposant qu'une blanche soit sortie au premier tirage, et que la boule extraite n'ait pas été remise dans l'urne, la probabilité d'extraire une blanche au second coup sera $p_2 = \frac{a-1}{a+b-1}$.

S'il s'agit maintenant de déterminer la probabilité P de l'événement composé qui consiste dans la sortie d'une boule blanche au premier et au second coup, en supposant que la boule extraite ne soit pas remise dans l'urne, on aura $a(a-1)$ chances favorables sur $(a+b)(a+b-1)$ totales; donc

$$P = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} = p_1 p_2.$$

16. Donc *si deux événements simples sont liés entre eux de manière que l'arrivée du premier influe sur la probabilité de l'arrivée du second, on aura la probabilité de l'événement composé en déterminant : 1° la probabilité du premier événement; 2° la probabilité que, cet événement étant arrivé, le second aura lieu.*

On peut également démontrer ce principe de cette manière :

Soit μ le nombre total des chances, dont a sont favorables au premier événement. Si, parmi ces a chances, il y en a b favorables au second événement, la probabilité de celui-ci, le premier ayant lieu, sera évidemment $\frac{b}{\mu}$. Mais la probabilité du premier événement est $\frac{a}{\mu}$; la probabilité du second est $\frac{b}{a}$, car un des cas a devant exister, on ne doit considérer que ces cas.

Or on a

$$\frac{b}{\mu} = \frac{a}{\mu} \cdot \frac{b}{a}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Exemple I. La probabilité de tirer un as d'un jeu de trente-deux cartes partagé en deux paquets, se compose :

1° De la probabilité $\frac{16}{32}$ de mettre la main sur un paquet;

2° De la probabilité $\frac{4}{16}$ de tirer un as du paquet.

Donc la probabilité composée $= \frac{16}{32} \times \frac{4}{16} = \frac{1}{8}$.

Exemple II. On demande la probabilité d'extraire deux fois de suite une boule blanche d'une urne contenant quatre blanches et six noires, quand on ne remet pas la boule extraite :

1° Probabilité $\frac{4}{10} = \frac{36}{90}$ d'extraire une blanche au premier coup;

2° Probabilité $\frac{3}{9} = \frac{12}{36}$ d'extraire une blanche au second coup.

Donc la probabilité composée $= \frac{36}{90} \times \frac{12}{36} = \frac{2}{15}$.

17. Soient : E, E' deux événements ; (E, E') l'événement composé résultant de l'arrivée simultanée de ces deux événements simples ;

Soient : P la probabilité de (EE') ;

» p celle de E ;

» ϖ la probabilité que, E ayant eu lieu, E' doit pareillement exister, on aura (n° 16) :

$$P = p\varpi, \quad \text{d'où} \quad \varpi = \frac{P}{p};$$

toute la théorie de la probabilité des causes et des événements futurs, tirée des événements passés, découle de cette formule.

On aura donc ϖ en déterminant *à priori* la probabilité de (EE'), et en la divisant par la probabilité du premier événement E.

Exemples divers sur l'usage des règles précédentes.

Premier exemple. *Déterminer la probabilité que l'as sort au premier ou au second jet d'un dé ordinaire à six faces.*

1) La probabilité de la sortie au premier coup $= \frac{1}{6}$;

2) La probabilité contraire $= \frac{5}{6}$;

3) La probabilité de la sortie au second coup $= \frac{1}{6}$;

4) La probabilité de ne pas sortir au premier, et de sortir au second $= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$;

5) La probabilité de sortir au premier, ou cela n'étant pas, de sortir au second, $P = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$.

Deuxième exemple. *Déterminer la probabilité de jeter six ou sept une seule fois en deux coups avec deux dés.*

Le nombre total des chances avec deux dés est $6 \times 6 = 36$.

Le coup sept a six chances ; sa probabilité est donc $\frac{6}{36}$.

Le coup six a cinq chances ; sa probabilité est donc $\frac{5}{36}$.

1) La probabilité de jeter six ou sept au premier coup est $\frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$.

2) La probabilité contraire est $1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$.

3) La probabilité du jet six ou sept au second coup est $\frac{11}{36}$.

4) La probabilité de ne pas jeter six ou sept au premier coup, et de les jeter au second est $\frac{25}{36} \cdot \frac{11}{36} = \frac{275}{1296}$.

5) La probabilité cherchée se compose de la probabilité de jeter six ou sept au premier coup, et de la probabilité de les jeter au second coup, savoir : $\frac{11}{36} + \frac{275}{1296} = \frac{671}{1296}$.

Troisième exemple. *Déterminer la probabilité de jeter un as au moins une fois en trois coups.*

1) La probabilité de jeter un as au moins une fois en deux coups est $\frac{11}{36}$ d'après le premier exemple.

2) La probabilité contraire est $1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$.

3) La probabilité de jeter un as au troisième coup, quand il n'est pas venu aux deux premiers, est $\frac{1}{6} \cdot \frac{25}{36}$.

4) La probabilité cherchée est égale à la somme des probabilités 1) et 3) : $\frac{11}{36} + \frac{25}{216} = \frac{91}{216}$.

Quatrième exemple. *Déterminer la probabilité de jeter deux as en trois coups.*

Soit P la probabilité cherchée. L'événement peut avoir lieu de deux manières :

1° Un as sort au premier coup, et l'autre à l'un des deux coups suivants ; soit p la probabilité de cet événement composé.

2° Aucun as ne sort au premier coup, les deux sortent aux coups suivants ; soit p_2 la probabilité de cet événement composé, on aura :

$$P = p_1 + p_2.$$

Déterminons p_1 ;

1) La probabilité de jeter un as au premier coup est $\frac{1}{6}$.

2) La probabilité d'en jeter un à l'un des deux coups suivants est $\frac{11}{36}$ (3e ex.)

3) La probabilité de jeter un as au premier coup, et un à l'un des deux coups suivants est $p_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{11}{36} = \frac{11}{216}$.

Déterminons p_2 ;

1) La probabilité de ne pas jeter un as au premier coup est $\frac{5}{6}$.

2) La probabilité de jeter deux as aux deux coups suivants est $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

3) La probabilité de ne pas jeter un as au premier coup, et de le jeter aux deux coups suivants, ou $p_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{216}$. Donc

$$P = \frac{5}{216} + \frac{11}{216} = \frac{16}{216}.$$

Cinquième exemple. *Soit* p *la probabilité simple d'un événement,* q *la probabilité contraire, déterminer la probabilité que l'événement arrive* l *fois en* n *coups.*

Soit $P_{n,l}$ la probabilité cherchée. L'événement peut avoir lieu de deux manières :

1° Il arrive au premier coup, et aux coups suivants il arrive $l-1$ fois;

2° Il n'arrive pas au premier coup, mais l fois aux coups suivants.

Première manière : 1) La probabilité que l'événement arrivera au premier coup est p.

2) La probabilité que l'événement arrive $l-1$ fois aux coups suivants est $P_{n-1,\,l-1}$.

3) La probabilité que l'événement arrivera une fois au premier coup, et $l-1$ fois aux coups suivants est $p.P_{n-1,\,l-1}$.

Seconde manière : 1) La probabilité que l'événement n'arrive pas au premier coup est q.

2) La probabilité que l'événement arrivera l fois aux coups suivants est $P_{n-1,\,l}$.

3) La probabilité que l'événement n'arrivera pas au premier coup, mais l fois aux coups suivants est $q.P_{n-1,\,l}$. Donc

$$P_{n,l} = pP_{n-1,\,l-1} + qP_{n-1,\,l}.$$

On déterminera de la même manière les termes du second membre, et ainsi de suite.

Sixième exemple. A *et* B *jouent ensemble; ils ont la même probabilité de gagner un coup;* A *n'a qu'un point à faire pour gagner la partie;* B *en a deux; quelles sont leurs probabilités respectives de gagner la partie ?*

La partie sera achevée en deux coups au plus; car si A fait son point au premier coup, la partie cesse; si A manque le premier coup, B fait un des siens; si au second coup A fait son point, la partie cesse, sinon B fait son second point, et la partie cesse.

Donc A ne doit gagner qu'une fois en deux coups : la probabilité qu'il a de gagner au premier coup est $\frac{1}{2}$; la probabilité qu'il ne gagne pas au premier, et qu'il gagne au second, est $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$: la probabilité qu'il a de gagner est donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

B doit gagner deux coups consécutifs; la probabilité pour B de gagner un coup est $\frac{1}{2}$, et celle de gagner deux coups consécutifs est $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Septième exemple. *Une urne contient* $\mu = \alpha_1 + \alpha_2$ *boules,* α_1 *marquées* 1, *et* α_2 *marquées* 2. *On demande la probabilité qu'en extrayant successivement deux boules, ce seront: 1° deux boules marquées* 1 ; *2° une boule marquée* 1 *au premier tirage, et une marquée* 2 *au second. On ne remet pas dans l'urne la boule extraite.*

Soit p_1 la probabilité de la sortie d'une boule 1, au premier tirage, on a $p_1 = \frac{\alpha_1}{\mu}$.

Soit p'_1 la probabilité de la sortie d'une boule 1 au second tirage, on a :

$$p'_1 = \frac{\alpha_1 - 1}{\mu - 1}.$$

Donc 1° la probabilité P_1 de la sortie d'une boule 1 dans chacun des deux tirages sera :

$$P_1 = \frac{\alpha_1(\alpha_1 - 1)}{\mu(\mu - 1)}.$$

La probabilité d'extraire une boule 2 au second tirage est

$$p'_2 = \frac{\alpha_2}{\mu - 1};$$

donc 2° la probabilité P_2 d'extraire une boule 1 au premier tirage, et une boule 2 au second tirage est

$$P_2 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\mu(\mu - 1)}.$$

Huitième exemple. *Une urne contient* a *boules blanches et* b *boules noires, en tout* c *boules; quelle est la probabilité* P *d'en extraire, en* $m+n$ *tirages,* m *blanches et* n *noires dans un ordre déterminé, sans remettre dans l'urne la boule extraite?*

Cette probabilité sera (n° 15) :

$$P=\frac{a(a-1)\dots(a-m+1).b(b-1)\dots(b-n+1)}{c(c-1)\dots(c-m-n+1)}$$

Neuvième exemple. *Soient* A_1, A_2, A_3, *etc., des urnes : la première contient* m_1 *boules, dont* α_1 *sont blanches; la seconde contient* m_2 *boules, dont* α_2 *sont blanches, etc... Soient* $p_1, p_2, p_3 \dots$ *les probabilités que la main se portera sur* $A_1, A_2, A_3 \dots$; *quelle est la probabilité* P *d'extraire une blanche en mettant la main au hasard dans l'une de ces urnes?*

Solution. Soient $p', p'', p''' \dots$ la probabilité qu'une blanche sera extraite de l'une des urnes respectives $A_1, A_2, A_3 \dots$; on aura :

$$P=p'+p''+p'''+\cdots$$

La probabilité de mettre la main sur A_1 est p_1; celle d'en tirer une blanche est

$$\varpi_1=\frac{\alpha_1}{m_1},$$

d'où

$$p'=p_1\varpi_1.$$

On aurait de même

$$p''=p_2\varpi_2, \text{ etc.,}$$

donc

$$P=p_1\varpi_1+p_2\varpi_2+p_3\varpi_3+\text{etc.}$$

Corollaire. Si m est le nombre des urnes, et si l'on a :

$$p_1=p_2=p_3=\dots=\frac{1}{m},$$

il s'ensuivra :

$$P=\frac{1}{m}\left\{\varpi_1+\varpi_2+\varpi_3+\cdots\right\}.$$

18. Remarque. La probabilité P de l'événement composé

$(E_1E_2\dots E_m)$, les probabilités respectives des événements simples étant $p_1, p_2 \dots p_m$, est (n° 15) $P=p_1.p_2\dots p_m$. D'où résulte

$$P<p_1;\quad P<p_1p_2;\ \text{etc.,}$$

donc la probabilité d'un événement composé diminue avec le nombre des événements simples.

Corollaire I. Si $p_1=p_2=\dots=p$, on a :

$$P=p^m.$$

Corollaire II. Soient p la probabilité de E, q celle de son contraire F, d'où $p+q=1$. La probabilité que E arrivera m fois dans un ordre donné, en $m+n$ tirages, sera

$$P=p^m.q^n.$$

Corollaire III. Les mêmes choses étant posées, la probabilité P que E arrive au moins une fois sur n épreuves sera

$$P=1-q^n=1-(1-p)^n \quad \dots\dots \quad (a).$$

En effet $Q=q^n$ étant la probabilité que F arrive n fois, on a évidemment

$$P+Q=1,\quad \text{donc}\quad P=1-Q.$$

De l'équation (a) on tire

$$n=\frac{\log(1-P)}{\log(1-p)},$$

n est le nombre d'épreuves nécessaire pour que l'arrivée de E, au moins une fois, ait une probabilité donnée.

Exemple. Combien faut-il d'épreuves pour qu'on puisse parier un contre un, que E arrive au moins une fois?

On a

$$P=\frac{1}{2},$$

donc

$$n=\frac{\log\frac{1}{2}}{\log(1-p)}.$$

Corollaire IV. Soient p_1 et q_1 les probabilités des événements contraires A_1 et B_1; p_2 et q_2, p_3 et q_3, etc., les probabilités des événements contraires A_2 et B_2; A_3 et B_3, etc., de sorte que $p_1+q_1=1$; $p_2+q_2=1$, etc.

La probabilité que A_1 ou B_1 arrive avec l'un quelconque des autres A_2 et B_2, A_3 et B_3, etc., sera

$$P=(p_1+q_1)(p_2+q_2)(p_3+q_3)\cdots=1. \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

En effet, considérons d'abord deux couples d'événements A_1, B_1 et A_2, B_2, nous aurons les événements composés

A_1A_2	dont la probabilité est		p_1p_2,
A_1B_2	»	»	p_1q_2,
B_2A_2	»	»	q_1p_2,
B_1B_2	»	»	q_1q_2,

et la probabilité de l'arrivée de l'un quelconque de ces événements composés sera

$$P=p_1p_2+p_1q_2+q_1p_2+q_1q_2=(p_1+q_1)(p_2+q_2)=1.$$

De même pour un nombre quelconque de couples A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3, etc., on aura :

$$P=(p_1+q_1)(p_2+q_2)(p_3+q_3)\cdots=1.$$

Remarque. Chaque terme $p_1p_2q_3$ .... du produit (a) est la probabilité d'une combinaison telle que $A_1A_2B_3$ ....

Dixième exemple. *Une loterie se compose de* k *numéros; on en tire* l *à chaque tirage. Quelle est la probabilité* P *que* n *de ces numéros sortiront?*

Soit f le nombre des cas favorables; soit t le nombre total des cas, on a, en désignant par lC_n ou kC_n le nombre des combinaisons de l ou k événements pris n à n :

$$f=lC_n=\frac{l(l-1)\dots(l-n+1)}{1.2.3\dots n},$$

$$t=kC_n=\frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{1.2\dots n},$$

d'où

$$P=\frac{f}{t}=\frac{l(l-1)\dots(l-n+1)}{k(k-1)\dots(k-n+1)}.$$

Onzième exemple. *On a certain nombre pair* 2i *de paquets contenant chacun* r *cartes; savoir :*

r	*cartes marquées*	a_1, b_1, c_1	1)
r	»	» a_2, b_2, c_2	2)
. . .	. . .	. . . .	
r	»	» a_{2i}, b_{2i}, c_{2i}	2i)

Après avoir mêlé ces cartes, on en fait deux paquets égaux, M *et* N, *de* ir *cartes chacun. On retourne l'une des cartes du paquet* M, *et l'on demande la probabilité qu'un nombre* n *de cartes de l'une des collections* 1 . 2 ..... i (*par exemple, de la collection* i) *sera dans le paquet* M, *ou dans le paquet* N.

Solution. Soient g la probabilité que la carte retournée est l'une des n cartes désignées;

g' la probabilité contraire ou $g'=1-g$;

ϖ la probabilité que les n cartes sont dans le paquet M, quand la carte retournée est une des n;

ϖ' la probabilité que les n cartes sont dans ce même paquet M, quand la carte retournée n'est pas une des n;

P la probabilité que le premier paquet contient les n cartes, savoir $P=g\varpi+g'\varpi'$. . . . . (1);

ϖ_1 la probabilité que, la carte retournée n'étant pas une des n, le paquet N renferme les n;

P' la probabilité que le second paquet contient les n cartes, savoir $P'=g'\varpi_1$ . . . . (2).

En effet, la carte retournée étant prise dans le paquet M, si elle n'est pas une des n, n'influe pas sur la probabilité que le paquet N renferme les n; donc celle-ci ne se compose que de $g'\varpi_1$.

Il faut déterminer g, g', ϖ, ϖ', et ϖ_1.

Déterminons d'abord g et g'.

Comme les n cartes sont prises parmi r cartes, on a

$$g=\frac{n}{r} \quad \text{et} \quad g'=1-\frac{n}{r}=\frac{r-n}{r}.$$

Ensuite pour déterminer ϖ et ϖ', observons : 1° que si la carte retournée est une des n cartes, il faut que les $ir - 1$ cartes restantes contiennent $n - 1$ des cartes désignées : cela peut se faire d'autant de manières que $ir - 1$ cartes peuvent se combiner $n - 1$ à $n - 1$; donc le nombre des cas favorables est :

$$(ir - 1)\,C_{n-1} = \frac{(ir-1)(ir-2)\ldots\ldots(ir-1-(n-1)+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (n-1)} = \frac{(ir-1)(ir-2)\ldots\ldots(ir-n+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (n-1)}.$$

Le nombre des combinaisons de $2ir - 1$ cartes $n - 1$ à $n - 1$ ou de tous les cas possibles est :

$$(2ir - 1)\,C_{n-1} = \frac{(2ir-1)(2ir-2)\ldots\ldots(2ir-n+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (n-1)}$$

Donc nous aurons :

$$\varpi = \frac{(ir-1)\,C_{n-1}}{(2ir-1)\,C_{n-1}}.$$

2° Si la carte retournée n'est pas l'une des n, il faut que les $ir - 1$ restantes renferment les n cartes. Le nombre des cas favorables est

$$(ir - 1)\,C_n = \frac{(ir-1)(ir-2)\ldots\ldots(ir-n+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (n-1)} \cdot \frac{ir-n}{n}.$$

Le nombre de tous les cas sera :

$$(2ir - 1)\,C_n = \frac{(2ir-1)(2ir-2)\ldots\ldots(2ir-n+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (n-1)} \cdot \frac{2ir-n}{n}.$$

Donc

$$\varpi' = \frac{(ir-1)\,C_n}{(2ir-1)\,C_n} = \varpi \cdot \frac{ir-n}{2ir-n}.$$

Enfin déterminons ϖ_1 : si les n cartes sont parmi les ir cartes du paquet N, le nombre des cas favorables sera

$$irC_n = \frac{ir}{n} \cdot \frac{(ir-1)(ir-2)\ldots\ldots(ir-n+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (n-1)}.$$

Le nombre total des cas sera

$$(2ir - 1)\,C_n = \frac{2ir-n}{n} \cdot \frac{(2ir-1)(2ir-2)\ldots\ldots(2ir-n+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (n-1)}.$$

Donc

$$\varpi_1 = \frac{irC_n}{(2ir-1)\,C_n} = \varpi \frac{ir}{2ir-n}.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de P et de P′ on trouve

$$P = \frac{\varpi}{r}\left\{ n + \frac{(r-n)(ir-n)}{2ir-n} \right\} = \varpi \frac{in + ir - n}{2ir-n},$$

$$P' = \frac{r-n}{r} \frac{ir}{2ir-n}\,\varpi = \varpi \cdot \frac{ir - in}{2ir-n}.$$

Douzième exemple. *Trouver, au jeu de piquet, la probabilité pour celui qui fait les cartes de lever un as au moins dans le talon, qui est de trois cartes, quand il n'a aucun as en main.*

Soit $P = \frac{N}{D}$ cette probabilité.

1° Chercher D. Comme on a douze cartes en main, il en reste $32 - 12 = 20$, parmi lesquelles se trouvent les quatre as : trois de ces vingt cartes composent le talon, donc le nombre D, qui est le nombre de toutes les manières possibles dont le talon peut être composé, sera celui des combinaisons de vingt cartes prises trois à trois, c'est-à-dire : $\frac{20 \,.\, 19 \,.\, 18}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 1140$.

2° Chercher N. Le nombre N se compose de la somme de trois termes, savoir :

a_1, nombre des cas dans lesquels un as peut se rencontrer avec deux autres cartes;

a_2, nombre des cas dans lesquels deux as peuvent se rencontrer avec une autre carte;

a_3, nombre des cas dans lesquels trois as composent le talon.

Ainsi

$$N = a_1 + a_2 + a_3.$$

Il y a quatre as dans trente-deux cartes; par conséquent il y a $32 - 4 = 28$ autres cartes, desquelles celui qui fait les cartes en a en main douze, qui ne renferment pas d'as; il en reste donc seize.

1° Le nombre des chances de lever un as est 4.

Le nombre des chances de lever deux autres cartes est $\frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 120$.

Donc

$$a_1 = 4 \times 120 = 480.$$

2° Le nombre des chances de lever deux as est $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$.

Le nombre des chances de lever une autre carte est 16.

Donc

$$a_2 = 6 \times 16 = 96.$$

3° Le nombre des chances de lever trois as est $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$.

Donc

$$a_3 = 4.$$

Ainsi

$$N = 480 + 96 + 4 = 580.$$

Enfin, en divisant N par D on trouvera :

$$P = \frac{580}{1140} = \frac{29}{57}.$$

La probabilité contraire sera

$$Q = 1 - \frac{29}{57} = \frac{28}{57}.$$

On peut donc parier 29 contre 28 que le joueur trouve un as au moins dans le talon.

Remarque. *Trouver de même la probabilité pour celui qui a la main, de lever un as au moins dans les trois cartes du talon, quand il n'a aucun as en main.*

On trouvera en procédant d'une manière analogue :

$$P = \frac{252}{525} \quad \text{et} \quad Q = \frac{91}{525}.$$

Treizième exemple. *Trouver la probabilité pour celui qui a la main de lever un as et un roi dans les cinq cartes du talon, quand il n'a ni as ni roi en main.*

Les combinaisons suivantes peuvent avoir lieu au talon :

N° 1	1 as,	1 roi,	3 autres cartes,	
N° 2	1 as,	2 rois,	2 »	»
N° 3	1 as,	3 rois,	1 »	»
N° 4	1 as,	4 rois,	0 »	»
N° 5	2 as,	1 roi,	2 »	»
N° 6	2 as,	2 rois,	1 »	»
N° 7	2 as,	3 rois,	0 »	»
N° 8	3 as,	1 roi,	1 »	»
N° 9	3 as,	2 rois,	0 »	»
N° 10	4 as,	1 roi,	0 »	»

Parmi ces dix cas les couples suivants donnent les mêmes chances :

N° 2 avec N° 5,
N° 3 avec N° 8,
N° 4 avec N° 10,
N° 7 avec N° 9.

Il reste donc seulement six cas distincts, savoir :

N° 1 avec $\frac{4}{1} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3520$ chances,

N^os 2 et 5 avec $\frac{4}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 1584$ » chacun,

N^os 3 et 8 avec $\frac{4}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{12}{1} = 192$ » chacun,

N^os 4 et 10 avec $\frac{4}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4$ » chacun,

N° 6 avec $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{12}{1} = 432$ »

N^os 7 et 9 avec $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 24$ » chacun.

Donc

$$N = 3320 + 2 + 1584 + 2 + 192 + 2 + 4 + 432 + 2 + 24 = 9144,$$

$$D = \frac{20 . 19 . 18 . 17 . 16}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} = 15504,$$

$$P = \frac{N}{D} = \frac{9144}{15504} = \frac{381}{646}, \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{265}{646}.$$

Quatorzième exemple. *Trouver la probabilité de faire cartes blanches.*

$$P = \frac{20 . 19 . 18 . 17 . 16 . 15 . 14 . 13 . 12 . 11 . 10 . 9}{52 \ 51 \ 50 \ 29 \ 28 \ 27 \ 26 \ 25 \ 24 \ 23 \ 22 \ 21}$$

$$= \frac{323}{578956} = \frac{1}{1792} \text{ (à peu près)}, \quad \text{d'où}$$

$$Q = \frac{1791}{1792}.$$

CHAPITRE II.

PROBABILITÉS DES ÉPREUVES RÉPÉTÉES.

19. Dans ce chapitre nous exposerons successivement les théories des probabilités relatives aux puissances et aux factorielles des polynomes et des binomes; puis celles qui sont relatives aux produits de binomes et de polynomes quelconques; ensuite quelques applications remarquables de ces théories.

§ I. — PUISSANCES DES POLYNOMES ET DU BINOME.

Soient

$$a_1, a_2 \ldots. a_l; \ b_1, b_2 \ldots. b_m; \ c_1, c_2 \ldots. c_n \ldots.$$

des événements ayant les probabilités

$$p_1, p_2 \ldots p_l; \ q_1, q_2 \ldots. q_m; \ r_1, r^2 \ldots r_n \ldots.$$

La probabilité P qu'ils ont lieu ensemble dans un seul ordre est (n° 15)

$$P = p_1 p_2 \ldots. p_l . q_1 q_2 \ldots. q_m . r_1 r_2 \ldots. r_n.$$

Mais si a_1 se répète l fois, b_1, m fois et c_1, n fois, on a

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_l \quad b_1 = b_2 \ldots = b_m \quad c_1 = c_2 \ldots = c_n \text{ etc.}$$
$$p_1 = p_2 = \quad = p_l \quad q_1 = q_2 \ldots = q_m \quad r_1 = r_2 \ldots = r_n \text{ etc.},$$

d'où

$$P = p_1^l q_1^m r_1^n.$$

Si l'événement composé dont il s'agit doit arriver dans un ordre quelconque,

$$P = p_1^l q_1^m r_1^n + p_1^l q_1^m r_1^n + \ldots = k p_1^l q_1^m r_1^n.$$

k désignant de combien de manières différentes on peut déterminer un ordre.

1. Puissance du polynome.

20. Si l'un des événements A, B, C... doit arriver nécessairement à chaque épreuve, et si leurs probabilités respectives sont $p, q, r \ldots$, la probabilité que l'un quelconque d'entre eux arrivera à l'une des épreuves sera :

$$P = p + q + r + \ldots = 1.$$

La probabilité qu'ils se produisent μ fois de suite, n'importe dans quel ordre, sera :

$$P = (p + q + r + \ldots)^\mu = \sum \frac{\mu !}{l!\, m!\, n!} p^l q^m r^n \ldots = 1. \quad . \quad (1)$$

$$\mu = l + m + n + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Le terme général

$$\varpi = \frac{\mu !}{l!\, m!\, n! \ldots} p^l q^m r^n . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

exprime la probabilité que sur μ épreuves on produira, dans un ordre quelconque, A, l fois, B, m fois, C, n fois, etc., car on a ici $k = \frac{\mu!}{l!\,m!\,n!} \ldots$, égal au nombre des permutations de μ lettres, dans lesquelles il entre l lettres A, m lettres B, n lettres C ....

2. Puissance du binome.

S'il n'y a que deux événements A et B, alors $P = p + q = 1$, exprime la probabilité que A ou B se produira en une seule épreuve; la probabilité qu'ils se produiront μ fois de suite, n'importe dans quel ordre, sera :

$$P = (p+q)^{\mu} = \sum \frac{\mu!}{m!\,n!}\,p^m q^n \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

$$\mu = m + n.$$

Le terme général

$$\varpi = \frac{\mu!}{m!\,n!}\,p^m q^n = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,n}\,p^{\mu-n}q^n$$

exprime la probabilité qu'en μ épreuves A arrive m fois, et B, n fois, dans un ordre quelconque; car $k = \frac{\mu!}{m!\,n!}$ exprime le nombre des permutations de μ lettres dans lesquelles m sont égales à A, et n égales à B.

3. Polynome des factorielles.

21. Une urne renferme en tout s boules, dont a sont marquées α, b sont marquées β, c sont marquées γ, etc...

On fait μ tirages sans remettre dans l'urne la boule extraite; on demande la probabilité ϖ qu'en μ tirages il sortira m boules α, n boules β, l boules γ, etc., n'importe dans quel ordre; et la probabilité P qu'en μ tirages il sortira des boules α, β, γ..., n'importe l'ordre et le nombre.

Nous commencerons par supposer qu'on extraie d'abord les m boules α, puis les n boules β, et enfin les l boules γ.

Soient p_1 la probabilité de tirer une boule α au 1er tirage;

» p_2 » » » α au 2d tirage;

⋮

» p_m » » » α au m^e tirage;

» q_1, q_2 ..... q_n les probabilités respectives de tirer une boule β au 1er, au 2d, ... au n^e tirage;

Soient r_1, r_2 ... r_l les probabilités respectives de tirer une boule γ au 1er, au 2d, au .... l^e tirage.

En supposant que les boules sortent dans l'ordre indiqué, on aura les probabilités simples

$$p_1 = \frac{a}{s} \qquad p_2 = \frac{a-1}{s-1} \quad \ldots\, p_m = \frac{a-m+1}{s-m+1},$$

$$q_1 = \frac{b}{s-m} \qquad q_2 = \frac{b-1}{s-m-1} \ldots \qquad q_n = \frac{b-n+1}{s-m-n+1},$$

. . . .

$$r_1 = \frac{c}{s-m-n},\; r_2 = \frac{c-1}{s-m-n-1} \ldots\; r_n = \frac{c-l+1}{s-m-n-l+1},$$

Comme $\mu = m + n + l + \cdots$, la probabilité p du concours de ces tirages dans un seul ordre sera :

$$p = p_1p_2 \ldots p_m q_1 q_2 \ldots q_n\,.\,r_1\,.\,r_2 \ldots r_l \ldots = \frac{a(a-1)\ldots(a-m+1)\,.\,b(b-1)\ldots(b-n+1)\,.\,c(c-1)\ldots(c-l+1)}{s(s-1)\ldots\ldots(s-\mu+1)} = \frac{a^{m|-1}b^{n|-1}c^{l|-1}}{s^{\mu|-1}}$$

donc

$$\varpi = \frac{\mu!}{m!\,n!\,l!}\cdot\frac{a^{m|-1}b^{n|-1}c^{l|-1}}{s^{\mu|-1}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

sera la probabilité des tirages qui amènent m boules α, n boules β, l boules γ, etc., n'importe dans quel ordre.

En donnant à m, n, l ... toutes les valeurs, à partir de zéro, compatibles avec $\mu = m + n + l$... la somme de toutes ees valeurs exprime la probabilité P, donc

$$P = \sum \frac{\mu!}{m!\,n!\,l!}\cdot\frac{a^{m|-1}\,b^{n|-1}\,c^{l|-1}}{s^{\mu|-1}} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

On peut encore obtenir la valeur de P de la manière suivante : Soient

$$\varpi_1 = \frac{a+b+c+\cdots}{s}$$

$$\varpi_2 = \frac{a+b+c+\cdots-1}{s-1}$$

$$\varpi_\mu = \frac{a+b+c+\cdots-\mu+1}{s-\mu+1}$$

les probabilités simples qu'à chacun des tirages consécutifs il ne sortira qu'une boule de l'une des marques α, β, γ .... la probabilité de leur concours sera

$$P = \varpi_1 \varpi_2 \varpi_3 \dots \varpi_\mu = \frac{[a+b+c+\dots]^{\mu|-1}}{s^{\mu|-1}} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Donc en comparant (2) et (3), on obtient

$$\frac{[a+b+c\dots]^{\mu|-1}}{s^{\mu|-1}} = \sum \frac{\mu\,!}{m\,!\,n\,!\,l\,!} \cdot \frac{a^{m|-1} b^{n|-1} c^{l|-1}}{s^{\mu|-1}} \quad . \quad . \quad (4).$$

4. Binome des factorielles.

22. Lorsqu'il n'y a que deux sortes de boules aux marques α et β, la formule (4) devient

$$\frac{(a+b)^{\mu|-1}}{s^{\mu|-1}} = \sum \frac{\mu\,!}{m\,!\,n\,!} \frac{a^{m|-1} \cdot b^{n|-1}}{s^{\mu|-1}} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Remarque I. Si la boule extraite est remise dans l'urne, les factorielles $a^{m|-1}$, etc. se changent en puissances, et l'on a

$$\frac{(a+b+c+\dots)^\mu}{s^\mu} = \sum \frac{\mu\,!}{m\,!\,n\,!\,l\,!} \frac{a^m b^n c^l \dots}{s^m s^n s^l}.$$

Soit

$$\frac{a}{s} = p, \quad \frac{b}{s} = q, \quad \frac{c}{s} = r, \text{ etc.}$$

il vient

$$(p+q+r+\dots)^\mu = \sum \frac{\mu\,!}{m\,!\,n\,!\,l\,!} p^m q^n r^l \dots$$

Remarque II. La formule (5) développée est

$$\frac{(a+b)^{\mu|-1}}{s^{\mu|-1}} = \frac{1}{s^{\mu|-1}} \left\{ a^{\mu|-1} + \mu\, a^{\mu-1|-1} b + \frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2} a^{\mu-2|-1} b^{2|-1} + \dots\dots \right.$$
$$\left. + \frac{\mu\,!}{k\,!\,\overline{\mu-k}\,!} a^{k|-1} b^{\mu-k|-1} + \dots \mu a b^{\mu-1|-1} + b^{\mu|-1} \right\} = 1.$$

La probabilité R de tirer au moins k boules marquées α est

$$R = \frac{1}{s^{\mu|-1}} \left\{ a^{\mu|-1} + \mu a^{\mu-1|-1} b + \dots + \frac{\mu\,!}{k\,!\,\overline{\mu-k}\,!} a^{k|-1} b^{\mu-k|-1} \right\}.$$

La probabilité Q d'amener au moins une boule α est

$$Q = 1 - \frac{b^{\mu|-1}}{s^{\mu|-1}}.$$

5. Produit de facteurs binomes.

23. Si dans $\mu = m + n$ épreuves, p_1 et q_1 sont les probabilités des événements contraires A et B à la première épreuve; p_2 et q_2 leurs probabilités à la seconde; .... p_μ et q_μ leurs probabilités à la μ^{me} épreuve; quelle est la probabilité P que A et B arriveront, dans un ordre quelconque, le premier m fois et le second n fois?

$p_1 + q_1$, $p_2 + q_2$, ... $p_\mu + q_\mu$ sont les probabilités que A ou B arriveront respectivement à la 1re, 2me, ... μ^{me} épreuve; la probabilité qu'ils se produiront suivant une combinaison quelconque en μ épreuves, sera par suite :

$$\varpi = (p_1 + q_1)(p_2 + q_2) \dots (p_\mu + q_\mu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Donc la probabilité demandée P sera la somme de tous les termes de ϖ dans lesquels entreront m des facteurs $p_1 \dots q_\mu$ avec n des facteurs $q_1 \dots q_\mu$. Ces termes seront homogènes en p et q, et contiendront m dimensions en p, et n dimensions q : ainsi, en remplaçant les lettres

par $\quad p_1,\ p_2\ \dots\ p_\mu \quad q_1,\ q_2\ \dots\ q_\mu$

on aura : $\quad p_1u,\ p_2u\ \dots\ p_\mu u \quad q_1v,\ q_2v\ \dots\ q_\mu v,$

$$(p_1u + q_1v)(p_2u + q_2v) \dots (p_\mu u + q_\mu v) = \Sigma\, H\, u^k v^l$$

Soit M le coefficient du terme de cette somme qui répond à $k = m$, $l = n$, on aura $P = M$.

6. Produit de facteurs polynomes.

24. On a un dé à q faces numérotées 1, 2 .... q. Chaque face a une probabilité particulière qui change d'une épreuve à la

suivante; chaque fois que l'on jette le dé, on note le numéro sorti. Après μ jets consécutifs on additionne les numéros inscrits, et l'on demande la probabilité P que la somme soit m.

Désignons par $p_1^{(1)}\, p_1^{(2)} \ldots\ldots p_1^{(q)}$ les probabilités des faces $1 . 2 \ldots q$ à la première épreuve; par $p_2^{(1)}\, p_2^{(2)} \ldots p_2^{(q)}$ leurs probabilités à la seconde épreuve; et enfin par $p_\mu^{(1)}\, p_\mu^{(2)} \ldots p_\mu^{(q)}$ leurs probabilités à la μ^{me} épreuve.

$$\varpi_1 = p_1^{(1)} + p_1^{(2)} + \cdots + p_1^{(q)}$$

représente la probabilité que l'une des faces $1 \ldots q$ sortira au premier jet;

$$\varpi_2 = p_2^{(1)} + p_2^{(2)} + \cdots p_2^{(q)}$$

la même probabilité relative au second jet, etc.

Enfin

$$\varpi_\mu = p_\mu^{(1)} + p_\mu^{(2)} + \cdots + p_\mu^{(q)}$$

celle relative au μ^{me} jet.

Donc

$$\varpi = \varpi_1 \varpi_2 \ldots \varpi_\mu = \{p_1^{(1)} + p_1^{(2)} + \cdots p_1^{(q)}\}\, \{p_2^{(1)} + \cdots p_2^{(q)}\} \cdots \{p_\mu^{(1)} + \cdots p_\mu^{(q)}\}$$

probabilité de l'arrivée simultanée de tous les événements, renfermera les probabilités relatives à toutes les sommes possibles produites par μ jets.

Donc la probabilité cherchée P est la somme des termes de ϖ dans lesquels la somme des indices supérieurs est m. Pour faire ressortir cette somme, remplaçons le produit ϖ, par le suivant :

$$\varpi = \{p_1^{(1)}t + p_1^{(2)}t^2 + \cdots p_1^{(q)}t^q\}\, \{p_2^{(1)}t + \cdots p_2^{(q)}t^q\} \cdots \{p_\mu^{(1)}t + \cdots p_\mu^{(q)}t^q\}$$
$$= \Sigma\, U_i t^i.$$

On aura

$$P = U_m.$$

Remarque. En décomposant m de toutes les manières possibles en μ chiffres, en ayant égard aux arrangements, on obtient U_m. En effet soient

$$m = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \cdots + \lambda_1$$
$$m = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \cdots + \lambda_2$$
etc.

On aura :

$$P = U_m = p_1^{(\alpha_1)} p_2^{(\beta_1)} p_3^{(\gamma_1)} \ldots p_\mu^{(\lambda_1)} + p_1^{(\alpha_2)} p_2^{(\beta_2)} \ldots p_\mu^{(\lambda_2)} + \ldots$$

§ 2. APPLICATIONS DIVERSES DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS.

25. Lemme. Chercher le coefficient K de ϖ^p dans le développement de

$$\{\varpi + \varpi^2 + \cdots + \varpi^q\}^n = \varpi^n \{1 + \varpi + \cdots \varpi^{q-1}\}^n.$$

Posons $p = n + \alpha$, et cherchons le coefficient de ϖ^α dans le développement de

$$\left.\begin{aligned}(1 + \varpi + \cdots + \varpi^{q-1})^n &= \frac{(1-\varpi^q)^n}{(1-\varpi)^n} = (1-\varpi^q)^n (1-\varpi)^{-n} \\ &= \left[1 - n\varpi^q + \frac{n^{2|-1}}{2!}\varpi^{2q} - \frac{n^{3|-1}}{3!}\varpi^{3q} + \cdots\right] \\ &\times \left[1 + n\varpi + \frac{(n+1)^{2|-1}}{2!}\varpi^2 + \frac{(n+2)^{3|-1}}{3!}\varpi^3 + \cdots\right]\end{aligned}\right\} (a).$$

Or évidemment

$$0 + \alpha = \alpha,$$
$$q + \alpha - q = \alpha,$$
$$2q + \alpha - 2q = \alpha, \text{ etc.}$$

Les premier, second, etc., termes du premier facteur, devront donc être multipliés par les termes en ϖ^α, $\varpi^{\alpha-q}\, \varpi^{\alpha-2q} \ldots$ du second facteur; or ces derniers sont

$$(n + \alpha - 1)\, C_\alpha\, \varpi^\alpha,$$
$$(n + \alpha - q - 1)\, C_{\alpha-q}\, \varpi^{\alpha-q},$$
$$(n + \alpha - 2q - 1)\, C_{\alpha-2q}\, \varpi^{\alpha-2q}, \text{ etc.}$$

donc, le terme en ϖ^α sera

$$\left\{\begin{aligned}&(n+\alpha-1)\, C_\alpha - n\, C_1 . (n + \alpha - q - 1)\, C_{\alpha-q} \\ &\quad + n\, C_2 . (n + \alpha - 2q - 1)\, C_{\alpha-2q} + \ldots\end{aligned}\right\} \varpi^\alpha$$

et l'on aura :

$$\left.\begin{aligned}K = &(n+\alpha-1)\, C_\alpha - n\, C_1 . (n + \alpha - q - 1)\, C_{\alpha-q} \\ &+ n\, C_2 . (n + \alpha - 2q - 1)\, C_{\alpha-2q} + \ldots\end{aligned}\right\} (\text{I}).$$

Simplification de K.

Comme on a

$$(\alpha - \mu q) + (n - 1) = n + \alpha - \mu q - 1$$

on aura :

$$(n + \alpha - \mu q - 1) C_{\alpha - \mu q} = (n + \alpha - \mu q - 1) C_{n-1} = (p - \mu q - 1) C_{n-1}.$$

Posons successivement dans cette formule

$$\mu = 0, 1, 2, 3.....$$

nous trouverons :

$$(n + \alpha - 1) C_\alpha = (p - 1) C_{n-1},$$
$$(n + \alpha - q - 1) C_{\alpha - q} = (p - q - 1) C_{n-1}.$$
$$(n + \alpha - 2q - 1) C_{\alpha - 2q} = (p - 2q - 1) C_{n-1}, \text{ etc.}$$

Alors

$$K = (p-1) C_{n-1} - n C_1 . (p - q - 1) C_{n-1} + n C_2 . (p - 2q - 1) C_{n-1} - \text{etc.}$$
$$= \frac{(p-1)(p-2)...(p-n+1)}{1.2.....(n-1)} - n \frac{(p-q-1)(p-q-2)...(p-q-n+1)}{1.2....(n-1)}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{(p-2q-1)(p-2q-2)...(p-2q-n+1)}{1.2....(n-1)} - \text{etc.,}$$
$$= \frac{(p-1)^{n-1|-1}}{n-1!} - n \frac{(p-q-1)^{n-1|-1}}{n-1!} + \frac{n^{2|-1}}{2!} \frac{(p-2q-1)^{n-1|-1}}{n-1!} - \text{etc.}$$

Problème de Moivre.

26. *Une urne contient* q *boules numérotées* 1. 2.... q; *on en tire une, on inscrit son numéro, puis on la remet; on fait de cette sorte* n *tirages, on additionne les numéros inscrits, et l'on demande quelle est la probabilité* Π, *que la somme de ces numéros est égale à* p.

Solution. Premier cas. *Les probabilités simples sont inégales.*

Les probabilités de la sortie des boules

$$1, 2, ... q$$

sont respectivement

$$\varpi_1, \varpi_2 .... \varpi_q.$$

Soient a_1 le nombre de sorties de la boule 1;

a_2 » » » 2;

: . . . .

a_q » » » q.

On aura

$$a_1 + a_2 + ... + a_q = n \; . \; . \; . \quad (1)$$

et

$$a_1 + 2a_2 + ... + q a_q = p \; . \; . \; . \quad (2).$$

Soient en outre

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 + ... = n \\ \alpha_2 + \beta_2 + ... = n \\ \alpha_3 + \beta_3 + ... = n \end{array}\right\} (3) \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha_1 + 2\beta_1 + ... = p \\ \alpha_2 + 2\beta_2 + ... = p \\ \alpha_3 + 2\beta_3 + ... = p \end{array}\right\} (4),$$

etc., etc.,

tous les systèmes possibles qui satisfont à (1) et (2); on a :

$$(\varpi_1 + \varpi_2 + ... + \varpi_q)^n = \sum \frac{n!}{Q_1! \, Q_2! ... Q_q!} \varpi_1^{Q_1} \varpi_2^{Q_2} ..... \varpi_q^{Q_q} \; . \; . \quad (5)$$

La probabilité Π sera la somme des termes de (5) dans lesquels Q_1, Q_2 ..... satisfont à (1) et (2). Ainsi

$$\Pi = N_1 \varpi_1^{\alpha_1} \varpi_2^{\beta_1} .... + N_2 \varpi_1^{\alpha_2} \varpi_2^{\beta_2} + ... + N_i \varpi_1^{\alpha_i} \varpi_2^{\beta_i} \; . \; . \; . \quad (6)$$

Second cas. *Les probabilités simples sont égales :*

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \text{etc.} = \frac{1}{q}$$

d'où :

$$\Pi = N_1 \left(\frac{1}{q}\right)^{\alpha_1 + \beta_1 + ...} + N_2 \left(\frac{1}{q}\right)^{\alpha_2 + \beta_2 + ...} + ... + N_i \left(\frac{1}{q}\right)^{\alpha_i + \beta_i + ...}$$
$$= (N_1 + N_2 + ... N_i) \frac{1}{q^n} = \frac{K}{q^n}.$$

L'équation (5) montre que $N_1, N_2 .... N_i$ ne dépendent pas de $\varpi_1, \varpi_2, ...$; soient donc :

$$\varpi_1 = \varpi$$
$$\varpi_2 = \varpi^2, \text{ etc.}$$

Alors

$$\Pi = N_1\varpi^{\alpha_1+2\beta_1+\cdots} + N_2\varpi^{\alpha_2+2\beta_2+\cdots} + N_3\varpi^{\alpha_3+2\beta_3+\cdots} + \cdots + N_i\varpi^{\alpha_i+2\beta_i+\cdots}$$
$$= (N_1 + N_2 + \cdots N^i)\varpi^p = K\varpi^p$$

Le premier membre de (5) devient

$$(\varpi + \varpi^2 + \cdots + \varpi^q)^n = \Sigma H\varpi^h;$$

donc $K = H$ pour $h = p$; c'est-à-dire que K est le coefficient de ϖ^p dans le développement de $(\varpi + \varpi^2 + \cdots + \varpi^q)^n$; par suite :

$$K = (p-1)C_{n-1} - nC_1(p-q-1)C_{n-1} + nC_1(p-2q-1)C_{n-1} - \text{etc.}$$
$$= (p-1)^{n-1/-1} - n(p-q-1)^{n-1/-1} + \frac{n^{2/-1}}{2!}(p-2q-1)^{n-1/-1} - \text{etc.}$$

et nous obtiendrons la probabilité cherchée Π en substituant cette valeur de K dans l'expression

$$\Pi = \frac{1}{q^n}K.$$

Corollaire. Cette même formule résout également le problème suivant :

Quelle est la probabilité d'amener le coup p *en jetant sur un tapis* n *dés à* q *faces numérotées* 1, 2, ... q?

27. *Cas de la formule de Moivre où* q = ∞.

Nous avons trouvé au n° précédent :

$$\Pi = \frac{1}{q^n}\left\{\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots(n-1)} - n.\frac{(p-q-1)(p-q-2)\ldots(p-q-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(p-2q-1)(p-2q-2)\ldots(p-2q-n+1)}{1.2\ldots(n-1)} - \text{etc.}\right\}.$$

En multipliant et divisant par q^{n-1}, il vient :

$$\Pi = \frac{1}{q}\left\{\frac{\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{p}{q}-\frac{2}{q}\right)\ldots\left(\frac{p}{q}-\frac{n}{q}+\frac{1}{q}\right)}{1.2\ldots(n-1)} - n.\frac{\left(\frac{p}{q}-1-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{p}{q}-1-\frac{2}{q}\right)\ldots\left(\frac{p}{q}-1-\frac{n}{q}+\frac{1}{q}\right)}{1.2\ldots(n-1)}\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\left(\frac{p}{q}-1-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{p}{q}-2-\frac{2}{q}\right)\ldots\left(\frac{p}{q}-2-\frac{n}{q}+\frac{1}{q}\right)}{1.2\ldots(n-1)} - \ldots\right\}.$$

Posons $q = \infty$, $p = \infty$, $\frac{p}{q} = s$, $\frac{1}{q} = ds$, nous aurons

$$\Pi = ds\left\{\frac{(s-ds)(s-2ds)\ldots(s-(n-1)ds)}{1.2\ldots(n-1)} - n\frac{(s-1-ds)(s-1-2ds)\ldots\{s-1-(n-1)ds\}}{1.2\ldots(n-1)}\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(s-2-ds)(s-2-2ds)\ldots\{s-2-(n-1)ds\}}{1.2\ldots(n-1)}\right\}$$

d'où, en supprimant les termes en ds à côté des termes finis :

$$\Pi = ds\left\{\frac{s^{n-1}}{1.2..n-1} - n\frac{(s-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(s-2)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} - \text{etc.}\right\}.$$

En intégrant entre les limites $\frac{a}{q}$ et $\frac{b}{q}$ de s, nous aurons la probabilité P que p est compris entre a et b :

$$P = \frac{1}{1.2\ldots n}\left\{\left[\left(\frac{b}{q}\right)^n - n\left(\frac{b}{q}-1\right)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{b}{q}-2\right)^n \ldots\right]\right.$$
$$\left. - \left[\left(\frac{a}{q}\right)^n - n\left(\frac{a}{q}-1\right)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{a}{q}-2\right)^n - \ldots\right]\right\}.$$

Exemple. En supposant que pour chaque orbite toutes les inclinaisons depuis 0 jusqu'à 100 grades soient également possibles, déterminer la probabilité que la somme des inclinaisons des 10 orbites planétaires, sans y comprendre l'écliptique, sera comprise entre les limites 0 et 91g4187, ce dernier nombre étant, en 1801, la somme des inclinaisons des orbites planétaires à celle de la terre.

L'angle droit 100 grades étant divisé en un nombre infiniment grand q de parties égales, on aura $\frac{p}{q} = \frac{91,4187}{100}$; $n = 10$, $a = o$, $b = 91^g4187$; d'où

$$P = \frac{1}{1.2\ldots10}\left(\frac{90.4187}{100}\right)^{10} = \frac{1}{3951200}(0,914487)^{10} = 0.0000001 1255.$$

28. Problème II. *Un nombre* s *de jeunes gens est inscrit pour le tirage au sort de la milice;* a *seront réformés,* c *forment le contingent : quelqu'un tire le numéro* $\mu >$ c *et* $<$ c + a. *Quelle est la probabilité qu'il partira?*

Solution. Si, parmi les μ premiers numéros, $\mu - c$ au moins sont tirés par des jeunes gens qui seront réformés, celui qui tire le numéro μ partira.

Ce problème revient donc à extraire en μ tirages au moins $\mu - c$ boules blanches, parmi a blanches et $s - a$ noires, la boule extraite n'étant pas remise.

Posons $s - a = b$, $\mu - c = k$.

La probabilité de cette extraction sera (n° 22)

$$P = \frac{1}{s^{\mu|-1}}\left\{a^{\mu|-1} + \mu a^{\mu-1|-1}b + \cdots\cdots + \frac{\mu!}{k!\,\mu - k!}\,a^{k|-1}.\,b^{\mu-k|-1}\right\}$$

$$= 1 - \frac{1}{s^{\mu|-1}}\left\{b^{\mu|-1} + \mu a b^{\mu-1|-1} + \cdots\cdots + \frac{\mu!}{(k-1)!\,(\mu-k+1)!}a^{k-1|-1}b^{\mu-k+1|-1}.\right\}$$

Soit

$$s = 10,\ a = 5,\ c = 5,\ \mu = 7;\ P = \frac{49}{60}.$$

29. Problème III. *Une assemblée délibérante se compose de* s *membres;* a *forment la majorité,* b *la minorité. On fait* μ *tirages pour composer une commission de* μ *membres. Quelle est la probabilité que dans ce nombre de tirages il sort au moins* $\frac{\mu}{2} + 1 = k$ *noms appartenant à la majorité.*

Solution. Ce problème revient à chercher la probabilité d'extraire, en μ tirages, au moins $\frac{\mu}{2} + 1 = k$ boules blanches d'une urne qui renferme s boules, dont a blanches et b noires, sans remettre dans l'urne la boule extraite.

Il suffira donc, pour la résoudre, d'appliquer la formule précédente (n° 28), en y faisant $k = \frac{\mu}{2} + 1$.

Problème de Pascal (*).

30. *Déterminer la probabilité de deux joueurs* A *et* B, *de gagner le premier* a *points, l'autre* b *points pour finir la partie, dans un jeu où l'un des deux doit gagner un point à chaque coup,* p *étant la probabilité de* A, q *celle de* B *pour gagner le point.*

(*) C'est par ce problème, proposé par le chevalier de Méné à Fermat et à Pascal, et résolu d'abord par ce dernier, qu'a commencé le calcul des probabilités.

Solution. Soient P et Q les probabilités cherchées; $P + Q = 1$.

La partie sera terminée tout au plus en $a + b - 1$ coups; donc le problème revient à chercher la probabilité P qu'en $\mu = a + b - 1$ épreuves, A, ayant la probabilité p de gagner à chaque coup, gagne au moins a fois; on aura donc (n° 20) :

$$P = p^k + \mu p^{k-1}q + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}p^{k-2}q^2 + \cdots + \frac{\mu(\mu-1)\cdots(a+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots b-1}p^a q^{b-1}.$$

31. Problème V. *Une urne contient* m *boules; on en tire un certain nombre; chercher la probabilité que ce nombre sera pair ou impair.*

Les nombres de combinaisons paires sont

$$\frac{m^{2|-1}}{2!},\quad \frac{m^{4|-1}}{4!},\quad \text{etc....}$$

Les nombres de combinaisons impaires sont

$$m,\quad \frac{m^{3|-1}}{3!},\quad \text{etc...}$$

Le nombre total des combinaisons est :

$$1 + m + \frac{m^{2|-1}}{2!} + \frac{m^{3|-1}}{3!} + \cdots - 1 = (1+1)^m - 1 = 2^m - 1.$$

Soient P et Q les probabilités cherchées; on a :

$$P + Q = 1,\quad P = \frac{1}{2^m - 1}\left\{\frac{m^{2|-1}}{2!} + \frac{m^{4|-1}}{4!} + \cdots\right\},$$

et

$$Q = \frac{1}{2^m - 1}\left(m + \frac{m^{3|-1}}{3!} + \cdots\right).$$

Or

$$(1+1)^m = 1 + m + \frac{m^{2|-1}}{2!} + \frac{m^{3|-1}}{3!} + \text{etc.}$$

$$(1-1)^m = 1 - m + \frac{m^{2|-1}}{2!} - \frac{m^{3|-1}}{3!} + \text{etc.}$$

Ajoutons et retranchons ces deux identités :

$$2^m = 2\left\{1 + \frac{m^{2l-1}}{2!} + \frac{m^{4l-1}}{4!} + \cdots\right\}$$
$$= 2\left(m + \frac{m^{3l-1}}{3!} + \cdots\right)$$

donc

1° $$P = \frac{2^{m-1}-1}{2^m-1}, \quad \text{et} \quad Q = \frac{2^{m-1}}{2^m-1}.$$

Or

$$2^{m-1} > 2^{m-1} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}(2^m-1);$$

nous aurons donc

$$\frac{2^{m-1}}{2^m-1} > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2^{m-1}-1}{2^m-1} < \frac{1}{2};$$

par suite $Q > P$.

2° $$Q = \frac{2^{m-1}}{2^m-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2^m-1)}, \quad P = \frac{2^{m-1}-1}{2^m-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2^m-1)},$$

plus m est grand, plus $\frac{1}{2(2^m-1)}$ est petit; donc si m est très-grand, P et Q diffèrent peu de $\frac{1}{2}$.

Au contraire plus m est petit, plus $\frac{1}{2(2^m-1)}$ approche de $\frac{1}{2}$; alors Q approche de 1, et P de 0.

Enfin si $m = 1$, $Q = 1$, $P = 0$.

32. Problème VI. — *Une urne contient* m *boules blanches et* m *noires : quelle est la probabilité* P *qu'en tirant un nombre pair de boules, il y aura autant de noires que de blanches?*

Solution. Le nombre des cas où l'on tire 1, 2, 3 .... boules de chaque couleur est

$$m, \quad \frac{m^{2l-1}}{2!}, \quad \frac{m^{3l-1}}{3!}, \text{ etc.}$$

Donc le nombre des cas où l'on tirera 1 blanche et 1 noire,
» » » 2 » 2 »
» » » 3 » 3 »
. . . . etc.

est respectivement

$$(m)^2, \quad \left(\frac{m^{2l-1}}{2!}\right)^2, \quad \left(\frac{m^{3l-1}}{3!}\right)\cdots$$

donc le nombre total de cas où l'on tirera un nombre égal de blanches et de noires est

$$(m)^2 + \left(\frac{m^{2l-1}}{2!}\right)^2 + \left(\frac{m^{3l-1}}{3!}\right)^2 + \cdots = \frac{(2m)^{ml-1}}{m!} - 1.$$

Comme on en tire chaque fois un nombre pair, $2^{2m-1} - 1$ est le nombre de tous les cas possibles; donc

$$P = \frac{\frac{(2m)^{ml-1}}{m!} - 1}{2^{2m-1} - 1}.$$

Si m est très-grand

$$P = \frac{\frac{(2m)^{ml-1}}{m!}}{2^{2m-1}} = \frac{2}{\sqrt{m\pi}} \text{ à peu près.}$$

En effet

$$\frac{(2m)^{ml-1}}{m!} = \frac{2m(2m-1)\ldots(m+1).m(m-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots\ldots(m-1)m.1.2\ldots\ldots(m-1)m}.$$

Or, on sait que, si m est très-grand, on a à peu près (*) :

$$1.2\ldots m = m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m};$$

d'où ;

$$(1.2\ldots m)^2 = m^{2m}e^{-2m}.2\pi m$$
$$1.2\ldots 2m = (2m)^{2m}.e^{-2m}\sqrt{4\pi m}$$
$$\frac{(2m)^{ml-1}}{m!} = \frac{(2m)^{2m}.e^{-2m}.\sqrt{4\pi m}}{m^{2m}.e^{-2m}.\sqrt{2\pi m}.\sqrt{2\pi m}} = \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}.$$

Donc

$$P = \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}.2^{2m-1}} = \frac{2.2^{2m}}{\sqrt{\pi m}.2^{2m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi m}}.$$

(*) Voir la note I, à la fin de l'ouvrage.

33. Problème VII. *Une loterie est composée de* n *numéros; il en sort* r *à chaque tirage : trouver la probabilité* Π *que tous seront sortis en* i *tirages.*

Solution. Désignons par

$Z_{n,q}$ le nombre des cas où, après i tirages tous les numéros $1, 2 \dots q$ parmi n numéros seront sortis,

$Z_{n,q-1}$ le nombre des cas où, après i tirages les numéros $1, 2 \dots q-1$ parmi n numéros seront sortis,

$Z_{n-1,q-1}$ le nombre des cas où, après i tirages les numéros $1, 2 \dots q-1$ parmi $n-1$ numéros seront sortis.

$Z_{n,q-1}$ se compose de deux parties, savoir :

1° Des combinaisons où les numéros $1, 2 \dots q-1$ se rencontrent avec q;

2° Des combinaisons où q n'entre pas.

Or si l'on enlève le numéro q, les $n-1$ numéros restants pourront se combiner avec les numéros $1, 2 \dots q-1$, et former les combinaisons de ces derniers où q n'entre pas.

Donc :

$$Z_{n,q-1} = Z_{n,q} + Z_{n-1,q-1}$$

ou

$$Z_{n,q} = Z_{n,q-1} - Z_{n-1,q-1} \quad \dots \dots \quad (1)$$

Le nombre des cas possibles dans un tirage est exprimé par

$$\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1.2\dots r} = \frac{n^{r|-1}}{r!}.$$

Donc celui de tous les cas dans i tirages est

$$\left\{\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1.2\dots r}\right\}^i \quad \dots \dots \quad (2)$$

Soit P la probabilité que dans i tirages les numéros $1, 2 \dots q$ parmi les n soient sortis :

$$P = \frac{Z_{n,q}}{\left\{\frac{n^{r|-1}}{r!}\right\}^i} \quad \dots \dots \quad (3)$$

De la suite :

$$Z_{1,q-1},\ Z_{2,q-1},\ Z_{3,q-1} \dots Z_{n,q-1},$$

on tire :

$$Z_{2,q-1} - Z_{1,q-1} = \Delta Z_{1,q-1}$$
$$Z_{3,q-1} - Z_{2,q-1} = \Delta Z_{2,q-1}$$
$$Z_{4,q-1} - Z_{3,q-1} = \Delta Z_{3,q-1}$$

etc.

$$Z_{n,q-1} - Z_{n-1,q-1} = \Delta Z_{n-1,q-1} \quad \dots \dots \quad (4)$$

Dans cette formule (4) faisons :

1° $q-1 = 1, 2, 3$ etc., et $n = n$;

il vient :

$$\left.\begin{aligned} Z_{n,2} &= \Delta Z_{n-1,1} \\ Z_{n,3} &= \Delta Z_{n-1,2} \\ Z_{n,4} &= \Delta Z_{n-1,3} \\ Z_{n,5} &= \Delta Z_{n-1,4} \end{aligned}\right\} \quad \dots \dots \quad (5)$$

etc.

2° $q-1 = 1, 2, 3$ etc., et $n = n-1$;

on a :

$$\left.\begin{aligned} Z_{n-1,2} &= \Delta Z_{n-2,1} \\ Z_{n-1,3} &= \Delta Z_{n-2,2} \\ Z_{n-1,4} &= \Delta Z_{n-2,3} \end{aligned}\right\} \quad \dots \dots \quad (6)$$

etc.

d'où

$$\Delta Z_{n-1,2} = \Delta^2 Z_{n-2,1}$$
$$\Delta Z_{n-1,3} = \Delta^2 Z_{n-2,2}$$
$$\Delta Z_{n-1,4} = \Delta^2 Z_{n-2,3}$$

etc.

3° $q-1 = 1, 2, 3$ etc., et $n = n-2$;

on a :

$$\left.\begin{aligned} Z_{n-2,2} &= \Delta Z_{n-3,1} \\ Z_{n-3,2} &= \Delta Z_{n-3,2} \end{aligned}\right\} \quad \dots \dots \quad (7)$$

etc.

d'où

$$\Delta^2 Z_{n-2,\,2} = \Delta^3 Z_{n-3,\,1}$$
$$\Delta^2 Z_{n-2,\,3} = \Delta^3 Z_{n-3,\,2}$$
etc.

4° $q - 1 = 1, 2, 3$ etc.; et $n = n - 3$:

$$Z_{n-3,\,2} = \Delta Z_{n-4,\,1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$
etc.

d'où

$$\Delta^3 Z_{n-3,\,2} = \Delta^4 Z_{n-4,\,1}$$

A cause des relations 6, 7, 8, les équations (5) deviennent

$$Z_{n,2} = \Delta Z_{n-1,1}$$
$$Z_{n,3} = \Delta Z_{n-1,2} = \Delta^2 Z_{n-2,\,1}$$
$$Z_{n,4} = \Delta Z_{n-1,3} = \Delta^2 Z_{n-2,\,2} = \Delta^3 Z_{n-3,\,1}$$
$$Z_{n,5} = \Delta Z_{n-1,4} = \Delta^2 Z_{n-2,\,3} = \Delta^3 Z_{n-3,\,2} = \Delta^4 Z_{n-4,\,1}$$
etc. etc.

donc

$$Z_{n,\,q} = \Delta^{q-1} Z_{n-q+1,\,1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Le nombre de tous les cas possibles où dans i tirages les numéros $1, 2, \ldots q$, sortent parmi les n, est

$$\left[\frac{n^{r|-1}}{r\,!}\right]^i . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

Le nombre de tous les cas possibles où dans i tirages le numéro 1 ne sortira pas est égal à celui de tous les cas possibles où les numéros $1, 2, \ldots . q$, parmi $n - 1$ numéros, sortent, c'est-à-dire à

$$\left[\frac{(n-1)^{r|-1}}{r\,!}\right]^i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

Le nombre $Z_{n,\,1}$ de tous les cas où le numéro 1 sera sorti en i tirages est égal au nombre (α) de tous les cas relatifs aux numéros $1, 2 \ldots q$, moins le nombre (β) de tous les cas où le numéro 1 ne sort pas; donc

$$Z_{n,\,1} = \left\{\frac{n^{r|-1}}{r!}\right\}^i - \left\{\frac{(n-1)^{r|-1}}{r!}\right\}^i = \frac{\Delta\left[(n-1)^{r|-1}\right]^i}{(1.2\ldots r)^i} \quad . \; . \quad (10)$$

Changeons dans cette dernière formule n en $n - q + 1$, elle devient :

$$Z_{n-q+1,1} = \frac{\Delta\left[(n-q)^{r|-1}\right]^i}{(1\,.\,2\,\ldots\,r)^i}.$$

Donc par la formule (9),

$$Z_{n,q} = \Delta^{q-1}\,\frac{\Delta\left[(n-q)^{r|-1}\right]^i}{(1\,.\,2\,\ldots\,r)^i} = \frac{\Delta^q\left[(n-q)^{r|-1}\right]^i}{(1\,.\,2\,\ldots.\,r)^i}. \quad . \quad (11).$$

Substituant dans (3), il vient

$$P = \frac{\Delta^q\left[(n-q)^{r|-1}\right]^i}{\left[n^{r|-1}\right]^i} \text{ ou } \frac{\Delta^q\left[s^{r|-1}\right]^i}{(n^{r|-1})^i}. \quad . \; . \; . \; . \quad (a)$$

en posant $n - q = s$.

Maintenant considérons la suite

$$\left[s^{r|-1}\right]^i = \left[(n-q)^{r|-1}\right]^i = u$$
$$\left[(s+1)^{r|-1}\right]^i = \left[(n-q+1)^{r|-1}\right]^i = u_1$$
$$\left[(s+2)^{r|-1}\right]^i = \left[(n-q+2)^{r|-1}\right]^i = u_2$$
etc. etc.
$$\left[(s+q-1)^{r|-1}\right]^i = \left[(n-1)^{r|-1}\right]^i = u_{q-1}$$
$$\left[(s+q)^{r|-1}\right]^i = \left[n^{r|-1}\right]^i = u_q\,;$$

on a :

$$\Delta^q u = qu_q - qu_{q-1} + \frac{q^{2|-1}}{2!}u_{q-2} - \text{etc} \mp qu_1 \pm u.$$

Donc

$$\Delta^q\left[s^{r|-1}\right]^i = \left[n^{r|-1}\right] - q\left[(n-1)^{r|-1}\right]^i + \frac{q^{2|-1}}{2\,!}\left[(n-2)^{r|-1}\right]^i - \text{etc.}$$
$$\mp q\left[(n-q+1)^{r|-1}\right]^i \pm \left[(n-q)^{r|-1}\right]^i$$

En substituant dans (a), on aura :

$$P = 1 - \frac{q}{1}\left[\frac{n-r}{n}\right]^i + \frac{q^{2|-1}}{2!}\left[\frac{(n-r)^{2|-1}}{n^{2|-1}}\right]^i - \frac{q^{3|-1}}{3!}\left[\frac{(n-r)^{3|-1}}{n^{3|-1}}\right]^i + \text{etc.}$$

Posons $q=n$, nous aurons enfin :

$$\Pi=1-\frac{n}{1}\left[\frac{n-r}{n}\right]^i+\frac{n^{2|-1}}{2!}\left[\frac{(n-r)^{2|-1}}{n^{2|-1}}\right]^i$$
$$-\frac{n^{3|-1}}{3!}\left[\frac{(n-r)^{3|-1}}{n^{3|-1}}\right]^i+\text{etc.}\quad.\ .\ .\ .\ .\ .\quad(b)$$

Exemple $n=90$, $r=5$, $i=100$, on a $\Pi=0{,}7410>\frac{7}{10}$ et plus grand que $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{10}$.

34. Problème VIII. *Une loterie est composée de* n *numéros, dont un sort à chaque tirage. Trouver la probabilité* Π *qu'en* i *tirages tous seront sortis.*

Solution. La probabilité P que les numéros 1, 2, 3... q parmi les n numéros seront sortis en i tirages, en en tirant r à la fois, est (n° 33)

$$\mathrm{P}=\frac{\Delta^q\left[(n-q)\,(n-q\,1)\ldots.(n-q-r+1)\right]^i}{\left[n\,(n-1\ldots\ldots(n-r+1)\right]}$$

Pour $r=1$, on a $n-q-r+1=n-q$, et $n-r+1=n$; donc

$$\mathrm{P}=\frac{\Delta^q\,(n-q)^i}{n^i}.$$

Maintenant, soient

$$(n-q)^i=u$$
$$(n-q+1)^i=u_1$$
$$(n-q+2)^i=u_2$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$(n-1)^i=u_{q-1}$$
$$n^i=u_q,$$

la formule

$$\Delta^q u=u_q-qu_{q-1}+\frac{q^{q|-1}}{2!}\,u_{q-2}-\text{etc}\mp qu_1\pm u$$

donne

$$\Delta^q\,(n-q)^i=n^i-q\,(n-1)^i+\frac{q^{2|-1}}{2!}\,(n-2)^i-\frac{q^{3|-1}}{3!}(n-3)^i+\text{etc.},$$

de sorte que

$$\mathrm{P}=1-q\left(\frac{n-1}{n}\right)^i+\frac{q^{2|-1}}{2!}\left(\frac{n-2}{n}\right)^i-\text{etc.}$$

Posons $q=n$, nous aurons

$$\Pi=1-n\left(\frac{n-1}{n}\right)^i+\frac{n^{2|-1}}{2!}\left(\frac{n-2}{n}\right)^i-\text{etc.}\quad.\ .\ .\ .\quad(1)$$

Remarque. Posons :

$$\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right]^n=1-n\left(\frac{n-1}{n}\right)^i+\frac{n^{2|-1}}{2!}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2i}-\text{etc.}\quad(2)$$

Dans le second membre de la formule (1), le terme qui en a m avant lui, est $\left(\frac{n-m}{n}\right)^i$, et dans la formule (2), le terme de même est $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi}$. Passant aux logarithmes, on a

$$l.\left(\frac{n-m}{n}\right)^i=i\,l.\left(1-\frac{m}{n}\right)=-\frac{mi}{n}-\frac{1}{2}\frac{m^2i}{n^2}-\ldots$$
$$l.\left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi}=mi\,l.\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\frac{mi}{n}-\frac{1}{2}\frac{mi}{n^2}-\ldots$$

De sorte que si l'on peut négliger les termes de l'ordre $\frac{1}{n^2}$, on peut écrire

$$\Pi=\left\{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right\}^n\quad.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad(a)$$

35. Problème IX. *Le nombre* n *étant très-grand, quel est le nombre de tirages* i, *après lequel la probabilité que les* n *numéros seront sortis, est égale à* $\frac{1}{k}$?

Solution. La formule (a) donne

$$\frac{1}{k}=\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right]^n$$

d'où

$$i=\frac{l.\left[1-\sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right]}{l.(n-1)-l.(n)}.\quad.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad(b)$$

Pour effectuer le calcul de la formule (b), soit

$$\sqrt[n]{\frac{1}{k}}=1-z,\quad\frac{1}{k}=(1-z)^n,\quad\sqrt[n]{k}=\frac{1}{1-z}.$$

On aura

$$\frac{1}{n}\, l.k = l.\left(\frac{1}{1-z}\right) = -\, l.(1-z) = z + \frac{1}{2} z^2 + \ldots.$$

Si nous faisons

$$y = \frac{1}{n}\, l.k,$$

d'où

$$y = z + \frac{1}{2} z^2 + \ldots.$$

et que nous développions z suivant les puissances de y :

$$z = Ay + By^2 + \ldots.$$

nous aurons, pour déterminer les coefficients, l'équation identique :

$$y = (Ay + By^2 + \ldots) + \frac{1}{2}(Ay + By^2 + \ldots)^2 + \ldots.$$

ou

$$y = Ay + (B + \frac{1}{2} A^2)\, y^2 + \ldots..$$

d'où

$$A = 1,$$

$$B + \frac{1}{2} A^2 = o, \quad B = -\frac{1}{2}$$

et par suite :

$$z = y - \frac{1}{2} y^2 + \ldots. = \frac{1}{n}\, l.k - \frac{1}{2}\frac{(l.k)^2}{n^2} + \ldots = \frac{l.k}{n}\left(1 - \frac{l.k}{2n}\right).$$

Or,

$$\sqrt[n]{\frac{1}{k}} = 1 - z = 1 - \frac{l.k}{n}\left(1 - \frac{l.k}{2n}\right),$$

$$1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}} = \frac{l.k}{n}\left(1 - \frac{l.k}{2n}\right)$$

$$l.\left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right) = l.(l.k) - l.n + l.\left(1 - \frac{l.k}{2n}\right)$$

$$= l.(l.k) - l.n - \frac{l.k}{2n} - \frac{(l.k)^2}{4n^2} - \ldots$$

$$= l.(l.k) - l.n - \frac{l.k}{2n}. \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Or on sait que

$$l.\left(\frac{n-1}{n}\right) = l.(n-1) - l.n = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \text{etc} \ldots \quad (\beta)$$

L'équation (b) devient, par la substitution des valeurs (α) et (β) :

$$i = \frac{l.n - l.(l.k) + \frac{1}{2n}\, l.k}{\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{n\left[l.n - l.(l.k)\right] + \frac{1}{2}\, l.k}{1 + \frac{1}{2n}}$$

$$= \frac{\left[n\, l.n - l.(l.k)\right]\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) l.k}{1 - \frac{1}{4n^2}}$$

56. Problème X. *Une loterie est composée d'un très-grand nombre* n *de numéros; il en sort cinq à chaque tirage. Quelle est la probabilité que tous seront sortis après* i *tirages?*

Solution. Dans la formule

$$\Pi = 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-r}{n}\right)^i + \frac{n^{2/-1}}{2!}\left[\frac{(n-r)(n-r-1)}{n(n-1)}\right]^i - \text{etc.}$$

qui exprime la probabilité que n numéros sont sortis en i tirages, à raison de r numéros à chaque tirage, faisons $r = 5$, il vient :

$$\Pi = 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-5}{n}\right)^i + \frac{n^{2/-1}}{2!}\left[\frac{(n-5)(n-6)}{n(n-1)}\right]^i - \text{etc.}$$

Mais on a :

$$\left[1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right]^n = 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-5}{n}\right)^i + \frac{n^{2/-1}}{2!}\left(\frac{n-5}{n}\right)^{2i} - \text{etc.}$$

On peut donc poser approximativement

$$\Pi = \left[1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right]^n$$

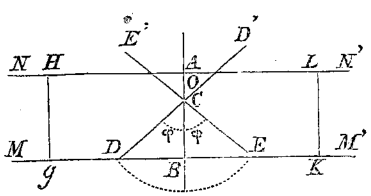
et si

$$\Pi = \frac{1}{2}, \qquad i = \frac{\log\left\{\dfrac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}\right\}}{\log\left(\dfrac{n}{n-5}\right)}$$

pour

$$n = 90, \qquad i = 85{,}204.$$

57. **Problème XI.** *Un plan est divisé en parties égales par des parallèles* NN′, MM′..... *distantes entre elles d'une longueur constante* a. *On projette sur ce plan un cylindre très-mince d'une longueur* 2r *égale au moins à* a. *Chercher la probabilité* P, *que ce cylindre rencontre deux parallèles consécutives quelconques.*



Solution. Soient,

$$AB = a, \quad BC = y, \quad AC = a - y$$
$$CD = CD' = r$$
$$CE = CE' = r$$
$$BO = r$$
$$DCB = BCE = \varphi, \qquad DCE = 2\varphi.$$

Quand le centre du cylindre est en C, si on le fait tourner autour de ce point, la moitié DC rencontre MM′ dans l'intérieur de l'angle DCE, et il en est de même de l'autre moitié CD′. Donc 4φ est le nombre des cas où le cylindre rencontre la droite MM′, quand le centre est au point C. Donc $\int_0^r 4\varphi dy$ est le nombre des cas où le cylindre rencontre MM′, en faisant glisser le centre du cylindre sur AB, de B en O; or $y = r\cos\varphi$, d'où:

$$\int 4\varphi dy = 4\varphi y - 4\int y d\varphi = 4\varphi y - 4\int r\cos\varphi d\varphi$$
$$= 4\varphi y - 4r\sin\varphi + \text{const}$$
$$\int_0^r 4\varphi dy = [4\varphi y - 4r\sin\varphi]_r - [4\varphi y - 4r\sin\varphi]_0.$$

Les limites de y $(r, 0)$, correspondent aux limites de φ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, attendu que $y = r\cos\varphi$; donc

$$\int_0^r 4\varphi d\varphi = [4.\,0\,.r - 4r\sin 0] - \left[4.\frac{\pi}{2}.0 - 4r\sin\frac{\pi}{2}\right] = 4r.$$

Faisons

$$AC = a - y = y':$$

le nombre des cas où le cylindre rencontre MN′ est

$$\int_0^r 4\varphi dy' = 4r$$

et le nombre des cas où le cylindre rencontre MM′, ou NN′ sera

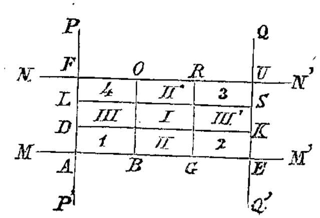
$$4r + 4r = 8r.$$

Le nombre de tous les arcs décrits par le cylindre pendant que son centre parcourt $AB = a$, et qu'il fait un tour entier dans chacune de ses positions, est $2\pi.a$, donc la probabilité cherchée

$$P = \frac{8r}{2\pi a} = \frac{4r}{a\pi}.$$

Remarque. Soit $GK = HL = h$, si le centre du cylindre se trouve dans l'intérieur du rectangle GKLH, le nombre des cas où il rencontre MM′ ou NN′ sera $h.8r$..... (a).

58. **Problème XII.** *Un plan est divisé en parties égales par un premier système de parallèles* MM′, NN′... *placées à la distance constante* a; *puis par un second système de parallèles* PP′, QQ′.... *perpendiculaires aux premières, et à égale distance* b *les unes des autres. Un cylindre d'une longueur* 2r *au plus égale à* b *ou à* a, *étant projeté sur ce plan, trouver la probabilité* P *que ce cylindre rencontre le contour de l'un quelconque des rectangles* AEUF, *dans lesquels le plan est divisé par les deux systèmes de parallèles.*



Solution. Soient

$$AF = a \; > \text{ou} = 2r$$
$$AE = b \; > \text{ou} = 2r$$
$$AB = AD = r$$
$$EG = EK = r$$
$$FL = FO = r$$
$$UR = US = r$$
$$BG = OR = b - 2r$$
$$DL = KS = a - 2r.$$

Le centre du cylindre, en tombant dans l'intérieur du rectangle AEUF, devra se trouver dans l'un des rectangles I, II, II', III, III' ou dans l'un des quatre carrés 1, 2, 3, 4.

1° S'il tombe dans I, il ne rencontre aucune des droites, ni du système MM', NN'.... ni du système PP', QQ'....

2° S'il tombe dans II ou II', alors le nombre des cas où il rencontre l'un et l'autre systèmes de parallèles, sera par la formule (a), n° 37 :

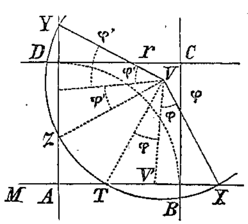
$$8r\,(b - 2r) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

3° S'il tombe dans III ou III', le nombre des cas où il rencontre les deux systèmes sera, par la même formule

$$8r\,(a - 2r) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

4° Il nous reste à examiner ce qui se passe dans les quatre carrés 1, 2, 3, 4.

Du point A, avec un rayon égal à r, décrivons un quart de cercle. Si le centre du cylindre est dans ce quadrant, il rencontre en tournant dans toutes ses positions les MN et les PQ à la fois; le nombre des combinaisons dans lesquelles cela aura lieu est



$$2\pi \, . \, \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi^2 r^2}{2}.$$

Si le centre du cylindre est en $V(xy)$, en dehors du quadrant, il ne pourra rencontrer, en tournant, qu'une des droites MM',

PP'. Pour chercher le nombre des cas où cela arrive, décrivons de V comme centre avec le rayon r, l'arc de cercle YZTX. Soient $TVX = 2\varphi$, $YVZ = 2\varphi'$; le cylindre ne rencontre la droite MM' que quand il est dans 2φ, et la droite PP' que quand il est dans $2\varphi'$.

Donc si le centre du cylindre est en V, le nombre des cas où l'une de ses moitiés rencontre MM', PP' sera $2(\varphi + \varphi')$; donc le nombre des cas où l'une et l'autre moitié rencontrent ces droites est $4(\varphi + \varphi')$.

Désignant par $dxdy$ l'élément de surface de la partie du rectangle située hors du quadrant, le nombre des cas relatifs à toutes les positions de V est

$$4\iint(\varphi + \varphi')\,dxdy \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

Pour déterminer les limites de cette intégrale, nous avons

$$AW = x = r\cos\varphi', \quad dx = -r\sin\varphi' d\varphi'$$
$$VW = y = r\cos\varphi, \quad dy = -r\sin\varphi d\varphi.$$

L'intégrale (α) devient

$$4r^2\iint(\varphi + \varphi')\sin\varphi\sin\varphi' d\varphi d\varphi' \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

Pour tout point V situé hors du quadrant, on a

$$x > \text{ou} = \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Pour B et D, on a :

$$y = 0, \quad x = r$$
$$y = r, \quad x = 0.$$

Les limites de $y\ (0, r)$ correspondent aux limites de $\varphi \left(0 \text{ et } \frac{\pi}{2}\right)$.

Pour déterminer celles de φ', on part de

$$x \geqq \sqrt{r^2 - y^2},$$

donc

$$r\cos\varphi' \geqq \sqrt{r^2 - r^2\cos^2\varphi} \geqq r\sin\varphi \geqq r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

et

$$\varphi' \leqq \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Ainsi les limites de φ' sont 0 et $\frac{\pi}{2}-\varphi$.

Donc le nombre des cas cherchés est

$$4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}(\varphi+\varphi')\sin\varphi' d\varphi'.$$

Intégrant par rapport à φ', on a d'abord :

$$\begin{aligned}\int(\varphi+\varphi')\sin\varphi' d\varphi' &= \varphi\int\sin\varphi' d\varphi' + \int\varphi'\sin\varphi' d\varphi'\\ &= -\varphi\cos\varphi' - \varphi'\cos\varphi' + \int\cos\varphi' d\varphi'\\ &= -\varphi\cos\varphi' - \varphi'\cos\varphi' + \sin\varphi' + c\\ &= -(\varphi+\varphi')\cos\varphi' + \sin\varphi' + c\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}(\varphi+\varphi')\sin\varphi' d\varphi' = -\frac{\pi}{2}\sin\varphi + \cos\varphi + \varphi.$$

Par suite

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}(\varphi+\varphi')\sin\varphi' d\varphi' = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\sin\varphi d\varphi.$$

Or, en intégrant par parties :

1° $$\int\sin^2\varphi d\varphi = -\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi,$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\pi.$$

2° $$\int\sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\sin^2\varphi,$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2}.$$

3° $$\int\varphi.\sin\varphi d\varphi = -\varphi\cos\varphi + \int\cos\varphi d\varphi = -\varphi\cos\varphi + \sin\varphi,$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\sin\varphi d\varphi = 1.$$

Donc

$$4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}(\varphi+\varphi')\sin\varphi' d\varphi' = 4r^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}+1\right) = \frac{r^2}{2}(12-\pi^2).$$

En ajoutant $\frac{\pi^2 r^2}{2}$, on obtient le nombre des cas relatifs au carré 1, qui sera donc $6r^2$; et quadruplant, on a le nombre des cas relatifs aux quatre carrés 1, 2, 3, 4, qui sera $24r^2$ (3).

Le nombre total des cas (1), (2), (3) :

$$8r(b-2r)+8r(a-2r)+24r^2 = 8(b+a)r - 8r^2 = 8r(a+b-r)$$

exprime tous les cas où le cylindre rencontre le système de parallèles MM′, NN′, PP′, QQ′.

Mais le nombre total des combinaisons possibles est égal au produit de 2π par l'aire AEUF ou $2\pi ab$, donc la probabilité que le cylindre rencontre les divisions du plan est

$$P = \frac{8r(a+b-r)}{2\pi ab} = \frac{4r(a+b-r)}{\pi ab}.$$

59. Problème XIII. *Si dans un tas de* x *pièces, on en prend un nombre au hasard, déterminer la probabilité que ce nombre est pair ou impair.*

Solution. Soient :

C_x la somme des cas dans lesquels le nombre est pair.

C'_x la somme des cas dans lesquels le nombre est impair.

P_x la probabilité que le nombre est pair.

P'_x la probabilité que le nombre est impair.

On a :

$$P_x = \frac{C_x}{C_x + C'_x}, \quad P'_x = \frac{C'_x}{C_x + C'_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Détermination de C_x *et* C'_x. x étant le nombre de pièces, si l'on prend une pièce de plus, C_{x+1} sera le nombre des cas dans lesquels $x+1$ est pair, C'_{x+1} le nombre des cas où $x+1$ est impair.

Dans le premier cas :

C_{x+1} se compose 1° du nombre précédent de cas pairs,

2° du nombre précédent de cas impairs,

car chacun de ces cas combiné avec la nouvelle pièce donne un cas pair.

Donc

$$C_{x+1} = C_x + C'_x; \quad \text{d'où} \quad \Delta C_x = C'_x \quad \text{et} \quad \Delta^2 C_x = \Delta C'_x. \quad . \quad . \quad (2)$$

Dans le second cas, C'_{x+1} se compose :

1° du nombre précédent de cas impairs;

2° du nombre précédent de cas pairs;

3° de l'unité, puisque la nouvelle pièce peut être prise seule.

Donc

$$C'_{x+1} = C'_x + C_x + 1,$$

ou

$$\Delta C'_x = C_x + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

donc, à cause de la formule (2)

$$\Delta^2 C_x = C_x + 1.$$

Or

$$\Delta^2 C_x = \Delta C_{x+1} - \Delta C_x = C_{x+2} - C_{x+1} - (C_{x+1} - C_x);$$

on aura par suite :

$$C_{x+2} - 2C_{x+1} + C_x = C_x + 1$$
$$C_{x+2} = 2C_{x+1} + 1$$

ou bien, en changeant $x+1$ en x :

$$C_{x+1} = 2C_x + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Intégrons la formule (4) qui peut s'écrire :

$$C_{x+1} - C_x = C_x + 1 \quad \text{ou} \quad \Delta C_x = C_x + 1.$$

Soit

$$C_x + 1 = y$$

d'où

$$\Delta C_x = \Delta y;$$

et par suite :

$$\Delta y = y.$$

Posons

$$y = a^x$$

d'où

$$\Delta y = a^{x+1} - a^x = a^x (a - 1);$$

et substituons, nous aurons :

$$a^x (a - 1) = a^x; \quad \text{ou} \quad a^x (a - 2) = 0;$$

d'où

$$a = 2$$

et

$$y = A2^x,$$

A étant une constante à déterminer.

Donc :

$$C_x = A2^x - 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Or, pour

$$x = 1, \quad \text{on a} \quad C_x = 0,$$

donc

$$0 = 2A - 1; \quad \text{d'où} \quad A = \frac{1}{2},$$

et

$$C_x = 2^{x-1} - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Mais on a

$$C'_x = \Delta C_x, \quad \text{donc} \quad C'_x = [2^{x+1-1} - 1] - [2^{x-1} - 1]$$
$$= 2^x - 2^{x-1}$$
$$= 2^{x-1}(2 - 1)$$
$$= 2^{x-1}.$$

La somme de tous les cas sera

$$C_x + C'_x = 2^{x-1} - 1 + 2^{x-1} = 2^x - 1.$$

Donc enfin

$$P_x = \frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1}, \quad P'_x = \frac{2^{x-1}}{2^x - 1};$$

il en résulte

$$P'_x > P_x.$$

40. Problème XIV. *On projette une pièce au jeu de pile et croix; on demande la probabilité qu'en* x *coups, on amènera les faces de la pièce dans l'ordre pile, croix; pile, croix; pile, croix; etc.*

Solution. Soit C_x le nombre des cas favorables;
t_x le nombre total des cas;
P_x la probabilité cherchée $= \frac{C_x}{t_x}$.

Déterminons t_x. Le nombre de tous les cas au coup x s'obtient en combinant le nombre des cas au coup $x - 1$, avec chaque face. On a donc :

$$t_x = 2t_{x-1}.$$

Pour intégrer faisons $x = 1, 2, 3 \ldots . x$, et multiplions, nous aurons :

$$t_x = t_0 . 2^x.$$

Pour $x = 1$, on a $t_x = 2$, donc

$$2 = 2t_0, \quad \text{d'où} \quad t_0 = 1,$$

et

$$t_x = 2^x.$$

Déterminons C_x. Le nombre des cas dans lesquels la combinaison pile croix, pile croix..... n'est point arrivée au coup $x - 2$, est

$$t_{x-2} - C_{x-2} = 2^{x-2} - C_{x-2}.$$

Chacun de ces cas donne un cas où elle arrive précisément au x^{me} coup; donc le nombre des cas où elle arrive au x^{me} coup est $2^{x-2} - C_{x-2}$.

Mais C_x est le nombre des cas favorables au coup $(x - 1)^{me}$, multiplié par 2 et augmenté du nombre des cas où elle arrive au x^{me} coup; ainsi :

$$C_x = 2C_{x-1} + 2^{x-2} - C_{x-2}$$

Donc

$$P_x = \frac{2C_{x-1}}{2^x} + \frac{2^{x-2}}{2^x} - \frac{C_{x-2}}{2^x}$$

$$= \frac{C_{x-1}}{2^{x-1}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{C_{x-2}}{2^{x-2}} = P_{x-1} - \frac{1}{4}P_{x-2} + \frac{1}{4}. \quad . \quad . \quad (1)$$

Pour intégrer (1), posons :

$$P_{x-1} = P_x + \Delta P_x,$$

et de même

$$P_{x-2} = P_{x-1} + \Delta P_{x-1} = P_x + \Delta P_x + \Delta P_x + \Delta^2 P_x,$$

ou

$$P_{x-2} = P_x + 2\Delta P_x + \Delta^2 P_x.$$

Substituant dans l'expression (1) de P_x, on obtiendra, après réduction,

$$\Delta^2 P_x - 2\Delta P_x + P_x - 1 = 0.$$

Si l'on fait

$$P_x - 1 = y;$$

d'où

$$P_x = 1 + y,$$

et

$$\Delta P_x = \Delta y$$

$$\Delta^2 P_x = \Delta^2 y,$$

l'équation précédente deviendra :

$$\Delta^2 y - 2\Delta y + y = 0.$$

Posons

$$y = a^x;$$

d'où :

$$\Delta y = a^x \left(\frac{1}{a} - 1\right)$$

$$\Delta^2 y = a^x \left(\frac{1}{a} - 1\right)^2;$$

et substituons, il viendra :

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a} - 1\right) + 1 = 0,$$

ce qui donne pour a les deux valeurs :

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{1}{2};$$

d'où

$$y = Ca_1^x + C_2 x a_2^x = C\left(\frac{1}{2}\right)^x + C'x\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1},$$

en faisant

$$C_2 = 2C'.$$

Déterminons C et C'.

Pour

$$x=1,\quad P_x \text{ ou } 1+y=0;\quad \text{d'où :}\quad 0=1+\frac{C}{2}+C'$$

$$x=2,\qquad P_x=\frac{1}{4},\qquad \frac{1}{4}=1+\frac{C}{4}+C',$$

d'où

$$C=-1,\quad C'=-\frac{1}{2};$$

et par suite :

$$y=P_x-1=-\frac{1+x}{2^x};$$

d'où enfin :

$$P_x=1-\frac{1+x}{2^x}$$

41. **Problème XV.** *Quatre joueurs A_1, A_2, A_3, A_4 jouent de cette manière :*

1° A_1 joue avec A_2 : s'il gagne, l'enjeu est à lui ;

S'il ne perd ni ne gagne, il continue de jouer avec A_2 jusqu'à ce que l'un des deux gagne ;

S'il perd, alors

2° A_2 joue avec A_3, et si A_2 gagne, l'enjeu est à lui ;

S'il ne perd ni ne gagne, il continue à jouer avec A_3 jusqu'à ce que l'un des deux gagne ;

S'il perd, alors

3° A_3 joue avec A_4 : et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'un des joueurs ait vaincu celui qui le suit.

La probabilité pour l'un quelconque des joueurs de gagner contre l'autre est $\frac{1}{3}$; celle de ne gagner ni perdre est aussi $\frac{1}{3}$; déterminer la probabilité que l'un de ces joueurs gagne la partie au x^me coup.

Solution. Soient $\overset{4}{P}_x$ la probabilité que A_4 gagne la partie après x coups,

$\overset{3}{P}_x$ la probabilité que A_3 gagne la partie après x coups, etc.

On aura :

$$\overset{4}{P}_x=\frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1}+\frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-1}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

En effet, l'événement dont $\overset{4}{P}_x$ est la probabilité peut avoir lieu de deux manières :

1° Quand A_4 gagne la partie après $x-1$ coups, et qu'il la gagne encore au x^{me} coup ; cet événement composé a pour probabilité $\frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1}$.

2° Quand A_3 a gagné la partie après $x-1$ coups, et que A_4 gagne au x^{me} coup, cet événement composé a pour probabilité $\frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-1}$.

L'équation (1) peut être appliquée successivement à tous les joueurs, on a donc le système d'équations rentrantes

$$\overset{4}{P}_x-\frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1}=\frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-1}.\quad\ldots\ldots\quad(1')$$

$$\overset{3}{P}_x-\frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-1}=\frac{1}{3}\overset{2}{P}_{x-1}\quad\ldots\ldots\quad(2')$$

$$\overset{2}{P}_x-\frac{1}{3}\overset{2}{P}_{x-1}=\frac{1}{3}\overset{1}{P}_{x-1}\quad\ldots\ldots\quad(3')$$

$$\overset{1}{P}_x-\frac{1}{3}\overset{1}{P}_{x-1}=\frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1}.\quad\ldots\ldots\quad(4')$$

Déterminons $\overset{4}{P}_x$; on a :

$$\overset{4}{P}_x-\frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1}=\frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-1};$$

changeons x en $x-1$, et multiplions par $-\frac{1}{3}$, il vient :

$$-\frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1}+\frac{1}{3^2}\overset{4}{P}_{x-2}=-\frac{1}{3^2}\overset{3}{P}_{x-2}.$$

Ajoutons, et nous aurons, par suite de (2′) :

$$\overset{4}{P}_x-\frac{2}{3}\overset{4}{P}_{x-1}+\frac{1}{3^2}\overset{4}{P}_{x-2}=\frac{1}{3^2}\left[\overset{3}{P}_{x-1}-\frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-2}\right]=\frac{1}{3^2}\overset{2}{P}_{x-2}.$$

Opérons encore de la même façon, nous aurons à cause de (3′)

$$\overset{4}{P}_x-\frac{3}{3}\overset{4}{P}_{x-1}+\frac{3}{3^2}\overset{4}{P}_{x-2}-\frac{1}{3^3}\overset{4}{P}_{x-3}=\frac{1}{3^3}\left[\overset{2}{P}_{x-2}-\frac{1}{3}\overset{2}{P}_{x-3}\right]=\frac{1}{3^4}\overset{1}{P}_{x-3}.$$

Enfin, par suite de (4′), au moyen des mêmes transformations :

$$\overset{4}{P}_x - \frac{4}{5}\overset{4}{P}_{x-1} + \frac{6}{5^2}\overset{4}{P}_{x-2} - \frac{4}{5^3}\overset{4}{P}_{x-3} + \frac{1}{5^4}\overset{4}{P}_{x-4} = \frac{1}{5^4}\left[\overset{1}{P}_{x-3} - \frac{1}{5}\overset{1}{P}_{x-4}\right] = \frac{1}{5^5}\overset{4}{P}_{x-4}.$$

Cette équation étant linéaire, nous pourrons poser $\overset{4}{P}_x = a^x$; d'où, en changeant x en $x-1$, $x-2$, etc. :

$$\overset{4}{P}_{x-1} = a^{x-1} = \frac{\overset{4}{P}_x}{a};\ \overset{4}{P}_{x-2} = a^{x-2} = \frac{\overset{4}{P}_x}{a^2}, \text{ etc.};$$

et par la substitution de ces valeurs, nous aurons :

$$a^x\left\{1 - \frac{4}{5a} + \frac{6}{5^2a^2} - \frac{4}{5^3a^3} + \frac{1}{5^4a^4}\right\} = a^x \cdot \frac{1}{5^5a^4},$$

ou, en supprimant le facteur a^x :

$$\left(1 - \frac{1}{5a}\right)^4 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5a}\right)^4;$$

d'où

$$(5a-1)^4 = \frac{1}{5},$$

et

$$\left(5\sqrt[4]{5}a - \sqrt[4]{5}\right)^4 - 1 = 0.$$

Soit

$$5\sqrt[4]{5}.a - \sqrt[4]{5} = \alpha;$$

nous aurons $\alpha^4 = 1$ et

$$5a - 1 = \frac{\alpha}{\sqrt[4]{5}};$$

d'où

$$5a = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt[4]{5}}\right);$$

donc $\alpha^4 - 1 = 0$, donnant les valeurs

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = \sqrt{-1},\ \alpha^4 = -\sqrt{-1},$$

a aura les quatre valeurs correspondantes : a_1, a_2, a_3, a_4; et par suite :

$$\overset{4}{P}_x = C_1 a_1^x + C_2 a_2^x + C_3 a_3^x + C_4 a_4^x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Les imaginaires se remplaceront par

$$\alpha_3 = \cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_4 = \cos\frac{\pi}{2} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}.$$

On aura des équations toutes semblables pour

$$\overset{3}{P}_x,\ \overset{2}{P}_x,\ \overset{1}{P}_x.$$

2° Déterminons les constantes de l'équation (1).

Pour cela remarquons que

Après $x = 1, 2, 3, 4$ coups les probabilités de gagner pour A_1 sont :

$$\frac{1}{5},\ \frac{1}{5^2},\ \frac{1}{5^3},\ \frac{1}{4^4}.$$

Après $x = 2, 3, 4, 5$ coups les probabilités de gagner pour A_2 sont :

$$\frac{1}{5^2},\ \frac{2}{5^3},\ \frac{3}{5^4},\ \frac{4}{5^5}.$$

Après $x = 3, 4, 5, 6$ coups de probabilités de gagner pour A_3 sont :

$$\frac{1}{5^3},\ \frac{3}{5^4},\ \frac{6}{5^5},\ \frac{10}{5^6}.$$

Après $x = 4, 5, 6, 7$ coups les probabilités de gagner pour A_4 sont :

$$\frac{1}{5^4},\ \frac{4}{5^5},\ \frac{10}{5^6},\ \frac{15}{5^7}.$$

Ces dernières quantités serviront à déterminer les constantes de l'équation (2); en les substituant dans cette équation, on aura les quatre équations linéaires :

$$\frac{1}{5^4} = C_1a_1^4 + C_2a_2^4 + C_3a_3^4 + C_4a_4^4.$$

$$\frac{4}{3^5} = C_1\alpha_1^5 + C_2\alpha_2^5 + C_3 a_3^5 + C_4\alpha_4^5.$$

$$\frac{10}{3^6} = C_1\alpha_1^6 + C_2\alpha_2^6 + C_3 a_3^6 + C_4\alpha_4^6.$$

$$\frac{15}{13^7} = C_1\alpha_1^7 + C_2\alpha_2^7 + C_3 a_3^7 + C_4\alpha_4^7.$$

42. PROBLÈME XVI. *Deux joueurs* A *et* B, *dont les adresses respectives sont entre elles comme* p *est à* q, *jouent ensemble, de manière que sur un nombre* x *de coups, il en manque* y *à* A, *et* x-y *à* B *pour gagner la partie. Déterminer les probabilités qu'ont les joueurs de gagner la partie.*

SOLUTION. Soit $u_{y,x}$ la probabilité pour B de gagner la partie ou de faire les x points quand déjà il en a fait y.

$\frac{p}{p+q} = b$ est la probabilité pour A de gagner un coup.

$\frac{q}{p+q} = a$ est la probabilité pour B de gagner un coup.

B peut gagner la partie au moment du coup actuel,

1° s'il gagne ce coup, auquel cas il ne lui reste que $x-1$ points à faire ensuite; la probabilité de gagner le coup est α; celle de faire $x-1$ points est $u_{y,x-1}$; la probabilité de gagner la partie en gagnant le coup actuel est donc $au_{y,x-1}$.

Mais B peut gagner la partie au moment du coup actuel,

2° en perdant ce coup, pourvu qu'il gagne indépendamment de ce coup : pour cela, il faut que, quand il n'a que $y-1$ points, il n'en ait plus que $x-1$ à faire; car alors, quand il aura ses y points, il aura gagné la partie.

La probabilité de perdre un coup est b; celle de gagner malgré cette perte est $u_{y-1,x-1}$.

On aura donc

$$u_{y,x} = b \times u_{y-1,x-1} + a \times u_{y,x-1}.$$

REMARQUE. 1° quand $y = 0$, on a $u_{0,x} = 0$.

Car quand B n'a gagné aucun coup, sa probabilité de gagner la partie est égale à zéro.

On a aussi $u_{0,x-1} = 0$.

2° Quand $y = 1$, on a par (1)

$$u_{1,x} = au_{1,x-1} + bu_{0,x-1}$$

ou

$$u_{1,x} = au_{1,x-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

3° Si $x = y$, B gagne nécessairement.

Donc

$$u_{y,y} = 1.$$

4° Si $x = y - 1$, on a pareillement

$$u_{y,y-1} = 1$$

car (1) donne

$$u_{y,y} = au_{y,y-1} + bu_{y-1,y-1} = au_{y,y-1} + b,$$

mais $1 = a + b$, donc $u_{y,y-1} = 1$.

5° Si $x = y - 2$, on a par (1)

$$u_{y,y-1} = au_{y,y-2} + bu_{y-2,y-2} = au_{y,y-2} + b = 1,$$

donc

$$u_{y,y-2} = 1, \text{ etc.}$$

6° Si $x = 1$, on a $u_{y,1} = 1$, car on a par (1)

$$u_{y,1} = au_{y,0} + bu_{y-1,0} = a + b = 1,$$

puisqu'on a évidemment $u_{y,0} = 1$, $u_{y-1,0} = 1$.

Nous avons trouvé pour l'intégrale de l'équation (1)

$$u_{y,x} = \left(\frac{q}{p+q}\right)^{x-1} \left\{ 1 + \frac{p}{q}(x-1) + \frac{p^2}{q^2}\frac{(x-1)(x-2)}{1.2} + \cdots \frac{p^{y-1}}{q^{y-1}} \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-y+1)}{1.2\ldots\ldots y-1} \right\}.$$

43. PROBLÈME XVII. A *et* B *ont chacun* k *pièces, la probabilité que* A *gagnera son coup* $\frac{a}{a+b+c}$, *la probabilité que* B *gagnera son coup* $\frac{b}{a+b+c}$, *la probabilité que personne ne gagnera* $\frac{c}{a+b+c}$.

La partie sera terminée, quand l'un des joueurs aura gagné k *pièces; quelle est la probabilité que* A *gagnera* x *pièces, et celle qu'il gagnera la partie?*

Première solution. Soit y_x la probabilité pour A de gagner x pièces; elle se compose de :

La probabilité pour A de gagner ce coup, multipliée par celle pour A de gagner la partie après ce coup;

Plus la probabilité pour A de ne pas gagner ce coup parce que B le gagne, multipliée par la probabilité pour A de gagner malgré cet échec;

Plus la probabilité que personne ne gagne le coup, multipliée par la probabilité pour A de gagner la partie malgré ce coup;

Donc

$$y_x = \frac{a}{a+b+c} y_{x+1} + \frac{b}{a+b+c} y_{x-1} + \frac{c}{a+b+c} y_x;$$

d'où l'on déduit successivement

$$(a+b+c) y_x = a y_{x+1} + b y_{x-1} + c y_x;$$

$$(a+b) y_x = a y_{x+1} + b y_{x-1};$$

$$\left(1+\frac{b}{a}\right) y_x = y_{x+1} + \frac{b}{a} y_{x-1};$$

ou en posant $\frac{b}{a} = \gamma$:

$$(1+\gamma) y_x = y_{x+1} + \gamma y_{x-1},$$

ou bien :

$$y_{x+1} = (1+\gamma) y_x - \gamma y_{x-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Intégrons l'équation (1).

Si

$$x = 0, \quad \text{on a} \quad y_0 = 0;$$

$$x = 2k, \quad \text{on a} \quad y_{2k} = 1;$$

faisons

$$x = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

nous aurons :

$$y_2 = (1+\gamma) y_1$$

$$y_3 = (1+\gamma) y_2 - \gamma y_1 = (1+\gamma+\gamma^2) y_1$$

$$y_4 = (1+\gamma) y_3 - \gamma y_2 = (1+\gamma+\gamma^2+\gamma^3) y_1$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$y_x = (1+\gamma+\gamma^2+\cdots+\gamma^{x-1}) y_1 = \frac{1-\gamma^x}{1-\gamma} \cdot y_1 .$$

Pour $x = 2k$; on aura :

$$y_{2k} = 1 = \frac{1-\gamma^{2k}}{1-\gamma} y_1; \quad \text{d'où} \quad y_1 = \frac{1-\gamma}{1-\gamma^{2k}};$$

et

$$y_x = \frac{1-\gamma^x}{1-\gamma} \cdot \frac{1-\gamma}{1-\gamma^{2k}} = \frac{1-\gamma^x}{1-\gamma^{2k}}$$

pour $x = k$,

$$y_k = \frac{1-\gamma_k}{1-\gamma^{2k}} = \frac{1}{1+\gamma^k},$$

probabilité pour A de gagner la partie.

La probabilité pour B est égale a :

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\gamma}\right)^k} = z_k \qquad y_k + z_k = 1.$$

Remarque. Le calcul est le même quand les joueurs n'ont pas un nombre de pièces égal.

Soient λ et μ le nombre de leurs pièces. On aura :

$$y_{\lambda+\mu} = 1 = \frac{1-\gamma\mu+\lambda}{1-\gamma} y,$$

$$y_1 = \frac{1-\gamma}{1-\gamma\lambda+\mu}$$

$$y_x = \frac{1-\gamma^x}{1-\gamma^{\lambda+\mu}} \qquad y_\mu = \frac{1-\gamma^\mu}{1-\gamma^{\lambda+\mu}}$$

probabilité pour A de gagner la partie.

La probabilité de B serait

$$z_\lambda = \frac{1-\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\lambda}}{1-\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\lambda+\mu}}$$

Deuxième solution. L'équation (1) étant linéaire, on peut l'intégrer en posant

$$y_x = a^x,$$

donc

$$a^{x+1} = (1+\gamma)\,a^x - \gamma a^{x-1}$$

$$a^2 - (1+\gamma)\,a + \gamma = 0$$

$$a = \frac{1+\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+\gamma)^2}{2^2} - \gamma} = \frac{1+\gamma}{2} \pm \frac{1-\gamma}{2}$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \gamma$$

$$y_x = C_1 a_1^x + C_2 a_2^x = C_1 + C_2 \gamma^x$$

pour

$$x = 0, \text{ on a } y_0 = 0,$$

pour

$$x = 2k, \text{ on a } y_{2k} = 1,$$

donc

$$0 = C_1 + C_2$$

$$1 = C_1 + C_2 \gamma^{2k}$$

d'où

$$C_2 = -C_1, \qquad C_1 = \frac{1}{1-\gamma^{2k}}$$

$$y_x = C_1(1-\gamma^x) \qquad = \frac{1-\gamma^x}{1-\gamma^{2k}}.$$

Troisième solution. Par les fonctions génératrices. Nous avons trouvé

$$y_{x+1} = (1+\gamma)\,y_x - \gamma y_{x-1};$$

ou en multipliant par t^x :

$$y_{x+1} t^x = (1-\gamma) y_x t^x - \gamma y_{x-1} t^x,$$

ou bien :

$$\frac{1}{t}(y_{x+1} t^{x+1}) = (1+\gamma)\,y_x t^x - \gamma t (y_{x-1} t^{x-1}).$$

Posons $x = 1, 2, 3, \ldots$; nous trouverons :

$$\frac{1}{t} t^2 y_2 = (1+\gamma)\,y_1 t^1 - \gamma t y_0 t^0$$

$$\frac{1}{t} t^3 y_3 = (1+\gamma)\,y_2 t^2 - \gamma t y_1 t^1$$

$$\frac{1}{t} t^4 y_4 = (1+\gamma)\,y_3 t^3 - \gamma t_2 y t^2.$$

Ajoutant, on obtient :

$$\frac{1}{t}\left\{y_2 t^2 + y_3 t^3 + \cdots\right\} = (1+\gamma)\left\{y_1 t^1 + y_2 t^2 + \cdots\right\}$$

$$-\gamma t \left\{y_0 t^0 + y_1 t^1 + y_2 t^2 + \cdots\right\}.$$

Soit

$$z = \mathop{\mathrm{S}}_0^{\infty} y_x t^x = y_0 t^0 + y_1 t^1 + y_2 t^2 + \cdots$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{1}{t}\left\{z - y_0 t^0 - y_1 t^1\right\} = (1+\gamma)\left\{z - y_0 t^0\right\} - \gamma t z,$$

mais $y_0 = 1$; de sorte que cette équation se réduit à

$$z - y_1 t = z\,(1+\gamma)\,t - \gamma t^2 z;$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{y_1 t}{1-(1+\gamma)\,t + \gamma t^2}$$

$$= \frac{y_1 t}{(1-t)(1-\gamma t)} = y_1 t (1 + t + t^2 \ldots)(1 + \gamma t + \gamma^2 t^2 \ldots)$$

$$= \cdots + y_1 (1 + \gamma + \gamma^2 + \cdots + \gamma^{x-1})\,t^x + \cdots$$

Et comme y_x est le coefficient de t^x dans le développement de z, on aura :

$$y_x = y_1 (1 + \gamma + \gamma^2 + \cdots + \gamma^{x-1})$$

$$= y_1 \frac{1-\gamma^x}{1-\gamma}.$$

D'où l'on tire

$$y_{2k} = 1 = y_1 \frac{1-\gamma^{2k}}{1-\gamma},$$

et par suite

$$y_x = \frac{1 - \gamma^x}{1 - \gamma^{2k}}.$$

44. **Problème XVIII.** *A et B ont m et n jetons; ils jouent; au bout de quelque temps ils en ont* x *et* y; *la probabilité pour* A *de gagner* 1 *coup est* $\frac{x}{x+y}$, *celle de* B *est* $\frac{y}{x+y}$. *La partie cesse quand l'un des joueurs a gagné tous les jetons de l'autre. Quelle est la probabilité pour* A *de gagner la partie?*

Première solution. Posons $m + n = x + y = k$.

Soit u_x la probabilité cherchée;

$\frac{x}{k}$ est la probabilité pour A de gagner cette fois;

u_{x+1} » » A de gagner après le coup;

$\frac{k-x}{k}$ » » A de ne pas gagner cette fois;

u_{x-1} » » A de gagner malgré cet échec;

on aura donc :

$$u_x = \frac{x}{k} u_{x+1} + \frac{k-x}{k} u_{x-1}.$$

Multiplions par kt^x, il vient :

$$ku_x t^x = xu_{x+1}t^x + ku_{x-1}t^x - xu_{x-1}t^x.$$

Faisons successivement $x = 1, 2, 3, 4$ ...... et ajoutons :

$$\left.\begin{aligned} k(tu_1 + t^2u_2 + \cdots) = {} & (u_2 t + 2u_3t^2 + 3u_4t^3 + \cdots) \\ & + kt(u_0 + u_1 t + u_2t^2 + \cdots) \\ & - t(u_0 + 2u_1 t + 3u_2 t^2 + \cdots) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Soit

$$z = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + u_3 t^3 + \cdots;$$

d'où

$$\frac{dz}{dt} = u_1 + 2u_2 t + 3u_3 t^2 + \cdots$$

L'égalité (2) peut s'écrire

$$\begin{aligned} k(u_1 t + u_2 t^2 + \cdots) = {} & \left[(u_1 + 2u_2 t + 3u_3 t^2 + \cdots) - (u_1 + u_2 t + u_3 t^2 + \cdots)\right] \\ & + kt(u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots) \\ & - t\left[(u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots) + (u_1 t + 2u_2 t^2 + \cdots)\right] \end{aligned}$$

ou

$$k(z - u_0) = \frac{dz}{dt} - \frac{z - u_0}{t} + ktz - t\left(z + t\frac{dz}{dt}\right);$$

et puisque $u_0 = 0$, on aura :

$$k.z = \frac{dz}{dt} - \frac{z}{t} + ktz - tz - \frac{t^2 dz}{dt};$$

d'où

$$(t - t^3)\frac{dz}{dt} = z(1 + t^2 + tk - t^2k),$$

et

$$\frac{dz}{z} = \frac{(1 + t^2 + tk - t^2k)\,dt}{t(1-t)(1+t)^2} = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-t} + \frac{k-1}{1-t}\right)dt.$$

Intégrant :

$$\text{l.}\, z = \text{l.}\, t - \text{l.}\,(1-t) + (k-1)\,\text{l.}\,(1+t) + \text{l.}\, c$$

d'où

$$z = c\frac{t(1+t)^{k-1}}{1-t}$$

et si l'on fait $k - 1 = \mu$:

$$z = c\frac{t}{1-t}(1+t)^{\mu} = c(t + t^2 + t^3 + \cdots)\left(1 + \mu t + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}t^2 + \cdots\right).$$

Le terme général sera

$$z = \cdots + c\left\{1 + \mu + \frac{\mu^{2|-1}}{2!} + \cdots + \frac{\mu^{x-1|-1}}{x-1!}\right\}t^x + \cdots$$

Donc

$$u_x = c\left\{1 + \mu + \frac{\mu^{2|-1}}{2!} + \cdots + \frac{\mu^{x-1|-1}}{x-1!}\right\}.$$

Pour $x = m + n = k = \mu + 1$, on a $u_k = 1$, donc

$$\begin{aligned} 1 &= c\left\{1 + \mu + \frac{\mu^{2|-1}}{2!} + \cdots + \frac{\mu^{\mu|-1}}{\mu!}\right\} \\ &= c\,[1+1]^{\mu} = c\,2^{\mu}. \end{aligned}$$

Donc $c = \frac{1}{2^\mu}$, et :

$$u_x = \frac{1}{2^\mu}\left\{1 + \mu + \frac{\mu^{2|-1}}{2!} + \cdots + \frac{\mu^{x-1|-1}}{x-1!}\right\}.$$

Deuxième solution. Nous avons trouvé :

$$u_x = \frac{x}{k}\, u_{x+1} + \frac{k-x}{k}\, u_{x-1}.$$

D'où

$$\begin{aligned} ku_x &= xu_{x+1} + ku_{x-1} - xu_{x-1} \\ k(u_x - u_{x-1}) &= x(u_{x+1} - u_{x-1}) \\ &= x(u_{x+1} - u_x) + x(u_x - u_{x-1}). \end{aligned}$$

Posons :

$$u_x - u_{x-1} = \psi x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

il viendra

$$\begin{aligned} k\psi x &= x\left[\psi(x+1) + \psi(x)\right] \\ (k-x)\,\psi x &= x\psi(x+1) \\ \psi(x+1) &= \frac{k-x}{x}\,\psi(x). \end{aligned}$$

Faisons successivement $x = 1, 2, 3\ldots\ldots$; nous aurons

$$\begin{aligned} \psi(2) &= \psi(1).\,\frac{k-1}{1} \\ \psi(3) &= \psi(2).\,\frac{k-2}{2} \\ &\;\vdots \\ \psi x &= \psi(x-1)\,\frac{k-x+1}{x-1}; \end{aligned}$$

et multipliant ces équations :

$$\psi x = \psi(1).\,\frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-x+1)}{1.2\ldots x-1} = \psi(1).\,\frac{\mu^{x-1|-1}}{x-1!}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \psi(1) &= \psi(1) \\ \psi(2) &= \psi(1)\,\frac{\mu}{1} \\ \psi(3) &= \psi(1).\,\frac{\mu^{2|-1}}{2!}, \end{aligned}$$

etc.

mais la formule (1) donne pour $x = 1, 2, 3\ldots$:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + \psi(1) \\ u_2 &= u_1 + \psi(2) \\ u_x &= u_{x-1} + \psi(x) \end{aligned}$$

en ajoutant on a :

$$\begin{aligned} u_x &= u_0 + \psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(x) \\ &= \psi(1) + \psi(2) + \cdots + \psi(x) \end{aligned}$$

ou bien

$$u_x = \psi(1)\left\{1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu^{2|-1}}{2!} + \cdots + \frac{\mu^{-x1|-1}}{x-1!}\right\}.$$

$\psi(1)$ se détermine comme précédemment c.

Problème des parties pour deux joueurs.

45. *A un joueur* A, *qui a la probabilité* p *de faire un point, il reste* x *points à faire pour gagner la partie; à* B *qui a la probabilité* q = 1 — p, *de faire un point, il reste* y *points à faire pour gagner. Quelle est la probabilité pour* A *de gagner l'enjeu?*

Solution. Soit $u_{y,x}$ la probabilité cherchée; on a

$$u_{y,0} = 1, \quad u_{0,x} = 0,$$

car alors p gagne; x et y ne sont jamais nuls à la fois.

La probabilité cherchée est égale à la probabilité p que A possède de gagner cette fois, multipliée par $u_{y,x-1}$ probabilité de gagner ensuite, plus la probabilité q que A perde cette fois, multipliée par $u_{y-1,x}$ probabilité de gagner ensuite; savoir

$$u_{y,x} = pu_{y,x-1} + qu_{y-1,x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Première solution par une double sommation.

Soit

$$\begin{aligned} z = \overset{\infty}{\underset{1}{S}}\,\overset{\infty}{\underset{1}{S}}\,u_{y,x}t^yv^x &= u_{1,1}tv + u_{1,2}tv^2 + \cdots \\ &+ u_{2,1}t^2v + u_{2,2}t^2v^2 + \cdots \end{aligned}$$

Multiplions l'équation (1) par t^yv^x, posons pour

$$\begin{aligned} y &= 1, \quad x = 1, 2, 3\ldots \\ y &= 2 \quad x = 1, 2, 3\ldots \end{aligned}$$

et ajoutons, il vient:

$$\left.\begin{array}{l} u_{1,1}tv + u_{1,2}tv^2 + \cdots \\ + u_{2,1}t^2v + u_{2,2}t^2v^2 + \cdots \\ \text{etc.}\end{array}\right\} = p\left\{\begin{array}{l} u_{1,0}tv + u_{1,1}tv^2+\cdots \\ + u_{2,0}t^2v + u_{2,1}t^2v^2+\cdots \\ + \cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}$$

$$+ q\left\{\begin{array}{l} u_{0,1}tv + u_{0,2}tv^2 + \cdots \\ + u_{1,1}t^2v + u_{1,2}t^3v^2 + \cdots \\ + \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}$$

ou

$$z = \mathop{S}_1^\infty\mathop{S}_1^\infty u_{y,x}t^yv^x = p\left\{v\mathop{S}_1^\infty\mathop{S}_1^\infty u_{x,y}t^yv^x + v\mathop{S}_1^\infty u_{y,0}t^y\right\}$$

$$+ q\left\{t\mathop{S}_1^\infty u_{0,y}v^x + t\mathop{S}_1^\infty\mathop{S}_1^\infty u_{y,x}t^yv^2\right\}$$

ou, puisque $u_{y,0}=1$, $u_{0,x}=0$:

$$z=\frac{pvt}{(1-t)(1-pv-qt)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$z=\frac{pvt}{1-t}\cdot\frac{1}{1-qt}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{pv}{1-qt}}$$

$$z=\frac{pvt}{(1-t)(1-qt)}\cdot\left\{1+\frac{pv}{1-qt}+\frac{p^2v^2}{(1-qt)^2}+\cdots+\frac{p^{x-1}v^{x-1}}{(1-qt)^{x-1}}+\cdots\right\}$$

$$z= \cdots\cdots + \frac{p^xt}{(1-t)(1-qt)^x}\cdot v^x+\cdots$$

Le terme en t^yv^x, s'obtient en cherchant le terme en t^y, du développement de

$$\frac{p^xt}{(1-t)(1-qt)^x},$$

savoir :

$$p^x\left(1+\frac{x}{1}q+\frac{x^{2|-1}}{2!}q+\cdots+\frac{x^{x+y-2|-1}}{y-1!}q^{y-1}\right)t^y+\cdots$$

donc

$$u_{y,x}=p^x\left\{1+\frac{x}{1}q+\frac{x^{2|-1}}{2!}q^2+\cdots+\frac{x^{x+y-2|-1}}{y-1!}q^{y-1}\right\}\cdots (3).$$

REMARQUE. Cette formule (3) se compose de :

p^x, probabilité de faire x points en x coups;
$p^x\frac{x}{1}q$ » x points en $x+1$ coups;
. . . .
$p^x\frac{x^{2|-1}}{2!}q^2$ » x points en $x+y-1$ coups;

la somme est la probabilité cherchée.

Seconde solution par une simple sommation.

Soit

$$z_x=\mathop{S}_1^\infty y u_{y,x}t^y = u_{1,x}t+u_{2,x}t^2+\cdots$$

Je fais dans (1), $y=1$, et je multiplie par t
$y=2$, » t^2
$y=3$, » t^3
etc.

et j'ajoute :

$$u_{1,x}t+u_{2,x}t^2+\cdots = p\left[u_{1,x-1}t+u_{2,x-1}t^2+\cdots\right]+qt\left[u_{1,x}t+u_{2,x}t^2+\cdots\right]$$

ou

$$z_x=pz_{x-1}+qtz_x;$$

d'où

$$z_x=\frac{pz_{x-1}}{1-qt},$$

en faisant $x=1, 2, 3\ldots. x$, on obtient

$$z_1=\frac{pz_0}{1-qt}$$

$$z_2=\frac{pz_1}{1-qt}\cdots\cdots$$

$$z_x=\frac{pz^{x-1}}{1-qt}=\frac{p^x}{(1-qt)^x}z_0;$$

mais

$$z_0=\mathop{S}_1^\infty u_{y,0}t^y=\mathop{S}_1^\infty t^y=t+t^2+\cdots=\frac{t}{1-t}$$

donc

$$z_x=\frac{p_xt}{(1-qt)^x(1-t)};$$

et par suite $u_{y,x}$ est le coefficient de t^y dans le développement de z_x :

$$z_x = p^x (1 - qt)^{-x} (1 - t)^{-1} =$$

$$p^x(t + t^2 + \cdots + t^{y-1} + t^y)\left(1 + xqt + \frac{x^{2/-1}}{2!} q^2 t^2 + \cdots + \frac{x^{x+y-2/-1}}{y-1!} q^{y-1} t^{y-1}\right).$$

Pour réduire la formule précédente en intégrale définie, il y a deux méthodes.

1° Faisons

$$z = pvt \cdot \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1 - pv - qt}.$$

Comme on a :

$$\frac{1}{1-t} = \int_0^\infty e^{-(1-t)\theta} d\theta$$

$$\frac{1}{1 - pv - qt} = \int_0^\infty e^{-(1-pv-qt)\omega} d\omega,$$

il en résulte :

$$z = pvt \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\theta(1-t)} e^{-\omega(1-pv-qt)} d\theta d\omega$$

$$= pvt \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)} \cdot e^{p\omega v} \cdot e^{(\theta+q\omega)t} d\theta d\omega$$

$$= pvt \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)} d\omega d\theta \left\{1 + p\omega v + \cdots + \frac{p^{x-1}\omega^{x-1}}{1.2\ldots x-1} \cdot v^{x-1} + \cdots\right\} \times$$

$$\times \left\{1 + (\theta + q\omega)t + \cdots \frac{(\theta + q\omega)^{y-1}}{1.2\ldots y-1} t^{y-1}\right\}$$

$$z = \cdots + v^x t^y \left[\frac{p^x}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)} \omega^{x-1} (\theta + q\omega)^{y-1} d\omega d\theta\right] + \cdots$$

et par suite

$$u_{y,x} = \frac{p^x}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)} \omega^{x-1} (\theta + q\omega)^{y-1} d\omega d\theta.$$

Posons

$$\omega = rt, \quad d\omega = rdt + tdr, \quad \theta = r(1 - t);$$

d'où, θ étant considéré comme constant par rapport à ω :

$$0 = -rdt + (1 - t)dr;$$

et par conséquent :

$$d\omega = \left(r + \frac{rt}{1-t}\right) dt = \frac{rdt}{1-t}.$$

Par rapport à θ, ω est constant; donc $d\omega = 0$, et par suite $dt = 0$; d'où $d\theta = (1 - t)\, dr$; et : $d\omega d\theta = rdrdt$.

Comme

$$\frac{\omega}{\theta} = \frac{t}{1-t} : \text{aux limites } \omega \left\{ {}^\infty_0 \right. \text{répondent celles } t \left\{ {}^1_0 \right.;$$

et comme

$$\theta + \omega = r : \text{aux limites } \theta \left\{ {}^\infty_0 \right. \text{répondent celles } r \left\{ {}^\infty_0 \right..$$

Nous aurons donc :

$$u_{y,x} = \frac{p^x}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^1 dt \int_0^\infty r dr e^{-(r-rt+rt)} r^{x-1} t^{x-1} (r - rt + qrt)^{y-1}$$

$$= \frac{p^x}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^1 dt\, t^{x-1} (1 - t + qt^{y-1}) \int_0^\infty r^{x+y-1} e^{-r} dr.$$

Mais

$$1 - t + qt = 1 - t(1 - q) = 1 - pt;$$

et

$$\int_0^\infty r^{x+y-1} e^{-r} dr = \Gamma(x + y).$$

Par suite l'expression précédente devient

$$u_{y,x} = \frac{p^x \Gamma(x + y)}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^1 dt\, t^{x-1} (1 - pt)^{y-1}.$$

Soit

$$pt = \zeta; \text{ pour } t = \left\{ {}^1_0 \right. \text{on a} : \zeta = \left\{ {}^p_0 \right.;$$

donc :

$$u_{y,x} = \frac{p^x \Gamma(x + y)}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^p \frac{d\zeta}{p} \cdot \frac{\zeta^{x-1}}{p^{x-1}} (1 - \zeta)^{y-1}$$

$$= \frac{\Gamma(x + y)}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^p \zeta^{x-1} (1 - \zeta)^{y-1} d\zeta.$$

Si $p=1$, alors A gagne à chaque coup : et l'on a :

$$1=\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma x\Gamma y}\int_0^1 \zeta^{x-1}(1-\zeta)^{y-1}d\zeta;$$

or

$$\int_0^1 \zeta^{x-1}(1-\zeta)^{y-1}d\zeta=\frac{\Gamma x\Gamma y}{\Gamma(x+y)}$$

donc

$$u_{y,x}=\frac{\int_0^p \zeta^{x-1}(1-\zeta)^{y-1}d\zeta}{\int_0^1 \zeta^{x-1}(1-\zeta)^{y-1}d\zeta}.$$

2° On a trouvé

$$z_x=p^x t\cdot\frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{(1-qt)^x}.$$

Par la formule

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-ax}dx=\frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu},$$

on a

$$\frac{1}{a^\mu}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\cdot\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-ax}dx,$$

donc

$$\frac{1}{1-t}=\int_0^\infty e^{-\theta(1-t)}d\theta$$

$$\frac{1}{(1-qt)^x}=\frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^\infty e^{-\omega(1-qt)}\omega^{x-1}d\omega;$$

et par suite l'expression de z_x devient :

$$z_x=\frac{p^x t}{\Gamma(x)}\int_0^\infty e^{-\theta(1-t)}d\theta\int_0^\infty e^{-\omega(1-qt)}\omega^{x-1}d\omega$$

$$=\frac{p^x t}{\Gamma(x)}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)}\omega^{x-1}\left[1+t(q\omega+\theta)+\cdots+\frac{(q\omega+\theta)^{y-1}}{1.2\ldots y-1}t^{y-1}+\cdots\right]d\omega d\theta$$

$$=\cdots+t^y\left[\frac{p^x}{\Gamma x\Gamma y}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)}(q\omega+\theta)^{y-1}\omega^{x-1}d\omega d\theta\right]+\cdots$$

donc

$$u_{y,x}=\frac{p^x}{\Gamma x\Gamma y}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)}\omega^{x-1}(q\omega+\theta)^{y-1}d\omega d\theta.$$

Problème général des parties.

46. Des joueurs A, B,...... R ont respectivement $m, n, \ldots\ldots r$ points à faire pour gagner l'enjeu; $\alpha, \beta, \ldots\ldots \gamma$ sont les probabilités qu'ils ont de gagner un coup.

Quelle est la probabilité pour A de gagner la partie?

On a : $\alpha+\beta+\cdots+\gamma=1$.

Soit $u_{m,n,\ldots r}$ la probabilité demandée.

On aura, en faisant les mêmes raisonnements que dans le problème précédent :

$$u_{0,n,\ldots r}=1,\quad u_{m,0\ldots r}=0,\quad u_{m,n,0\ldots r}=0,\quad u_{m,n\ldots 0}=0. \quad (1)$$

$$u_{m,n,\ldots r}=\alpha u_{m-1,n\ldots r}+\beta u_{m,n-1\ldots r}+\cdots+\gamma u_{m,n,r-1}. \quad (2)$$

soit

$$z=\mathop{S}_1^\infty\mathop{S}_1^\infty\ldots\mathop{S}_1^\infty u_{m,n,\ldots r}\,t^m v^n\ldots w^r.$$

Dans la formule (2) faisons successivement

$$m=1,\ \begin{cases} n=1,2\ldots\\ r=1,2\ldots\end{cases}$$

$$m=2,\ \begin{cases} n=1,2\ldots\\ r=1,2\ldots\end{cases}$$

etc.,

après avoir multiplié d'abord par $t^m v^n\ldots w^r$, puis ajoutons; nous trouverons comme plus haut, n° 45 :

$$z=\alpha\left[tz+t\mathop{S}_1^\infty\ldots\mathop{S}_1^\infty v^n\ldots w^r\right]+\beta vz+\cdots+\gamma wz;$$

d'où :

$$z=\frac{\alpha t\mathop{S}_1^\infty\ldots\mathop{S}_1^\infty v^n\ldots w^r}{1-\alpha t-\beta v-\cdots-\gamma w}=\frac{\alpha tv\ldots w}{(1-v)\ldots(1-w)(1-\alpha t-\beta v-\ldots\gamma w)}.$$

Pour réduire cette formule en intégrale définie, nous avons

$$\frac{1}{1-v}=\int_0^\infty e^{-(1-v)\omega}d\omega,\ \ldots\ \frac{1}{1-w}=\int_0^\infty e^{-(1-w)\rho}d\rho,$$

$$\frac{1}{1-\alpha t-\cdots-\gamma w}=\int_0^\infty e^{-(1-\alpha t-\cdots-\gamma w)\theta}d\theta.$$

L'expression de z deviendra par là :

$$z = \alpha t v \dots w \int_0^\infty \!\!\dots\!\int_0^\infty \!\!\int_0^\infty d\omega \dots d\rho d\theta e^{-\omega(1-v)} \dots e^{-\rho(1-w)} e^{-\theta(1-\alpha t - \dots - \gamma w)}$$

$$= \alpha t v \dots w \int_0^\infty \!\!\dots\!\int_0^\infty \!\!\int_0^\infty d\omega \dots d\rho d\theta e^{-(\omega + \dots + \rho + \theta)} e^{\alpha\theta t} \dots e^{(\omega + \beta\theta) v} \cdot e^{(\rho + \gamma\theta) w}.$$

Développons les exponentielles :

$$e^{\alpha\theta t} = \dots + \frac{\alpha^{m-1}\theta^{m-1}t^{m-1}}{1.2\dots m-1} + \dots$$

$$e^{(\omega+\beta\theta)v} = \dots + \frac{(w+\beta\theta)^{n-1}v^{n-1}}{1.2\dots n-1}$$

$$e^{(\rho+\gamma\theta)w} = \dots + \frac{(\rho+\gamma\theta)^{r-1}w^{r-1}}{1.2\dots r-1}$$

et substituons; nous aurons :

$$z = \dots + t^m v^n \dots w^r \left[\frac{\alpha^m}{\Gamma_m \Gamma_n \dots \Gamma_r} \int_0^\infty \!\!\dots\!\int_0^\infty \!\!\int_0^\infty d\omega \dots d\rho d\theta \, . \, e^{-(\omega + \dots + \rho + \theta)} \theta^{m-1}\right].$$

Si nous changeons

$$\omega \dots \rho \text{ en } \theta\varphi \dots \theta\varpi;$$

et par suite

$$d\omega \dots d\rho \text{ en } \theta d\varphi \dots \theta d\varpi,$$

nous aurons

$$z = \dots + t^m v^n \dots w^r \left[\frac{\alpha^m}{\Gamma^m \Gamma^n \dots \Gamma^r} \int_0^\infty \!\!\dots\!\int_0^\infty \!\!\int_0^\infty d\varphi \dots d\varpi d\theta \, . \, \theta^{m+n+\dots+r-1} \right.$$
$$\left. + (\varphi + \beta)^{n-1} \dots (\varpi + \gamma)^{r-1} e^{-\theta(1+\varphi+\dots+\varpi)}\right];$$

et comme $u_{m,n\dots r}$ est le coefficient de $t^m v^n \dots w^r$ dans le développement de z, sa valeur sera l'expression entre parenthèses.

Pour la simplifier, posons

$$1 + \varphi + \dots + \varpi = \lambda;$$

elle deviendra

$$u_{m,n\dots r} = \frac{\alpha^m}{\Gamma m \Gamma n \dots \Gamma r} \int_0^\infty \!\!\dots\!\int_0^\infty d\varphi \dots d\varpi (\varphi + \rho)^{n-1} \dots (\varpi + \gamma)^{r-1} \int_0^\infty \theta^{m+\dots+r-1} e^{-\lambda\theta} d\theta$$

$$= \frac{\alpha^m \Gamma(m+n+\dots+r)}{\Gamma m . \Gamma n \dots \Gamma r} \int_0^\infty \!\!\dots\!\int_0^\infty \frac{d\varphi \dots d\varpi (\beta+\varphi)^{n-1} \dots (\varpi+\gamma)^{r-1}}{\lambda^{m+n+\dots+r}}; \quad (\alpha)$$

à cause de

$$\int_0^\infty \theta^{m+n+\dots+r-1} e^{-\lambda\theta} d\theta = \frac{\Gamma(m+n+\dots+r)}{\lambda^{m+n+\dots+r}}.$$

Or pour $\beta = 0 \dots \gamma = 0$, on a $u_{m,\dots r} = 1$; donc

$$\frac{\Gamma m \Gamma n \dots \Gamma r}{\Gamma(m+n+\dots+r)} = \int_0^\infty \!\!\dots\!\int_0^\infty \frac{d\varphi \dots d\varpi \varphi^{n-1} \dots \varpi^{r-1}}{(1+\varphi+\dots+\varpi)^{m+n+\dots+r}}. \quad (\beta)$$

La formule (β) permettra de calculer la formule (α); car on peut développer les binômes $(\beta+\varphi)^{n-1}, \dots (\varpi+\gamma)^{r-1}$; et le terme général du développement sera de la forme (β), et pourra se déterminer par cette dernière formule.

47. Problème XX. *Deux joueurs* A *et* B, *dont les probabilités respectives de gagner un coup sont* α *et* β, *ont l'un* m *et l'autre* n, *en tout* m + n = r *jetons; à chaque coup le perdant donne un jeton à son adversaire; la partie ne finit que quand l'un des joueurs a perdu tous ses jetons. Quelle est la probabilité pour* A *de gagner au* s^e^ *coup, en supposant* m > s?

Solution. Soit $u_{m,s}$ la probabilité cherchée.

A peut gagner la partie au moment du coup actuel :

1° S'il gagne ce coup, et qu'il gagne la partie au moyen des coups suivants: la probabilité de cet événement composé sera $\alpha u_{m+1,s-1}$;

2° S'il perd ce coup, mais qu'il gagne la partie au moyen des coups suivants, la probabilité de cet événement sera $\beta u_{m-1,s-1}$; par suite, la probabilité est égale à la somme :

$$u_{m,s} = \alpha u_{m+1,s-1} + \beta u_{m-1,s-1}. \quad (1)$$

Multiplions par t^s, faisons s successivement égal à 1, 2, 3, ..., ajoutons, et désignons la somme par z_m; il viendra

$$z_m = \mathrm{S}_1^\infty u_{m,s} t^s = u_{m,1} t + u_{m,2} t^2 + \dots$$
$$= \alpha [u_{m+1,0} t + u_{m+1,1} t^2 + \dots] + \beta [u_{m-1,0} t + u_{m-1,1} t^2 + \dots].$$

Or, en général (sauf le cas où $n = 0$), on a

$$u_{m+1,0} = 0, \qquad u_{m-1,0} = 0;$$

donc

$$z_m = \alpha t\,[t u_{m+1,1} + t^2 u_{m+1,2} + \cdots] + \beta t\,[u_{m-1,1}\, t^1 + u_{m-1,2}\, t^2 + \cdots]$$

ou bien

$$z_m = \alpha t z_{m+1} + \beta t z_{m-1}.$$

Cette équation étant linéaire, nous pouvons poser

$$z_m = a^m\,;$$

d'où

$$z_{m+1} = a^{m+1}, \qquad z_{m-1} = a^{m-1}\,;$$

ce qui donne, en substituant, et divisant par a^m :

$$1 = \alpha t a + \frac{\beta t}{a}\,;$$

ou

$$a^2 - \frac{1}{\alpha t} a = -\frac{\beta}{\alpha}\,;$$

d'où les deux racines :

$$a_1 = \frac{1}{2\alpha t}\left(1 + \sqrt{1 - 4\alpha\beta t^2}\right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2\alpha t}\left(1 - \sqrt{1 - 4\alpha\beta t^2}\right);$$

et, par suite,

$$z_m = \mathrm{A} a_1^m + \mathrm{B} a_2^m.$$

Or, pour $m = 0$, nous avons :

$$z_0 = u_{0,1} t + u_{0,2} t^2 + \cdots = 0\,;$$

donc

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0.$$

Pour $m = r$, on a $z_r = 1$, donc

$$\mathrm{A} a_1^r + \mathrm{B} a_2^r = 1\,;$$

Ces deux équations déterminent les valeurs de A et B qui, substituées dans l'expression de z_m, donnent

$$z_m = \frac{a_1^m + a_2^m}{a_1^r + a_2^r} = \frac{1}{a_1^n}\,\frac{1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^m}{1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^r}\,.$$

Or, comme $a_1 a_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, on aura $\frac{1}{a_1} = \frac{\alpha}{\beta} a_2$; donc :

$$z_m = \frac{\alpha^n}{\beta^n} a_2^n \left[1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^m\right]\left[1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^r + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2r} + \cdots\right]$$

Si l'on développe le rapport $\frac{a_2}{a_1}$ suivant les puissances de t^2, on aura

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^m = (z\alpha\beta t^2 + \cdots)^m,$$

et comme m est $> s$, ces termes n'auront pas d'influence sur le coefficient de t^s dans le développement de z_m ; on pourra donc écrire :

$$z_m = \frac{\alpha^n}{\beta^n} a_2^n.$$

Développons maintenant a_2^n par la formule de Lagrange qui donne, pour

$$z = x + \alpha f z :$$

$$\mathrm{F}z = \mathrm{S}\,\frac{\alpha^i}{1\,.\,2\,..\,i}\,\frac{d^{i-1}[\mathrm{F}'x\,.\,fx^i]}{dx^{i-1}}$$

Comme on a

$$a_2 = \beta t + \alpha t a_2^2,$$

on devra faire

$$z = a_2, \quad x = \beta t, \quad \alpha = \alpha t, \quad fr = a_2^2, \quad \mathrm{F}z = a_2^n\,;$$

$$\mathrm{F}x = (\beta t)^n\,; \quad \mathrm{F}'x = n(\beta t)^{n-1}\,; \quad fx = (\beta t)^2\,;$$

et l'on aura

$$a_2^n = \mathrm{S}\,\frac{(\alpha t)^i}{1\,.\,2\,\ldots\,i}\,\frac{d^{i-1}\left[n(\beta t)^{2i+n-1}\right]}{d(\beta t)^{i-1}}$$

$$= \mathrm{S}\,\frac{(\alpha t)^i}{1\,.\,2\,\ldots\,i}\, n(n + 2i - 1)\ldots(n + i + 1)\,\beta t^{n+i}$$

$$= \mathrm{S} t^{n+2i}\,\frac{\alpha^i \beta^i \beta^n}{1\,.\,2\ldots i}\, n(n + 2i - 1)\ldots(n + i + 1)\,;$$

et, par suite, l'expression de z_m deviendra

$$z_m = \frac{\alpha^n}{\beta^n}\,\mathrm{S} t^{n+2i}\,\frac{\alpha^i\beta^i\beta^n}{1\,.\,2\,..\,i}\, n(n + 2i - 1)\ldots(n + i + 1).$$

Enfin, si nous posons $s = n + 2i$, nous aurons

$$u_{m,0} = \frac{\alpha^{n+i}\beta^i}{1 \,.\, 2 \,..\, i} n(n + 2i - 1) \ldots (n + i + 1).$$

48. Problème XXI. *Une urne contient* r *boules marquées* 1; r *boules marquées* 2, *etc.*, r *boules marquées* n; *on en tire toutes les boules successivement; trouver la probabilité qu'au moins* 1, *ou* 2, *ou* 3, *etc., ou* i *boules, sortent au rang marqué par leur numéro.*

Solution. Aucune boule ne peut sortir à son rang que dans les n premiers tirages. On peut donc faire abstraction des tirages suivants. Le nombre total des boules est $rn = s$. Comme il faut avoir égard à l'ordre, le nombre total de tous les cas possibles est égal au nombre des arrangements de s^r boules, prises n à n, ou

$$T = s(s-1) - (s - n + 1) = s^{n|-1}.$$

Cherchons :

A. La probabilité P_1 qu'une boule au moins sortira au rang marqué par son numéro.

Supposons qu'une boule n° 1 sorte la première; comme cela ne peut arriver qu'autant de fois qu'il y a d'arrangements possibles avec $s - 1$ boules prises $n - 1$ à $n - 1$, on aura

$$(s-1)(s-2) \ldots (s - n + 1) = (s-1)^{n-1|-1}$$

pour le nombre des cas dans lesquels une boule n° 1 sort la première.

Cette supposition s'applique aux r boules, donc $r(s-1)^{n-1|-1}$ sera le nombre des cas où les r boules n° 1 sortent à leur rang.

Les mêmes résultats s'appliquent aux n^{os} 2, 3, .. n; donc

$$nr(s-1)^{n-1|-1} = s(s-1)^{n-1|-1} = s^{n|-1} \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

sera le nombre des cas dans lesquels une boule au moins sortira à son rang, pourvu que l'on en retranche les cas qui sont répétés. Déterminons ces cas.

Considérons le cas où une des boules n° 1 sort la première, et une des boules n° 2 la seconde. Ce cas est compris deux fois

dans (a), car il y est compris une fois dans les cas où un n° 1 sort à son rang; il y est compris une seconde fois dans les cas où un n° 2 sort à son rang. Cela s'étend à deux boules quelconques sortant à leur rang.

Il faut donc retrancher de (a) le nombre de tous les cas où deux boules sortent à leur rang. Le nombre de combinaisons de deux boules de numéros différents est

$$\frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} r^2;$$

le nombre des arrangements des $s - 2$ boules restantes prises $n - 2$ à $n - 2$ est

$$(s-2)(s-3) \ldots (s - n + 1) = (s-2)^{s-2|-1}.$$

Donc, le nombre des cas relatifs à la supposition que deux boules sortent à leur rang est

$$\frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} r^2 (s-2)^{n-2|-1},$$

qu'il faut retrancher de (a).

On a donc

$$s^{n|-1} - \frac{n^{2|-1}}{1 \,.\, 2} r^2 (s-2)^{n-2|-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a')$$

pour le nombre de tous les cas dans lesquels une boule au moins sort à son rang, pourvu que l'on retranche encore de (a') les cas répétés, ou qu'on y ajoute ceux qui manquent.

Ces cas sont ceux dans lesquels trois boules sortent à leur rang. Soit k ce nombre. Il est répété trois fois dans le premier terme de (a'), car il peut résulter dans ce terme des trois suppositions de chacune des trois boules sortant à son rang; k est compris aussi trois fois dans le second terme de (a'), car il peut résulter de chacune des suppositions relatives à deux quelconques des trois boules sortant à leur rang. Ce second terme étant affecté du signe —, k se détruit, et par conséquent k manque dans (a'); il faut donc l'y ajouter.

Déterminons k : Comme le nombre des combinaisons de n numéros 3 à 3 est $\frac{n^{3|-1}}{1.2.3}$, et comme on peut combiner les r boules d'un des numéros de chaque combinaison avec les r boules du second, et avec les r boules du troisième, on aura

$$\frac{n^{3|-1}}{1.2.3} r^3$$

combinaisons, qu'il faut multiplier par

$$(s-3)(s-4)\cdots(s-n+1) = (s-3)^{n-3|-1},$$

qui est le nombre des arrangements des $s-3$ boules restantes prises $n-3$ à $n-3$.

On a donc :

$$k = \frac{n^{3|-1}}{2.3} r^3 (s-3)^{n-3|-1}$$

pour le nombre des cas dans lesquels trois boules sortent à leur rang, nombre qu'il faut ajouter à (a'); on aura ainsi :

$$s^{n|-1} - \frac{n^{2|-1}}{2} r^2 (s-2)^{n-2|-1} + \frac{n^{3|-1}}{2.3} r^3 (s-3)^{n-3|-1} \quad . \quad . \quad (a'')$$

pour le nombre de tous les cas dans lesquels une boule au moins sort à son rang, pourvu que l'on retranche encore les cas répétés. Ces cas sont ceux dans lesquels quatre boules sortent à leur rang, ou

$$\frac{n^{4|-1}}{2.3.4} r^4 (s-4)^{n-4|-1},$$

et ainsi de suite.

On aura donc

$$\left.\begin{aligned} F_1 = s^{n|-1} &- \frac{n^{2|-1}}{2} r^2 (s-2)^{n-2|-1} + \frac{n^{3|-1}}{3!} r^3 (s-3)^{n-3|-1} \\ &- \frac{n^{4|-1}}{4!} r^4 (s-4)^{n-4|-1} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

pour le nombre de tous les cas dans lesquels une boule sort à son

rang; la probabilité de la sortie d'une boule à son rang sera donc

$$\left.\begin{aligned} P_1 = \frac{F_1}{T} &= 1 - \frac{n^{2|-1}}{2} r^2 \frac{1}{s^{2|-1}} + \frac{n^{3|-1}}{3!} r^3 \frac{1}{s^{3|-1}} - \frac{n^{4|-1}}{4!} r^4 \frac{1}{s^{4|-1}} + \cdots \\ &= 1 - \frac{n-1}{2} r \frac{1}{s-1} + \frac{(n-1)^{2|-1}}{3!} r^2 \frac{1}{(s-1)^{2|-1}} \\ &\quad - \frac{(n-1)^{3|-3}}{4!} r^3 \frac{1}{(s-1)^{3|-1}} + \cdots \end{aligned}\right\} (B)$$

Cherchons :

B. La probabilité P_i que i boules au moins sortiront au rang marqué par leur numéro.

Le nombre des cas dans lesquels i boules sortent à leur rang est, par ce qui précède :

$$\frac{n^{i|-1}}{i!} r^i (s-i)(s-i+1)\ldots(s-n+1) = \frac{n^{i|-1}}{i!} r^i (s-i)^{n-i|-1}, \ . \ (b)$$

pourvu que l'on retranche de (b) les cas qui sont répétés. Ces cas sont ceux dans lesquels $i+1$ boules sortent à leur rang, car ils peuvent résulter dans (b), de ce que $i+1$ boules sont prises i à i. Ces cas sont donc répétés $i+1$ fois dans (b); par conséquent il faut les retrancher i fois.

Or le nombre des cas dans lesquels $i+1$ boules sortent à leur rang est

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-i)}{1.2..(i+1)} r^{i+1} (s-i-1)(s-i-2)\ldots(s-n+1)$$
$$= \frac{n^{i+1|-1}}{(i+1)!} r^{i+1} (s-i-1)^{n-i-1|-1}.$$

En multipliant ce nombre par i, et retranchant le produit de (b), nous aurons

$$\left.\begin{aligned} &\frac{n^{i|-1}}{i!} r^i (s-i)^{n-i|-1} - i \frac{n^{i+1|-1}}{(i+1)!} r^{i+1} (s-i-1)^{n-i-1|-1} \\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2..i} r^i (s-i)(s-i-1)\ldots(s-n+1)\left\{1 - ir\frac{n-i}{i+1}\frac{1}{s-i}\right\} \\ &= \frac{n^{i|-1}}{i!} r^i (s-1)^{n-i|-1} \left\{1 - ir \frac{n-i}{i+1} \frac{1}{s-i}\right\}. \end{aligned}\right\} (b')$$

Mais dans cette formule il se trouve encore des cas répétés, savoir : ceux dans lesquels $i+2$ boules sortent à leur rang, car ils résultent, dans le premier terme, des cas où $i+2$ boules, sortant à leur rang, sont prises i à i; et, dans le second, des cas où ces $i+2$ boules, sortant à leur rang, sont prises $i+1$ à $i+1$, cas qu'on doit de plus multiplier par i, comme on l'a fait au second terme. Ils sont donc compris dans (b')

$$\frac{(i+2)(i+1)}{2} - i(i+2) = k \text{ fois.}$$

Ainsi il faudra multiplier par $1-k$ le nombre des cas dans lesquels $i+2$ boules sortent à leur rang. Ce dernier nombre est

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-i-1)}{1.2\ldots(i+2)} r^{i+2}(s-i-2)(s-i-3)\ldots(s-n+2)$$
$$=\frac{n^{i+2|-1}}{(i+2)!} r^{i+2}(s-i-2)^{n-i+1|-1}.$$

Le produit demandé est donc

$$\left\{1-\frac{(i+2)(i+1)}{2}+i(i+2)\right\}\frac{n(n-1)\ldots(n-i-1)}{1.2..(i+2)} r^{i+1}(s-i-2)\ldots(s-n+1)$$
$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-i-1)}{1.2\ldots(i+2)} r^{i+2}(s-i-2)(s-i-3)\ldots(s-n+1)\frac{i(i+1)}{2}.$$

En l'ajoutant à (b'), on aura

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2..i} r^i(s-i)(s-i-1)\ldots(s-n+1)\left\{1-ir\frac{n+i}{i+1}\frac{1}{s-i}\right\}\\
&+\frac{n(n-1)\ldots(n-i-1)}{1.2..(i+2)} r^{i+2}(s-i-2)(s-i-3)\ldots(s-n+1)\frac{i(i+1)}{2}\\
&=\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2..i} r^i(s-i)(s-i-1)\ldots(s-n+1)\times\\
&\times\left\{1-\frac{i}{i+1}\frac{(n-i)r}{s-i}+\frac{i}{i+1}\cdot\frac{(n-1)(n-i+1)r^2}{2(s-i)(s-i-1)}\right\}\\
&=\frac{n^{i|-1}}{i!} r^i(s-i)^{n-i|-1}\left\{1-\frac{i}{i+1}\frac{(n-i)r}{s-i}+\frac{i}{i+2}\frac{(n-i)^{2|-1}}{2}r^2\frac{1}{(s-1)^{2|-1}}\right\}
\end{aligned}\right\} (b'')$$

Pour obtenir le nombre de tous les cas où i boules sortent à leur rang, il faudra encore retrancher de (b'') tous les cas qui sont répétés; on obtiendra ainsi :

$$\mathrm{F}_i=\frac{n^{i|-1}}{i!} r^i(s-i)^{n-i|-1}\left\{1-\frac{i}{i+1}\frac{n-i}{s-i}r+\right.$$
$$\left.+\frac{i}{i+2}\frac{(n-i)^{2-1}}{2}r^2\frac{1}{(s-i)^{2|-1}}-\frac{i}{i+3}\frac{(n-1)^{3|-1}}{3!}r^3\frac{3}{(s-i)^{3|-1}}+\ldots\right\}.$$

La probabilité que i boules sortent à leur rang sera donc

$$\mathrm{P}_i=\frac{\mathrm{F}_i}{\mathrm{T}}=\frac{(n-1)^{i-1|-1}}{i!} r^{i-1}\frac{1}{(s-1)^{i-1|-1}}\left\{1-\frac{i}{i+1}\frac{n-i}{s-i}\right.$$
$$\left.+\frac{i}{i+2}\frac{(n-i)^{2|-1}}{2}r^2-\frac{i}{i+3}\frac{(n-i)^{3|-1}}{3!}r^3\frac{1}{(s-1)^{3|-1}}+\ldots\right\}$$

La probabilité Q qu'aucune boule ne sort à son rang sera

$$\mathrm{Q}=1-\mathrm{P}_1=\frac{n-1}{2}r\frac{1}{s-1}-\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}r^2\frac{1}{(s-1)(n-2)}$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}+\ldots$$

Divisons et multiplions par $1, 2, \ldots rn$; ajoutons et retranchons

$$\frac{1.2..rn}{1.2..rn}-\frac{nr\,1.2..(rn-1)}{1.2..rn};$$

nous aurons, en nous rappelant que $s=rn$:

$$\mathrm{Q}=\frac{1.2..rn-n\,1.2..(rn-1)r+\dfrac{n(n-1)}{1.2}1.2..(rn-2)r^2-\ldots}{1.2.rn}$$
$$=\frac{\int_0^\infty x^{rn-n}(x-r)^n e^{-x}\,dx}{\int_0^\infty x^{rn}e^{-x}\,dx}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}.$$

Cette dernière forme vaut mieux quand rn est très-grand.

49. REMARQUE. La valeur de x qui répond au maximum de $x^{rn-n}(x-r)^n e^{-x}$ est

$$x_m = \frac{rn+r}{2} + \sqrt{\frac{r^2(n-1)^2+4rn}{2}}.$$

Au moyen de la formule

$$\int y dx = \frac{\sqrt{2\pi}\, Y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-\frac{d^2y}{dx^2}}} \ (*),$$

on trouvera en conséquence :

$$N = \frac{\sqrt{2\pi}\, x_m^{rn+2}\left(1-\frac{r}{x_m}\right) e^{-x_m}}{\sqrt{nx_m^2+n(r-1)(x_m-r)^2}} = \frac{\sqrt{2\pi}\,(rn)^{rn+\frac{1}{2}} e^{-rn}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\sqrt{r}}{\sqrt{(r-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+1}};$$

$$D = \sqrt{2\pi}\,(rn)^{rn+\frac{1}{2}} e^{-rn},$$

d'où

$$Q = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\sqrt{r}}{\sqrt{(r-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+1}} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{2}{rn}-\frac{2}{rn^2}}}$$

Comme rn est supposé très-grand, on peut négliger $\frac{2}{rn}$ et $\frac{1}{rn^2}$, et l'on aura

$$Q = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

(*) Voir la note II à la fin du volume.

CHAPITRE III.

THÉORÈME DE BERNOUILLI.

50. *Si l'on connaît les probabilités simples et constantes,* p *et* q, *de deux événements contraires* A *et* B, *la probabilité que, dans un très-grand nombre* $\mu = m + n$ *d'épreuves,* A *arrivera au nombre inconnu* m *de fois compris entre*

$$\mu p \pm \gamma\sqrt{2pq\mu}$$

sera donné par

$$P = \frac{2}{\sqrt{\varpi}}\int_0^\gamma e^{-t^2}dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\varpi\mu pq}};$$

ou bien P *sera la probabilité que l'écart* $\frac{m}{\mu} - p$ *est compris entre*

$$\pm\gamma\sqrt{2pq.} \qquad \pm\gamma\sqrt{2pq/\mu}$$

DÉMONSTRATION. Le terme général du binôme

$$(p+q)^\mu = S\,\frac{\mu!}{m!\,n!}p^m q^n = 1$$

qui exprime la probabilité qu'en $\mu = m + n$ épreuves, A arrive m fois, B, n fois, est :

$$T_n = \frac{\mu!}{m!\,n!}p^m q^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Si nous remplaçons les factorielles qui entrent dans cette formule par leurs expressions tirées de la formule suivante, qui est valable pour une très-grande valeur de x (*) :

$$x! = x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x},$$

(*) Voir la note I à la fin du volume.

nous trouverons :

$$T_n = \left(\frac{\mu p}{m}\right)^m \left(\frac{\mu q}{n}\right)^n \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2\pi mn}}$$
$$= \left(\frac{\mu p}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu q}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Cherchons les valeurs de m et de n qui rendent T_n maximum.

Si nous changeons successivement n en $n-1$ et en $n+1$, la formule (1) devient :

$$T_{n-1} = \frac{\mu!}{\overline{m+1}!\,\overline{n-1}!} p^{m+1} q^{n-1} = T_n \frac{n}{m+1}\frac{p}{q}$$
$$T_{n+1} = \frac{\mu!}{\overline{m-1}!\,\overline{n+1}!} p^{m-1} q^{n+1} = T_n \frac{m}{n+1}\frac{q}{p}.$$

Pour que T_n soit un maximum, il faut que

$$T_n > T_{n-1} \quad \text{et} \quad T_n > T_{n+1};$$

ou que

$$1 > \frac{n}{m+1}\frac{p}{q} \quad \text{et} \quad 1 > \frac{m}{n+1}\frac{q}{p}. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

1° *Éliminons* n *et* q.

En remplaçant n par $\mu - m$ et q par $1-p$, les formules (2) deviennent

$$1 > \frac{\mu - m}{m+1}\frac{p}{1-p} \quad \text{et} \quad 1 > \frac{m}{\mu - m + 1}\frac{1-p}{p},$$

ou bien, par des transformations fort simples :

$$m > p(\mu+1) - 1 \qquad m < p(\mu+1)$$
$$\frac{m}{\mu+1} > p - \frac{1}{\mu+1} \qquad \frac{m}{\mu+1} < p$$
$$\frac{m}{\mu} - \frac{m}{\mu(\mu+1)} > p - \frac{1}{\mu-1} \qquad \frac{m}{\mu} - \frac{m}{\mu(\mu+1)} < p$$
$$\frac{m}{\mu} > p + \frac{m}{\mu(\mu+1)} - \frac{1}{\mu+1} \qquad \frac{m}{\mu} < p + \frac{m}{\mu(\mu+1)}.$$

Il en résulte que

$$\frac{m}{\mu} = p + \frac{m}{\mu(\mu+1)} - \delta,$$

δ étant $< \frac{1}{\mu+1}$; et, par suite, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{\mu}$:

$$\frac{m}{\mu} = p \quad \text{ou} \quad m = \mu p.$$

2° *Éliminons* m *et* p.

Des transformations analogues à celles des formules (2) nous conduiront à

$$\frac{n}{\mu} < q + \frac{n}{\mu(\mu+1)}; \qquad \frac{n}{\mu} > q + \frac{n}{\mu(\mu+1)} - \frac{\mu}{\mu+1};$$

d'où il résulte que

$$\frac{n}{\mu} = q + \frac{n}{\mu(\mu-1)} + \delta',$$

δ' étant $< \frac{1}{\mu+1}$; ou, en négligeant le terme de l'ordre $\frac{1}{\mu}$:

$$\frac{n}{\mu} = q \quad \text{ou} \quad n = \mu q.$$

51. Appelons **G** la valeur maximum de T_n; nous l'obtiendrons en faisant, dans l'expression T_n,

$$\frac{\mu p}{m} = 1, \qquad \frac{\mu q}{n} = 1,$$

ce qui donne :

$$G = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

par suite

$$T_n = G\left(\frac{\mu p}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu q}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

et de même

$$T^{n-l} = G\left(\frac{\mu p}{m} \cdot \frac{1}{1+\frac{l}{m}}\right)^{m+l+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu q}{n} \cdot \frac{1}{1-\frac{l}{n}}\right)^{n-l+\frac{1}{2}}.$$

Désignons par G_{n-l} la valeur que prend T_{n-l} pour $m = \mu p$, $n = \mu q$, nous aurons

$$G_{n-l} = G\left(1 + \frac{l}{m}\right)^{-m-l-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{l}{n}\right)^{-n+l-\frac{1}{2}}.$$

Développons les puissances qui entrent dans le second membre :

$$\left(1 + \frac{l}{m}\right)^{-m-l-\frac{1}{2}} = e^{\left(-m-l-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l.}\left(1+\frac{l}{m}\right)} = e^{\left(-m-l-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{l}{m}-\frac{l^2}{2m^2}+\frac{l^3}{3m^3}-\cdots\right)}$$

$$= e^{\frac{-ml-l^2-\frac{1}{2}l}{m}+\frac{ml^2+l^3+\frac{1}{2}l^2}{2m^2}-\frac{ml^3+l^4+\frac{1}{2}l^3}{3m^3}+\cdots}$$

$$\left(1 - \frac{l}{n}\right)^{-n+l-\frac{1}{2}} = e^{\left(-n+l-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l.}\left(1-\frac{l}{n}\right)} = e^{\left(-n+l-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{l}{n}-\frac{l^2}{2n^2}-\frac{l^3}{3n^3}-\cdots\right)}$$

$$= e^{-\frac{-nl+l^2-\frac{1}{2}l}{n}-\frac{-nl^2+l^3-\frac{1}{2}l^2}{2n^2}-\frac{-nl^3+l^4-\frac{1}{2}l^3}{3n^3}}.$$

Substituant ces expressions dans celle de G_{n-l}, nous aurons :

$$G_{n-l} = Ge^{-\frac{l^2+\frac{1}{2}l}{2m}+\frac{l^3+\frac{1}{2}l^2}{6m^2}-\frac{l^4+\frac{1}{3}l^3}{3m^3}-\frac{l^2-\frac{1}{2}l}{2n}-\frac{l^3-\frac{1}{2}l^2}{6n^2}-\frac{l^4-\frac{1}{2}l^3}{3n^3}}$$

$$= G\left\{1 - \frac{l^2+\frac{1}{2}l}{2m} + \frac{l^3+\frac{1}{2}l^2}{6m^2} - \frac{l^4+\frac{1}{3}l^3}{3m^3} - \frac{l^2-\frac{1}{2}l}{2n} - \frac{l^3-\frac{1}{2}l^2}{6n^2} - \frac{l^4-\frac{1}{2}l^3}{3n^3}\right\}.$$

Si nous changeons le signe de l, nous trouverons l'expression de G_{n+l}; et, en ajoutant les deux expressions, nous aurons :

$$G_{n-l} + G_{n+l} = G\left\{2 - \frac{2l^2}{2m} - \frac{2l^2}{2n}\right\}$$

$$= 2G\left\{1 - \frac{l^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= 2G\left\{1 - \frac{l^2\mu}{2mn}\right\} = 2Ge^{-\frac{\mu l^2}{2mn}} = 2Ge^{-\frac{l^2}{2\mu pq}}.$$

Désignons par $\varphi(l)$ l'expression

$$G_{n-l} + G_{n+l} = 2Ge^{-\frac{l^2}{2\mu pq}},$$

et par g la fraction

$$\frac{\mu}{2mn} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2\mu pq};$$

il s'ensuivra

$$G = \frac{1}{2}\varphi(0) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}},$$

et

$$\varphi(l) = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}}e^{-l^2 g}.$$

La probabilité P que m est compris entre $\mu p \pm l$ sera :

$$P = G_{n-l} + G_{n-l+1} + \cdots + G_{n-1} + G + G_{n+1} + \cdots + G_{n+l-1} + G_{n+l}$$

$$= G_{n+l} + G_{n-l} + \overset{l=l-1}{\underset{l=0}{\mathrm{S}}}\left[G_{n+l} + G_{n-l}\right] - G$$

$$= \varphi(l) + \sum_0^l \varphi(l) - \frac{1}{2}\varphi(0).$$

Or on a, en général (*), par la formule sommatoire d'Euler :

$$\sum\varphi(l) = \frac{1}{h}\int\varphi(l)\,dl - \frac{1}{2}\varphi(l) + \frac{B_1h^2\varphi^1(l)}{1.2} - \frac{B_3h^4}{1..4}\varphi^{(1)}(l) + \cdots$$

Donc, en faisant $h = 1$, et remarquant que, $g = \frac{\mu}{2mn}$ étant de l'ordre $\frac{1}{\mu}$, on peut négliger les termes $\varphi'(l)$, $\varphi'''(l)$, etc., puisque

$$\varphi'(l) = -\frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}}gle^{-l^2 g},$$

on aura :

$$\sum\varphi(l) = \int\varphi(l)\,dl - \frac{1}{2}\varphi(l),$$

et par suite

$$\sum_0^l \varphi(l) = \int_0^l \varphi(l)\,dl - \frac{1}{2}\left[\varphi(l) - \varphi(0)\right].$$

(*) Voir pour cette formule, comme pour la précédente, le calcul aux différences. — Lacroix, *Grand Traité*, 2me édit., t. III, pp. 98 et suivantes.

En substituant dans l'expression de P, on trouvera

$$P = \int_0^l \varphi(l)dl + \frac{1}{2}\varphi(l)$$

$$= \int_0^l \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-l^2g}dl + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-l^2g}.$$

Posons $l^2g = \gamma^2$, d'où

$$l = \frac{\gamma}{\sqrt{g}} = \gamma\sqrt{2\mu pq}; \quad dl = \frac{d\gamma}{\sqrt{g}},$$

l'expression précédente deviendra

$$P = \int_0^\gamma \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-\gamma^2} \frac{d\gamma}{\sqrt{g}} + \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

probabilité que le nombre m des répétitions de A est compris entre

$$\mu p \pm l = \mu p \pm \frac{\gamma}{\sqrt{g}} = \mu p \pm \gamma\sqrt{2\mu pq};$$

ou que $\frac{m}{\mu}$ est compris entre

$$p \pm \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}.$$

52. Première remarque. De ce que

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^\gamma + \int_\gamma^\infty,$$

d'où

$$\int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_\gamma^\infty e^{-t^2}\,dt,$$

il en résulte :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_\gamma^\infty e^{-t^2}\,dt\right\} + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma^\infty e^{-t^2}\,dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Pour l'évaluation de $\int_\gamma^\infty e^{-t^2}dt$, on peut se servir, soit de la table de Kramp, soit de la série

$$\int_\gamma^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-\gamma^2}}{2\gamma}\left[1 - \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{1.3}{2^2\gamma^4} - \frac{1.3.5}{2^3\gamma^6} + \cdots\right]$$

qui se trouve en partant de

$$\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^{2n}} = \int \frac{1}{t^{2n+1}} e^{-t^2}tdt = -\frac{e^{-t^2}}{2t^{2n+1}} - \frac{2n+1}{2}\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^{2n+2}},$$

et en faisant successivement $n = 0, 1, 2, 3$, etc., ce qui donne

$$\int e^{-t^2}dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t} - \frac{1}{2}\int \frac{e^{-t^2}dt}{dt}$$

$$\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^2} = -\frac{e^{-t^2}}{2t^3} - \frac{3}{2}\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^4}$$

$$\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^4} = -\frac{e^{-t^2}}{2t^5} - \frac{5}{2}\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^6}, \text{ etc.};$$

d'où, par des substitutions successives :

$$\int e^{-t^2}dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left[1 - \frac{1}{2t^3} + \frac{1.3}{2^2t^4}\right] - \frac{1.3.5}{2^3}\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^6}, \text{ etc.}$$

En poursuivant, le reste disparaitra pour $n = \infty$, et l'on pourra écrire

$$\int e^{-t^2}dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left[1 - \frac{1}{2t^3} + \frac{1.3}{2^2t^4} - \cdots\right] + C^{te};$$

et par suite, puisque tous les termes disparaissent pour $t = \infty$:

$$\int_\gamma^\infty e^{-t^2}dt = \frac{e^{-\gamma^2}}{2\gamma}\left[1 - \frac{1}{2\gamma^3} + \frac{1.3}{2^2\gamma^4} - \cdots\right].$$

Deuxième remarque. 1° Si γ, et par suite P, restent constants, les limites se resserrent de plus en plus à mesure que μ augmente;

2° Si les limites restent constantes, il faut que γ augmente avec μ, et par suite la probabilité approche de plus en plus de 1, ou de la certitude.

Ainsi donc :

1° Les limites $p \pm \gamma \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$, entre lesquelles est compris le rapport inconnu du nombre des répétitions de A, en μ coups, au nombre total des coups, restant constantes, la probabilité P que $\frac{m}{\mu}$ tombera entre ces limites converge vers l'unité à mesure que le nombre des coups augmente;

2° La probabilité que ce rapport $\frac{m}{\mu}$ est toujours compris entre les limites $p \pm \gamma \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$ restant la même, la répétition indéfinie des coups resserrera de plus en plus ces limites.

Troisième remarque. Pour $P = \frac{1}{2}$, on trouve, par la table de Kramp ou par la série :

$$\gamma = 0{,}4765 - \frac{1}{2\sqrt{2\mu pq}};$$

car de

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}},$$

on tire

$$\int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-\gamma^2}}{2\sqrt{2\mu pq}},$$

ou

$$\gamma - \frac{1}{3}\gamma^3 + \frac{1}{5}\frac{\gamma^5}{1.2} - \cdots = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-\gamma^2}}{2\sqrt{2\mu pq}} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

or la valeur $a = 0{,}4765$ satisfait à

$$a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}\frac{a^5}{1.2} - \cdots = \frac{1}{4}\sqrt{\pi};$$

de sorte que la formule (1) peut s'écrire

$$\gamma - \frac{1}{3}\gamma^3 + \frac{1}{5}\frac{\gamma^5}{1.2} - \cdots = a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}\frac{a^5}{1.2} - \cdots - \frac{e^{-\gamma^2}}{2\sqrt{2\mu pq}}.$$

Comme γ différera très-peu de a, nous pourrons négliger les puissances supérieures et poser approximativement $e^{-\gamma^2} = 1$; nous aurons ainsi

$$\gamma = a - \frac{1}{2\sqrt{2\mu pq}} = 0{,}4765 - \frac{1}{2\sqrt{2\mu pq}},$$

c'est-à-dire qu'il y aura une probabilité $P = \frac{1}{2}$ que $\frac{m}{\mu}$ est compris entre

$$p \pm \left[0{,}4765 \sqrt{\frac{2pq}{\mu}} - \frac{1}{2\mu}\right].$$

53. Quatrième remarque. Valeurs de P pour différentes valeurs de γ :

$$\gamma = 1, \quad P = 1 - 0{,}2594460$$
$$\gamma = 2, \quad P = 1 - 0{,}0052587$$
$$\gamma = 3, \quad P = 1 - 0{,}00002207$$
$$\gamma = 4, \quad P = 1 - 0{,}000000014$$
$$\gamma = 5, \quad P = 1 - 0{,}0000000000015$$

De sorte que, pour $\gamma \overline{\overline{>}} 5$, on peut prendre $P = 1$.

Cinquième remarque. Si deux événements A et B ont la même probabilité $p = q = \frac{1}{2}$, il sera également probable que la différence $m - n$ entre les nombres de fois qu'ils arrivent en μ épreuves sera plus grande ou plus petite que

$$0{,}6739\sqrt{\mu} - 1.$$

Car P est la probabilité que $\frac{m}{\mu} - p$ est compris entre $\pm \gamma \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$ ou que $\frac{n}{\mu} - q$ . . . .; ou bien encore la probabilité que la différence

$$\frac{m}{\mu} - p - \left(\frac{n}{\mu} - q\right)$$

est comprise entre

$$\pm 2\gamma \sqrt{\frac{2pq}{\mu}},$$

ou que :

$$(p - q)\mu - 2\gamma\sqrt{2\mu pq} < m - n < (p - q)\mu + 2\gamma\sqrt{2\mu pq}.$$

Posons

$$\mathrm{P}=\frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad \gamma=0{,}4765-\frac{1}{\sqrt{2\mu}}, \quad \text{et} \quad p=q=\frac{1}{2};$$

cette inégalité deviendra

$$-\left(\frac{0{,}6759}{\sqrt{\mu}}-\frac{1}{\mu}\right)<\frac{m-n}{\mu}<\frac{0{,}6759}{\sqrt{\mu}}-\frac{1}{\mu};$$

ou

$$-(0{,}6759\sqrt{\mu}-1)<m-n<0{,}6759\sqrt{\mu}-1.$$

Comme nous avons posé $\mathrm{P}=\frac{1}{2}$, il est également probable que $m-n$ est plus grand ou plus petit que $0{,}6759\sqrt{\mu}-1$.

Exemples du théorème de Bernouilli.

54. Premier exemple. *Les chances favorables aux naissances des garçons et des filles étant dans le rapport de 18 à 17, s'il naît 14,000 enfants pendant une année, quelle sera la probabilité que le nombre des garçons ne surpassera pas 7363 et ne sera pas moindre que 7037 ?*

(*A*) Marche du calcul : Nous avons trouvé

$$\mathrm{P}=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\gamma}^{\infty}e^{-t^2}dt+\frac{\sqrt{\mu}\,e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi mn}}$$

pour la probabilité que $m-l<m'<m+l$;
γ étant égal à

$$\frac{l\sqrt{\mu}}{\sqrt{2mn}};$$

d'où

$$\frac{\gamma}{l}=\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2mn}}; \quad \lg\frac{\gamma}{l}=\frac{\lg\mu-(\lg m+\lg n+\lg 2)}{2} \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\lg\gamma=\lg\frac{\gamma}{l}+\lg l; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

d'où l'on déduit $\gamma=\ldots$

Nous pourrons écrire la valeur de P sous la forme

$$\mathrm{P}=1+\frac{\gamma}{l}\cdot\frac{e^{-\gamma^2}}{2\frac{\sqrt{\pi}}{2}}-\frac{\int_{\gamma}^{\infty}e^{-t^2}dt}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$=1+\mathrm{N}-\mathrm{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Calculons

$$\mathrm{N}=\frac{\gamma}{l}\cdot\frac{e^{-\gamma^2}}{2\frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

Or :

$$\lg e^{\gamma^2}=\gamma^2\lg e;$$

d'où

$$\lg\lg e^{\gamma^2}=2\lg\gamma+\lg\lg e. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

et de là on tire la valeur de $\gamma^2\lg e$.

On a alors

$$\lg n=\lg\frac{\gamma}{l}+\lg e^{-\gamma^2}-\lg 2-\lg\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$=\lg\frac{\gamma}{l}-\gamma^2\lg e-\lg 2-\lg\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

on aura donc

$$\mathrm{N}=\cdots; \quad \text{et} \quad 1+\mathrm{N}=\cdots$$

Calculons

$$\mathrm{M}=\frac{\int_{\gamma}^{\infty}e^{-t^2}dt}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$\lg\mathrm{M}=\lg\int_{\gamma}^{\infty}e^{-t^2}dt-\lg\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{M}=\cdots$$

Or

$$1+\mathrm{N}=\cdots$$

d'où enfin

$$\mathrm{P}=\cdots$$

(B). Données. m chances favorables aux naissances des garçons,
n » » » » des filles.

$$m+n=\mu=14000$$
$$m:n=18:17$$
$$m+n:m=35:18$$
$$14000:m=35:18$$

d'où

$$m=7200$$
$$n=6800.$$

$$m+l=7363.\quad l=7363-m=163.$$

$$\lg m=3{,}85733. \qquad \lg\ 2=0{,}30103.$$
$$\lg n=3{,}83251. \qquad \lg\sqrt{\pi}=0{,}24857.$$
$$\lg l=2{,}21219. \qquad \lg\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\bar{1}{,}94754.$$
$$\lg \mu=4{,}14613. \qquad \lg\ e=0{,}43429.$$
$$\lg\lg e=\bar{1}{,}63778.$$

(C) Calcul effectif :

Calcul de $1+N$.

Formule 1).

$$\begin{array}{rl}
\lg m = & 3{,}85733 \\
\lg n = & 3{,}83251 \\
\lg 2 = & 0{,}30103 \\
\hline
\text{Somme} = & 7{,}99087 \\
\lg \mu = & 4{,}14613 \\
\hline
\text{diff.} = & \bar{4}{,}15526 \\
\frac{1}{2}\,\text{diff.} = & \bar{2}{,}07763 = \lg\dfrac{\gamma}{l}
\end{array}$$

Formule 2).

$$\begin{array}{rl}
\lg l = & 2{,}21219 \\
\hline
\text{Somme} = & 0{,}28982 = \lg\gamma;\ \gamma = 1{,}949 \\
 & 2 \\
\hline
\end{array}$$

Formule 2').

$$\begin{array}{rl}
2\lg\gamma = & 0{,}57964 \\
\lg\lg e = & \bar{1}{,}63778 \\
\hline
\text{Somme} = & 0{,}21742 \\
\gamma^2\lg e = & 1{,}64980
\end{array}$$

Formule 3).

$$\begin{array}{rl}
-\gamma^2\lg e = & \bar{2}{,}35020 \\
\lg\dfrac{\gamma}{l} = & \bar{2}{,}07763 \\
-\ \lg 2 = & -\ 0{,}30103 \\
-\lg\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = & -\ \bar{1}{,}94754 \\
\hline
\lg N = & \bar{4}{,}17926 \\
N = & 0{,}00015 \\
1+N = & 1{,}00015
\end{array}$$

Calcul de M.

Formule 4) pour $\gamma=1{,}950$: $\lg\int_\gamma^\infty e^{-t^2}dt=\bar{3}{,}71252$
donné par la table

diff. 0,001 0,00002

pour $\gamma=1{,}949$: » $=\bar{3}{,}71250$

$$\lg\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\bar{1}{,}94754$$
$$\lg M=\bar{3}{,}76496$$
$$M=0{,}00582$$

Calcul de P.

Formule (a)

$$\begin{array}{rl}
1+N = & 1{,}00015 \\
M = & 0{,}00582 \\
\hline
P = & 0{,}99433
\end{array}$$

THÉORÈME DE POISSON.

Généralisation du théorème de Bernoulli.

33. *Représentons par* $p_1 \dots p_\mu$ *les probabilités d'un événement* E *à la* 1^re^ ... μ^{me} *épreuve; par* $q_1 \dots q_\mu$ *les probabilités de l'événement contraire* F *à la* 1^re^ ... μ^{me} *épreuve. Supposons qu'en* $\mu=m+n$ *épreuves,* E *arrive* m *fois,* F n *fois; soient*

$$p=\frac{p_1+\cdots+p_\mu}{\mu},\quad q=\frac{q_1+\cdots+q_\mu}{\mu};$$

je dis : qu'il est à peu près certain que dans ce très-grand nombre μ d'épreuves on aura approximativement

$$p=\frac{m}{\mu},\quad q=\frac{n}{\mu};$$

que ces égalités seront d'autant plus exactes que μ sera plus grand; et qu'elles subsistent rigoureusement pour $\mu=\infty$.

Démonstration. La probabilité U_i que E arrive m fois, et F n fois en μ épreuves est le coefficient de $u^m v^n$ dans l'expression (n° 15)

$$X=(p_1u+q_1v)\dots(p_\mu+q_\mu v)=\Sigma U_i u^m v^n.$$

Posons

$$u=e^{x\sqrt{1}},\quad v=e^{-x\sqrt{1}},$$

ce qui est permis puisque U_i est indépendant de u et de v; nous aurons :

$$X=\Sigma U_i e^{(m-n)x\sqrt{-1}}=\Sigma U_i e^{ix\sqrt{-1}},$$

en faisant $m-n=i$.

Développons l'expression de X, et cherchons l'intégrale de $Xe^{-ix\sqrt{-1}}\,dx$ entre les limites $\pm\pi$; nous aurons :

$$X=U_0+U_1e^{x\sqrt{-1}}+\dots+U_ie^{ix\sqrt{-1}}+U_{i+1}e^{(i+1)x\sqrt{-1}}+\dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}Xe^{-ix\sqrt{-1}}\,dx=U_0\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ix\sqrt{-1}}\,dx+U_1\int_{-\pi}^{\pi}e^{-(i-1)x\sqrt{-1}}\,dx+\dots$$
$$+U_i\int_{-\pi}^{\pi}dx+U_{i+1}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x\sqrt{-1}}\,dx+\dots$$

Mais on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{\pm mx\sqrt{-1}}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx\pm\sqrt{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx=\left[\frac{1}{m}\sin mx\right]_{\pi}$$
$$-\left[\frac{1}{m}\sin mx\right]_{-\pi}\mp\left\{\left[\frac{1}{m}\cos mx\right]_{\pi}-\left[\frac{1}{m}\cos mx\right]_{-\pi}\right\}=\frac{2}{m}\sin m\pi\mp 0=0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi;$$

donc

$$\int_{-\pi}^{\pi}Xe^{-ix\sqrt{-1}}\,dx=2\pi U_i,$$

d'où

$$U_i=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Xe^{-ix\sqrt{-1}}\,dx\quad\dots\dots\quad(A)$$

Détermination de (A).

Reprenons l'expression de X :

$$X=(p_1u+q_1v)(p_2u+q_2v)\dots(p_\mu u+q_\mu v)$$
$$=\left(p_1e^{x\sqrt{-1}}+q_1e^{-x\sqrt{-1}}\right)\left(p_2e^{x\sqrt{-1}}+q_2e^{-x\sqrt{-1}}\right)\dots$$
$$\left(p_ie^{x\sqrt{-1}}+q_ie^{-x\sqrt{-1}}\right)\dots\left(p_\mu e^{x\sqrt{-1}}+q_\mu e^{-x\sqrt{-1}}\right)$$
$$=\left[(p_1+q_1)\cos x+\sqrt{-1}\,(p_1-q_1)\sin x\right]$$
$$\left[(p_2+q_2)\cos x+\sqrt{-1}\,(p_2-q_2)\sin x\right]\dots$$
$$\left[(p_\mu+q_\mu)\cos x+\sqrt{-1}\,(p_\mu-q_\mu)\sin x\right].$$

Posons

$$\left.\begin{array}{l}(p_i+q_i)\cos x=\rho_i\cos\varphi_i\\(p_i-q_i)\sin x=\rho_i\sin\varphi_i\end{array}\right\}\quad\dots\dots\quad(a)$$

et rappelons-nous que $p_i+q_i=1$, nous aurons :

$$\rho_i^2=\cos^2x+(p_i-q_i)^2\sin^2x=\cos^2x+\left[(p_i+q_i)^2-4\,p_iq_i\right]\sin^2x$$
$$=\cos^2x+\sin^2x-4\,p_iq_i\sin^2x=1-4\,p_iq_i\sin^2x.\quad\dots\quad(1)$$

et

$$\operatorname{tg}\varphi_i=\frac{p_i-q_i}{p_i+q_i}\operatorname{tg}x=(p_i-q_i)\operatorname{tg}x\quad\dots\quad(2)$$

Les formules (1) et (2) déterminent ρ_i et φ_i.

Ces valeurs substituées dans l'expression X donneront

$$X=\rho_1\left(\cos\varphi_1+\sqrt{-1}\sin\varphi_1\right)\rho_2\left(\cos\varphi_2+\sqrt{-1}\sin\varphi_2\right)\dots$$
$$\rho_\mu\left(\cos\varphi_\mu+\sqrt{-1}\sin\varphi_\mu\right)=\rho_1\rho_2\dots\rho_\mu\,e^{(\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_\mu)\sqrt{-1}}.$$

Posons maintenant

$$\left.\begin{array}{l}\rho_1\rho_2\rho_3\dots\dots\rho_\mu=Y\\\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_\mu=y\end{array}\right\}\quad\dots\dots\quad(b)$$

nous aurons

$$X=Ye^{y\sqrt{-1}};$$

et, en substituant cette valeur dans l'expression (A) :

$$U_i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y e^{y\sqrt{-1}}\, e^{-(m-n)x\sqrt{-1}}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y e^{[y-(m-n)x]\sqrt{-1}}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y\cos[y-(m-n)x]dx + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y\sin[y-(m-n)x]dx.$$

Or

$$\int_{-\pi}^{\pi} Y\sin[y-(m-n)x]\,dx = \int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi} = -\int_{0}^{-\pi} + \int_{0}^{\pi};$$

mais la formule (2) montre que φ_i change de signe avec x; il en est donc de même de $y = \Sigma\varphi_i$, tandis que Y ne change pas de signe; on peut donc écrire :

$$\int_{-\pi}^{\pi} Y\sin[y-(m-n)x]\,dx = \int_{0}^{\pi} Y\sin[-y+(m-n)x]\,dx$$
$$+\int_{0}^{\pi} Y\sin[y-(m-n)x]\,dx = -\int_{0}^{\pi} Y\sin[y-(m-n)x]\,dx$$
$$+\int_{0}^{\pi} Y\sin[y-(m-n)x]\,dx = 0.$$

Par suite

$$U_i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y\cos[y-(m-n)x]dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} Y\cos[y-(m-n)x]dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} Y\cos[y-(m-n)x]\,dx.$$

1° *Détermination de* Y.

Nous avons posé

$$Y = \rho_1\rho_2\dots\rho_\mu = \sqrt{1-4p_1q_1\sin^2x}\sqrt{1-4p_2q_2\sin^2x}\dots\sqrt{1-4p_\mu q_\mu\sin^2x}.$$

Chaque facteur étant < 1, Y lui-même est à plus forte raison < 1, et n'a de valeur sensible que si x est très-petit; si donc nous négligeons les termes du quatrième ordre, nous aurons

$$\rho_i = \sqrt{1-4p_iq_i\sin^2x} = \sqrt{1-4p_iq_ix^2} = 1-2p_iq_ix^2$$
$$\text{l.}\,\rho_i = \text{l.}\,(1-2p_iq_ix^2) = -2p_iq_ix^2;$$

et par suite :

$$\text{l.}\,Y = \Sigma\,\text{l.}\,\rho_i = -x^2\Sigma p_iq_i.$$

Posons

$$\Sigma 2p_iq_i = 2(p_1q_1+p_2q_2+\dots+p_\mu q_\mu) = \mu k^2; \quad . \quad . \quad (c)$$

nous aurons

$$\text{l.}\,Y = -x^2\mu k^2;$$

d'où enfin, en faisant $\mu x^2 = z^2$, $x = \frac{z}{\sqrt{\mu}}$:

$$Y = e^{-k^2z^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

2° *Détermination de* y.

Nous avons posé :

$$y = \Sigma\varphi_i = \varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_\mu;$$

et

$$\sin\varphi_i = \frac{p_i-q_i}{\rho_i}\sin x = (p_i-q_i)\left(x-\frac{x^3}{6}\right)[1-2p_iq_ix^2]^{-1}$$
$$= (p_i-q_i)\left(x-\frac{x^2}{6}\right)(1+2p_iq_ix^2)$$
$$= (p_i-q_i)\,n + (p_i-q_i)\left(2p_iq_i-\frac{1}{6}\right)x^2 = \omega,$$

d'où

$$\varphi_i = \text{arc}\sin\omega = \int\frac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^2}} = \int(1-\omega)^{-\frac{1}{2}}d\omega = \int\left(1+\frac{\omega^2}{2}\right)d\omega = \omega+\frac{\omega^3}{6}$$
$$= (p_i-q_i)\,x + (p_i-q_i)\left(2p_iq_i-\frac{1}{6}\right)x^3 + \frac{1}{6}[(p_i-q_i)\,x+\cdots]^3$$
$$= (p_i-q_i)\,x + \left[(p_i-q_i)\left(2p_iq_i-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}(p_i-q_i)^3\right]x^3,$$

ou bien, en remplaçant comme plus haut $(p_i-q_i)^2$ par $1-4p_iq_i$:

$$\varphi_i = (p_i-q_i)\,x + (p_i-q_i)\left[2p_iq_i-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}(1-4p_iq_i)\right]x^3$$
$$= (p_i-q_i)\,x + \frac{4}{3}p_iq_i(p_i-q_i)\,x^3.$$

Nous aurons par suite :

$$y = \Sigma\varphi_i = x\Sigma(p_i-q_i) + x^3\Sigma\frac{4}{3}p_iq_i(p_i-q_i).$$

Or

$$\Sigma p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu = \mu p,$$
$$\Sigma q_i = q_1 + q_2 + \cdots + q_\mu = \mu q.$$

Si nous posons en outre

$$\sum \frac{4}{3} p_i q_i (p_i - q_i) = \mu h,$$

nous aurons

$$y = \mu x (p - q) + x^3 \mu h,$$

et, en remplaçant x par $\frac{z}{\sqrt{\mu}}$

$$y = (p - q)\sqrt{\mu} \, . \, z + \mu h \frac{z^3}{(\sqrt{\mu})^3}$$
$$= (p - q)\sqrt{\mu} \, . \, z + \frac{hz^3}{\sqrt{\mu}}.$$

Cette valeur de y doit être substituée dans l'expression

$$U_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Y \cos \left[y - (m - n) n \right] dx.$$

Si nous remplaçons en outre x par $\frac{z}{\sqrt{\mu}}$, nous trouverons :

$$y - (m - n) x = (p - q)\sqrt{\mu} \cdot z + \frac{hz^3}{\sqrt{\mu}} - (m - n) \frac{z}{\sqrt{\mu}}$$
$$= \left[p - q - \left(\frac{m}{\mu} - \frac{n}{\mu} \right) \right] z \sqrt{\mu} + \frac{hz^3}{\sqrt{\mu}}$$
$$= gz\sqrt{\mu} + \frac{hz^3}{\sqrt{\mu}},$$

en posant :

$$g = p - \frac{m}{\mu} + \frac{n}{\mu} - q = p - \frac{m}{\mu} + \left(p - \frac{m}{\mu} \right) = 2\left(p - \frac{m}{\mu} \right) = 2\left(\frac{n}{\mu} - q \right),$$

d'où

$$m = \mu p - \frac{\mu g}{2}; \quad n = \mu q + \frac{\mu g}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Si nous substituons les valeurs qui précèdent, ainsi que celle de Y donnée par la formule (3) dans l'expression de U_i, et si

nous observons qu'à la limite $\frac{\pi}{2}$ de x correspond celle $\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}$ de z, nous aurons :

$$U_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} e^{-k^2z^2} \cos\left(gz\sqrt{\mu} + \frac{hz^3}{\sqrt{\mu}} \right) \frac{dz}{\sqrt{\mu}}$$
$$= \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}} \int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} e^{-k^2z^2} \cos \left[z\sqrt{\mu} (g + hx^2) \right] dz$$
$$= \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}} \int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} e^{-k^2z^2} \left[\cos (z\sqrt{\mu g}) \, . \cos (z\sqrt{\mu h x^2}) \right.$$
$$\left. - \sin (z\sqrt{\mu g}) \sin (z\sqrt{\mu h x^2}) \right] dz,$$

ou, en négligeant comme plus haut, les puissances de x à partir de la 4^e :

$$U_i = \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}} \int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} e^{-k^2z^2} \left[\cos (z\sqrt{\mu g}) - \sin (z\sqrt{\mu g}) \cdot z\sqrt{\mu h x^2} \right] dz$$
$$= \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}} \int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} e^{-k^2z^2} \left[\cos (gz\sqrt{\mu}) - \frac{hz^3}{\sqrt{\mu}} \sin (gz\sqrt{\mu}) \right] dz.$$

On suppose que p_i et q_i ne convergent ni vers zéro ni vers l'unité, de sorte que $k^2 = \frac{2\Sigma p_i q_i}{\mu}$ n'est pas très-petit, quoique μ soit très-grand.

Si l'on prend $z > \sqrt{\mu}$, $e^{-k^2z^2}$ aura une valeur insensible, et par suite on pourra poser

$$\int_{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}}^{\infty} e^{-k^2z^2} dz = 0.$$

Cela étant, nous pourrons étendre les limites de l'intégrale précédente de 0 à ∞, ce qui donnera :

$$U_i = \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}} \int_0^{\infty} e^{-k^2z^2} \cos (gz\sqrt{\mu} \, dz - \frac{2h}{\pi\sqrt{\mu}} \int_0^{\infty} e^{-k^2z^2} . z^3 \sin (gz\sqrt{\mu}) \, dz.$$

Déterminons les valeurs de ces deux intégrales.

Nous savons que

$$1^\circ \qquad \int_0^\infty e^{-k^2z^2} \cos gz\sqrt{\mu}dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2k} e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}.$$

Dérivant par rapport à g, nous aurons :

$$\int_0^\infty e^{-k^2z^2} \cos gz\sqrt{\mu}dz = g\frac{\sqrt{\mu\pi}}{4k^3} e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}.$$

Dérivant par rapport à k :

$$\int_0^\infty e^{-k^2z^2} z^3 \sin gz\sqrt{\mu}dz = \frac{g\sqrt{\mu\pi}}{4}\left(-\frac{3}{k^4}+\frac{\mu g^2}{4}\cdot\frac{2}{k^6}\right) e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}};$$

d'où l'on tire :

$$2^\circ \qquad \int_0^\infty e^{-k^2z^2} z^3 \sin (gz\sqrt{\mu})\, dz = \frac{g\sqrt{\mu\pi}}{8k^5}\left(3-\frac{\mu g^2}{2k^2}\right) e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}.$$

Substituant ces deux expressions dans celle de U_i, nous aurons :

$$U_i = \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}}\frac{\sqrt{\pi}}{2k} e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}} - \frac{2h}{\pi\sqrt{\mu}}\frac{g\sqrt{\mu\pi}}{8k^5}\left(3-\frac{\mu g^2}{2k^2}\right) e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}$$

$$= \left[\frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}} - \frac{gh}{4k^5\sqrt{\mu\pi}}\left(3-\frac{\mu g^2}{2k^2}\right)\right] e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}.$$

Posons

$$\frac{\mu g^2}{4k^2} = \theta^2, \qquad \text{d'où} \quad g = \frac{2k\theta}{\sqrt{\mu}},$$

nous aurons :

$$U_i = \left[\frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}} - \frac{h\theta}{2k^4\mu\sqrt{\pi}}(3-2\theta^2)\right] e^{-\theta^2},$$

probabilité que E arrive $m = \mu p - \frac{\mu g}{2} = \mu p - k\theta\sqrt{\mu}$ fois,

et que F arrive $n = \mu q + \frac{\mu g}{2} = \mu q + k\theta\sqrt{\mu}$ fois.

Première remarque. Si $\theta = 0$, on a

$$U_i = \frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}},$$

valeur maximum de U_i :

probabilité que E arrive $m = \mu p$ fois,

et que F arrive $n = \mu q$ fois;

d'où $m : n = p : q$.

Deuxième remarque. Cherchons la probabilité que

E arrive $m = \mu p \pm kt\sqrt{\mu}$ fois,

et que

F arrive $n = \mu q \pm kt\sqrt{\mu}$ fois.

Soit θ successivement égal à $-t$ et à $+t$, t étant un multiple de $\frac{1}{k\sqrt{\mu}}$; on aura :

$$U_{-t}+U_t = \left[\frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}} + \frac{ht}{2k^4\mu\sqrt{\pi}}(3-2t^2) + \frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}} - \frac{ht}{2k^4\mu\sqrt{\pi}}(3-2t^2)\right]e^{-t^2}$$

$$= \frac{2}{k\sqrt{\mu\pi}} e^{-t^2};$$

probabilité que m sera l'un des deux nombres $\mu p \pm kt\sqrt{\mu}$,

et que n » » » $\mu q \pm kt\sqrt{\mu}$.

Troisième remarque. Cherchons la probabilité que m et n sont compris entre les limites

$$\mu p \pm uk\sqrt{\mu} \text{ et } \mu q \pm uk\sqrt{\mu}.$$

Posons

$$\delta = \frac{1}{k\sqrt{\mu}}, \quad t = i\delta, \quad u = l\delta.$$

$U_0 = \dfrac{1}{k\sqrt{\mu\pi}}$ sera la probabilité que $m = \mu p, \quad n = \mu q$

$U_{-\delta} + U_\delta = \dfrac{2}{k\sqrt{\mu\pi}} e^{-\delta^2}$ » » $m = \mu p \mp \delta k\sqrt{\mu},$

$n = \mu q \pm \delta k\sqrt{\mu};$

$$U_{-2\delta}+U_{2\delta}=\frac{2}{k\sqrt{\mu\pi}}e^{-(2\delta)^2} \text{ sera la probabilité que } m=\mu p\mp 2\delta k\sqrt{\mu},\quad n=\mu q\pm 2\delta k\sqrt{\mu}$$

$$U_{-i\delta}+U_{i\delta}=\frac{2}{k\sqrt{\mu\pi}}e^{-(i\delta)^2} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad m=\mu p\mp i\delta k\sqrt{\mu},\quad n=\mu q\pm i\delta k\sqrt{\mu}$$

$$U_{-l\delta}+U_{l\delta}=\frac{2}{k\sqrt{\mu\pi}}e^{-(l\delta)^2} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad m=\mu p\mp l\delta k\sqrt{\mu},\quad n=\mu q\pm l\delta k\sqrt{\mu}.$$

Soit P la somme de ces termes : nous aurons, en remplaçant $i\delta$ par t :

$$P=\frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}}+\frac{2}{k\sqrt{\mu\pi}}\sum_{\delta}^{u}e^{-t^2},$$

probabilité que m sera entre $\mu p-uk\sqrt{\mu}$ et $\mu p+uk\sqrt{\mu}$.

Or

$$\sum_{\delta}^{u}e^{-t^2}=\sum_{\delta}^{\infty}e^{-t^2}-\sum_{u}^{\infty}e^{-t^2};$$

mais comme δ est très-petit, et que $\sum_{0}^{\infty}=\sum_{0}^{\delta}+\sum_{\delta}^{\infty}$, on peut remplacer $\sum_{\delta}^{\infty}$ par $\sum_{0}^{\infty}$ et l'on obtient

$$\sum_{\delta}^{u}e^{-t^2}=\sum_{0}^{\infty}e^{-t^2}-\sum_{u}^{\infty}e^{-t^2} \quad \ldots\ldots \quad (a')$$

Par la formule sommatoire d'Euler, on a (n° 51, p. 87) :

$$\sum_{u}^{\infty}e^{-t^2}=\frac{1}{\delta}\int_{u}^{\infty}e^{-t^2}dt-\frac{1}{2}e^{-u^2}-\frac{1}{6}\delta ue^{-u^2}+\cdots$$
$$=\frac{1}{\delta}\int_{u}^{\infty}e^{-t^2}dt-\frac{1}{2}e^{-u^2}.$$

Pour $u=0$, on aura

$$\sum_{0}^{\infty}e^{-t^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\delta}\sqrt{\pi}-\frac{1}{2};$$

et par suite la formule (a') deviendra :

$$\sum_{\delta}^{u}e^{-t^2}=\frac{1}{2\delta}\sqrt{\pi}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\delta}\int_{u}^{\infty}e^{-t^2}dt+\frac{1}{2}e^{-u^2};$$

substituant cette valeur dans l'expression de P, et remplaçant $\frac{1}{k\sqrt{\mu}}$ par δ, on aura :

$$P=\frac{\delta}{\sqrt{\pi}}+\frac{2\delta}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2\delta}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\delta}\int_{u}^{\infty}e^{-t^2}dt+\frac{1}{2}e^{-u^2}\right\}$$
$$=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{u}^{\infty}e^{-t^2}dt+\frac{\delta}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}$$
$$=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{u}^{\infty}e^{-t^2}dt+\frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}}e^{-u^2}.$$

Quatrième remarque. Comme nous avons posé

$$k^2=\sum\frac{2p_iq_i}{\mu},$$

si p_i et q_i sont des constantes, que nous désignerons par p et q, on aura

$$k^2=2pq,\quad k=\sqrt{2pq},$$

et la dernière formule coïncide avec celle du théorème de Bernouilli.

Cette dernière formule exprime la probabilité P, que

$$\mu p-l\delta k\sqrt{\mu}<m<\mu p+l\delta k\sqrt{\mu}$$

et que

$$\mu q-l\delta k\sqrt{\mu}<n<\mu q+l\delta k\sqrt{\mu};$$

ou bien, en remplaçant δ par sa valeur $\frac{k\sqrt{\mu}}{1}$, P sera la probabilité que

$$\begin{cases}\mu p-l<m<\mu p+l\\ \mu q-l<n<\mu q+l\end{cases}$$

ou bien, en posant $\frac{l}{\mu}=\lambda$, P sera la probabilité que

$$\begin{cases}p-\lambda<\dfrac{m}{\mu}<p+\lambda\\ q-\lambda<\dfrac{n}{\mu}<q+\lambda.\end{cases}$$

Problème de Poisson.

56. *Une chose* A *est susceptible de toutes les valeurs possibles entre* a *et* b; *les probabilités de ces valeurs sont différentes entre elles pour la même épreuve, et diffèrent de plus d'une valeur à la suivante : après* μ *épreuves, chercher* 1° *la probabilité* P *que la somme des valeurs de* A *sera une quantité donnée* S; 2° *la probabilité* Π *que cette somme sera comprise entre deux limites.*

Solution. Soit

$$\alpha dz = a \text{ et } \beta dz = b;$$

les valeurs possibles de A seront

$$\alpha dz,\ (\alpha+1)dz \ldots ndz, \ldots\ldots (\beta-1)dz,\ \beta dz.$$

Soient maintenant respectivement

$$\begin{array}{l} p_1^{(\alpha)},\ p_1^{(\alpha+1)}, \ldots\ldots p_1^{(n)} \ldots p_1^{(\beta-1)},\ p_1^{(\beta)} \\ p_2^{(\alpha)},\ p_2^{(\alpha+1)}, \ldots\ldots p_2^{(n)} \ldots p_2^{(\beta-1)},\ p_2^{(\beta)}, \\ \quad \text{etc.,} \end{array}$$

les probabilités de ces valeurs à la 1re, 2^{e}, etc. épreuve.

Si nous faisons $S = mdz$, et

$$X = \sum_\alpha^\beta{}_n p_1^{(n)} t^{ndz} . \sum_\alpha^\beta{}_n p_2^{(n)} t^{ndz} \ldots \sum_\alpha^\beta{}_n p_\mu^{(n)} t^{ndz} = \Sigma U_m t^{mdz},$$

nous aurons $P = U_m$.

U_m étant indépendant de t, nous pouvons faire $t = e^{x\sqrt{-1}}$, x étant fini, et si, de plus, nous posons $ndz = z$, nous aurons

$$X = \sum_\alpha^\beta{}_n p_1^{(n)} e^{zx\sqrt{-1}} \sum_\alpha^\beta{}_n p_2^{(n)} e^{zx\sqrt{-1}} \ldots \sum_\alpha^\beta{}_n p_\mu^{(n)} e^{zx\sqrt{-1}} = \Sigma U_m e^{mdzx\sqrt{-1}};$$

d'où nous déduirons par le procédé connu :

$$P = U_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X e^{-mdzx\sqrt{-1}} d(xdz) \quad \ldots \quad (a)$$

La probabilité que la somme $S = mdz$ sera comprise entre deux limites i et i' sera donc

$$\Pi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X d(xdz) . \sum_i^{i'}{}_m e^{-m(xdz)\sqrt{-1}} \quad \ldots \quad (b)$$

Transformons l'expression sommatoire qui précède; nous pouvons l'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_i^{i'}{}_m e^{-m(xdz)\sqrt{-1}} &= e^{-ixdz\sqrt{-1}} + e^{-(i+1)xdz\sqrt{-1}} + \cdots + e^{-i'xdz\sqrt{-1}} \\ &= e^{-ixdz\sqrt{-1}} \left\{ 1 + e^{-xdz\sqrt{-1}} + e^{-2xdz\sqrt{-1}} + \cdots + e^{-(i'-i)xdz\sqrt{-1}} \right\} \\ &= e^{-ixdz\sqrt{-1}} \frac{e^{-(i'-i+1)xdz\sqrt{-1}} - 1}{e^{-xdz\sqrt{-1}} - 1} = \frac{e^{-(i-1)xdz\sqrt{-1}} - e^{-i'xdz\sqrt{-1}}}{e^{xdz\sqrt{-1}} - 1} \\ &= e^{-\frac{1}{2}xdz\sqrt{-1}} \frac{e^{-(i-1)xdz\sqrt{-1}} - e^{-i'xdz\sqrt{-1}}}{e^{\frac{1}{2}xdz\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}xdz\sqrt{-1}}} \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\sin\frac{1}{2}(xdz)} \left\{ e^{-(i'+\frac{1}{2})xdz\sqrt{-1}} - e^{-(i-\frac{1}{2})xdz\sqrt{-1}} \right\}. \end{aligned}$$

Puisque x est fini, nous pouvons poser

$$\sin\frac{1}{2}(xdz) = \frac{1}{2}xdz; \text{ et } e^{\pm\frac{1}{2}xdz\sqrt{-1}} = 1;$$

de sorte que la valeur précédente devient :

$$\sum_i^{i'}{}_m e^{-m(xdz)\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{xdz} \left\{ e^{-i'xdz\sqrt{-1}} - e^{-ixdz\sqrt{-1}} \right\}.$$

Si nous substituons cette valeur dans la formule (b), en observant que

$$\frac{d(xdz)}{xdz} = \frac{dx}{x},$$

et qu'aux limites $\pm\pi$ de xdz répondent celles

$$\pm\frac{\pi}{dz} = \pm\infty \text{ de } x,$$

et si nous faisons $i' = c + \varepsilon$, $i = c - \varepsilon$, cette formule deviendra

$$\Pi = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X \frac{dx}{x} e^{-cx\sqrt{-1}}\left[e^{-\varepsilon x\sqrt{-1}} - e^{\varepsilon x\sqrt{-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X \frac{dx}{x} e^{-cx\sqrt{-1}} \sin \varepsilon x : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

probabilité que la somme $S = mdz$ des valeurs de A, après μ épreuves, sera comprise entre les limites $c + \varepsilon$, $c - \varepsilon$.

Cherchons l'expression de X.

La probabilité $p_i^{(n)}$ de la valeur $ndz = z$ de A, à la i^{me} épreuve est une fonction de z infiniment petite, attendu que le nombre des valeurs possibles de A est infiniment grand; on peut donc poser :

$$p_i^{(n)} = f_i(z)dz,$$

et par suite

$$\sum_{\alpha}^{\beta}{}_n\, p_i^{(n)} e^{xz\sqrt{-1}} = \int_a^b f_i(z)\,dz e^{xz\sqrt{-1}},$$

et

$$\int_a^b f_i(z)\,dz = 1.$$

On aura donc

$$X = \int_a^b f_1(z)\,dz e^{xz\sqrt{-1}} \cdot \int_a^b f_2(z)\,dz\, e^{xz\sqrt{-1}} \ldots \int_a^b f_\mu(z)dz\, e^{xz\sqrt{-1}} \quad . \quad (d)$$

Or de ce que

$$\int_a^b f_i(z)\,dz\, e^{xz\sqrt{-1}} = \int_a^b f_i(z)\,dz \cos xz + \sqrt{-1}\int_a^b f_i(z)\,dz \sin xz, \quad (e)$$

et qu'en outre

$$\int_a^b f_i(z)dz = 1,$$

d'où résulte également

$$\int_a^b f_i(z)\,dz \cos(xz) < 1, \int_a^b f_i(z)\,dz \sin(xz) < 1,$$

il s'ensuit que nous pourrons poser

$$\int_a^b f_i(z)\,dz e^{xz\sqrt{-1}} = \rho_i \cos \varphi_i + \sqrt{-1}\,\rho_i \sin \varphi_i = \rho_i e^{\varphi_i\sqrt{-1}}; \quad (f)$$

de sorte que l'expression de X devient

$$X = \rho_1\rho_2 .. \rho_\mu \left\{ \cos \sum_1^\mu{}_i \varphi_i + \sqrt{-1} \sin \sum_1^\mu{}_i \varphi_i \right\}.$$

Posons

$$\rho_1\rho_2 .. \rho_\mu = Y; \quad \sum_1^\mu{}_i \varphi_i = y,$$

nous aurons

$$X = Y(\cos y + \sqrt{-1} \sin y) = Ye^{y\sqrt{-1}};$$

et substituant cette expression dans celle de Π :

$$\Pi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Ye^{(y-cx)\sqrt{-1}} \sin \varepsilon x \frac{dx}{x} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

Mais des formules (e) et (f) il est facile de déduire que ρ_i et par suite Y, ne change pas de signe avec x, tandis que φ_i, et par suite y, change de signe.

Ces formules donnent en effet

$$\rho_i^2 = \left[\int_a^b f_i z dz \cos zx\right]^2 + \left[\int_a^b f_i z dz \sin zx\right]^2$$

et

$$tg\ \varphi_i = \frac{\int_a^b f_i z dz \sin zx}{\int_a^b f_i z dz \cos zx}.$$

Il résulte de là que la formule (g) peut s'écrire :

$$\Pi = \frac{1}{\pi}\left\{ \int_{-\infty}^0 + \int_0^\infty \right\} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Y \cos(y - cx) \sin \varepsilon x \frac{dx}{x}. \quad (h)$$

Pour effectuer l'intégration, nous avons à déterminer des valeurs approchées de Y et y.

Calculons ces valeurs.

1° *Calcul de* Y.

Il est manifeste d'abord que ρ_i est < 1. Car

$$\rho_i^2 = \left(\int_a^b f_i(z)\, d \,.\cos zx\right)^2 + \left(\int_a^b f_i(z)\, d \,.\sin zx\right)^2$$

$$= \int_a^b f_i(z)\, d.\cos zx \int_a^b f_i(z')\, d.\cos z'x + \int_a^b f_i(z)\, d.\sin zx \int_a^b f_i(z')\, d.\sin z'x =$$

$$= \int_a^b \int_a^b f_i(z)\, f_i(z') \cos x\,(z-z')\, dzdz' < \int_a^b \int_a^b f_i(z)\, f_i(z')\, dzdz'$$

$$< \int_a^b f_i(z)\, dz < \int_a^b f_i(z')\, dz' < 1.$$

Ensuite, pour $x = 0$, on a $\rho_i = 1$.

De là résulte que $Y = \rho_1\rho_2 \ldots \rho_\mu$ n'a de valeur sensible que quand x est très-petit, et qu'on peut en conséquence négliger les puissances supérieures de x à partir de la quatrième, et écrire :

$$\cos zx = 1 - \frac{z^2x^2}{2}; \quad \sin zx = zx - \frac{z^3x^3}{6};$$

d'où

$$\rho_i \cos \varphi_i = \int_a^b f_i(z)\, dz \cos zx = \int_a^b f_i(z)\, dz \left(1 - \frac{z^2x^2}{2}\right) = \int_a^b f_i(z)\, dz$$

$$- \int_a^b f_i(z)\, dz \frac{x^2z^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} \int_a^b z^2 f_i(z)\, dz = 1 - \frac{x^2}{2} k'_i,$$

en posant :

$$k'_i = \int_a^b z^2 f_i(z)\, dz.$$

$$\rho_i \sin \varphi_i = \int_a^b f_i(z)\, dz \sin zx = \int_a^b f_i(z)\, dz \left(xz - \frac{x^3z^3}{6}\right) = x \int_a^b z f_i(z)\, dz$$

$$- \frac{x^3}{6} \int_a^b z^3 f_i(z)\, dz = xk_i - \frac{x^3}{6} k''_i,$$

en posant :

$$k_i = \int_a^b z f_i(z)\, dz; \quad k''_i = \int_a^b z^3 f_i(z)\, dz.$$

De là nous tirons :

$$\rho_i^2 \cos^2 \varphi_i = 1 - x^2 k'_i, \quad \text{et} \quad \rho_i^2 \sin^2 \varphi_i = x^2 k_i^2;$$

et en ajoutant :

$$\rho_i^2 = 1 - (k'_i - k_i^2)\, x^2 = 1 - 2h_i x^2,$$

en posant

$$k'_i - k_i^2 = 2h_i.$$

Prenons le logarithme des deux membres :

$$2\,\mathrm{l}.\,\rho_i = \mathrm{l}.\,(1 - 2\,h_i x^2) = -\,2h_i x^2; \quad \mathrm{l}.\,\rho_i = -\,k_i x^2;$$

d'où

$$\mathrm{l}.\,Y = \sum_1^\mu {}_i\, \mathrm{l}.\,\rho_i = -\,x^2 \sum_1^\mu {}_i h_i.$$

Faisons

$$\sum_1^\mu h_i = \mu . h, \quad \text{d'où} \quad h = \frac{h_1 + \cdots + h_\mu}{\mu},$$

nous aurons

$$Y = e^{-\mu h x^2},$$

et par suite

$$\Pi = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\mu h x^2} \sin \varepsilon x \cos (y - cx) \frac{dx}{x} \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

2° *Calcul de* φ_i *et de* y.

Nous avons

$$\rho_i \sin \varphi_i = \int_a^b f_i(z)\, dz \sin xz = xk_i - \frac{x^3}{6} k''_i;$$

d'où

$$\sin \varphi_i = \frac{xk_i - \frac{x^3}{6} k''_i}{\rho_i} = \left(xk_i - \frac{x^3}{6} k''_i\right)(1 + h_i x^2)$$

$$= \left(xk_i - \frac{x^3}{6} k''_i\right)\left(1 + \frac{k'_i - k_i^2}{2} x^2\right) = xk_i - \left(\frac{k''_i}{6} - \frac{k'_i k_i}{2} + \frac{k_i^3}{2}\right) x^3.$$

Posons $\sin \varphi_i = \nu$; d'où

$$\varphi_i = \arc \sin \nu = \int \frac{d\nu}{\sqrt{1-\nu^2}} = \int d\nu\left(1+\frac{\nu^2}{2}\right) = \nu + \frac{\nu^3}{2} = \sin \varphi_i + \frac{1}{6}\sin^3 \varphi_i$$

$$= xk_i - \left[\frac{k_i''}{6} - \frac{k_i'k_i}{2} + \frac{k_i'^3}{2}\right]x^3 + \frac{1}{6}x^3 k_i^3$$

$$= xk_i - \left[\frac{k_i''}{6} - \frac{k_i'k_i}{2} + \frac{k_i^3}{3}\right]x^3 = xk_i - x^3 g_i,$$

en posant

$$\frac{k_i''}{6} - \frac{k_i'k_i}{2} + \frac{k_i^3}{3} = g_i.$$

Soient de plus

$$\sum_1^\mu {}_i k_i = \mu k;\ \sum_1^\mu {}_i g_i = \mu g;$$

nous aurons

$$y = \sum_1^\mu {}_i \varphi_i = x\sum_1^\mu k_i - x^3 \sum_1^\mu g_i = \mu kx - \mu g x^3;$$

donc

$$y - cx = (\mu k - c)x - \mu g x^3;$$

et

$$\cos(y-cx) = \cos(\mu k - c)x \cos \mu g x^3 + \sin(\mu k - c)x \sin \mu g x^3$$
$$= \cos(\mu k - c)x + \mu g x^3 \sin(\mu k - c)x,$$

en négligeant toujours les puissances de x à partir de la 4^e.

Substituant dans la dernière expression de Π, nous aurons

$$\Pi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\mu h x^2} \sin \varepsilon x \frac{dx}{x}\left\{\cos(\mu k - c)x + \mu g x^3 \sin(\mu k - c)x\right\}: \quad (l)$$

probabilité que S est compris entre $c \pm \varepsilon$.

Si nous posons $c = \mu k$, nous aurons :

$$\Pi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\mu h x^2} \sin \varepsilon x \frac{dx}{x} : \quad \ldots\ldots \quad (m)$$

probabilité que la somme S des valeurs de A en μ épreuves est comprise entre $\mu k \pm \varepsilon$.

Pour intégrer cette expression, posons

$$\xi^2 = \mu h x^2; \quad d\xi = \sqrt{\mu h}\,dx; \quad \varepsilon x = \frac{\varepsilon\xi}{\sqrt{\mu h}};$$

nous aurons

$$\Pi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\xi^2} \sin \frac{\varepsilon\xi}{\sqrt{\mu h}} \frac{d\xi}{\xi} \quad \ldots\ldots \quad (n)$$

Partons de la formule connue

$$\int_0^\infty e^{-\xi^2} \cos \frac{a\xi}{\sqrt{\mu h}}\,d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{a^2}{4\mu h}};$$

multiplions par $\frac{da}{\sqrt{\mu h}}$ et intégrons entre les limites $a = \left\{{}^{\varepsilon}_{0}\right.$, nous aurons :

$$\int_0^\varepsilon \frac{da}{\sqrt{\mu h}} \int_0^\infty \cos \frac{a\xi}{\sqrt{\mu h}}\,d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^\varepsilon e^{-\frac{a^2}{4\mu h}} \frac{da}{\sqrt{\mu h}};$$

$$\int_0^\varepsilon \frac{da}{\sqrt{\mu h}} \int_0^\infty e^{-\xi^2} \cos \frac{a\xi}{\sqrt{\mu h}}\,d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^\varepsilon e^{-\frac{a^2}{4\mu h}} \frac{da}{\sqrt{\mu h}};$$

ou bien, en remplaçant

$$\int_0^\varepsilon \frac{da}{\sqrt{\mu h}} \cdot \frac{\cos a\xi}{\sqrt{\mu h}} \quad \text{par} \quad \frac{1}{\xi}\sin\frac{\varepsilon\xi}{\sqrt{\mu h}}:$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin \varepsilon\xi}{\sqrt{\mu h}} e^{-\xi^2} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mu h}}\int_0^\varepsilon e^{-\frac{a^2}{4\mu h}}\,da.$$

Faisons $\frac{a^2}{4\mu h} = t^2$; $da = 2\sqrt{\mu h}\,dt$: aux limites $\left\{{}^{\varepsilon}_{0}\right.$ de a répondront celles $\left\{{}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\mu h}}=u}_{0}\right.$ de t; et la formule précédente deviendra :

$$\int_0^\infty e^{-\xi^2} \sin \frac{\varepsilon\xi}{\sqrt{\mu h}} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\mu h}}\int_0^u e^{-t^2}\sqrt{2\mu h}\,dt = \sqrt{\pi}\int_0^u e^{-t^2}dt$$

$$= \sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_u^\infty e^{-t^2}\,dt\right\} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\pi}\int_u^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

Substituant dans la formule (n), nous aurons :

$$\Pi = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} e^{-t^2}\, dt : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (0)$$

probabilité que dans un très-grand nombre μ d'épreuves la somme S des valeurs de A sera comprise entre

$$\mu k \pm 2u\sqrt{\mu h}\,,$$

ou que la valeur moyenne $\frac{S}{\mu}$ sera comprise entre

$$k \pm \frac{2u\sqrt{h}}{\sqrt{\mu}}.$$

Si l'on donne à u une valeur peu considérable, le terme $\frac{2u\sqrt{h}}{\sqrt{\mu}}$ sera très-petit; alors $\frac{S}{\mu}$ différera peu de k; pour $u = 5$, on aura $\Pi = 1 - 0{,}000022091$.

Pour interpréter ce résultat, cherchons la signification de k.

Nous avons posé :

$$k = \frac{1}{\mu} \sum_1^{\mu}{}_i k_i = \frac{1}{\mu} \sum_1^{\mu}{}_i \int_a^b z f_i(z)\, dz = \int_a^b z dz \frac{\sum_1^{\mu}{}_i f_i(z)}{\mu} = \int_a^b z dz\, f(z).$$

Or

$$f(z) dz \quad \text{ou} \quad \frac{\sum_1^{\mu}{}_i f_i(z)\, dz}{\mu}$$

est la probabilité moyenne des valeurs de z à chaque épreuve.

Il en résulte que k est la somme de toutes les valeurs possibles de A, multipliées par leur probabilité moyenne.

Or le résultat précédent dit que, si l'on prend $\frac{s}{\mu}$ pour la valeur de k, l'erreur à craindre, en plus ou en moins, sera

$$\frac{2u\sqrt{h}}{\sqrt{\mu}};$$

u étant peu considérable; on peut donc énoncer ce théorème :

Soit k *la somme de tous les produits obtenus en multipliant chacune des valeurs possibles d'une chose* A *par sa probabilité moyenne; je dis : 1° que dans un très-grand nombre μ d'épreuves il y aura toujours une probabilité très-approchée de la certitude que la valeur moyenne $\frac{s}{\mu}$ de* A *différera très-peu de* k*; 2° que la différence $\frac{s}{\mu}$ —* k *diminue indéfiniment à mesure que μ augmente, et qu'elle serait tout à fait nulle si ce nombre devenait infini.*

Remarque. La valeur de $\frac{s}{\mu}$ approche indéfiniment de l'abscisse z_1 du centre de gravité de l'aire de la courbe

$$y = \frac{1}{\mu} \sum_1^{\mu} f_i(z),$$

limitée entre les abscisses a et b.

Car on a

$$\int_a^b f_i(z)\, dz = 1;$$

et par suite

$$\int_a^b y dz = \int_a^b \frac{1}{\mu} \sum_1^{\mu}{}_i f_i(z) dz = \frac{1}{\mu}\left[\int_a^b f_1(z) dz + \cdots + \int_a^b f_{\mu}(z)\, dz\right] = \frac{\mu}{\mu} = 1.$$

Pour l'abscisse du centre de gravité, on a l'expression

$$z_1 = \frac{\int_a^b zy dz}{\int_a^b y dz}, \quad z_1 = \frac{1}{\mu} \sum_1^{\mu}{}_i \int_a^b z f_i(z)\, dz = \frac{1}{\mu} \sum_1^{\mu} k_i = k, \ cqfd.$$

CHAPITRE III.

ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE.

—

57. Définition. *L'espérance mathématique est le produit du gain attendu par la probabilité de le réaliser. On l'appelle aussi le sort ou l'avantage du joueur.*

Si $p, p_1 \dots p_i$ désignent les probabilités respectives des gains $g, g_1 \dots g_i$; $q, q_1 \dots q_i$ les probabilités respectives des pertes $k, k_1 \dots k_i$: l'expérience mathématique sera :

$$E = pg + \cdots + p_i g_i - (qk + \cdots + q_i k_i).$$

Si les gains $g, \dots g_i$ ne doivent être payés qu'après $n, \dots n_i$ années, ces gains devront être escomptés pour être convertis en valeurs actuelles.

En représentant par r le taux annuel de l'intérêt pour 1, par $\gamma, \dots \gamma_i$ les valeurs actuelles de $g, \dots g_i$, nous aurons

$$\gamma = \frac{g}{(1+r)^n}; \dots \gamma_i = \frac{g_i}{(1+r)^{n_i}};$$

et la valeur actuelle de l'espérance mathématique sera :

$$E = \gamma p + \cdots + \gamma_i p_i = \frac{gp}{(1+r)^n} + \cdots + \frac{g_i p_i}{(1+r)^{n_i}} \quad . \quad . \quad (a)$$

Si une personne A se charge de payer à une personne B après $n \dots n_i$ années, les sommes $g \dots g_i$ qui dépendent d'événements dont les probabilités sont $p \dots p_i$, il faudra que B paye aujourd'hui à A

$$E = \frac{gp}{(1+r)^n} + \cdots + \frac{g_i p_i}{(1+r)^{n_i}}$$

si E est positif; et qu'il reçoive de A cette somme si E est négatif.

58. Théorème. *Soit* g *un gain certain, à espérer pour les personnes* A, B, C ...; p, q, r ... *leurs probabilités de le gagner; de sorte que* p + q + r + ··· = 1; *supposons que ces personnes conviennent de se partager le gain* g *avant que le sort ait décidé: je dis que le partage devra se faire proportionnellement à* p, q, r .., *en sorte que la part de* A *sera* pg; *celle de* B, qg; *celle de* C, rg, *etc.*

Démonstration. Supposons que sur un nombre total m de chances, pouvant également amener le gain g, a chances soient favorables à A, b chances à B, c chances à C, etc.; il est clair que la part de chaque personne doit être proportionnelle au nombre des chances qui lui sont favorables; de sorte qu'en appelant x, y, z ... les parts respectives de A, B, C ..., on a :

$$x : g = a : m \quad \text{d'où} \quad x = \frac{ag}{m}$$

$$y : g = b : m \qquad y = \frac{bg}{m}$$

$$z : g = c : m \qquad z = \frac{cg}{m}$$

$$\dots \qquad \dots$$

Or $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m}$ sont les probabilités respectives que A, B, C ... gagneront; le théorème est donc démontré.

1er corollaire.

$$x + y + z + \cdots = g\left(\frac{a+b+c+\cdots}{m}\right) = g\,(p + q + r + \cdots) = g.$$

2me corollaire. La règle précédente sert aussi à déterminer la mise de chaque joueur, qui doit être proportionnelle à la probabilité qu'il a de gagner la partie.

3me corollaire. Soient $p, q; \alpha, \beta$ les probabilités de gagner et les mises respectives de A et de B; et $p + q = 1$; on devra avoir :

$$p : q = \alpha : \beta, \quad p\beta = q\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Donc : *dans un pari équitable, les espérances mathématiques des deux joueurs doivent être égales.*

Exemple. Soit p la probabilité qu'une maison brûlera; ν sa valeur; x la prime à payer à l'assureur; on devra avoir

$$\nu p = x(1-p).$$

Mais comme la prime est payée d'avance, et perdue quoi qu'il arrive, pour que le jeu fût équitable, il faudrait que

$$\nu p = x(1-p) + x:$$

telle serait la manière de fixer les primes, abstraction faite des intérêts et des frais de la compagnie d'assurances.

59. **Premier problème.** *L'arrivée d'un événement procure le bénéfice ν; sa non-arrivée cause la perte μ; une personne A attend l'arrivée d'un nombre s d'événements semblables, tous indépendants les uns des autres, et également probables : quel est son avantage?*

Solution. Désignons par q la probabilité de l'arrivée de chaque événement; par $p = 1 - q$ la probabilité de son contraire.

Posons

$$(1-q+q)^s = \mathrm{S}\frac{s!}{i!\,(s-i)!}q^i(1-q)^{s-i} = \mathrm{S}\Pi_i, \quad . \quad . \quad (1)$$

la probabilité que sur un nombre total de fois s il arrive i des événements attendus sera

$$\Pi_i = \frac{s!}{i!\,(s-i)!}q^i(1-q)^{s-i}.$$

Dans ce cas, le bénéfice de A sera $i\nu$; sa perte sera $(s-i)\mu$; posons $\quad i\nu - (s-i)\mu = i(\nu+\mu) - s\mu = \Delta_i;$

$\Pi_i\Delta_i$ sera l'avantage de A correspondant à l'arrivée de i des événements attendus, sur un nombre total s de fois.

L'avantage de A correspondant à l'arrivée d'un seul des événements est donc $\quad \Pi_1\Delta_1$

L'avantage de A correspondant à l'arrivée de deux des événements $\quad \Pi_2\Delta_2$

etc.

L'avantage de A correspondant à l'arrivée de s des événements $\quad \Pi_s\Delta_s;$

et comme tous ces événements sont indépendants entre eux, et que, sur un nombre s de fois, l'événement attendu peut arriver $0, 1, 2 \ldots s$ fois, l'avantage cherché N sera

$$\mathrm{N} = \mathrm{S}\Pi_i\Delta_i = \mathrm{S}\frac{s!}{i!\,(s-i)!}q^i(1-q)^{s-i}\left[i(\nu+\mu) - s\mu\right]$$
$$= -s\mu[1-q+q]^s + (\nu+\mu)\,\mathrm{S}\frac{s!}{i!\,(s-i)!}\,i\,q^i(1-q)^{s-i}.$$

Pour déterminer cette dernière somme, partons de l'identité

$$d.\mathrm{S}\frac{s!}{i!\,(s-i)!}t^iq^i(1-q)^{s-i} = \mathrm{S}\frac{s!}{i!\,(s-i)!}\,i\,q^i(1-q)^{s-i}t^{i-1}\,dt;$$

nous pourrons écrire en conséquence :

$$\mathrm{S}\frac{s!}{i!\,(s-i)!}\,i\,q^i(1-q)^{s-i} = \left\{\frac{d\mathrm{S}\dfrac{s!}{i!\,(s-i)!}t^iq^i(1-q)^{s-i}}{dt}\right\}_{t=1}$$
$$\left\{\frac{d\,[qt+(1-q)]^s}{dt}\right\}_{t=1} = \left\{s\,[qt+(1-q)]^s\right\}_{t=1} = sq.$$

Nous aurons donc

$$\mathrm{N} = -s\mu + (\nu+\mu)\,sq = s\left\{q\nu + q\mu - \mu\right\} = s\left\{q\nu - (1-q)\mu\right\}.$$

L'avantage cherché est donc proportionnel à s, ou au nombre des événements attendus.

Remarque. Pour $q\nu = (1-q)\mu$, on a $\mathrm{N} = 0$.

» $\quad q\nu < (1-q)\mu$, » $\quad \mathrm{N} < 0$, c'est-à-dire un désavantage.

60. **Deuxième problème.** *Les mêmes choses étant posées que dans le problème précédent, chercher la probabilité que le bénéfice réel de A (c'est-à-dire le bénéfice diminué de la perte) est compris entre deux limites, s étant un grand nombre.*

Solution. Nous avons trouvé, pour la probabilité que i événements arrivent, ou que le bénéfice réel est Δ_i (n° 20).

$$\Pi_i = \frac{s!}{i!\,(s-i)!}q^i(1-q)^{s-i}.$$

Si nous faisons $i = qs$, l'expression précédente sera le plus grand terme du développement de $(1 - q + q)^s$, que nous représenterons par M_i; et, par le théorème de Bernoulli, nous trouverons :

$$\overset{i+l}{\underset{i-l}{S}} M_i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2s\pi q(1-q)}}, \left(\gamma = \frac{l}{\sqrt{2sq(1-q)}}\right) \quad (\alpha)$$

pour la probabilité que le nombre des événements qui arrivent est compris entre $i \pm l$, ou que le bénéfice éventuel est compris entre Δ_{i+l} et Δ_{i-l}.

Or on sait, par le problème précédent, que si i événements arrivent, le bénéfice réel de A est

$$\Delta_i = i(\nu - \mu) - s\mu;$$

faisant $i = qs$, nous aurons :

$$\Delta_i = s[q\nu - (1-q)\mu];$$

changeant i en $qs - l$, puis en $qs + l$, nous aurons de même :

$$\Delta_{i-l} = s[q\nu - (1-q)\mu] - l(\nu + \mu),$$
$$\Delta_{i+l} = s[q\nu - (1-q)\mu] + l(\nu + \mu);$$

et la formule (α) nous donnera la probabilité que le bénéfice est compris entre ces deux limites.

Nous simplifierons un peu cette formule en posant

$$l = r\sqrt{s}; \quad \text{d'où} \quad \gamma = \frac{r\sqrt{s}}{\sqrt{2q(1-q)}},$$

expression que nous pouvons également mettre à la place de t; nous aurons ainsi :

$$P = \frac{2}{\sqrt{2\pi q(1-q)}} \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2q(1-q)}}} e^{-\frac{r^2}{2q(1-q)}} dr + \frac{e^{-\frac{r^2}{2q(1-q)}}}{\sqrt{2s\pi q(1-q)}} : \quad (1)$$

probabilité que le bénéfice réel de A est compris entre

$$s[q\nu - (1-q)\mu] \pm r\sqrt{s}(\nu + \mu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Le dernier terme de la formule (1) peut se négliger.

Première remarque. Lorsque $q\nu > (1-q)\mu$, le bénéfice réel augmente avec s.

Deuxième remarque. Lorsque s augmente, le premier terme de la formule (2) varie comme s, le second comme $\sqrt{s}$; l'intervalle des limites augmente donc sans cesse, et il devient de plus en plus probable que le bénéfice tombe entre ces limites.

Si s est infini, le bénéfice est aussi infini ou certain.

Donc, quand s est très-grand, il est presque certain que le bénéfice différera très-peu de $s[q\nu - (1-q)\mu]$.

61. Troisième problème. *Les mêmes choses étant posées que dans le problème précédent, supposons que les probabilités des s événements soient différentes, ainsi que les bénéfices et les pertes qui y sont attachés : chercher la probabilité que le bénéfice réel sera compris entre deux limites, s étant supposé très-grand.*

Solution. Pour simplifier les calculs, on peut faire abstraction des pertes μ, causées par la non-arrivée de chaque événement; car on peut comprendre dans le bénéfice que procure l'arrivée de chaque événement la perte qu'occasionnerait sa non-arrivée, et retrancher de l'avantage total ainsi obtenu la somme de ces pertes.

On a en effet, en se conformant aux notations précédentes :

$$\Sigma\{q_i\nu_i - (1-q_i)\mu_i\} = \Sigma q_i(\nu_i + \mu_i) - \Sigma\mu_i.$$

Soient maintenant

$q_1 \ldots q_s$ les probabilités respectives des s événements;
$p_1 \ldots p_s$ celles de leurs contraires;
$\nu_1 \ldots \nu_s$ les bénéfices que procure leur arrivée;
$\mu_1 \ldots \mu_s$ les pertes que cause leur non-arrivée.

Posons

$$X = (p_1 + q_1 u^{\nu_1})(p_2 + q_2 u^{\nu_2}) \ldots (p_s + q_s u^{\nu_s}) = \Sigma U_m u^m,$$

et désignons par P la probabilité que la somme des bénéfices sera m, nous aurons

$$P = U_m.$$

Changeons m en $L + l$, et u^{ν_1} en $e^{\nu_1 \omega \sqrt{-1}}$, etc., ce qui est permis, puisque U_m est indépendant des ν; l'expression X deviendra :

$$X = (p_1 + q_1 e^{\nu_1 \omega \sqrt{-1}}) \ldots (p_s + q_s e^{\nu_s \omega \sqrt{-1}}) = \Sigma U_{L+l}\, e^{(L+l)\omega \sqrt{-1}}$$
$$= U_0 + \cdots + U_{L+l}\, e^{(L+l)\omega \sqrt{-1}}.$$

multiplions par $e^{(L+l)\omega \sqrt{-1}} d\omega$, et intégrons entre les limites $\pm \pi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} X e^{-(L+l)\omega \sqrt{-1}} d\omega = U_{L+l} = 2\pi P,$$

d'où

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(L+l)\omega \sqrt{-1}}\, X d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\omega e^{-l\omega \sqrt{-1}}\, e^{-L\omega \sqrt{-1}}\, X. \quad (a)$$

Mais nous avons

$$X = \Gamma_1^s (p_i + q_i e^{\nu_i \omega \sqrt{-1}}) = \Gamma_1^s \left[1 - q_i (1 - e^{\nu_i \omega \sqrt{-1}})\right];$$

d'où

$$l.X = \sum_1^s l. \left[1 - q_i \left(1 - e^{\nu_i \omega \sqrt{-1}}\right)\right],$$
$$= \sum_1^s \left\{ q_i (1 - e^{\nu_i \omega \sqrt{-1}}) - \frac{1}{2} q_i^2 (1 - 2 e^{\nu_i \omega \sqrt{-1}} + e^{2\nu_i \omega \sqrt{-1}}) + \cdots \right\}$$
$$= \sum_1^s \left\{ q_i \nu_i \omega \sqrt{-1} - \frac{\omega^2}{2} \nu_i^2 q_i (1 - q_i) - \cdots \right\};$$

et par suite

$$l.(e^{-L\omega\sqrt{-1}} x) = \left(\sum_1^s q_i \nu_i - L\right) \omega \sqrt{-1} - \frac{\omega^2}{2} \sum_1^s q_i (1 - q_i)\, \nu_i^2 - \cdots$$

Si nous faisons $L = \sum_1^s q_i \nu_i$, le premier terme du second membre disparaîtra, et nous aurons

$$e^{-L\omega\sqrt{-1}} X = e^{-\frac{\omega^2}{2} \sum_1^s q_i (1 - q_i) \nu_i^2 - \cdots}$$

s étant très-grand, il en sera de même de $\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2$, qui est de

l'ordre de s, et l'on pourra négliger dans l'exposant les puissances de ω supérieures à la 2^{me}; alors :

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\omega e^{-\left[l\omega\sqrt{-1} + \frac{\omega^2}{2} \sum_1^s p_i q_i \nu_i^2\right]}.$$

On pourra, pour la même raison, étendre les limites à $\pm \infty$, de sorte que

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-\left(l\omega\sqrt{-1} + \frac{\omega^2}{2} \sum_1^s p_i q_i \nu_i^2\right)} : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

probabilité que la somme des bénéfices sera $l + \sum_1^s q_i \nu_i$.

Pour intégrer l'expression (b), il faut convertir l'exposant en un carré. Si nous faisons

$$\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2 = a,$$

nous pourrons écrire

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{2a}} + \omega \sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2} e^{-\frac{l^2}{2a}} d\omega$$
$$= \frac{e^{-\frac{l^2}{2a}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-\left[\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{2a}} + \omega \sqrt{\frac{a}{2}}\right]^2},$$
$$= \frac{e^{-\frac{l^2}{2a}}}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sqrt{\frac{a}{2}}\, e^{-\left(\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{2a}} + \omega \sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2}$$
$$= \frac{e^{-\frac{l^2}{2a}}}{\pi \sqrt{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-\frac{l^2}{2a}}}{\sqrt{2\pi a}};$$

ou bien, en remplaçant a par sa valeur :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_1^s q_i p_i \nu_i^2}}\, e^{-\frac{l^2}{2\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2}} : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

probabilité que le bénéfice est $\sum_1^s q_i \nu_i + l$.

Pour avoir la probabilité que le bénéfice est compris entre $\sum\limits_1^s q_i\nu_i \pm l$, il suffira de multiplier par dl et d'intégrer entre les limites $\pm l$; on aura ainsi :

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sum\limits_1^s q_i p_i \nu_i^2}} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{l^2}{2\sum\limits_1^s q_i p_i \nu_i^2}} dl = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sum\limits_1^s q_i p_i \nu_i^2}} \int_{0}^{l} e^{-\frac{l^2}{2\sum\limits_1^s q_i p_i \nu_i^2}} dl. \quad (d)$$

Cette formule se simplifiera si l'on pose

$$l = r\sqrt{2\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2}, \quad dl = dr\sqrt{2\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2};$$

elle devient alors :

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r dr\, e^{-r^2},$$

probabilité que le bénéfice est compris entre

$$\mathrm{L} \pm l = \sum_1^s q_i\nu_i \pm r\sqrt{2\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2}.$$

Mais, d'après la manière de tenir compte des pertes, que nous avons exposée au commencement de la solution, nous avons à changer dans L, ν_i en $\nu_i + \mu_i$, et à retrancher $\sum\limits_1^s \mu_i$; de sorte que

$$\Pi = \int_0^r e^{-r^2} dr \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

sera la probabilité que le bénéfice réel est entre

$$\sum_1^s [q_i(\nu_i + \mu_i)] - \sum_1^s \mu_i \pm r\sqrt{2\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2},$$

ou entre

$$\sum_1^s (q_i\nu_i - p_i\mu_i) \pm r\sqrt{2\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$

De là résulte :

1° Que si $q_i\nu_i > p_i\mu_i$, ou si l'espérance mathématique $q_i\nu_i - p_i\mu_i$ de chaque événement est > 0, il y aura toujours un bénéfice réel;

2° Que le premier terme étant de l'ordre s et le second de l'ordre $\sqrt{s}$, le bénéfice réel s'accroît sans cesse avec s, en même temps que Π s'approche de 1. Ce bénéfice devient infiniment grand, et certain, dans le cas d'un nombre infini d'événements; car les limites s'étendant de plus en plus, il devient de plus en plus probable que le bénéfice tombe entre ces limites.

Dans ce qui précède, nous avons déterminé la probabilité du bénéfice réel résultant d'un certain nombre d'événements simples; nous allons maintenant déterminer la probabilité du bénéfice qui résulte de la répétition d'un événement consistant en diverses chances qui produisent des gains ou des pertes.

62. Quatrième problème. *Une urne renferme des boules de diverses couleurs (1), (2), etc.; une personne A tire une boule et la remet dans l'urne après le tirage; son bénéfice est ν_1 si la boule qui sort est de la couleur (1); ν_2 si elle est de la couleur (2), etc. Supposons un nombre très-grand* t *de tirages; et cherchons la probabilité que le bénéfice de* A *sera $\sigma = t\mu + l$.*

Solution. Soient $p_1, p_2, ..$ les probabilités du tirage d'une boule (1), (2).., ces probabilités étant assujéties à la condition $p_1 + p_2 + .. = 1$.

Les bénéfices de A correspondants à ces tirages seront

$p_1\nu_1$	bénéfice éventuel pour une boule	(1),
$p_2\nu_2$	» »	(2), etc.

Posons

$$\mathrm{X} = (p_1 u^{\nu_1} + p_2 u^{\nu_2} + ..)^t = \Sigma \mathrm{U}_\sigma u^\sigma;$$

U_σ sera la probabilité que le bénéfice de A est σ.

Comme ce terme est indépendant de u, nous pourrons faire

$$u = \omega\sqrt{-1};$$

d'où

$$\mathrm{X} = (p_1 e^{\nu_1\omega\sqrt{-1}} + p_2 e^{\nu_2\omega\sqrt{-1}} + ..)^t = \Sigma \mathrm{U}_\sigma e^{\sigma\omega\sqrt{-1}};$$

d'où

$$\mathrm{U}_\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\omega\sigma\sqrt{-1}} d\omega \mathrm{X}.$$

Si nous changeons σ en $t\mu + l$, nous aurons :

$$U_\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\omega e^{-l\omega\sqrt{-1}} \left\{ e^{-\mu\omega\sqrt{-1}}\left[p_1 e^{\omega\nu_1\sqrt{-1}} + p_2 e^{\omega\nu_2\sqrt{-1}} + ..\right]\right\}^t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\omega e^{-l\omega\sqrt{-1}}.\ \mathrm{A},$$

en posant

$$\mathrm{A} = \left\{ e^{-\mu\omega\sqrt{-1}}\left[p_1 e^{\omega\nu_1\sqrt{-1}} + p_2 e^{\omega\nu_2\sqrt{-1}} + ..\right]\right\}^t;$$

d'où

$$\mathrm{l.\,A} = -t\mu\omega\sqrt{-1} + t\,\mathrm{l.}\left[p_1 e^{\omega\nu_1\sqrt{-1}} + p_2 e^{\omega\nu_2\sqrt{-1}} + \cdots\right]$$

$$= -t\mu\omega\sqrt{-1} + t\,\mathrm{l.}\left[p_1\left(1 + \omega\nu_1\sqrt{-1} - \frac{\omega^2\nu_1^2}{2} + \cdots\right) + p_2\left(1 + \omega\nu_2\sqrt{-1} - \frac{\omega^2\nu_2^2}{2} + \cdots\right) + \cdots\right]$$

$$= -t\mu\omega\sqrt{-1} + t\,\mathrm{l.}\left[1 + (p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots)\,\omega\sqrt{-1} - (p_1\nu_1^2 + p_2\nu_2^2 + \cdots)\frac{\omega^2}{2} + \cdots\right]$$

$$= t\omega\sqrt{-1}\,(p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots - \mu) - \frac{\omega^2 t}{2}\left[(p_1\nu_1^2 + p_2\nu_2^2 + \cdots) - (p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots)^2\right] + \cdots$$

Faisons $\mu = p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots$, et

$$p_1\nu_1^2 + p_2\nu_2^2 + \cdots - (p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots)^2 = 2k^2,$$

ce qui est permis, cette quantité étant essentiellement positive; elle est, en effet, égale à

$$(p_1\nu_1^2 + p_2\nu_2^2 + \cdots)(p_1 + p_2 + \cdots) - (p_1^2\nu_1^2 + p_2^2\nu_2^2 + \cdots + 2p_1p_2\nu_1\nu_2 + \cdots)$$
$$= p_1p_2(\nu_1 - \nu_2)^2 + \cdots$$

Faisant ces substitutions dans l'expression l. A, elle deviendra :

$$\mathrm{l.\,A} = -\omega^2 tk^2; \quad \mathrm{A} = e^{-tk^2\omega^2},$$

en négligeant les termes en ω^3 ...., à cause de la valeur très-grande que nous supposons à t. La formule U_σ deviendra donc, en étendant, pour la même raison, les limites à $\pm\infty$:

$$U_\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-(tk^2\omega^2 + l\omega\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-tk^2\left[\left(\omega + \frac{l\sqrt{-1}}{tk^2}\right)^2 - \left(\frac{l\sqrt{-1}}{2tk^2}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-tk^2\left(\omega + \frac{l\sqrt{-1}}{tk^2}\right)^2};$$

ou bien, en posant $\tau = k\nu t\left(\omega + \frac{l\sqrt{-1}}{t\mu^2}\right)$; $d\omega = \frac{d\tau}{k\sqrt{t}}$:

$$U_\sigma = \frac{1}{2\pi k\sqrt{t}} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} : \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

probabilité que le bénéfice de A est $\sigma = \mu t + l$.

Cherchons la probabilité que ce bénéfice est compris entre $\mu t \pm l$.

Pour cela, il faut faire varier, dans (a), l depuis $-l$ jusqu'à l, et prendre la somme de toutes les valeurs ainsi obtenues, ce qui revient à multiplier l'expression (a) par dl et à intégrer entre les limites $\pm l$; on aura ainsi

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}}\int_{-l}^{l} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}}\,dl = \frac{1}{k\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{l} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}}\,dl :$$

probabilité que le bénéfice de A est compris entre

$$\mu t \pm l \quad \text{ou} \quad t(p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots) \pm l.$$

Cette formule se simplifiera en posant

$$\frac{l}{2k\sqrt{t}} = r, \quad dl = 2k\sqrt{t}\,dr;$$

elle deviendra

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-r^2} dr :$$

probabilité que le bénéfice de A est compris entre

$$t(p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots) \pm 2k\sqrt{t} \cdot r.$$

Comme les limites s'étendent de plus en plus à mesure que t augmente, il deviendra de plus en plus probable que le bénéfice tombera entre les limites; et le bénéfice deviendra infiniment grand, et certain, si le nombre des tirages devient infini.

JEUX DE HASARD.

63. Dans les jeux de hasard, on nomme *avantage* ou *sort* d'un joueur son espérance mathématique. La théorie des jeux de hasard consiste à déterminer cet avantage dans chaque cas particulier.

Pour faire voir comment s'effectue cette détermination, prenons pour exemple le jeu de Pharaon.

Règles du jeu.

1° Le banquier taille avec un jeu de cinquante-deux cartes;

2° Il tire toutes les cartes de suite, en mettant les unes à sa droite, les autres à sa gauche; chaque couple de cartes se nomme une taille ou une main ;

3° A chaque main, le ponte a la liberté de prendre une ou plusieurs cartes, et de hasarder dessus une certaine somme;

4° Le banquier gagne la mise du ponte, lorsque la carte de celui-ci arrive à la main droite, ou en rang impair;

5° Le banquier perd la mise du ponte, lorsque la carte de celui-ci arrive à la main gauche, ou en rang pair;

6° Le banquier prend la moitié de ce que le ponte a mis sur une carte, lorsque, dans une même taille, cette carte arrive deux fois (par exemple, deux as), ce qui fait une partie de l'avantage du banquier;

7° La dernière carte, qui devrait être pour le ponte, ne compte pas, ce qui est encore un avantage pour le banquier; car, comme l'avant-dernière carte est de rang impair, le banquier gagnera la mise, si même la dernière ou l'avant-dernière carte est celle du ponte.

Il s'agit de déterminer l'avantage du banquier dans ce jeu.

Un premier avantage consiste en ce que le ponte perd la moitié de sa mise, quand sa carte vient deux fois dans une taille; nous avons donc à résoudre le problème suivant :

Premier problème. *Le banquier tient en main* p *cartes, parmi lesquelles celles du ponte qui ne sont pas encore sorties, au nombre de* q; *trouver la probabilité* P *que deux des cartes du ponte arrivent dans la* 1^{re}, *la* 2^{me}, ... *ou la* r^{me} *taille.*

Solution. Soient Q_1, Q_2, ... Q_r les probabilités que les cartes du ponte arrivent deux fois dans la 1^{re}, la 2^{me}, ... la r^{me} taille; on aura

$$P = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_r.$$

Déterminons Q_1 ... Q_r.

1° *Détermination de* Q_1 :

La probabilité que la première carte tirée sera celle du ponte est $\frac{q}{p}$;

La probabilité contraire

$$1 - \frac{q}{p} = \frac{p-q}{p}.$$

La probabilité que la deuxième carte tirée sera aussi celle du ponte est $\frac{q-1}{p-1}$;

Par suite, la probabilité que les deux cartes du ponte sortent ensemble dans la première taille sera

$$Q_1 = \frac{q}{p}\,\frac{q-1}{p-1}.$$

2° *Détermination de* Q_2 :

La probabilité que, les cartes du ponte ne sortant pas dans la première taille, elles sortent toutes deux dans la seconde, sera

$$\frac{q}{p-2}\cdot\frac{q-1}{p-3}.$$

Mais la probabilité qu'aucune des cartes du ponte ne sorte dans la première taille est

$$\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p-1}\right)=\frac{p-q}{p}\,\frac{p-q-1}{p-1};$$

nous aurons, par suite, pour la probabilité des deux événements simultanés (la non-sortie dans la première taille, et la sortie des deux cartes dans la deuxième taille)

$$Q_2=\frac{q\,(q-1)}{(p-2)\,(p-3)}\cdot\frac{(p-q)\,(p-q-1)}{p\,(p-1)}.$$

3° *Détermination de* Q_3 :

La probabilité que, les deux cartes du ponte n'étant pas sorties dans les deux premières tailles, elles sortent dans la troisième est

$$\frac{q\,(q-1)}{(p-4)\,(p-5)}.$$

La probabilité qu'aucune carte du ponte ne sort dans la première taille est

$$\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p-1}\right):$$

La probabilité qu'aucune carte du ponte ne sort, ni dans la première ni dans la deuxième taille, est

$$\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p-1}\right)\left(1-\frac{q}{p-2}\right)\left(1-\frac{q}{p-3}\right).$$

La probabilité cherchée Q_3 sera donc

$$Q_3=\frac{q\,(q-1)}{(p-4)\,(p-5)}\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p-1}\right)\left(1-\frac{q}{p-2}\right)\left(1-\frac{q}{p-3}\right).$$

4° On trouverait absolument de la même manière :

$$Q_4=\frac{q\,(q-1)}{(p-6)(p-7)}\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p-1}\right)\left(1-\frac{q}{p-2}\right)\cdots\left(1-\frac{q}{p-5}\right);$$

et enfin :

$$Q_r=\frac{q\,(q-1)}{(p-2r+2)(p-2r+1)}\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p-1}\right)\cdots\left(1-\frac{q}{p-2r+3}\right).\quad (A)$$

Réduisant au même dénominateur et ajoutant, on trouve

$$P=\frac{q\,(q-1)}{p\,(p-1)}\left\{1+\frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-2)\,(p-3)}+\frac{(p-q)\cdots(p-q-3)}{(p-2)\cdots(p-5)}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(p-q)\cdots(p-q-2r+3)}{(p-2)\cdots(p-2r+1)}+\cdots\right\}.\quad (a)$$

Il s'agit de déterminer le dernier terme de la somme entre parenthèses. Si l'on change r en $r+1$, on obtient, pour le $(r+1)^{\text{me}}$ terme,

$$\frac{(p-q)\ldots(p-q-2r+1)}{(p-q)\ldots(p-2r-1)}\quad\ldots\ldots\quad (b)$$

Les cartes du banquier, c'est-à-dire celles que le ponte n'a pas prises, sont au nombre de $(p-q)$.

La partie cessera quand les cartes restantes après r tailles seront les q cartes du ponte, si q est pair, ou bien quand les cartes restantes seront les q cartes du ponte plus une carte du banquier, si q est impair.

Car, à la taille suivante, les deux cartes du ponte sortiront, si q est pair, ce qui fera gagner le banquier; tandis que, si q est impair, il sortira deux cartes du ponte, ou une carte du ponte et une du banquier, ce qui fera gagner l'un ou l'autre.

Le dernier terme de la formule (a) répond donc à une valeur de r, telle qu'à la r^{me} taille les cartes restantes soient au nombre de q, si q est pair, ou au nombre de $q+1$, si q est impair.

Supposons d'abord q pair : pour qu'il reste q cartes après la $(r-1)^{me}$ taille, il faut qu'on ait tiré $p-q=2(r-1)$ cartes; d'où

$$r=\frac{p-q+2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Supposons q impair : pour qu'il reste $q+1$ cartes après la $(r-1)^{me}$ taille, il faut qu'on ait tiré $p-q-1=2(r-1)$ cartes; d'où

$$r=\frac{p-q+1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Dans l'une ou l'autre de ces hypothèses, le terme (b) devient :

$$\frac{(p-q)\ldots\times 0\times -1}{(p-2)\ldots(q-2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

ou

$$\frac{(p-q)\ldots 2.1.0}{(p-2)\ldots(q-2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

Si donc $q>2$, (e) et (f) seront nuls; et la somme de la formule (a) devra être continuée jusqu'à ce qu'elle s'arrête d'elle-même.

Si $q=2$, la formule (c) donne

$$r=\frac{p}{2}, \quad 2r=p:$$

dans ce cas toutes les cartes sont tirées à la r^{me} taille, et le reste sera impossible; aussi (e) devient-il $\frac{0}{0}$.

Si $q=1$, la formule (a) donne

$$r=\frac{p-q+1}{2}=\frac{p}{2}, \quad 2r=p;$$

le reste sera encore impossible; aussi (f) devient-il $\frac{0}{0}$.

La somme (a) doit donc être continuée jusqu'à ce qu'on trouve 0, ou $\frac{0}{0}$.

Deuxième problème. *Déterminer l'espérance mathématique du banquier quand* q *est* >2.

Solution. Si $q>2$, le nombre de cartes au commencement de la r^{me} taille étant q ou $q+1$, la r^{me} taille n'épuisera pas toutes les cartes; il est donc inutile de prendre en considération la dernière règle du jeu, pour en tenir compte dans la recherche de l'espérance mathématique du banquier.

Si a est la mise du ponte, le gain à espérer par le banquier sera $\frac{1}{2}a$, et son espérance mathématique sera donc :

$$E=\frac{1}{2}a\frac{q(q-1)}{p(p-1)}\left\{1+\frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-2)(p-3)}+\frac{(p-q)..(p-q-3)}{(p-2)..(p-5)}+\ldots\right\} \quad (g)$$

et la série s'arrêtera d'elle-même.

Troisième problème. *Déterminer l'espérance mathématique du banquier quand* r $=2$.

Solution. Si dans la formule (g) on pose $q=2$, tous les termes de la parenthèse seront égaux à l'unité, et leur nombre sera celui des termes de la progression $1, 3, 5, \ldots p-1$, nombre qui est $\frac{p}{2}$; on a donc

$$E=\frac{1}{2}a\,\frac{2.1}{p(p-1)}\cdot\frac{1}{2}p=\frac{a}{2(p-1)} \quad \ldots \quad (k)$$

Mais, dans ce cas, l'espérance mathématique du banquier est plus grande que cette valeur (k); car pour $q=2$, on a $r=\frac{p}{2}$, $2r=p$; il ne reste donc plus de cartes après la r^{me} taille, et, d'après la dernière règle du jeu, le banquier gagnera sûrement à la r^{me} taille. Si les deux cartes du ponte sont dans cette taille, le banquier gagnera a et non $\frac{1}{2}a$; or, la probabilité qu'il en sera ainsi est, d'après la formule (A), dans laquelle on doit faire $r=\frac{p}{2}$ et $q=2$:

$$\frac{2.1}{2.1}\frac{(p-2)\ldots 1}{p(p-1)\ldots 3}=\frac{2:1}{p(p-1)}$$

l'espérance qu'a le banquier de gagner a est donc

$$a \frac{1 \cdot 2}{p(p-1)}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (l)$$

et comme la moitié de cette valeur est déjà comprise dans la valeur (k), l'espérance mathématique du banquier sera

$$(k) + \frac{1}{2}(l) = a\left(\frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{p(p-1)}\right) = a\frac{p+2}{2p(p-1)} \cdot \quad (m)$$

QUATRIÈME PROBLÈME. *Déterminer l'espérance mathématique du banquier quand* $q = 1$.

SOLUTION. Dans ce cas, l'espérance du banquier dépend de la probabilité que la carte unique du ponte sortira la première dans la dernière taille. Or, comme chacune des p cartes peut sortir la première dans cette taille, la probabilité cherchée sera $\frac{1}{p}$.

Mais si la carte du ponte sort, le banquier gagne la mise a; son espérance mathématique sera donc

$$E = \frac{a}{p}.$$

CHAPITRE IV.

ESPÉRANCE MORALE.

---

64. Soit v la fortune matérielle d'un individu, g un gain matériel, et G la valeur morale de g, on a entre ces deux valeurs une relation de la forme

$$G = m\frac{g}{v}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

m étant une constante qui dépend du temps, du lieu, etc.

On admet que les fortunes varient par degrés insensibles, de sorte qu'à l'accroissement de fortune matérielle dx correspond un accroissement dG de fortune morale, qui sera donné, en vertu de la relation (1), par

$$dG = m\frac{dx}{x}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

si le capital matériel x croît de $x = v$ à $x = V$, la fortune morale correspondante à cet accroissement sera

$$G = \int_v^V \frac{mdx}{x} = ml\frac{V}{v}. \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Il résulte de cette formule :

1° Que G croît avec V;

2° Que G augmente quand v diminue;

3° Que $G = 0$ quand $V = v$;

4° Que G est négatif quand V est $< v$.

Il est à remarquer que V et v ne sont jamais nuls, ni, à plus forte raison, négatifs, vu que personne n'est jamais absolument sans fortune physique; car celui qui n'a rien possède au moins son existence, qu'il n'échangerait pas contre une somme qu'il estimerait être inférieure à la valeur de cette existence. Il n'y a que celui qui meurt actuellement de faim, dit Bernouilli, dont on puisse dire qu'il ne possède absolument rien.

Soit v la fortune matérielle d'un individu; g_1, g_2, ... des gains matériels à espérer; p_1, p_2, ... les probabilités de ces gains; G la valeur relative de sa fortune morale en vertu de son expectative; on aura

$$G = p_1 m \text{ l.}\frac{v+g_2}{v} + p_2 m \text{ l.}\frac{v+g_2}{v} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Mais si V est la fortune physique correspondante à cette fortune morale, on a aussi

$$G = m \text{ l.}\frac{V}{v};$$

et, en égalant les deux valeurs de G :

$$\text{l. }\frac{V}{v} = p_1 \text{ l.}\frac{v+g_1}{v} + p_2 \text{ l.}\frac{v+g_2}{v} + \cdots$$

d'où

$$\frac{V}{v} = \frac{(v+g_1)^{p_1}(v+g_2)^{p_2}\ldots}{v^{p_1+p_2+\cdots}},$$

et comme

$$p_1 + p_2 + \cdots = 1,$$

il en résulte

$$V = (v+g_1)^{p_1}(v+g_2)^{p_2}\ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Si l'on retranche la fortune primitive de cette valeur V, la différence

$$V - v = (v+p_1)^{g_1}(v+p_2)^{g_2}\cdots - v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

sera l'accroissement de fortune matérielle qui procurerait à l'individu le même avantage moral que celui qui résulte pour lui de son expectative : ce sera son espérance morale, tandis que son espérance mathématique a pour expression

$$E = p_1 g_1 + p_2 g_2 + \cdots$$

Si les gains g_1, g_2 ... sont très-faibles par rapport à v, l'espérance morale différera peu de l'espérance mathématique; on a en effet

$$V = v^{p_1+p_2+\cdots}\left(1+\frac{g_1}{v}\right)^{p_1}\left(1+\frac{g_2}{v}\right)^{p_2}\cdots$$
$$= v\left(1+\frac{p_1 g_1}{v}\right)\left(1+\frac{p_2 g_2}{v}\right)\cdots$$

en négligeant les puissances supérieures des rapports $\frac{g}{v}$; donc

$$V - v = p_1 g_1 + p_2 g_2 + \cdots + p_1 p_2 \frac{g_1 g_2}{v} + \cdots,$$

valeur qui diffère peu de E.

Conséquences des formules précédentes.

65. I. *L'importance d'une somme* g, *considérée comme gain, est moindre que l'importance de cette somme considérée comme perte.*

Démonstration. Si g est un gain, la fortune initiale v aura pour valeur morale

$$G = m \text{ l.}\frac{v+g}{v} = m\left[\text{l.}(v+g) - \text{l.}v\right];$$

tandis que si g est une perte, la valeur morale de la fortune initiale sera

$$G' = m \text{ l.}\frac{v-g}{v} = m\left[\text{l.}(v-g) - \text{l.}v\right].$$

Or de ce que

$$(v+g)(v-g) < v^2,$$

il s'ensuit

$$\text{l.}(v+g) - \text{l.}v < \text{l.}v - \text{l.}(v-g);$$

donc, en valeur absolue, on a

$$G < G'.$$

II. *Le jeu ou le pari le plus équitable est toujours désavantageux.*

Démonstration. Soit v la fortune de A avant le jeu; p la probabilité qu'il gagnera; s sa mise; x la mise de B; $q = 1 - p$ la probabilité qu'il gagnera; pour que le jeu soit équitable, il faut qu'on ait

$$x : s = 1 - p : p, \quad x = \frac{1-p}{p} s.$$

Si A gagne, sa fortune après le jeu sera $v + \frac{1-p}{p} s$; et la probabilité qu'il en sera ainsi est p.

Si A perd, sa fortune après le jeu sera $v - s$; et la probabilité qu'il en sera ainsi est $1 - p$.

La fortune matérielle V de A, en vertu de son expectative, sera :

$$\mathrm{V} = \left(v + \frac{1-p}{p} s\right)^p (v-s)^{1-p},$$

il s'agit de démontrer que V sera $< v$; ou que

$$\left(v + \frac{1-p}{p} s\right)^p (v-s)^{1-p} < v;$$

pour cela, transformons successivement cette inégalité dans les suivantes :

$$v^p \left(1 + \frac{1-p}{p}\frac{s}{v}\right)^p v^{1-p} \left(1 - \frac{s}{v}\right)^{1-p} < v,$$

$$\left(1 + \frac{1-p}{p}\frac{s}{v}\right)^p \left(1 - \frac{s}{v}\right)^{1-p} < 1,$$

$$p\,\mathrm{l.}\left(1 + \frac{1-p}{p}\frac{s}{v}\right) + (1-p)\,\mathrm{l.}\left(1 - \frac{s}{v}\right) < 0,$$

$$\int \left\{ p\,d\,\mathrm{l.}\left(1 + \frac{1-p}{p}\frac{s}{v}\right) + (1-p)\,d\,\mathrm{l.}\left(1 - \frac{s}{v}\right)\right\} < 0;$$

$$\int \left\{ \frac{p\,\frac{1-p}{p}\frac{ds}{v}}{1 + \frac{1-p}{p}\frac{s}{v}} - \frac{(1-p)\frac{ds}{v}}{1 - \frac{s}{v}} \right\} < 0;$$

$$\int (1-p)\frac{ds}{v}\left\{ \frac{1}{1 + \frac{1-p}{p}\frac{s}{v}} - \frac{1}{1 - \frac{s}{v}} \right\} < 0:$$

inégalité qui est en effet satisfaite, puisque

$$1 + \frac{1-p}{p}\frac{s}{v} > 1 - \frac{s}{v}.$$

III. *Déterminer la valeur de la mise, pour que le désavantage soit insensible, eu égard à la fortune* v *du joueur.*

Nous avons trouvé

$$\mathrm{V} = \left(v + \frac{1-p}{p} s\right)^p (v-s)^{1-p};$$

s est l'inconnue; comme sa valeur doit être faible, négligeons ses puissances supérieures à la deuxième, nous aurons

$$\mathrm{V} = v - \frac{1-p}{2pv} s^2;$$

en faisant $\frac{1-p}{2pv} s^2$ égal à une très-petite partie de v, le désavantage sera insensible. Posons en conséquence

$$\frac{1-p}{2pv} s^2 = \frac{v}{n},$$

et nous trouverons

$$s = v\sqrt{\frac{2p}{n(1-p)}}.$$

La fortune du joueur, en vertu de son expectative, sera

$$\mathrm{V} = v - \frac{v}{n},$$

et ne sera pas notablement changée, puisque n est très-grand.

IV. *Quelle doit être la probabilité de gagner pour qu'un joueur puisse risquer sa fortune* v *moins une partie insensible* $\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{n}}$?

La fortune du joueur, en vertu de son expectative, sera

$$\mathrm{V} = v - \frac{v}{n} = v\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

D'autre part, nous avons trouvé pour V l'expression

$$\mathrm{V} = \left(v + \frac{1-p}{p} s\right)^p (v-s)^{1-p},$$

dans laquelle nous avons à changer la mise s en $v\left(1-\frac{1}{n}\right)$, ce qui donne

$$V = v\left[1+\frac{1-p}{p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^{p}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-p};$$

égalant entre elles les deux valeurs de V, nous obtiendrons l'équation

$$1-\frac{1}{n} = \left[1+\frac{1-p}{p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^{p}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-p},$$

d'où nous pouvons déduire la valeur cherchée de p.

V. *Démontrer qu'il est avantageux de ne pas exposer toute sa fortune à un même danger, et qu'il convient de la répartir, au contraire, sur plusieurs dangers indépendants les uns des autres.*

Supposons qu'un négociant dont la fortune est v attende une cargaison d'une valeur s, exposée sur un seul navire, et que l'on sache par l'observation que l'arrivée au port d'un bâtiment semblable a une probabilité p.

La fortune morale du négociant, en vertu de son expectative, sera

$$V = (v+1)^{p},$$

d'où

$$\mathrm{l.}\, V = p\, \mathrm{l.}\,(v+s) = p\int \frac{ds}{v+s} \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Supposons que le négociant expose la valeur s par parties égales sur r vaisseaux; si tous arrivent, sa fortune deviendra $v+s$, et la probabilité de cette arrivée est p^r; si $r-1$ vaisseaux arrivent, sa fortune sera $v+\frac{(r-1)s}{r}$, et la probabilité de cette arrivée est $rp\frac{r-1}{(1-p)}$; si $r-2$ vaisseaux arrivent, sa fortune sera $v+\frac{(r-2)s}{2}$, et la probabilité de cette arrivée est

$$\frac{r(r-1)}{2}p^{r-2}(1-p)^2;\ \text{etc.}$$

La fortune morale du négociant sera donc

$$V = (v+s)^{p^r}\cdot\left(v+\frac{r-1}{r}s\right)^{rp^{r-1}(1-p)}\cdot\left(v+\frac{r-2}{r}s\right)^{\frac{r(r-1)}{r}p^{r-2}(1-p)^2}\cdots$$

d'où

$$\mathrm{l.}\, V = p^r\,\mathrm{l.}\,(v+s) + rp^{r-1}(1-p)\,\mathrm{l.}\left(v+\frac{r-1}{r}s\right)$$
$$+\frac{r(r-1)}{2}p^{r-2}(1-p)^2\,\mathrm{l.}\left(v+\frac{r-2}{r}s\right)+\cdots$$
$$=\int\left\{\frac{p^r ds}{v+s}+\frac{rp^{r-1}(1-p)\frac{r-1}{r}ds}{v+\frac{r-1}{r}s}+\frac{\frac{r(r-1)}{2}p^{r-2}(1-p)^2\frac{r-2}{r}ds}{v+\frac{r-2}{r}s}+\cdots\right\}$$
$$=p\int\left\{\frac{p^{r-1}}{v+s}+\frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{v+\frac{r-1}{r}s}+\frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1.2\left(v+\frac{r-2}{r}s\right)}+\cdots\right\}ds \quad (b),$$

mais à cause de

$$(p+1-p)^{r-1} = p^{r-1}+(r-1)p^{r-2}(1-p)$$
$$+\frac{(r-1)(r-2)}{2}p^{r-3}(1-p)^2+\cdots+(1-p)^{r-1}=1$$

la formule (a) peut s'écrire

$$\mathrm{l.}\, V = p\int 1\cdot\frac{ds}{v+s}$$
$$=p\int\left\{\frac{p^{r-1}}{v+s}+\frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{v+s}+\frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1.2(v+s)}+\cdots\right\}ds \quad (a').$$

Si l'on retranche cette dernière valeur de la valeur (b), la différence sera

$$D = \frac{r-1}{r}(1-p)\int\frac{Sds}{v+s}\left\{\frac{p^{r-1}}{v+\frac{r-1}{r}s}+\frac{(r-2)(1-p)p^{r-2}}{v+\frac{r-2}{r}s}+\cdots\right\}.$$

Comme cette différence est positive, on voit qu'il y a moralement avantage à répartir la valeur s sur plusieurs vaisseaux.

Cet avantage augmente avec r, et si r est très-grand, l'avantage moral devient à peu près égal à l'avantage mathématique.

Pour le démontrer, reprenons la formule (6) dans laquelle nous supposerons $v=1$:

$$\mathrm{l.V}=p\int\left\{\frac{p^{r-1}}{1+s}+\frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{1+\frac{r-1}{p}s}+\frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1.2\left(1+\frac{r-1}{r}s\right)}+\cdots\right\}ds.$$

La somme entre parenthèses peut se mettre sous la forme d'une intégrale définie; en effet, si nous développons

$$e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right)^{r-1}=p^{r-1}e^{-x(1+s)}+(r-1)p^{r-2}(1-p)e^{-x\left(1+\frac{r-1}{r}s\right)}$$
$$+\frac{(r-1)(r-2)}{1.2}p^{r-3}(1-p)^2e^{-x\left(r+\frac{r-2}{r}\right)}+\text{etc.},$$

et que nous intégrions relativement à x entre les limites 0 et ∞, en tenant compte de

$$\int_0^\infty e^{-mx}dx=\frac{1}{m}$$

nous aurons

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r+x}{r}x}\left(pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right)^{r-1}dx=\frac{p^{r-1}}{1+s}$$
$$+\frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{1+\frac{r-1}{r}s}+\frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1.2\left(1+\frac{r-2}{r}s\right)}+\text{etc.}$$

Par suite, l'expression de l. V devient

$$\mathrm{l.V}=p\int ds\int_0^\infty e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right)^{r-1}dx.$$

Pour transformer l'intégrale définie, observons que la fonction

$$y=e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right)^{r-1}$$

n'a ni maximum ni minimum, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, puisque $\frac{dy}{dx}$, qui est égal à

$$-e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right)^{r-2}\left[p(1+s)e^{-\frac{sx}{r}}+(1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)\right],$$

est toujours négatif dans cet intervalle.

Il nous est donc permis de poser

$$y=y_0e^{-t},$$

y_0 étant ce que devient y pour $x=0$. Comme pour $t=0$ on a aussi $y=y_0$, il s'ensuit qu'à $t=0$ répond $x=0$. Et si, dans l'expression de y, on fait $x=0$, on trouve $y_0=1$. On aura, par suite,

$$\int_0^\infty ydx=\int_0^\infty e^{-t}dt\frac{dx}{dt}.$$

Nous avons à exprimer $\frac{dx}{dt}$ en fonction de t. Or,

$$x=f(t)=f(0)+\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}t+\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0}\frac{t^2}{1.2}+\cdots \quad (1)$$

et puisque $t=\mathrm{l}.\frac{y_0}{y}=\mathrm{l}.\frac{1}{y}$, nous aurons

$$dt=-\frac{dy}{y}=\frac{dx}{-\frac{ydx}{dy}}=\frac{dx}{u},$$

en posant

$$u=-\frac{ydx}{dy};$$

d'où

$$\frac{dx}{dt}=u;\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\frac{du}{dx}}{1\Big|\frac{dx}{dt}}=\frac{udu}{dx};\ \text{etc.}$$

Et puisqu'à $t=0$ répond $x=0$, il en résulte :

$$f(0)=0;\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=u_{x=0};\quad \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0}=\left(\frac{udu}{dx}\right)_{x=0};\ \text{etc.}$$

La formule (1) deviendra donc :

$$x = u_0 t + \left(\frac{udu}{dx}\right)_0 \frac{t^2}{1.2} + \cdots$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = u_0 + \left(\frac{udu}{dx}\right)_0 t + \cdots = u_0 \left\{1 + \left(\frac{du}{dx}\right) t + \cdots \right\}.$$

Substituant cette valeur dans l'intégrale précédente, nous obtiendrons

$$\int_0^\infty ydx = u_0 \left\{ \int_0^\infty e^{-t}dt + \left(\frac{du}{dx}\right)_0 \int_0^\infty te^{-t}dt + \cdots \right\}$$

$$= u_0 \left[1 + \left(\frac{du}{dx}\right)_0 + \cdots \right];$$

mais nous avons posé

$$u = -\frac{ydx}{dy} = \frac{pe^{-\frac{sc}{r}} + 1 - p}{p(1+s)e^{-\frac{sc}{r}} + (1-p)\left(1 + \frac{s}{r}\right)};$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = \frac{-(1-p)p\frac{s^2}{r^2}(1-r)e^{-\frac{sx}{r}}}{\left[p(1+s)e^{-\frac{sx}{r}} + (1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)\right]^2}; \text{ etc.}$$

Par suite

$$u_0 = \frac{1}{1 + ps + (1-p)\frac{s}{r}};$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = \frac{p(1-p)s^2\left(1 - \frac{s}{r}\right)}{r\left[1 + ps + (1-p)\frac{s}{r}\right]^2}.$$

L'intégrale cherchée aura donc pour valeur

$$\int_0^\infty ydx = \frac{1}{1 + ps + (1-p)\frac{s}{r}} \left\{ 1 + \frac{p(1-p)s^2\left(1-\frac{1}{r}\right)}{r\left[1+ps+(1-p)\frac{s}{r}\right]^2} + \cdots \right\}$$

et substituant cette valeur dans l'expression

$$\text{l. V} = p\int ds \int_0^\infty ydx,$$

nous aurons

$$\text{l.V} = \int \frac{pds}{1+ps+(1-p)\frac{s}{r}} \left\{ 1 + \frac{p(1-p)s^2\left(1-\frac{1}{r}\right)}{r\left[1+ps+(1-p)\frac{s}{r}\right]^2} + \cdots \right\}.$$

Si r est très-grand, on aura à peu près

$$\text{l. V} = \int \frac{pds}{1+ps} = \text{l.}(1+ps);$$

d'où

$$\text{V} = 1 + ps;$$

et comme nous avions fait $v = 1$, en remettant maintenant v au lieu de 1, nous aurons $\text{V} = v + ps$; ou $\text{V} - s = ps$; ou $\text{E}' = \text{E}$, c'est-à-dire l'espérance morale égale à l'espérance mathématique.

VI. *L'avantage moral est souvent augmenté par les assurances.*

Cherchons la somme que le négociant pourra donner à une compagnie d'assurances pour que sa fortune morale soit augmentée par son assurance.

Il a une valeur s sur un navire dont l'arrivée a la probabilité p; sa fortune morale est donc

$$\text{V} = (v+s)^p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

S'il assure cette valeur, il doit donner à la compagnie, d'après la règle du pari équitable, $(1-p)s$ comme prime d'assurance; mais à cause des frais et du bénéfice des assureurs, il doit donner, en outre, un excédant u; sa fortune réelle est donc

$$v + s - (1-p)s - u = v + sp - u. \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Pourvu que sa fortune morale reste la même, qu'il assure ou non, il faut que

$$(v+s)^p = v + sp - u, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

d'où l'on tire

$$u = v + sp - (v+s)^p:$$

c'est tout ce que le négociant pourra donner, sans désavantage moral, en excédant du prix réglé par l'espérance mathématique. Il aura donc un avantage moral, en faisant un sacrifice moindre que cette valeur de u.

Les compagnies d'assurances peuvent donc faire un bénéfice réel, tout en procurant des avantages aux personnes qui traitent avec elles.

VII. *Démontrer que le négociant peut faire un sacrifice excédant la somme* (1 — p) s *exigée par l'équité mathématique.*

En effet, s'il ne paye que $(1-p)s$, sa fortune réelle est

$$v+s-(1-p)s=v+sp;$$

s'il n'assure pas, elle est

$$(v+s)^p.$$

Or, p étant <1, on a

$$\int\frac{pds}{v+ps}>\int\frac{pds}{v+s},$$

ou

$$\text{l.}(v+ps)>p\,\text{l.}(v+s),$$

et

$$v+ps>(v+s)^p.$$

La fortune morale du négociant étant donc augmentée par l'assurance, il peut faire un sacrifice propre à subvenir aux frais de la compagnie et aux bénéfices qu'elle doit réaliser.

Problème de Pétersbourg.

66. *Deux personnes,* A *et* B, *jouent à croix et pile, sous la condition que* B *donnera à* A, *si celui-ci fait croix au* 1^er^ *coup,* 2 *francs; s'il fait croix au* 2^me^ *coup,* 4 *francs; ...; s'il fait croix au* n^me^ *coup,* 2^n^ *francs; on demande quelle doit être la mise de* A?

Solution mathématique. Pour l'équité mathématique, il faut que la mise de A soit égale au gain qu'il peut espérer, ou à son espérance mathématique; or les probabilités de faire croix au 1^er^, au 2^me^, ..., au n^{me} coup, sont :

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\dots\frac{1}{2^n};$$

l'espérance mathématique de A sera donc

$$E=2\frac{1}{2}+4\frac{1}{4}+\dots+2^n\frac{1}{2^n}=n.$$

Telle devrait donc être la mise de A. Mais si n est très-grand, personne ne voudra risquer une pareille somme; la règle de l'espérance mathématique est donc ici en contradiction avec l'appréciation du sens commun : celle-là prescrit d'accepter le pari, celui-ci de s'en abstenir.

Solution morale de D. Bernouilli. Soit v la fortune de A avant le jeu, x la mise qu'il peut risquer. Si croix arrive au 1^er^, 2^me^, ... n^{me} coup, sa fortune sera respectivement

$$v+2-x,\ v+2^2-x,\dots v+2^n-x;$$

et les probabilités correspondantes seront

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\dots\frac{1}{2^n},$$

la fortune morale de A sera donc

$$V=(v+2-x)^{\frac{1}{2}}(v+2^2-x)^{\frac{1}{2^2}}\dots(v+2^n-x)^{\frac{1}{2^n}}.$$

Pour que l'état de fortune de A ne soit pas changé, il faudra que :

$$v=(v+2-x)^{\frac{1}{2}}(v+2^2-x)^{\frac{1}{2^2}}\dots(v+2^n-x)^{\frac{1}{2^n}},$$

ou bien, en faisant $v-x=v'$,

$$v=v'+x=(v'+2)^{\frac{1}{2}}(v'+2^2)^{\frac{1}{2^2}}\dots(v'+2^n)^{\frac{1}{2^n}}\quad .\ .\quad (1)$$
$$=v'^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}}\left(1+\frac{2}{v'}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2^2}{v'}\right)^{\frac{1}{2^2}}\dots\left(1+\frac{2^n}{v'}\right)^{\frac{1}{2^n}},$$

mais si n est très-grand on a, à peu près,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}=1;$$

donc, en divisant les deux membres par v', et en posant $\frac{1}{v'} = \alpha$, nous aurons

$$1 + \alpha x = (1 + 2\alpha)^{\frac{1}{2}}(1 + 2^2\alpha)^{\frac{1}{2^2}} \dots (1 + 2^n\alpha)^{\frac{1}{2^n}} \quad . \quad . \quad (2)$$

Nous avons maintenant à déterminer la mise x que peut risquer le joueur.

Observons que les facteurs de l'expression (2) convergent vers l'unité, car

$$(1 + 2^u\alpha)^2 \quad > 1 + 2 \,.\, 2^u\alpha,$$

ou

$$(1 + 2^u\alpha)^{\frac{2^{u+1}}{2^u}} > 1 + 2^{u+1}\alpha,$$

ou

$$(1 + 2^u\alpha)^{\frac{1}{2^u}} \quad > (1 + 2^{u+1}\alpha)^{\frac{1}{2^{u+1}}}.$$

D'un autre côté

$$\mathrm{l.}\ (1 + 2^u\alpha)^{\frac{1}{2^u}} = \frac{1}{2^u}\,\mathrm{l.}\ (1 + 2^u\alpha) = \frac{1}{2^u}\,\mathrm{l.}\ 2^u\left(\frac{1}{2^u} + \alpha\right)$$

$$= \frac{1}{2^u}\,\mathrm{l.}\ 2^u + \frac{1}{2^u}\,\mathrm{l.}\left(\alpha + \frac{1}{2^u}\right) = \frac{u}{2^u}\,\mathrm{l.}\ 2 + \frac{1}{2^u}\,\mathrm{l.}\left(\alpha + \frac{1}{2^u}\right);$$

or les deux termes de cette somme convergent vers 0, lorsque u tend vers ∞ ; donc

$$(1 + 2^u\alpha)^{\frac{1}{2^u}} = 1 \text{ pour } u = \infty .$$

Le cas le plus avantageux pour A est celui où l'on suppose $n = \infty$.

Si l'on prend u tel que $2^u\alpha = 10$ au moins, on pourra s'arrêter dans la formule (2) au terme $(1 + 2^{u-1})^{\frac{1}{2^{u-1}}}$, et l'on aura par cette formule :

$$\lg(1 + \alpha x) = \frac{1}{2}\lg(1 + 2\alpha) + \frac{1}{2^2}\lg(1 + 2^2\alpha) + \dots + \frac{1}{2^{u-1}}\lg(1 + 2^{u-1}\alpha). \ (3)$$

En supposant connu v', et par suite $\alpha = \frac{1}{v'}$, cette dernière formule donnera x; et l'on aura alors $v = v' + x$.

Exemple. Soit $v' = 100$, donc $\alpha = 0{,}01$; on trouve d'après Laplace $x = 7{,}89$; donc $v = 107{,}89$.

Si donc A possède fr. 107,89 avant le jeu, la prudence lui prescrit de ne risquer à ce jeu que fr. 7,89, pour conserver la même fortune morale.

CHAPITRE V.

PROBABILITÉ DES ÉVÉNEMENTS FUTURS.

THÉORIE.

I. — Causes.

67. Définition des causes. Les circonstances qui concourent à la production d'un événement sont ou constantes, ou variables à chaque instant.

Les premières, qui s'appellent *chances*, peuvent être connues ou inconnues, elles sont susceptibles d'une évaluation exacte ou approchée.

Les secondes ne peuvent pas s'évaluer.

Ces deux espèces de circonstances contribuent toutes deux à la production de l'événement et en constituent les vraies causes.

Mais dans le calcul des probabilités on appelle *causes* les circonstances de la première espèce, ou les chances, et *hasard* l'ensemble des circonstances variables qu'il est impossible d'évaluer.

Si les chances sont connues, la probabilité de l'événement sera connue, et l'on dit que sa cause est certaine.

Si un événement peut être attribué à plusieurs causes, sans qu'on sache à laquelle il est dû, on dit que sa cause est incertaine, et les diverses causes auxquelles il peut être attribué seront plus ou moins probables, selon qu'elles consisteront en plus ou moins de chances favorables.

Si les chances sont inconnues, et qu'on puisse faire sur leur valeur un certain nombre d'hypothèses également admissibles, mais dont une seule est nécessairement vraie, ces hypothèses pourront être regardées comme des causes plus ou moins probables, et l'on devra regarder comme vraie celle qui a pour elle la plus grande probabilité.

Les causes ou les hypothèses peuvent être également possibles, ou avoir des possibilités diverses.

Soit x la probabilité d'un événement simple; $y = f(x)$ la probabilité d'un événement composé E, dépendant de cet événement simple; on dit que x est la cause de E, et que la probabilité de E, due à cette cause, est y.

Si x est connu, on dit que la cause de E est certaine.

Si x est inconnu, et que l'on sache seulement qu'il doit avoir l'une des valeurs $a, b \dots i$, chacune de ces valeurs pourra être regardée comme une cause incertaine de E, et ces causes auront en général des probabilités diverses.

La probabilité de chaque hypothèse, ou cause, est égale au nombre des chances favorables à cette hypothèse, divisé par le nombre total des chances.

Exemple. Si l'on extrait une boule blanche d'une urne qui contient des boules blanches ou noires, au nombre de 8, on pourra faire les hypothèses suivantes :

8 bl. 0 n.; 7 bl. 1 n.; 6 bl. 2 n.; 5 bl. 3 n.;
4 bl. 4 n.; 3 bl. 5 n.; 2 bl. 6 n.; 1 bl. 7 n.

Les causes de l'extraction d'une boule blanche consistent dans les huit hypothèses

$$8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \text{ bl.}$$

auxquelles répondent les probabilités propres :

$$\frac{8}{8}, \frac{7}{8}, \frac{6}{8}, \frac{5}{8}, \frac{4}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}.$$

Principes fondamentaux.

68. 1° Les probabilités des hypothèses ou des causes sont proportionnelles au nombre des chances favorables propres à ces hypothèses.

2° La valeur la plus probable de la cause inconnue d'un événement E est celle qui rend la probabilité $y = f(x)$ de cet événement un maximum.

3° Soit v la probabilité d'un événement E;
V celle d'un événement composé EF;
P la probabilité que E ayant eu lieu, F aura lieu aussi;

La probabilité V sera évidemment donnée par

$$V = Pv,$$

d'où

$$P = \frac{V}{v} \cdot \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

Ces trois principes constituent le fondement de la théorie de la probabilité des causes et des événements futurs, conclue de l'observation des événements passés.

69. Premier théorème (de Bayes). *La probabilité d'un événement* E, *en vertu de la cause* c_i (*i pouvant prendre les valeurs* 1, 2, ... n), *étant* p_i, *la probabilité que la cause* c_i *aura agi dans la production de cet événement sera*

$$P_i = \frac{p_i}{\overset{n}{\underset{1}{S}} p_i} \cdot \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

Première démonstration. Soit a_i le nombre des chances favorables à E, constituant la cause c_i, μ le nombre de toutes les chances également possibles ; la probabilité propre à c_i sera

$$p_i = \frac{a_i}{\mu}.$$

En vertu du principe 1, on a :

$$P_1 : P_2 : \dots : P_i : \dots : P_n = a_1 : a_2 : \dots : a_i : \dots : a_n;$$

donc, à cause de $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$:

$$P_i : 1 = a_i : a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_i}{\mu} : \frac{a_1}{\mu} + \frac{a_2}{\mu} + \dots + \frac{a_n}{\mu}$$
$$= p_i : p_1 + p_2 + \dots + p_n;$$

d'où
$$P_i = \frac{p_i}{\overset{n}{\underset{1}{S}} p_i}.$$

DEUXIÈME DÉMONSTRATION (de Laplace).

Soit E l'événement dû aux causes c_i $(i = 1, 2, \ldots n)$;

P_i la probabilité que c_i aura lieu quand E a eu lieu;

V la probabilité de l'événement composé Ec_i;

v la probabilité de E;

on a, en vertu du principe 5 :
$$P_i = \frac{V}{v}.$$

Les causes étant également possibles, la probabilité de c_i est $\frac{1}{n}$; et si nous appelons p_i la probabilité de E quand c_i a lieu, nous aurons pour la probabilité de l'événement composé Ec_i
$$V = \frac{1}{n} p_i.$$

Comme l'événement E ne peut arriver que par l'une des causes $c_1, c_2 \ldots c_n$, il s'ensuit que sa probabilité sera égale à la somme des probabilités de $Ec_1, Ec_2 \ldots Ec_n$; donc :
$$V = \frac{1}{n} p_1 + \frac{1}{n} p_2 + \cdots + \frac{1}{n} p_n = \frac{1}{n} \overset{n}{\underset{1}{S}} p_i;$$
et par suite
$$P_i = \frac{V}{v} = \frac{p_i}{\overset{n}{\underset{1}{S}} p_i}.$$

Donc la probabilité d'une des causes est égale à la probabilité de l'événement qui est due à cette cause, divisée par la somme de toutes les probabilités semblables.

70. REMARQUE I. La probabilité de l'événement E due indifféremment à l'une des causes $c_a \ldots c_i \ldots c_b$ étant représentée par P, on aura
$$P = P_a + \cdots + P_i + \cdots + P_b = \overset{b}{\underset{a}{S}} P_i = \frac{\overset{b}{\underset{a}{S}} p_i}{\overset{n}{\underset{1}{S}} p_i}. \quad \ldots \quad (3)$$

REMARQUE II. La possibilité de la plupart des événements simples est inconnue, considérée *à priori;* elle nous paraît également susceptible de toutes les valeurs possibles, depuis 0 jusqu'à 1.

Soit x cette possibilité; y la probabilité d'un événement composé A : on aura $y = fx$, et x pourra être considéré comme la cause de A, donc y est la probabilité quand x est certain, si donc P_i est la probabilité de x, on aura
$$P_i = \frac{y}{\overset{1}{\underset{0}{\Sigma}} y} = \frac{fx}{\overset{1}{\underset{0}{S}} fx} = \frac{fxdx}{dx \overset{1}{\underset{0}{S}} fx};$$
mais en vertu de l'identité suivante, dans laquelle $b = a + nda$:
$$\int_0^b fxdx = dx \{fa + f(a + da) + \cdots + f(a + n - 1da)\}$$
on peut écrire $\int_0^1 fxdx = dx \overset{1}{\underset{0}{S}} fx$; et par suite on a
$$P_i = \frac{fxdx}{\int_0^1 fxdx} = \frac{ydx}{\int_0^1 ydx}. \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

La probabilité P que x est compris entre a et b sera donc
$$P = \frac{\int_a^b ydx}{\int_0^1 ydx}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

REMARQUE III. Soit $u = f(x, y)$ la probabilité d'un événement E composé d'événements simples de deux espèces différentes, dont les probabilités sont x et y; en regardant x et y comme les causes de E, la probabilité de ces causes simultanées sera
$$P_i = \frac{u}{\overset{1}{\underset{0}{S}}\overset{1}{\underset{0}{S}} u} = \frac{udxdy}{dxdy \overset{1}{\underset{0}{S}} u \overset{1}{\underset{0}{S}} u} = \frac{udxdy}{\int_0^1 \int_0^1 udxdy};$$
et la probabilité que x est compris entre a et b, en même temps que y est compris entre α et β, sera
$$P = \frac{\int_\alpha^\beta dy \int_a^b udx}{\int_0^1 \int_0^1 udxdy}.$$

En général, si un événement E, dont la probabilité est

$$u = f(x, y, \dots w)$$

est dû à des événements simples dont les probabilités sont désignées par $x, y \dots w$, la probabilité que les causes inconnues sont comprises entre les limites

$$x = \left\{ \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix} \right.\ y = \left\{ \begin{smallmatrix} \beta \\ \alpha \end{smallmatrix} \right. \dots w = \left\{ \begin{smallmatrix} \delta \\ \gamma \end{smallmatrix} \right.,$$

sera

$$P = \frac{\int_\alpha^b dx \int_\alpha^\beta dy \dots \int_\gamma^\delta u dw}{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 u dx dy \dots dw}.$$

Remarque IV. Nous avons supposé jusqu'à présent que toutes les causes c_i étaient également possibles. Supposons maintenant qu'il n'en soit plus ainsi, et appelons q_i la probabilité de c_i avant l'observation de E; p_i désignant toujours la probabilité de l'événement E en vertu de la cause c_i considérée comme certaine, on aura, après l'observation de l'événement E, pour la probabilité due au concours des probabilités indépendantes q_i et p_i :

$$p'_i = q_i p_i;$$

et pour la probabilité P'_i que la cause c_i a agi pour produire E :

$$P'_i = \frac{p'_i}{\overset{n}{\underset{1}{S}} p'_i} = \frac{q_i p_i}{\overset{n}{\underset{1}{S}} q_i p_i}.$$

De même si $z = \varphi x$ est la probabilité de x avant l'observation de l'événement composé E, et $y = fx$ la probabilité de cet événement après l'observation, la probabilité que l'inconnue x est comprise entre a et b sera

$$P = \frac{\int_a^b yz dx}{\int_0^1 yz dx}.$$

71. Deuxième théorème (de Laplace). *La probabilité que la possibilité des événements simples est comprise entre des limites*

qui se resserrent de plus en plus, approche sans cesse de l'unité à mesure que le nombre des événements augmente; de manière que, dans la supposition d'un nombre infini d'événements simples, ces deux limites venant à se réunir, et la probabilité se changeant en certitude, la véritable possibilité des événements simples est exactement égale à celle qui rend le résultat observé le plus probable.

Démonstration. Soit $y = (fx)^\mu$ la probabilité d'un événement E, μ étant très-grand, et x la probabilité simple inconnue; soit m la valeur de x qui rend y maximum, c'est-à-dire celle qu'on déduit de $\frac{dy}{dx} = 0$. Nommons y_m ce maximum et posons

$$y = y_m e^{-t^2},$$

d'où

$$t = \sqrt{\mathrm{l}.\, y_m - \mathrm{l}.\, y}.$$

Supposons que x diffère peu de m entre les limites α et β, et soit

$$\gamma = \sqrt{\mathrm{l}.\, y_m - \mathrm{l}.\, y_\beta}, \quad -\gamma' = \sqrt{\mathrm{l}.\, y_m - \mathrm{l}.\, y_\alpha},$$

on aura approximativement

$$\int_\alpha^\beta y dx = y_m u_m \int_{-\gamma'}^{\gamma} e^{-t^2} dt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(A)}$$

formule dans laquelle on a posé

$$u = \frac{x-m}{\sqrt{\mathrm{l}.\, y_m - \mathrm{l}.\, y}}, \quad u_m = \left(\frac{x-m}{\sqrt{\mathrm{l}.\, y_m - \mathrm{l}.\, y}} \right)_{x=m}.$$

Soient ensuite $x = \left\{ \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix} \right.$ les valeurs de x qui rendent y nul, on aura (*)

$$\int_a^b y dx = y_m u_m \sqrt{\pi}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(B)}$$

Cela posé, la probabilité P que x est compris entre $m - \theta$ et $m + \theta$ sera :

$$P = \frac{\int_{m-\theta}^{m+\theta} y dx}{\int_0^1 y dx} = \frac{N}{D}.$$

(*) Pour les formules (A) et (B) voir la note II à la fin du volume.

Or, si θ est très-petit, et que y, ce qui arrive presque toujours, devienne nul aux deux limites 0 et 1, on aura, par la formule (A) :

$$\mathrm{N} = y_m u_m \int_{-\gamma'}^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

en faisant

$$\gamma = \sqrt{\mathrm{l}.\, y_m - \mathrm{l}.\, y_{m+\theta}} \quad \text{et} \quad \gamma' = \sqrt{\mathrm{l}.\, y_m - \mathrm{l}.\, y_{m-\theta}};$$

et par la formule (B) :

$$\mathrm{D} = y_m u_m \sqrt{\pi};$$

par conséquent

$$\mathrm{P} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\gamma'}^{\gamma} e^{-t^2} dt.$$

Or, puisque

$$y = (fx)^{\mu},$$

d'où

$$\mathrm{l}.\, y = \mu\, \mathrm{l}.\, fx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

on aura :

$$\mathrm{l}.\, y_{m-\theta} = \mu\, \mathrm{l}.\, f(m-\theta) = \mu\, \mathrm{l}.\, fm - \mu\theta \frac{d\,\mathrm{l}.\, fm}{dm} + \mu \frac{\theta^2}{1.2} \frac{d^2\,\mathrm{l}.\, fm}{dm^2} - \cdots$$

mais en vertu de (1) :

$$\mathrm{l}.\, y_m = \mu\, \mathrm{l}.\, fm.$$

En outre, comme

$$\frac{d\,\mathrm{l}.\, y}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y},$$

et que, pour $x = m$, $\frac{dy}{dx} = 0$, on aura :

$$\frac{d\,\mathrm{l}.\, fm}{dm} = 0.$$

Enfin, puisque

$$\frac{d^2\,\mathrm{l}.\, fx}{dx^2} = \frac{d^2 fx}{fx dx^2} - \left(\frac{dfx}{fx dx}\right)^2$$

et que, pour $x = m$, $\frac{dfx}{dm} = 0$, on aura

$$\frac{d^2\,\mathrm{l}.\, fm}{dm^2} = \left(\frac{d^2 fx}{fx dx^2}\right)_{x=m} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{d^2 y}{y dx^2}\right)_{x=m}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de $\mathrm{l}.\, y_{m-\theta}$, elle devient :

$$\mathrm{l}.\, y_{m-\theta} = \mathrm{l}.\, y_m + \frac{\mu\theta^2}{2} \left(\frac{d^2 fx}{fx dx^2}\right)_m - \text{etc.}$$

De même

$$\mathrm{l}.\, y_{m+\theta} = \mathrm{l}.\, y_m + \frac{\mu\theta^2}{2} \left(\frac{d^2 fx}{fx dx^2}\right)_m + \text{etc.}$$

D'où l'on tire, en négligeant les termes en θ^3, etc. :

$$\mathrm{l}.\, y_m - \mathrm{l}.\, y_{m+\theta} = \mathrm{l}.\, y_m - \mathrm{l}.\, y_{m-\theta} = -\frac{\mu\theta^2}{2} \left(\frac{d^2 fx}{fx dx^2}\right)_m = -\mu\theta^2 \left(\frac{1}{\mu} \frac{d^2 y}{2y dx^2}\right)_m = \gamma^2 = \gamma'^2.$$

L'expression de la probabilité P deviendra donc :

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt,$$

en posant

$$\gamma = \theta \sqrt{\mu}. k,$$

d'où

$$\theta = \frac{\gamma}{k\sqrt{\mu}},$$

et

$$k = \sqrt{-\left(\frac{d^2 fx}{2fx dx^2}\right)_m} = \sqrt{-\frac{1}{\mu} \left(\frac{d^2 y}{2y dx^2}\right)_m},$$

P sera la probabilité que x est compris entre

$$m \pm \theta = m \pm \frac{\gamma}{k\sqrt{\mu}};$$

et l'on voit que ces limites se resserrent à mesure que μ croît. De plus P tend vers l'unité à mesure que γ augmente; et si γ est suffisamment grand, mais fini, on aura

$$\mathrm{P} = 1, \quad \theta = 0, \quad \text{et} \quad x = m,$$

valeur la plus probable.

72. Remarque I. *Règle pour juger si la cause* x *est indiquée avec une grande probabilité.*

Si nous développons l'expression de P en série, nous aurons

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \frac{e^{-\gamma^2}}{2\gamma\sqrt{\pi}} (1 - \ldots).$$

Or nous avons posé

$$\gamma^2 = -\theta^2 \left(\frac{d^2y}{2ydx^2}\right)_m ;$$

donc

$$P = 1 - \frac{e^{\theta^2\left(\frac{d^2y}{ydx^2}\right)_m}}{\theta\sqrt{\pi}\sqrt{-\left(\frac{d^2y}{ydx^2}\right)_m}} + \cdots = 1 - \frac{e^{\theta^2\left(\frac{d^2y}{ydx^2}\right)_m}}{\sqrt{\pi}\sqrt{-\theta^2\left(\frac{d^2y}{ydx^2}\right)_m}} + \cdots;$$

P sera donc fort grand si $-\theta^2\left(\frac{d^2y}{ydx^2}\right)_m$ est un peu considérable, onze ou douze, par exemple.

73. Remarque II. Il est maintenant facile de démontrer le théorème inverse de Bernouilli.

Soient m_1, m_2 les nombres de fois que les événements contraires A, B se répètent en un très-grand nombre s d'épreuves; x_1 la probabilité inconnue de A.

Nous avons trouvé

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}dt$$

pour la probabilité que x_1 est compris entre

$$m \pm \frac{\gamma}{\sqrt{\mu}\cdot k}.$$

Dans le cas actuel nous aurons

$$y = x_1^{m_1}(1-x_1)^{m_2} = \left(x_1(1-x_1)^{\frac{m_2}{m_1}}\right)^{m_1},$$

et par suite

$$\mu = m_1.$$

De plus :

$$\mathrm{l}.\, y = m_1\, \mathrm{l}.\, x_1 + m_2\, \mathrm{l}.\,(1-x_1),$$

d'où l'on tire :

$$\frac{d\,\mathrm{l}.\,y}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx_1} = \frac{m_1}{x_1} - \frac{m_2}{1-x_1} = \frac{m_1 - (m_1+m_2)x_1}{x_1(1-x_1)}.$$

La valeur de x_1 qui répond au maximum de y est donc

$$m = \frac{m_1}{m_1+m_2} = \frac{m_1}{s}.$$

Dérivant de nouveau :

$$\frac{-d^2\,\mathrm{l}.\,y}{dx^2} = \frac{m_1}{x_1^2} + \frac{m_2}{(1-x_1)^2};$$

d'où

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\mathrm{l}.\,y}{dx^2}\right)_m = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{ydx^2}\right)_m = \frac{1}{2}\left\{\frac{m_1}{\left(\frac{m_1}{s}\right)^2} + \frac{m_2}{\left(1-\frac{m_1}{s}\right)^2}\right\} = \frac{s^3}{2m_1m_2}.$$

Or nous avions posé

$$k = \sqrt{-\left(\frac{d^2y}{ydx^2}\right)_m} = \sqrt{\frac{1}{m_1}\frac{s^3}{2m_1(s-m)_1}};$$

par suite P est la probabilité que x_1 est compris entre

$$m \pm \frac{\gamma}{\sqrt{m_1}.k} = \frac{m_1}{s} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{m_1}\sqrt{\frac{1}{m_1}\cdot\frac{s_3}{2m_1(s-m_1)}}} = \frac{m_1}{s} \pm \gamma\sqrt{\frac{2m_1(s-m_1)}{s^3}}.$$

II. Événements futurs.

74. Troisième théorème. *La probabilité Π_i de l'arrivée d'un événement futur* F, *en vertu de la cause* c_i *d'un événement observé* E, *est égale au produit de la probabilité* P_i *de la cause* c_i *par la probabilité* ϖ_i *que cette cause donne à l'événement.*

Démonstration. En effet Π_i est la probabilité de l'événement composé qui résulte du concours de l'existence de la cause c_i avec l'arrivée de l'événement F, la cause c_i étant supposée exister. On a par suite

$$\Pi_i = P_i\varpi_i = \frac{\varpi_i p_i}{\overset{n}{\underset{1}{S}} p_i}.$$

Remarque I. Si nous faisons $p_i = y = fx$, x étant la cause, p_i étant la probabilité de E quand x est certain, et de même $\varpi_i = z = \psi x$, probabilité de F en vertu de x, nous aurons

$$\Pi_i = \frac{yz}{\sum_0^1 y} = \frac{yzdx}{\int_0^1 ydx}.$$

La probabilité Π que l'événement F arrivera en vertu des valeurs de x comprises entre a et b sera

$$\Pi = \frac{\int_a^b yzdx}{\int_0^1 ydx}.$$

Remarque II. Si les causes c_i étaient inégalement possibles avant l'observation de E, et que nous désignions par q_i la possibilité de c_i, nous aurions

$$\Pi'_i = P'_i \varpi_i = \frac{\varpi_i q_i p_i}{\sum_1^n q_i p_i}.$$

Remarque III. La probabilité que l'événement F arrivera en vertu de l'une quelconque des causes $c_1, c_2 \dots c_n$ sera

$$\Pi' = \Pi_1 + \dots + \Pi_n = \frac{\sum_1^n \varpi_i p_i}{\sum_1^n p_i}.$$

Remarque générale.

Les problèmes de la théorie des hasards sont de trois espèces :

1° *L'événement est incertain, les causes ou les probabilités simples sont connues. On demande alors la probabilité de l'événement incertain.*

Exemple. Une urne renferme des boules blanches et noires dans le rapport donné de p à q; on demande la probabilité de tirer une boule blanche.

La cause $\frac{p}{p+q}$ est certaine ; l'événement est incertain.

2° *L'événement est certain; la cause ou probabilité simple est incertaine. On demande la probabilité de chaque supposition que l'on peut faire sur la valeur de la cause ou probabilité simple inconnue.*

Exemple. Une urne renferme des boules blanches et noires dans un rapport inconnu; on en tire une blanche : quelle est la probabilité de la supposition que le rapport est égal à $p : q$?

L'événement est certain; sa cause $\frac{p}{p+q}$ est incertaine.

3° *L'événement passé est certain; la cause est incertaine, de même que l'événement futur. On demande la probabilité de cet événement.*

Exemple. Une urne renferme des boules blanches et noires dans un rapport inconnu; on en tire $p+q$ boules, dont p blanches et q noires; on demande quelle est la probabilité de tirer une nouvelle boule blanche.

Applications.

75. Premier exemple. Une urne contient des boules blanches et noires, au nombre de r; on en tire une blanche; quelle est la probabilité qu'elle contient n boules blanches?

Solution. Les diverses hypothèses ou causes de l'extraction d'une boule blanche sont :

1 blanche,	$r-1$ noires;	cause c_1
2 blanches,	$r-2$ noires;	» c_2
. . . . .	. . . . .	. . . .
r blanches,	0 noire;	cause c_r.

Les probabilités de l'extraction d'une blanche, dues à ces différentes causes, sont

$$p_1 = \frac{1}{r}, \quad p_2 = \frac{2}{r}, \dots \; p_r = \frac{r}{r}.$$

Mais la supposition que l'urne renferme n boules blanches donne

$$p_n = \frac{n}{r}.$$

On a donc, pour le théorème de Bayes :

$$P_n = \frac{\frac{n}{r}}{\frac{1}{r} + \frac{2}{r} + \dots + \frac{r}{r}} = \frac{2n}{r(r+1)}. \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Deuxième exemple. *Une urne renferme* r *boules, blanches et noires; on en extrait une blanche; on demande la probabilité qu'une seconde boule que l'on extrait sera blanche.*

Solution. Il y a deux cas à considérer, selon qu'on remet, ou non, la boule extraite dans l'urne.

Premier cas. L'événement E est l'extraction d'une boule blanche, l'événement F aussi. Si l'urne contenait n boules blanches, les probabilités de E et de F seraient

$$p_n = \frac{n}{r}, \quad \varpi_n = \frac{n}{r};$$

on aura donc

$$\Pi = \frac{\varpi_1 p_1 + \cdots + \varpi_r p_r}{p_1 + \cdots + p_r} = \frac{\dfrac{1^2+2^2+\cdots+r^2}{r^2}}{\dfrac{1}{2}(r+1)} = \frac{\dfrac{r(r+1)(2r+1)}{1.2.3r^2}}{\dfrac{1}{2}(r+1)} = \frac{2r+1}{3r} = \frac{2+\dfrac{1}{r}}{3}.$$

Cette probabilité converge donc vers $\frac{2}{3}$ à mesure que r augmente :

En effet, si l'on suppose le nombre des boules infini, et qu'on désigne par x la probabilité d'extraire une boule blanche, x pouvant varier depuis 0 jusqu'à 1, on aura

$$\Pi = \frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 x dx} = \frac{2}{3}.$$

Deuxième cas. Si la boule extraite n'a pas été remise dans l'urne, on a

$$\varpi_n = \frac{n-1}{r-1}; \quad p_n = \frac{n}{r};$$

donc

$$\Pi = \frac{\dfrac{1.2+2.3+\cdots+(r-1)r}{(r-1)r}}{\dfrac{1+2+\cdots+r}{r}} = \frac{\dfrac{(r-1)r(r+1).1.2}{1.2.3(r-1)r}}{\dfrac{1}{2}(r+1)} = \frac{2}{3}.$$

Troisième exemple. *Le nombre de boules contenues dans une urne ne peut excéder trois; on a extrait* x *boules blanches en* n *tirages, en remettant dans l'urne la boule extraite; on demande la probabilité de l'extraction d'une nouvelle boule blanche.*

Solution. Les événements E et F sont l'extraction d'une boule blanche; x n'étant ni 0 ni n, on ne peut faire que les trois hypothèses :

1 blanche et 1 noire : cause c_1 des événements E et F,
2 blanches et 1 » : » c_2 » »
1 blanche et 2 noires : » c_3 » »

Les probabilités de E, dues à ces causes, sont :

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x} = \frac{1}{2^n}, \text{ probabilité due à } c_1;$$

$$p_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{n-x} = \frac{2^x}{3^n}, \quad » \quad » \quad c_2;$$

$$p_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{n-x} = \frac{2^{n-x}}{3^n}, \quad » \quad » \quad c_3.$$

Les probabilités de F, dues à ces trois causes, sont :

$$\varpi_1 = \frac{1}{2}, \text{ probabilité due à } c_1;$$

$$\varpi_2 = \frac{2}{3}, \quad » \quad » \quad c_2;$$

$$\varpi_3 = \frac{1}{3}, \quad » \quad » \quad c_3;$$

la probabilité de c_1 est donc

$$P_1 = \frac{\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{2^x}{3^n} + \dfrac{2^{n-x}}{3^n}} = \frac{3^n}{3^n + 2^{x+n} + 2^{2n-x}}.$$

On trouverait de même, pour celles de c_2 et de c_3 :

$$\mathrm{P}_2 = \frac{2^{n+x}}{3^n + 2^{n+x} + 2^{2n-x}}; \quad \mathrm{P}_3 = \frac{2^{2n-x}}{3^n + 2^{x+n} + 2^{2n+x}};$$

et par suite :

$$\Pi = \mathrm{P}_1\varpi_1 + \mathrm{P}_2\varpi_2 + \mathrm{P}_3\varpi_3 = \frac{\frac{1}{2}\cdot 3^n + \frac{2}{3}\cdot 2^{n+x} + \frac{1}{3}\cdot 2^{2n-x}}{3^n + 2^{x+n} + 2^{2n-x}}.$$

Quatrième exemple. *Une urne renferme une infinité de boules blanches et noires; on en a extrait une blanche au premier tirage : on demande la probabilité d'en amener ensuite* n *noires?*

En appelant x la probabilité de l'extraction d'une boule blanche; et $1-x$ celle de l'extraction d'une noire, on aura :

$$\mathrm{P} = \frac{\int_0^1 x(1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x\,dx} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Cinquième exemple. *Deux joueurs,* A *et* B, *dont les probabilités de gagner sont inconnues, jouent à cette condition que celui qui aura le premier gagné* n *parties obtiendra l'enjeu* a. *Ils sont forcés d'abandonner le jeu, lorsqu'il manque* b *parties à* A, *et* c *parties à* B, *pour gagner l'enjeu. Comment celui-ci doit-il se partager entre les deux joueurs?*

Soit x la probabilité qu'a A de gagner une partie;
» $1-x$ » » B » »

x pouvant varier entre 0 et 1.

La probabilité que A gagne $n-b$ parties, et B, $n-c$ parties, sur un nombre total $2n-b-c$, est

$$\mathrm{P} = \mathrm{G}\,.\,x^{n-b}(1-x)^{n-c},$$

et la probabilité d'une valeur x de la cause, en vertu de l'événement observé, sera (n° 70) :

$$\Pi = \frac{x^{n-b}(1-x)^{n-c}\,dx}{\int_0^1 x^{n-b}(1-x)^{n-c}\,dx}.$$

La somme S qui doit revenir à B, dans l'hypothèse de $x = x$, est (n° 59) :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{S} = a(1-x)^{b+c-1}\Big\{1 &+ \frac{x}{1-x}(b+c-1) + \frac{x^2}{(1-x)^2}\frac{(b+c-1)(b+c-2)}{1\,.\,2} + \dots \\ &+ \frac{x^{b-1}}{(1-x)^{b-1}}\frac{(b+c-1)\dots(c+1)}{1\,.\,2\dots(b-1)}\Big\}. \end{aligned}\right\}\cdot(a)$$

Donc, la somme qui doit lui revenir dans toutes les hypothèses possibles, depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, sera

$$\mathrm{S}' = \int_0^1 \Pi\,.\,\mathrm{S}.$$

$$= \frac{\int_0^1 x^{n-b}(1-x)^{n-1}\,dx\,\{(a)\}}{\int_0^1 x^{n-b}(1-x)^{n-c}\,dx}.$$

Effectuant les différentes intégrations indiquées dans cette expression, au moyen de la formule

$$\int_0^1 x^{n-b}(1-x)^{n-c}\,dx = \frac{1\,.\,2\dots(n-c)}{(n-b+1)\dots(2n-b-c+1)},$$

on trouvera,

$$\begin{aligned} \mathrm{S}' = \frac{a(n-c+1)-(n+b-1)}{(2n-b-c+2)\dots 2n}\Big\{ 1 &+ \frac{b+c-1}{2}\cdot\frac{n-b+1}{b+n-1} \\ &+ \frac{(b+c-1)(b+c-2)}{1\,.\,2}\cdot\frac{(n-b+1)(n-b+2)}{(n+b-1)(n+b-2)} + \dots \\ &+ \frac{(b+c-1)\dots(c+1)}{1\,.\,2\dots(b-1)}\cdot\frac{(n-b+1)\dots(n-1)}{(b+n-1)\dots(n+1)}\Big\}. \end{aligned}$$

Sixième exemple. *Deux urnes* A *et* B *contiennent, la première* p *boules blanches et* q *noires, la seconde* p' *blanches et* q' *noires. On extrait de l'une de ces urnes* (on ignore laquelle) m + n *boules, dont* m *blanches, et* n *noires : quelle est la probabilité que l'urne dont on a extrait ces boules est* A *ou* B?

La probabilité d'extraire m blanches et n noires, dans la première hypothèse, est

$$P = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{p^{ml-1}q^{nl-1}}{(p+q)^{m+nl-1}};$$

et dans la seconde hypothèse, cette probabilité est :

$$P' = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{p'^{ml-1}q'^{nl-1}}{(p'+q')^{m+nl-1}}.$$

La probabilité de la première hypothèse est donc :

$$\Pi = \frac{P}{P+P'} = \frac{\dfrac{p^{ml-1}q^{nl-1}}{(p+q)^{m+nl-1}}}{\dfrac{p^{ml-1}q^{nl-1}}{(p+q)^{m+nl-1}} + \dfrac{p'^{ml-1}q'^{nl-1}}{(p'+q')^{m+nl-1}}}.$$

De même on aurait pour la probabilité de la seconde hypothèse :

$$\Pi' = \frac{P'}{P+P'}.$$

CHAPITRE V.

PROBLÈMES SUR LES NAISSANCES.

76. Premier problème. *On a observé que, sur un grand nombre* p + q *d'enfants, il est né* p *garçons et* q *filles : on demande la probabilité* P *que sur* m + n *enfants qui doivent naître, il y aura* m *garçons et* n *filles.*

Solution. Soit x la probabilité de la naissance d'un garçon; $1-x$ d'une fille.

La probabilité que, sur $p+q$ enfants, il y aura p garçons et q filles, est (nº 20) :

$$\varpi_1 = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\,x^p(1-x)^q.$$

De même, la probabilité que, sur $m+n$ enfants, il y aura m garçons et n filles, est :

$$\varpi_2 = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,x^m(1-x)^n.$$

La probabilité cherchée sera donc

$$P = \frac{\int_0^1 \varpi_2\varpi_1 dx}{\int_0^1 \varpi_1 dx} = k\,\frac{\int_0^1 x^{p+m}(1-x)^{q+n}dx}{\int_0^1 x^p(1-x)^q dx},$$

en posant

$$k = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}.$$

Or

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{1.2\ldots p.1.2\ldots q}{1.2\ldots p(p+1)\ldots(p+q+1)}$$
$$= \frac{1.2\ldots q}{(p+1)\ldots(p+q+1)}.$$

De même

$$\int_0^1 x^{p+m}(1-x)^{q+n}dx = \frac{1.2 \ldots (q+n)}{(p+m+1)\ldots(p+q+m+n+1)};$$

donc

$$\mathrm{P} = k\,\frac{(q+1)\ldots(q+n)\,(p+1)\ldots(p+m)}{(p+q+2)\ldots(p+q+m+n+1)};$$

mais, p et q étant très-grands, nous pouvons écrire approximativement (*)

$$(q+1)\ldots(q+n) = \frac{1.2\ldots(q+n)}{1.2\ldots q} = \frac{(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}}}\,e^{-n};$$

$$(p+1)\ldots(p+m) = \frac{(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}}\,e^{-m};$$

$$(p+q+1)\ldots(p+q+m+n) = \frac{(p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}}\,e^{-(m+n)};$$

et

$$\frac{p+q+1}{p+q+m+n+1} = \frac{p+q}{p+q+m+n}.$$

En substituant ces valeurs approchées dans l'expression de P, nous aurons

$$\mathrm{P} = k\,\frac{(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}}(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}}(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}}\,p^{p+\frac{1}{2}}(p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{3}{2}}}. \quad . \quad . \quad (a)$$

Remarque. Si p et q sont très-grands, la vraie possibilité de la naissance d'un garçon sera $\frac{p}{p+q}$, et d'une fille $\frac{q}{p+q}$.

En effet, si μ et s sont petits relativement à p et à q, on a :

$$\mathrm{l}.\,(p+\mu)^{p+s} = (p+s)\,\mathrm{l}.\,(p+\mu) = (p+s)\left\{\mathrm{l}.\,p + \mathrm{l}.\left(1+\frac{\mu}{p}\right)\right\}$$

$$= (p+s)\left\{\mathrm{l}.\,p + \frac{\mu}{p} - \frac{\mu^2}{2p^2} + \cdots\right\}$$

$$= (p+s)\,\mathrm{l}.\,p + (p+s)\frac{\mu}{p} = (p+s)\,\mathrm{l}.\,p + \mu.$$

(*) Voir la note I, à la fin de l'ouvrage.

d'où

$$(p+s)^{p+s} = p^{p+s}.\,e^{\mu}.$$

D'après cela, si m et n sont petits relativement à p et q, on pourra écrire

$$(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}} = e^{n}\,p^{q+n+\frac{1}{2}}$$

$$(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}} = e^{m}\,p^{p+m+\frac{1}{2}}$$

$$(p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{1}{2}} = e^{m+n}(p+q)^{p+q+m+n+\frac{3}{2}},$$

et la formule (a) deviendra, par la substitution de ces valeurs :

$$\mathrm{P} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{p^m q^n}{(p+q)^{m+n}}.$$

Or cette probabilité est précisément celle qu'on obtiendrait si l'on supposait que la possibilité de la naissance d'un garçon est $\frac{p}{p+q}$, celle d'une fille $\frac{q}{p+q}$.

Il est donc naturel de conclure que ces possibilités sont à peu près dans le rapport de p à q, si ces nombres sont très-grands, et par suite que la vraie possibilité de la naissance d'un garçon est approximativement égale à $\frac{p}{p+q}$.

77. **Deuxième exemple.** *On observe constamment que, sur un très-grand nombre* p + q *de naissances, le nombre* p *des garçons est supérieur au nombre* q *des filles; chercher la probabilité que la possibilité de la naissance des garçons surpasse celle de la naissance des filles.*

Soit x la probabilité de la naissance d'un garçon; $1-x$, d'une fille.

Désignons par c le coefficient du terme $x^p(1-x)^q$ du binôme $(x+1-x)^{p+q}$; la probabilité que, sur $p+q$ naissances, p seront masculines, q féminines, est

$$cx^p(1-x)^q.$$

Posons $y = x^p(1-x)^q$, la probabilité d'une valeur de x sera (n° 70) :

$$\frac{cydx}{\int_0^1 cydx} = \frac{ydx}{\int_0^1 ydx}.$$

Et la probabilité que la valeur de x ne surpasse pas $\frac{1}{2}$ sera par suite

$$P = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} ydx}{\int_0^1 ydx}.$$

Nous aurons donc, pour la probabilité que x surpasse $\frac{1}{2}$, ou que x est $> 1 - n$:

$$Q = 1 - P = 1 - \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} ydx}{\int_0^1 ydx} = 1 - \frac{N}{D}.$$

78. *Calcul de* $N = \int_0^{1/2} ydx$, expression dans laquelle

$$y = x^p (1 - x)^q.$$

Désignons par y_0 et $y_{1/2}$ ce que devient y pour $x = 0$ et $x = {}^1/_2$:

$$y_0 = 0 \,.\, y_{1/2} = \frac{1}{2^{p+q}};$$

si nous posons $y = y_0 e^{-t}$, aux limites $\left\{{}_0^1\right.$ de x répondront celles $\left\{{}_0^\infty\right.$ de t; tandis qu'en posant $y = y_{1/2} e^{-t}$, aux limites $\left\{{}_{1/2}^1\right.$ de x répondront celles $\left\{{}_0^\infty\right.$ de t.

Calculons N au moyen de l'expression

$$N = \int_0^1 ydx - \int_{1/2}^1 ydx;$$

nous aurons, en remplaçant y par l'une ou l'autre des expressions précédentes :

$$1^o. \qquad \int_0^1 ydx = y_0 \int_0^\infty e^{-t} \frac{dx}{dt} dt;$$

$$2^o. \qquad \int_{1/2}^1 ydx = y_{1/2} \int_0^\infty e^{-t} \frac{dx}{dt} dt.$$

Cherchons les valeurs de $\frac{dx}{dt}$ qui entrent dans ces deux intégrales.

x étant une fonction de t, développons-la par la formule de Mac-Laurin :

$$x = f(t) = f(0) + f'(0)\,t + f''(0)\frac{1.2}{t^2} + \cdots$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 t + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 \frac{t^2}{1.2} + \cdots$$

1° Pour ce cas nous avons :

$$t = 1.\frac{y_0}{y};\quad dt = -\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{y\dfrac{dx}{dy}} = \frac{dx}{v},$$

en posant

$$v = -y\frac{dx}{dy};$$

donc

$$\frac{dx}{dt} = v;\quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{\dfrac{dx}{v}} = \frac{vdv}{dx},$$

et par suite :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = v_0;\quad \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 = \left(\frac{vdv}{dx}\right)_{x=0}.$$

2° Pour ce cas-ci :

$$y = y_{1/2}e^{-t};$$

d'où, en procédant comme plus haut :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_{1/2};\quad \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0} = \left(\frac{vdv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}}.$$

Par suite :

$$1^o \qquad x = v_0 t + \left(\frac{vdv}{dx}\right)_{x=0} \frac{t^2}{1.2} + \cdots$$

$$2^o \qquad x = v_{1/2} t + \left(\frac{vdv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} \frac{t^2}{1.2} + \cdots$$

d'où l'on déduit :

$$1^o \quad \frac{dx}{dt} = v_0 + \left(\frac{vdv}{dx}\right)_{x=0} t + \cdots = v_0\left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} t + \cdots\right\}.$$

$$2^o \quad \frac{dx}{dt} = v_{1/2} + \left(\frac{vdv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} t + \cdots = v_{1/2}\left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} t + \cdots\right\}.$$

Substituant ces valeurs dans les intégrales précédentes, nous aurons

$$\int_0^1 ydx = v_0 y_0 \left\{ \int_0^{\infty} e^{-t}dt + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} \int_0^{\infty} te^{-t}dt + \cdots \right\}$$

$$= v_0 y_0 \left\{ 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} + \cdots \right\},$$

puisque toutes les intégrales de la parenthèse ont pour valeur 1.

$$\int_{1/2}^1 ydx = v_{1/2} y_{1/2} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-t}dt + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} te^{-t}dt + \cdots \right\}$$

$$= v_{1/2} y_{1/2} \left\{ 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} + \cdots \right\};$$

et par conséquent

$$\mathrm{N} = v_0 y_0 \left\{ 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} + \cdots \right\} - v_{1/2} y_{1/2} \left\{ 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} + \cdots \right\}.$$

Déterminons les valeurs des expressions de v et $\frac{dv}{dx}$.

De $y = x^p(1-x)^q$ on tire

$$\frac{dy}{dx} = x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left[p-(p+q)x\right],$$

d'où

$$v = -\frac{ydx}{dy} = -\frac{x(1-x)}{p-(p+q)x}; \quad v_0 = 0; \quad v_{1/2} = -\frac{1}{2(p-q)};$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(2x-1)\left[p-(p+q)x\right] + (p+q)x(x-1)}{\left[p-(p+q)x\right]^2};$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = -\frac{1}{p}; \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)_{1/2} = -\frac{p+q}{(p-q)^2};$$

substituant ces valeurs dans l'expression de N, nous aurons :

$$\mathrm{N} = \frac{1}{2^{p+q+1}(p-q)}\left\{1 - \frac{p+q}{(p-q)^2}\right\}.$$

79. *Calcul de* $\mathrm{D} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

On sait que cette intégrale a pour valeur

$$\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

Mais nous allons la calculer par le procédé de Laplace.

Soit a la valeur de x qui rend y maximum ; nous aurons, en posant $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a = 0$:

$$p(1-a) - qa = 0;$$

d'où

$$a = \frac{p}{p+q}.$$

Et en appelant y_a le maximum de y :

$$y_a = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q.$$

Si nous posons $y = y_a \,.\, e^{-t^2}$, aux valeurs 0, a, 1 de x répondront celles $-\infty$, 0, ∞ de t ; et par suite nous aurons

$$\mathrm{D} = \int_0^1 ydx = y_a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\frac{dx}{dt}dt.$$

Faisons $x = a + vt$; t sera très-petit quand x différera peu de a ; v étant une fonction de x, si nous développons x par la formule de Lagrange, nous obtiendrons :

$$x = a + v_{x=a}\,.\,t + \left(\frac{d\,.\,v^2}{dx}\right)_{x=a} . \frac{t^2}{1\,.\,2} + \left(\frac{d^2.\,v^3}{dx^2}\right)_{x=a} . \frac{t^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = v_a + \left(\frac{d\,.\,v^2}{dx}\right)_a t + \left(\frac{d^2.\,v^3}{dx^2}\right)_a \frac{t^2}{1\,.\,2} + \cdots.$$

Substituant cette expression dans celle de D, on trouve :

$$\mathrm{D} = \int_0^1 ydx = y_a \left\{ v_a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt + \left(\frac{d\,.\,v^2}{dx}\right)_a \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}dt \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d^2.\,v^3}{dx^2}\right)_a \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}dt + \cdots \right\}.$$

Or on sait que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi};\quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\pi};\quad \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n+1}e^{-t^2}dt=0;$$

et par suite

$$D=y_a\sqrt{\pi}\left[v_a+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2.\,v^3}{dx^2}\right)_a+\cdots\right].$$

Mais nous avons posé

$$v=\frac{x-a}{t},\quad y=y_ae^{-t^2};$$

d'où

$$t=\sqrt{\mathrm{l}.\,y_a-\mathrm{l}.\,y},$$

et

$$v=\frac{x-a}{\sqrt{\mathrm{l}.\,y_a-\mathrm{l}.\,y}}.$$

Comme t s'évanouit pour $x=a$, nous pourrons poser

$$t^2 \text{ ou } \mathrm{l}.\,y_a-\mathrm{l}.\,y=(x-a)^2\left\{A+B(x-a)+C(x-a)^2+\cdots\right\};$$

d'où nous déduisons par des différentiations successives

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2\,\mathrm{l}.\,y}{dx^2}\right)_{x=a}=A;\ \left(-\frac{d^3\,\mathrm{l}.\,y}{1.2.3\,dx^3}\right)_{x=a}=B;\ \left(-\frac{d^4\,\mathrm{l}.\,y}{1..4\,dx^4}\right)_{x=a}=C;\ \text{etc.}$$

et, en outre,

$$v=\frac{1}{\left\{A+B(x-a)^2+\cdots\right\}^{1/2}};$$

d'où

$$v_a=\frac{1}{\sqrt{A}}=\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\mathrm{l}.\,y}{dx^2}\right)_a}}.$$

Or, $\mathrm{l}.\,y=p\,\mathrm{l}.\,x+q\,\mathrm{l}.\,(1-x)$; et par suite

$$-\frac{d^2\,\mathrm{l}.\,y}{dx^2}=\frac{p}{x^2}+\frac{q}{(1-x)^2}.$$

Faisant $x=a=\frac{p}{p+q}$, nous aurons :

$$-\left(\frac{d^2.\,y}{dx^2}\right)_a=\frac{(p+q)^3}{pq};$$

et

$$v_a=\frac{1}{\sqrt{A}}=\frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{(p+q)^3}}.$$

Il nous reste à chercher $\left(\frac{d^2.\,v^3}{dx^2}\right)_a$. Nous avons :

$$v^3=\left[A+B(x-a)+C(x-a)^2+\cdots\right]^{-3/2}$$
$$=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)+\cdots;$$

d'où

$$\frac{d^2.\,v^3}{dx^2}=2A_2+(x-a)(\cdots);$$

et

$$\left(\frac{d^2.\,v_3}{dx^2}\right)_a=2A_2.$$

A_2 est le coefficient de $(x-a)^2$, dans le développement de v^3, qui est :

$$\left[A+B(x-a)+C(x-a)^2+\cdots\right]^{-\frac{3}{2}}$$
$$=A^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}A^{-\frac{5}{2}}B(x-a)+\left[-\frac{3}{2}A^{-\frac{5}{2}}+\frac{3.5}{2.4}A^{-\frac{7}{2}}B^2\right](x-a)^2+\cdots$$

On a donc

$$A_2=\left[-\frac{3}{2}A^{-\frac{5}{2}}+\frac{3.5}{2.4}A^{-\frac{7}{2}}B^2\right]=-\frac{3}{2}\frac{C}{A^{\frac{5}{2}}}+\frac{3.5}{2.4}\frac{B^2}{A^{\frac{7}{2}}}.$$

Nous avons déjà trouvé $A=\frac{(p+q)^3}{2pq}$; nous obtiendrons de même :

$$B=-\left(\frac{d^3\,\mathrm{l}.\,y}{1.2.3\,dx^3}\right)_a=\left[\frac{-p}{3x^3}+\frac{q}{3(1-x)^3}\right]_a=\frac{(p+q)^4(p-q)}{3p^2q^2}.$$

$$C=-\left(\frac{d^4\,\mathrm{l}.\,y}{1..4\,dx^4}\right)_a=\left[\frac{-p}{4x^4}+\frac{q}{4(1-x)^4}\right]_a=\frac{(p+q)^5}{4p^3q^3}(p^2-pq+q^2).$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de A_2, on trouve, aprés réduction :

$$A_2 \text{ ou } \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 . v^5}{dx^2}\right)_a = \frac{\sqrt{2}}{6p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}(p+q)^{\frac{5}{2}}}(p^2 - 11pq + q^2).$$

Cette valeur, ainsi que celles

$$y_a = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p\left(\frac{q}{p+q}\right)^q, \quad \text{et} \quad v_a = \frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{(p+q)^5}},$$

étant remplacées dans l'expression trouvée

$$D = y_a\sqrt{\pi}\left[v_a + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 . v^5}{dx^2}\right)_a + \cdots\right]$$

nous donneront celle de D, que nous écrivons plus bas.

80. Substituant maintenant les valeurs que nous venons de trouver (nos 78 et 79) :

$$N = \int_0^{\frac{1}{2}} x^p(1-x)^q\,dx = \frac{1}{2^{p+q+1}}\left\{1 - \frac{p+q}{(p-q)^2}\right\}$$

$$D = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx = \frac{p^{p+\frac{1}{2}}q^{q+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}\left\{1 + \frac{(p+q)^2 - pq}{12pq(p+q)}\right\},$$

dans l'expression $Q = 1 - \frac{N}{D}$, et réduisant, nous obtiendrons :

$$Q = 1 - \frac{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{2^{p+q+\frac{3}{2}}p^{p+\frac{1}{2}}q^{q+\frac{1}{2}}(p-q)\sqrt{\pi}}\left\{1 - \frac{p+q}{(p-q)^2}\right\}\left\{1 + \frac{(p+q)^2 - pq}{12pq(p+q)}\right\}^{-1},$$

ou, approximativement, à cause de p et q très-grands :

$$Q = 1 - \frac{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{2^{p+q+\frac{3}{2}}p^{p+\frac{1}{2}}q^{q+\frac{1}{2}}(p+q)\sqrt{\pi}}\left\{1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} - \frac{(p+q)^2 - pq}{12pq(p+q)}\right\}.$$

Exemple. De 1745 à 1784 on a baptisé à Paris

$$p = 593586 \text{ garçons}; \qquad q = 577555 \text{ filles}.$$

Pour calculer la valeur numérique de Q, écrivons :

$$Q = 1 - \frac{1}{\mu}\left\{1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} - \frac{(p+q)^2 - pq}{12pq(p+q)}\right\},$$

en faisant

$$\frac{1}{\mu} = \frac{(p+q)^{3/2}}{2(p-q)\sqrt{2pq\pi}}\cdot\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^pq^q};$$

d'où

$$\lg\frac{1}{\mu} = \lg\frac{(p+q)^{3/2}}{2(p-q)\sqrt{2pq\pi}} + 0{,}43429448\,\mathrm{l}.\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^pq^q};$$

le dernier facteur peut se développer en une série très-convergente :

$$\mathrm{l}.\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^pq^q} = -p\,\mathrm{l}.\left(1 + \frac{p-q}{p+q}\right) - q\,\mathrm{l}.\left(1 - \frac{p-q}{p+q}\right)$$

$$= -(p+q)\left\{\frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^4}{3.4} + \frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^6}{5.6} + \cdots\right\}.$$

On trouvera par là

$$\lg\frac{1}{\mu} = 72{,}2511780,$$

et

$$Q = 1 - \frac{1}{\mu}(1 - 0{,}0050761 + \cdots) = 1 \text{ à peu près},$$

à cause de l'excessive petitesse du second terme.

81. Troisième problème. *On a observé un grand nombre de naissances* p + q *des deux sexes dans un lieu* A, p *masculines*, q *féminines; et l'on en a déduit le rapport* r *du nombre des naissances des garçons à celui des filles. Dans un lieu* B *on a observé de même les nombres* p', q', r'. *On trouve* r' > r; *déterminer la probabilité que la naissance d'un garçon est plus probable dans le lieu* B *que dans le lieu* A.

Solution. En adoptant les mêmes notations que plus haut, la probabilité d'une valeur de x sera

$$P_n = \frac{y\,dx}{\int_0^1 y\,dx} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

Posons

$$x = \frac{p}{p+q} + \theta,$$

$a = \frac{p}{p+q}$ étant la valeur de x qui répond au maximum de y. Aux limites $x = \left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ répondent les limites

$$\theta = \left\{\begin{matrix}\frac{p}{p+q}\\ -\frac{p}{p+q}\end{matrix}\right. ;$$

la probabilité d'une valeur de θ sera donc

$$P_n = \frac{\left(\frac{p}{p+q}+\theta\right)^p\left(\frac{q}{p+q}-\theta\right)^q d\theta}{\int_0^1 y\,dx} = \frac{N}{D}.$$

Calcul de N. On a :

$$\mathrm{l.}\left(\frac{p}{p+q}+\theta\right)^p\left(\frac{q}{p+q}-\theta\right)^q = \mathrm{l.}\frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}} + p\,\mathrm{l.}\left(1+\frac{p+q}{p}\theta\right)$$
$$+ q\,\mathrm{l.}\left(1-\frac{p+q}{q}\theta\right) = \mathrm{l.}\frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}} - p\frac{p+q}{p}\theta - p\frac{(p+q)^2\theta^2}{2p^2}$$
$$+ q\frac{p+q}{q}\theta - q\frac{(p+q)^2}{2p^2}\theta^2 = \mathrm{l.}\frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}} - \frac{(p+q)^3}{2p^q}\theta^2;$$

en s'arrêtant à la deuxième puissance de θ; et par suite :

$$\left(\frac{p}{p+q}+\theta\right)^p\left(\frac{q}{p+q}-\theta\right)^q = \frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}}\,e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\theta^2}.$$

Calcul de D. En reprenant la valeur trouvée dans le problème précédent (n° 80), et nous arrêtant au premier terme, nous aurons :

$$D = \int_0^1 y\,dx = \frac{p^pq^q\sqrt{\pi}}{(p+q)^{p+q}}\,\frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{(p+q)^3}}.$$

Substituant les valeurs de N et D dans l'expression de P_n, nous obtiendrons :

$$P_n = \frac{N}{D} = \frac{d\theta}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{(p+q)^3}{2pq}}\,e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\theta^2} \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

Nous trouverions de même, pour la probabilité d'une valeur θ' dans le lieu B, en posant $\alpha' = \frac{p'}{p'+q'} = \theta'$:

$$P'_n = \frac{d\theta'}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}}\,e^{-\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}\theta'^2} \; . \; . \; . \; . \quad (\beta')$$

La probabilité des valeurs simultanées θ et θ' sera donc :

$$P_nP'_n = \frac{d\theta\,d\theta'}{\pi}\sqrt{\frac{(p+q)^3(p'+q')^3}{4pqp'q'}}\,e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\theta^2-\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}\theta'^2}.$$

Posons $x' = x + t$; x' sera $> x$ pour t positif; et l'on aura

$$\frac{p'}{p'+q'} + \theta' = \frac{p}{p+q} + \theta + t;$$

nous avons à déterminer la probabilité que t est compris entre 0 et 1. Comme x' est indépendant de x, et par suite θ' de θ, la différentiation de l'égalité précédente donnera :

$$dt' = dt;$$

et en substituant dans l'expression de $P_nP'_n$ les valeurs que nous venons de trouver, nous obtiendrons

$$P_nP'_n = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{(p+q)^3(p'+q')^3}{4pqp'q'}}\,dt\,dt'\,e^{-(A\theta^2+2B(t-h)\theta+C(t-h)^2)},$$

expression dans laquelle

$$h = \frac{p'q-pq'}{(p+q)(p'+q')}; \quad A = \frac{(p+q)^3}{2pq} + \frac{(p'+q')^3}{2p'q'};$$
$$B = \frac{p'+q'}{2p'q'}; \quad C = \frac{(p'+q')^3}{2p'q'}.$$

Convertissant l'exposant en un carré, et posant

$$k^2 = \frac{(p+q)^3 (p'+q')^3}{2p'q'(p+q)^3 + 2pq(p'+q')^3},$$

on trouve

$$P_n P'_n = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(p+q)^3 (p'+q')^3}{4pqp'q'}}\, d\theta dt e^{-A\left[\theta + \frac{2pq}{(p+q)^3} k^2 (t-h)^2\right]} e^{-k^2(t-h)^2}.$$

Intégrant entre les limites

$$\theta = \begin{cases} \frac{q}{p+q} \\ -\frac{p}{p+q} \end{cases} \quad \text{et} \quad t = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases},$$

nous déterminerons la probabilité que x et t sont tous deux compris entre 0 et 1, ou, comme x est nécessairement compris entre ces limites, la probabilité que t y est compris, ou que x' est $> x$.

Nous aurons ainsi

$$P = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(p+q)^3 (p'+q')^3}{4pqp'q'}} \int_{-\frac{p}{p+q}}^{\frac{q}{p+q}} d\theta \int_0^1 dt\, e^{-A[\ ]^2} e^{-k^2(t-h)}.$$

Le facteur $e^{-A[\ ]^2}$ devenant très-petit pour les valeurs de θ, qui sont prises au delà des limites jusqu'à $\pm\infty$, on peut étendre les limites relatives à θ jusqu'à $\pm\infty$, et l'on aura ainsi, en posant $A[\ ]^2 = \tau^2$:

$$P = \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \int_0^1 e^{-k^2(t-h)^2} dt$$

$$= \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-k^2(t-h)^2} dt;$$

et comme $e^{-k^2(t-h)^2}$ est très-petit au delà des limites $t = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$, on peut également étendre celles-ci jusqu'à $\pm\infty$, ce qui donne :

$$P = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-k^2(t-h)^2} dt;$$

ou, en faisant $k(t-h) = u$:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-kh}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} - \int_{kh}^{\infty} \right\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{kh}^{\infty} e^{-u^2} du;$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{e^{-k^2h^2}}{2kh} \left(1 - \frac{1}{2k^2h^2} + \frac{1.3}{2^2k^4h^4} - \dots \right) \right\},$$

expression dans laquelle

$$\frac{1}{2k^2h^2} = \frac{p'q'(p+q)^3 + pq(p'+q')^3}{(p+q)(p'+q')(p'q-pq')^2}.$$

Exemple. A Paris on a :

$$p = 393386, \quad q = 377555; \quad r = \frac{p}{q} = \frac{25}{24},$$

à Londres :

$$p' = 737629, \quad q' = 648958; \quad r' = \frac{p'}{q'} = \frac{19}{18}.$$

La formule précédente donnera

$$P = 1 - \frac{1}{328269}.$$

Il y a donc 328268 à parier contre 1 qu'à Londres la probabilité de la naissance d'un garçon est plus grande qu'à Paris.

82. **Quatrième problème.** *Chercher la probabilité* P *que la possibilité* x *de la naissance d'un garçon est comprise entre les limites* $\frac{p}{p+q} \pm v_a z$, *z étant un petit nombre.*

Solution. En désignant par α et β ces limites, et par y la fonction précédente $y = x^p(1-x)^q$, la probabilité cherchée sera :

$$P = \frac{\int_\alpha^\beta y dx}{\int_0^1 y dx} = \frac{N}{D}.$$

Calcul de D. Nous avons vu (n° 79) que

$$\int_0^1 y dx = y_a v_a \sqrt{\pi},$$

en négligeant les puissances de

$$\frac{1}{p+q};\quad v_a = \frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{d^2 \mathrm{l}.y}{dx^2}\right)_a}} = \sqrt{\frac{2pq}{(p+q)^3}}.$$

Calcul de N. Si nous posons $x = a + v_a\theta$, aux limites données $x = \left\{\begin{matrix}\beta\\ \alpha\end{matrix}\right.$ répondront celles

$$\theta = \left\{\begin{matrix}\frac{\beta-a}{v_a}\\ \frac{\alpha-a}{v_a}\end{matrix}\right.,$$

que nous supposerons respectivement égales à $\pm z$; et en reprenant la valeur de x donnée précédemment (n° 79)

$$x \text{ ou } a + v_a\theta = a + v_a t + \frac{1}{2}\left(\frac{d.v^2}{dx}\right)_a t^2 + \cdots$$

nous en déduirons :

$$\theta = t + \frac{1}{v_a}\,\frac{1}{2}\left(\frac{d.v^2}{dx}\right)_a t^2,$$

$$t = \theta - \frac{1}{v_a}\,\frac{1}{2}\left(\frac{d.v^2}{dx}\right)_a \theta^2,$$

$$t^2 = \theta^2 - \frac{1}{v_a}\left(\frac{d.v^2}{dx}\right)_a \theta^3,$$

$$\mathrm{N} = \int_\alpha^\beta y\,dx = y_a v_a \int_{-z}^{z} e^{-\theta^2}\left[1 + \frac{1}{v_a}\left(\frac{d.v^2}{dx}\right)_a \theta^3\right]d\theta = 2y_a v_a \int_0^z e^{-\theta^2}d\theta,$$

d'où nous tirerons :

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\theta^2}d\theta.$$

Exemple d'après Poisson. $p + q = 9656135$, nombre des naissances en France pendant les dix années 1817-1826; $p = 4981566$, nombre des garçons. On aura

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\theta^2}d\theta,$$

probabilité que x est compris entre $0{,}5159 \pm 0{,}00023z$; si l'on prend $z = 3$, on trouve

P $= 0{,}999978$, probabilité que x est entre $0{,}5159 \pm 0{,}0007$.

83. Cinquième problème. *En supposant* θ *certain, trouver la probabilité* Π *que sur* n *naissances le nombre des garçons ne sera pas supérieur à* u. (Voir n° 81.)

Solution. Soit E l'événement dont il s'agit : cet événement pourra être amené en général en supposant que sur $n - u + k$ naissances, il y ait $n - u$ filles et k garçons, sans que le dernier né soit un garçon.

Comme les k garçons peuvent prendre alors chacune des $n - u + k - 1$ premières places, la probabilité de cet événement, pour une valeur déterminée de k, sera :

$$\frac{(n-u+k-1)(n-u+k-2)\ldots(n-u)}{1.2\ldots k}(1-x)^{n-u}x^k.$$

Mais l'événement E pouvant être amené par toutes les valeurs de k depuis 1 jusque u, la probabilité cherchée sera

$$\begin{aligned}\Pi &= \sum_1^u{}_k \frac{(n-u+k-1)(n-u+k-2)\ldots(n-u)}{1.2\ldots k}(1-x)^{n-u}x^k\\ &= q^{n-u}\left\{1 + (n-u)p + \frac{(n-u)(n-u+1)}{1.2}p^2 + \cdots\right.\\ &\quad\left. + \frac{(n-u)\ldots(n-1)}{1.2\ldots u}p^u\right\}, \qquad \text{(A)}\end{aligned}$$

en posant $x = p$ et $1 - x = q$.

Transformons le second membre en une intégrale définie.

Par des intégrations successives par parties, on obtient :

$$\int\frac{y^u dy}{(1+y)^{n+1}} = \frac{1}{n}\left\{-\frac{y^u}{(1+y)^n} - \frac{u}{n-1}\frac{y^{u-1}}{(1+y)^{n-1}} - \frac{u(u-1)}{(n-1)(n-2)}\frac{y^{u-2}}{(1+y)^{n-2}} + \cdots\right.$$
$$\left. + \frac{u(u-1)\ldots(u-l+1)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-l+1)}\int\frac{y^{u-l}dy}{(1+y)^{n-l+1}}\right\}.$$

Pour $l = u$, on a :

$$n\int\frac{y^u dy}{(1+y)^{n+1}} = c - \frac{y^u}{(1+y)^n} - \frac{u}{n-1}\frac{y^{u-1}}{(1+y)^{n-1}} - \frac{u(u-1)}{(n-1)(n-2)}\frac{y^{u-2}}{(1+y)^{n-2}} - \cdots$$
$$- \frac{u(u-1)\ldots 2.1}{(n-1)(n-2)\ldots(n-u)}\frac{1}{(1+y)^{n-u}}.$$

Et par suite

$$n\int_{\frac{p}{q}}^{\infty}\frac{y^u dy}{(1+y)^{n+1}}=q^{n-u}\Big[p^u+\frac{u}{n-1}p^{u-1}+\frac{u(u-1)}{(n-1)(n-2)}p^{u-2}+\cdots$$

$$+\frac{u(u-1)\ldots 2.1}{(n-1)(n-2)\ldots(n-u)}\Big];$$

$$n\int_0^{\infty}\frac{y^u dy}{(1+y)^{n-1}}=\frac{u(u-1)\ldots 2.1}{(n-1)(n-2)\ldots(n-u)}.$$

Or le quotient de ces deux expressions est égal à

$$q^{n-u}\Big[1+(n-u)p+\frac{(n-u)(n-u+1)}{1.2}p^2+\cdots+\frac{(n-u)\ldots(n-1)}{1.2\ldots u}p^u\Big],$$

c'est-à-dire à la valeur précédemment trouvée pour Π. Nous avons donc

$$\Pi=\frac{N}{D};\quad \text{et}\quad N=\int_{\frac{p}{q}}^{\infty}\frac{y^u dy}{(1+y)^{n+1}},\quad D=\int_0^{\infty}\frac{y^u dy}{(1+y)^{n+1}}.$$

Si nous posons $Y=\frac{y^u}{(1+y)^{n+1}}$, nous aurons :

$$N=\int_{\frac{p}{q}}^{\infty}Ydy;\qquad D=\int_0^{\infty}Ydy.$$

84. *Calcul de* D. Appelons a la valeur de y qui rend Y maximum; Y_a ce maximum; nous trouverons par $dY=0$:

$$a=\frac{u}{n+1-u};$$

et

$$Y_a=\frac{u^u(n+1-u)^{n+1-u}}{(n+1)^{n+1}};$$

et si nous faisons $Y=Y_a e^{-t^2}$, aux limites $y=\left\{\begin{matrix}\infty\\ a\\ 0\end{matrix}\right.$ répondront celles $t=\left\{\begin{matrix}+\infty\\ 0\\ -\infty\end{matrix}\right.$, et nous aurons par suite

$$\int_0^{\infty}Ydy=Y_a\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt\frac{dy}{dt}.$$

Puisque t devient nul pour $y=a$, il doit renfermer le facteur $y-a=y'$; et t^2 le facteur y'^2; nous pourrons donc poser

$$t^2=y'^2[A+By'+Cy'^2+\cdots]=l.Y_a-l.Y.$$

On trouvera

$$A=-\frac{1}{2}\left[\frac{d^2 l.Y}{dy^2}\right]_{y=a};\quad B=-\frac{1}{6}\left[\frac{d^3 l.Y}{dy^3}\right]_{y=a};\ \text{etc.}$$

et en substituant dans l'expression de t^2 :

$$t^2+\frac{1}{2}\left[\frac{d^2 l.Y}{dy^2}\right]_{y=a}y'^2+\frac{1}{6}\left[\frac{d^3 l.Y}{dy^3}\right]_{y=a}y'^3+\cdots=0.$$

Comme y' est nul pour $t=0$, on peut poser

$$y'=a't+a''t^2+\cdots,$$

et l'équation précédente deviendra :

$$t^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 l.Y}{dy^2}\right)_a a'^2\right]+t^3\left[\left(\frac{d^2 l.Y}{dy^2}\right)_a a'a''+\frac{1}{6}\left(\frac{d^3 l.Y}{dy^3}\right)_a a'^3\right]+\cdots=0;$$

égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de t :

$$1+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 l.Y}{dy^2}\right)_a a'^2=0;\qquad \left(\frac{d^2 l.Y}{dy^2}\right)_a a'a''+\frac{1}{6}\left(\frac{d^3 l.Y}{dy^3}\right)_a a'^3=0.$$

Si nous substituons dans ces équations les valeurs

$$a=\frac{u}{n+1-u};\quad l.Y=u\,l.y-(n+1)\,l.(1+y);$$

d'où

$$\left(\frac{d^2 l.Y}{dy^2}\right)_a=-\frac{(n+1-u)^3}{u(n+1)};\quad \left(\frac{d^3 l.Y}{dy^3}\right)_a=\frac{2(n+1-u)^4(n+1+u)}{u^2(n+1)^2},$$

ces équations donneront :

$$a'=\sqrt{\frac{2u(n+1)}{(n+1-u)^3}},\qquad a''=\frac{2(n+1-u)}{3(n+1-u)^2};$$

cela posé, si nous substituons dans D à $\frac{dy}{dt}$ sa valeur

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy'}{dt}=a'+2a''t+\cdots,$$

nous aurons

$$D=\int_0^{\infty}Y\,dy=Y_a\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\frac{dy'}{dt}\,dt$$

$$=Y_a\left[a'\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt+2a''\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}t\,dt+3a'''\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}t^2dt+\text{etc.}\right]$$

$$=Y_a\left[a'\sqrt{\pi}+\frac{1.3}{2^2}a'''\sqrt{\pi}+\text{etc.}\right],$$

à cause de

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}t^{2i+1}dt=0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}t^{2i}dt=\frac{1\,.\,3\,..\,(2i+1)}{2^i}\sqrt{\pi}.$$

Lorsque n, u, et $n-u$ sont très-grands, on a, à peu près :

$$D=Y_a\,.\,a'\sqrt{\pi}.$$

85. *Calcul de* $N=\int_{\frac{p}{q}}^{\infty}Y\,dy$.

Cherchons d'abord les limites de t, qui correspondent à celles de $y=\left\{{}^{\infty}_{\frac{p}{q}}\right.$, et appelons k^2 la valeur de t^2, répondant à $y=\frac{p}{q}$.

Comme $t^2=\text{l.}\,Y_a-\text{l.}\,Y$, et que

$$Y=\frac{y^u}{(1+y)^{n+1}},\qquad Y_a=\frac{u^u(n+1-u)^{n+1-u}}{(n+1)^{n+1}},$$

on aura

$$k^2=u\,\text{l.}\frac{u}{p(n+1)}+(n+1-u)\,\text{l.}\frac{n+1-u}{q(n+1)};\qquad (a)$$

d'où $t=\pm k$ pour $y=\frac{p}{q}$.

On devra prendre le signe + si $\frac{p}{q}>a$, et le signe − si $\frac{p}{q}<a$. Car $y=a$ donne $t=0$, et $y\gtrless a$ donnera $t\gtrless 0$; t sera donc positif ou négatif selon que y sera plus grand ou plus petit que a.

Premier cas : $\frac{p}{q}>a$. Nous aurons :

$$N=\int_{\frac{p}{q}}^{\infty}Y\,dy=Y_a\int_k^{\infty}e^{-t^2}dt\frac{dy'}{dt}=Y_a\int_k^{\infty}e^{-t^2}dt\,[a'+2a''t+\cdots]$$

$$=Y_a\left[a'\int_k^{\infty}e^{-t^2}dt+2a''\,.\,\frac{1}{2}e^{-k^2}\right]=Y_aa'\int_k^{\infty}e^{-t^2}dt+a''\,Y_ae^{-k^2}.$$

Par suite, en substituant à N et D leurs valeurs :

$$\Pi=\frac{N}{D}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_k^{\infty}e^{-t^2}dt+\frac{a''}{a'\sqrt{\pi}}e^{-k^2};$$

or on a :

$$\frac{a''}{a'}=\frac{\sqrt{2}\,(n+1+u)}{3\sqrt{u\,(n+1-u)\,(n+1)}}=\frac{(n+u)\sqrt{2}}{3\sqrt{nu\,(n-u)}}\ \text{à peu près};$$

d'où

$$\Pi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_k^{\infty}e^{-t^2}dt+\frac{(n+u)\sqrt{2}}{3\sqrt{nu\,(n-u)\,\pi}}e^{-k^2},\ \text{pour}\ \frac{p}{q}>a.\qquad (b)$$

Deuxième cas : $\frac{p}{q}<a$. Nous aurons dans ce cas

$$N=\int_{\frac{p}{q}}^{\infty}Y\,dy=Y_a\int_{-k}^{\infty}e^{-t^2}dt\,[a'+2a''t+\cdots]$$

$$=Y_a\,a'\int_{-k}^{\infty}e^{-t^2}dt+2Y_aa''\int_{-k}^{\infty}e^{-t^2}t\,dt$$

$$=-\,Y_aa'\int_k^{-\infty}e^{-t^2}dt+2Y_aa''\int_k^{-\infty}e^{-t^2}t\,dt$$

$$=Y_aa'\left[\int_{-\infty}^{\infty}-\int_k^{\infty}\right]+Y_aa''e^{-k^2}$$

$$=Y_aa'\sqrt{\pi}-Y_aa'\int_k^{\infty}e^{-t^2}dt+Y_aa''e^{-k^2};$$

substituant cette valeur, ainsi que celle de $D=Y\,a'\sqrt{\pi}$ dans l'expression de Π, on obtient :

$$\Pi=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_k^{\infty}e^{-t^2}dt+\frac{a''}{a'\sqrt{\pi}}e^{-k^2}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_k^{\infty}e^{-t^2}dt+\frac{(n+u)\sqrt{2}}{3\sqrt{nu\,(n-u)\,\pi}}e^{-k^2},\ \text{pour}\ \frac{p}{q}<a\qquad (c).$$

86. Sixième problème. *Trouver la probabilité* P′ *que sur* n=p+q *naissances, le nombre de garçons ne sera pas supérieur à* u.

Solution. Comme θ n'est pas certain, et que sa probabilité est (nº 82) :

$$P=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta^2}[1-\theta^5.0,00002],$$

la probabilité cherchée sera

$$P'=\Pi.P,$$

Π ayant la valeur déterminée dans le problème précédent.

Septième problème. *En supposant* θ *certain, chercher la probabilité* Π' *que sur un grand nombre* n *de garçons ne surpasse pas* $u=\frac{n}{2}$, *ou* $u=\frac{n-1}{2}$.

Solution. *Premier cas : n* pair.

Nous avons eu (nº 85) :

$$a=\frac{u}{n+1-u}=\frac{n}{n+2},\quad p>q,\quad \text{donc } \frac{p}{q}>a;$$

nous aurons donc à appliquer les formules (a) et (b) :

$$\Pi'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_k^{\infty} e^{-t^2}dt+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}}e^{-k^2}\quad .\ .\ .\ .\ (b')$$

$$k^2=\frac{n}{2}\,\mathrm{l}.\frac{n}{2p\,(n+1)}+\frac{n+2}{2}\,\mathrm{l}.\frac{n+2}{2q\,(n+1)}\cdot\ .\ (a')$$

Deuxième cas : n impair. Alors

$$u=\frac{n-1}{2},\quad p>q,\quad a=\frac{n-1}{n+5},$$

donc

$$\frac{p}{q}>a;$$

les mêmes formules donneront :

$$\Pi'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_k^{\infty} e^{-t^2}dt+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}}e^{-k^2}\quad .\ .\ .\ .\ .\ (b'')$$

$$k^2=\frac{n-1}{2}\,\mathrm{l}.\frac{n-1}{2p\,(n+1)}+\frac{n+5}{2}\,\mathrm{l}.\frac{n+1}{2q\,(n+1)}\cdot\ (a'')$$

87. Huitième problème. *Chercher la probabilité* P′ *que sur un grand nombre* n *de naissances le nombre des garçons ne surpassera pas celui des filles.*

Solution. θ n'étant pas certain, et sa probabilité étant P (nº 82), on aura

$$P'=P.\Pi'.$$

Premier exemple. Soit $n=12000$, nombre des naissances annuelles dans un département français d'une population moyenne;

$$p=0{,}5159+\theta.0{,}00025 \text{ (voir le nº 82)};$$
$$q=0{,}4841-\theta.0{,}00025$$

n étant pair, la formule (b') donnera

$$\Pi'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_k^{\infty} e^{-t^2}dt+\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\,e^{-k^2},$$

or

$$\int_k^{\infty} e^{-t^2}dt=\frac{e^{-k^2}}{2k}\left(1-\frac{1}{2k^2}+\frac{1.3}{2^2k^4}-\ ..\right)=e^{-k^2}(0{,}1805-\theta.0{,}00025),$$

si l'on remplace dans les facteurs algébriques k par sa valeur déduite de la formule (a'); on en tire en la développant et y remplaçant n, p, q par leurs valeurs

$$k^2=6{,}1028+\theta.\,0{,}1761+\theta^2.\,0{,}00127+\cdots$$

d'où

$$\frac{1}{2k}=0{,}2024-\theta.0{,}0829.$$

On aura par suite

$$\Pi'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-k^2}(0{,}2012-\theta.\,0{,}00025),$$

La valeur de P trouvée au nº 82 est

$$P=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-3}^{3} e^{-\theta^2}[1-\theta^5.\,0{,}00002]\,d\theta;$$

et par conséquent

$$P'=P\Pi'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-3}^{3} e^{-\theta^2}d\theta\,(1-\theta^5.0{,}00002)\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-k^2}(0{,}2012-\theta.0{,}0025)$$
$$=\frac{0.2012}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k^2+\theta^2)}d\theta,$$

car, $e^{-(k^2+\theta^2)}$ étant excessivement faible aux limites $\theta = \pm 5$, on peut étendre celles-ci à $\pm \infty$.

Si l'on pose

$$\theta = \frac{\theta'}{\sqrt{1,00127}} - \frac{0,1761}{2.1,00127},$$

on aura, à fort peu près

$$k^2 + \theta^2 = \theta'^2 + 6,0951,$$

et par suite

$$\mathrm{P}' = \frac{0,2014\, e^{-6,0951}}{\pi\sqrt{1,00127}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta'^2} d\theta'$$

$$= \frac{0,2014\, e^{-6,0951}}{\sqrt{\pi.1,00127}} = 0,000256 = \frac{1}{4000} \text{ environ.}$$

On peut donc parier 4000 contre 1 que le nombre des garçons surpassera celui des filles.

Deuxième exemple. *Trouver la probabilité* P′ *qu'à Paris, parmi les enfants naturels, le nombre des naissances annuelles des garçons n'excédera pas celui des filles.*

Les résultats de treize années (1815-1827) ont donné, pour le nombre des enfants naturels, 122404, et pour celui des garçons, 62259.

Le quatrième problème (n° 82) donnera

$$p = 0,50847 + \theta.0,002021$$
$$q = 0,49155 - \theta.0,002021.$$

Par suite, d'après la formule du n° 87 :

$$\mathrm{P}' = \mathrm{P}'\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-5}^{5} \Pi' e^{-\theta^2} (1 - \theta^3.0,000092)\, d\theta.$$

Soit $n = 10000$, nombre moyen des naissances annuelles illégitimes à Paris; nous aurons à appliquer les formules (a') et (b') du n° 85 :

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_k^{\infty} e^{-t^2} dt + \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\, e^{-k^2}$$

$$k^2 = \frac{n}{2}\, \mathrm{l}.\frac{n}{2p(n+1)} + \frac{n+2}{2}\, \mathrm{l}.\frac{n+2}{pq(n+1)}.$$

Pour faciliter les calculs, posons

$$0,00847 + \theta.0,002021 = \frac{1}{2}\alpha;$$

et nous aurons

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha, \quad q = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha;$$

d'où

$$k^2 = -\frac{n+1}{2}\, \mathrm{l}.(1-\alpha^2) + \frac{1}{2}\, \mathrm{l}.\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{n+1}{2}\alpha^2 + \alpha,$$

en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{n}$.

Si nous faisons

$$\frac{n+1}{2}\alpha^2 = \beta^2,$$

d'où

$$\beta = 0,1979 + \theta.0,2858,$$

nous trouverons :

$$k = \left(\frac{n+1}{2}\alpha^2 + \alpha\right)^{\frac{1}{2}} = \beta + \frac{1}{\sqrt{2n}} \text{ à peu près;}$$

et par suite

$$\int_k^{\infty} e^{-t^2} dt = \int_{\beta}^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{1}{\sqrt{2n}}\, e^{-\beta^2};$$

d'où

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta}^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\beta^2} + \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\, e^{-\beta^2 - \frac{2\beta}{\sqrt{2(n+1)}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta}^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{n\pi}} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} e^{-\beta^2 t^2} dt + \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{2n\pi}}, \text{ en changeant } t \text{ en } \beta t.$$

On aura donc

$$\mathrm{P}' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} e^{-\beta^2 t^2} dt + \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{2n\pi}}\right) e^{-\theta^2} (1 - \theta^3.0,000092)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2 t^2 - \theta^2} \beta\, d\theta\, dt + \frac{1}{\pi\sqrt{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2 - \theta^2} d\theta.$$

Or on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2 t^2-\theta^2}\beta d\theta = \frac{a\sqrt{\pi}}{(1+b^2t^2)^{3/2}}\, e^{-\frac{a^2t^2}{1+b^2t^2}}, \quad a = 1{,}1979; \quad b = 0{,}2858;$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2\theta^2} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+b^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

En posant

$$\frac{at}{\sqrt{1+b^2t^2}} = v, \qquad \frac{a}{\sqrt{1+b^2}} = c,$$

nous aurons

$$\int_{1}^{\infty} \frac{adt}{(1+b^2t^2)^{3/2}}\, e^{-\frac{a^2t^2}{1+b^2t^2}} = \int_{c}^{\frac{a}{b}} e^{-v^2}dv;$$

et comme $\frac{a}{b} > 4$, on peut étendre la limite supérieure jusqu'à ∞; de sorte que

$$P' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{c}^{\infty} e^{-v^2}dv + \frac{1}{\sqrt{2n\pi\,(1+b^2)}}.$$

Au moyen de la Table de Kramp, on trouvera :

$$P' = 0{,}0658 = \frac{1}{15} \text{ à peu près.}$$

Il n'y a donc pas tout à fait 15 à parier contre 1 qu'à Paris le nombre des naissances annuelles illégitimes des garçons excédera celui des filles.

Remarque. La probabilité que dans un intervalle de treize ans le nombre des naissances féminines illégitimes excédera au moins une fois celui des masculines est

$$Q = 1 - (1 - P')^{13} = 1 - (0{,}9562)^{13} = 0{,}424 = \frac{2}{5}.$$

88. Neuvième problème. Déterminer la probabilité P que la supériorité du nombre des naissances masculines sur les féminines se maintiendra pendant i années.

Solution. Soit p le nombre observé des naissances masculines; q celui des féminines; $2n$ celui des naissances annuelles.

x la probabilité de la naissance d'un garçon; $1 - x$, d'une fille; et soit, pour une valeur déterminée de x :

y' la probabilité de la naissance de p garçons et de q filles;

z la probabilité qu'après un an le nombre des naissances masculines surpassera celui des féminines;

z^i la probabilité que cette supériorité se maintiendra pendant i années.

La probabilité demandée sera, pour toutes les valeurs possibles de x :

$$P = \frac{\int_0^1 z^i y' dx}{\int_0^1 y' dx}.$$

Si nous appelons c le coefficient du terme $y = x^p(1-x)^q$ du développement de $(x + 1 - x)^{p+q}$, nous aurons $y' = cy$, et par suite

$$P = \frac{\int_0^1 z^i y dx}{\int_0^1 y dx}.$$

Pour déterminer z, nous n'aurons qu'à changer, dans la formule (A) du cinquième problème (n° 83) p en q, q en $p = x$, u en $n-1$, n en $2n$, ce qui donnera :

$$z = x^{n+1}\Big\{1 + (n+1)(1-x) + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}(1-x)^2 + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n-1)}{1.2\dots n-1}(1-x)^{n-1}\Big\},$$

ou bien (n° 83) :

$$z = \frac{\int_{\frac{1-x}{x}}^{\infty} \frac{u^{n-1}}{(1+u)^{2n+1}}du}{\int_0^{\infty} \frac{u^{n-1}}{(1+u)^{2n+1}}du}.$$

Si nous posons

$$u=\frac{1-s}{s};\quad \text{donc}\quad s=\frac{1}{1+u},$$

aux limites $0, \frac{1-x}{x}, \infty$ de u répondront celles 1, x et 0 de s ; de sorte que nous aurons

$$z=\frac{\int_0^x s^n(1-s)^{n-1}ds}{\int_0^1 s^n(1-s)^{n-1}ds}.$$

Dérivons, en observant que le dénominateur est constant; nous trouverons

$$\frac{dz}{dx}=\frac{x^{n-1}(1-x)^{n-1}}{\int_0^1 s^n(1-s)^{n-1}ds};\quad \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{-nx^{n-1}(1-x)^{n-1}+(n-1)x^n(1-x)^{n-2}}{\int_0^1 s^n(1-s)^{n-1}ds},$$

$$\frac{dz}{zdx}=\frac{x^{n-1}(1-x)^{n-1}}{\int_0^1 s^n(1-s)^{n-1}ds};\quad \frac{d^2z}{zdx^2}=\frac{dz}{zdx}\,\frac{n-(2n-1)x}{x(x-1)}.$$

Si nous posons $Y=z^iy=z^ix^p(1-x)^q$, l'expression de P sera

$$P=\frac{\int_0^1 Ydx}{\int_0^1 ydx}=\frac{N}{D}.$$

Appelons a' la valeur de x qui rend Y maximum; a celle qui rend y maximum; le deuxième problème (n° 77) donne :

$$\int_0^1 Ydx=Y_{a'}\sqrt{\pi}\,v_{a'};\quad \int_0^1 ydx=y_a\sqrt{\pi}\,v_a.$$

et, par conséquent

$$P=\frac{N}{D}=\frac{Y_{a'}v_{a'}}{y_a v_a}.$$

89. *Calcul de* N. Pour déterminer sa valeur, nous avons d'abord à chercher celles de a', $z_{a'}$, $v_{a'}$.

1°. *Calcul de* a'. De $\frac{dY}{dx}=0$ on tire, en changeant x en a' :

$$0=pz(1-a')+ia'(1-a')\frac{dz}{dx}-qa'z=\frac{p}{a'}+i\left(\frac{dz}{zdx}\right)_{a'}-\frac{q}{1-a'}$$
$$=\frac{p}{a'}+i\,\frac{a'^n(1-a')^{n-1}}{\int_0^{a'} s^n(1-s)^{n-1}ds}-\frac{q}{a'};$$

ce qui donne

$$a'=\frac{p}{p+q}+\frac{ia'^{n+1}(1-a')^n}{(p+q)\int_0^{a'} s^n(1-s)^{n-1}ds}.$$

Soit $\sigma=s^n(1-s)^{n-1}$, α la valeur de s qui rend σ maximum, σ_α ce maximum, α étant égal à $\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}$ à peu près, σ_α, et, à plus forte raison, σ est très-petit; on aura donc :

$$\int_0^{a'} s^n(1-s)^{n-1}ds=\int_0^1 s^n(1-s)^{n-1}ds=\sigma_\alpha\sqrt{\pi}\,v_\alpha.$$

Or

$$\text{l.}\,\sigma_\alpha-\text{l.}\,\sigma=(s-\alpha)^2\left[A+B(s-\alpha)+\cdots\right],$$

expression dans laquelle $A=-\frac{1}{2}\left[\frac{d^2\,\text{l.}\,\sigma}{ds^2}\right]_\alpha$, (n° 79) ;

$$v_\alpha=\frac{1}{\sqrt{A}}$$
$$\text{l.}\,\sigma=n\,\text{l.}\,s+(n-1)\,\text{l.}\,(1-s),$$

et, par suite,

$$\int_0^{a'} s^n(1-s)^{n-1}ds=\frac{n^{n+\frac{1}{2}}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{(2n-1)^{2n+\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}\sqrt{n}};$$

de sorte que la valeur de a' deviendra :

$$a'=\frac{p}{p+q}+\frac{ia'^{n+1}(1-a')^n\,2^{2n}\sqrt{n}}{(p+q)\sqrt{\pi}}.\quad .\quad .\quad .\quad (1)$$

Posons

$$a'=\frac{p}{p+q}+\mu,\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (2)$$

μ sera une quantité très-petite.

Calcul de μ. Substituons dans (1) à a' sa valeur (2) :

$$\mu=\frac{i\left(\frac{p}{p+q}+\mu\right)^{n+1}\left(\frac{q}{p+q}-\mu\right)^{n}2^{2n}\sqrt{\pi}}{(p+q)\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{i\left(\frac{p}{p+q}\right)^{n}\frac{p}{p+q}\left(1+\frac{p+q}{p}\mu\right)^{n}\left(1+\frac{p+q}{p}\mu\right)\left(1-\frac{p+q}{q}\mu\right)^{n}\left(\frac{q}{p+q}\right)^{n}2^{2n}\sqrt{\pi}}{(p+q)\sqrt{\pi}},$$

d'où, en négligeant les puissances de μ :

$$\text{l.}\,\mu=\text{l.}\left\{\frac{i\sqrt{n}\,p\left[1-\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{2}\right]}{(p+q)^{2}\sqrt{\pi}}e^{-n\mu\frac{(p+q)(p-q)}{pq}-\frac{n\mu^{2}(p+q)^{2}}{pq}}\right\},$$

et, par conséquent,

$$\mu=i\sqrt{n}\frac{p\left[1-\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{2}\right]}{(p+q)^{2}\sqrt{\pi}}e^{-\frac{n\mu(p+q)(p-q)}{pq}-\frac{n\mu^{2}(p+q)^{2}}{pq}}\;.\;.\quad(a)$$

2° *Calcul de* $z_{a'}$. Nous avons

$$z_{a'}=\frac{\int_0^{a'}s^{n}(1-s)^{n-1}ds}{\int_0^{1}s^{n}(1-s)^{n-1}ds}=1-\frac{\int_{a'}^{1}s^{n}(1-s)^{n-1}ds}{\int_0^{1}s^{n}(1-s)^{n-1}ds}.$$

Posons

$$s=\alpha+\theta=\frac{n}{2n-1}+\theta.$$

Si dans la formule (B) du troisième problème nous faisons

$$p=n,\quad q=n-1,$$

nous trouverons

$$\frac{s^{n}(1-s)^{n-1}ds}{\int_0^{1}s^{n}(1-s)^{n-1}ds}=\frac{d\theta}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{(2n-1)^{3}}{2n(n-1)}}\,e^{-\frac{(2n-1)^{3}}{2n(n-1)}\theta^{2}},$$

et par suite

$$\frac{\int_{a'}^{1}s^{n}(1-s)^{n-1}ds}{\int_0^{1}s^{n}(1-s)^{n-1}ds}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{(2n-1)^{3}}{2n(n-1)}}\int_{a'-\frac{n}{2n-1}}^{1-\frac{n}{2n-1}}e^{-\frac{(2n-1)^{3}}{2n(n-1)}\theta^{2}}d\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{(2n-1)^{3}}{2n(n-1)}}\int_{a'-\frac{n}{2n-1}}^{\infty}e^{-\frac{(2n-1)^{3}}{2n(n-1)}\theta^{2}}d\theta,$$

à cause de la valeur très-petite de l'expression sous le signe $\int$ pour $\theta=1$.

Si nous faisons enfin

$$\frac{(2n-1)^{3}\theta^{2}}{2n(n-1)}=t^{2},$$

d'où

$$\theta=\sqrt{\frac{2n(n-1)}{(2n-1)^{3}}}\,t=\frac{p}{p+q}+\mu-\frac{n}{2n-1},$$

et

$$t=\sqrt{\frac{2n-1}{2n(n-1)}}\left[\frac{n(p-q)}{p+q}-\frac{p}{p+q}+(2n-1)\mu\right],$$

nous aurons

$$z_{a'}=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}e^{-t^{2}}dt.$$

3° *Calcul de* $v_{a'}$. Nous aurons, en procédant comme au n° 79 :

$$Y=x^{p}z^{i}(1-x)^{q}=Y_{a'}e^{-t^{2}},$$

$$t^{2}=\text{l.}\,Y_{a'}-\text{l.}\,Y=(x-a')^{2}\left[A+B(x-a')+\cdots\right],$$

où

$$A=-\frac{1}{2}\left(\frac{d^{2}\,\text{l.}\,Y}{dx^{2}}\right)_{a'}.$$

Or

$$\text{l.}\,Y=p\,\text{l.}\,z+i\,\text{l.}\,z+q\,\text{l.}\,(1-x);$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{d^{2}\,\text{l.}\,Y}{dx^{2}}=-\frac{p}{2x^{2}}+\frac{i}{2}\frac{d^{2}z}{zdx^{2}}-\frac{i}{2}\left(\frac{dz}{zdx}\right)^{2}+\frac{q}{2(1-x)^{2}};$$

et

$$v_{a'}=\frac{1}{\sqrt{A}}=\frac{1}{\sqrt{\left\{\frac{p}{2a'^{2}}-\frac{i}{2}\left[\frac{d^{2}z}{zdx^{2}}\right]_{a'}+\frac{i}{2}\left[\frac{dz}{zdx}\right]_{a'}^{2}+\frac{q}{2(1-a')^{2}}\right\}}}.$$

Substituant les valeurs trouvées dans l'expression de N :

$$\mathrm{N} = \mathrm{Y}_{a'}\, v_{a'} \sqrt{\pi} = \frac{a'^{p+1} z^i_{a'} (1-a')^{q+1} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\left\{p(1-a')^2 + qa'^2 + ia'^2(1-a')^2\left[\left(\frac{dz}{zdx}\right)^2_{a'} - \left(\frac{d^2z}{zdx^2}\right)_{a'}\right]\right\}}}.$$

Mais nous avons trouvé (n° 89) :

$$a' = \frac{p}{p+q} + \mu;$$

$$0 = \frac{p}{a'} + i\left(\frac{dz}{zdx}\right)_{a'} - \frac{q}{1-a'};$$

donc

$$\left(\frac{dz}{zdx}\right)_{a'} = \frac{\mu\,(p+q)}{ia'\,(1-a')};$$

$$\left(\frac{d^2z}{zdx^2}\right)_{a'} = \left(\frac{dz}{zdx}\right)_{a'} \cdot \frac{n\,(2n-1)\,a'}{a'\,(1-a')} = \frac{\mu\,(p+q)\,n\,(2n-1)}{ia'^2\,(1-a')^2};$$

de sorte que :

$$\mathrm{N} = \frac{a'^{p+1} z^i_{a'} (1-a')^{q+1} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\frac{pq}{p+q}} \sqrt{\left\{1 + \frac{p+q}{pq}\left[n(p-q)-p\right]\mu + \frac{(p+q)^2}{pq}\left[\frac{p+q}{i} + 2n\right]\mu^2\right\}}}.$$

Il nous reste à déterminer $a'^{p+1}(1-a')^{q+1}$, qui est égal à :

$$a'^{p+1}(1-a')^{q+1} = \left(\frac{p}{p+q} + \mu\right)\left(\frac{q}{p+q} - \mu\right) a'^p (1-a')^q;$$

or

$$a'^p (1-a')^q = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q \left[1 + \frac{p+q}{p}\mu\right]^p \left[1 - \frac{p+q}{q}\mu\right]^q;$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{l}.\, a'^p (1-a')^q &= \mathrm{l}.\, \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q - (p+q)^2 \mu^2 \frac{p+q}{2pq} \\ &= \mathrm{l}.\left\{\left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q e^{-\frac{(p+q)^3 \mu^2}{2pq}}\right\}, \end{aligned}$$

en négligeant les puissances supérieures de μ.

Nous aurons par suite

$$a'^{p+1}(1-a')^{q+1} = \frac{pq}{(p+q)^2}\left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\mu^2},$$

et

$$\mathrm{N} = \frac{\frac{pq}{(p+q)^2}\left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\mu^2} z^i_{a'} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\left\{1 + \frac{p+q}{pq}\left[n(p-q)-p\right]\mu + \frac{(p+q)^2}{pq}\left[\frac{p+q}{i} + 2n\right]\mu^2\right\}}}.$$

90. *Calcul de* **D.** Nous avons (n° 79) :

$$\mathrm{D} = \int_0^1 y\,dx = y_a v_a \sqrt{\pi}.$$

Or dans le problème 2 (n° 79) nous avons trouvé :

$$y_a = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q$$

$$v_a = \frac{\sqrt{2}\sqrt{pq}}{(p+q)\sqrt{p+q}}$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{D} = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q \sqrt{\frac{pq}{p+q}} \sqrt{\frac{2\pi}{p+q}},$$

et enfin

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}} = \frac{z^i_{a'} e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}}}{\sqrt{\left\{1 + \frac{p+q}{pq}\left[n(p-q)-p\right]\mu + \frac{(p+q)^2}{pq}\left[\frac{p+q}{i} + 2n\right]\mu^2\right\}}}. \quad \text{(C)}$$

Exemple. Soit pour 1784, à Paris :

$$n = 963675;\ p = 393386;\ q = 377555;\ i = 100.$$

La formule (a) donne μ; (b) donne $z_{a'}$ et enfin (c) donne $\mathrm{P} = 0{,}782$.

Il y avait donc ainsi, à la fin de 1784, près de quatre à parier contre un que dans l'espace d'un siècle le nombre des naissances des garçons l'emporterait chaque année, à Paris, sur celui des filles.

CHAPITRE VI.

THÉORÈME INVERSE DE BERNOUILLI OU THÉORÈME DE BAYES.

---

91. *Si* x *et* 1 — x *désignent les probabilités inconnues de deux événements contraires* A *et* B, *et qu'après un très-grand nombre* $\mu = p + q$ *d'épreuves l'événement* A *soit arrivé* p *fois, l'événement* B, q *fois, on aura la probabilité :*

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-t^2} dt$$

que x *est compris entre*

$$\frac{p}{\mu} \pm c \sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}}.$$

Démonstration. Si nous posons $y = x^p(1-x)^q$, la probabilité de l'hypothèse d'une valeur de x sera (n° 70) :

$$\frac{ydx}{\int_0^1 ydx},$$

et la probabilité P que la valeur de x est comprise entre a et b sera :

$$P = \frac{\int_a^b ydx}{\int_0^1 ydx} = \frac{N}{D}.$$

Calcul de N. Soit $x = \frac{p}{\mu} + z$, et a', b' les limites de z répondant à celles a, b de x; nous aurons :

$$N = \int_a ydx = \frac{p^p q^q}{\mu^\mu} \int_{a'}^{b'} \left(1 + \frac{\mu z}{p}\right)^p \left(1 - \frac{\mu z}{q}\right)^q dz.$$

Développons les facteurs sous le signe $\int$:

$$\left(1 + \frac{\mu z}{p}\right)^p = e^{p\,l.\left(1+\frac{\mu z}{p}\right)} = e^{\mu z - \frac{1}{2}\frac{\mu^2 z^2}{p} + \frac{1}{3}\frac{\mu^3 z^3}{p^2} - \cdots}$$

$$\left(1 - \frac{\mu z}{q}\right)^q = e^{q\,l.\left(1-\frac{\mu z}{q}\right)} = e^{-\mu z - \frac{1}{2}\frac{\mu^2 z^2}{q} - \frac{1}{3}\frac{\mu^3 z^3}{q^2} - \cdots}$$

d'où :

$$N = \frac{p^p q^q}{\mu^\mu} \int_{a'}^{b'} dz e^{-\frac{1}{2}\mu^2 z^2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) + \frac{1}{3}\mu^3 z^3\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right) - \cdots}.$$

Posons

$$\frac{\mu^2 z^2}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{\mu^3 z^2}{2pq} = t^2;$$

d'où

$$z = t\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}},$$

et

$$x = \frac{p}{\mu} + z = \frac{p}{\mu} + t\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

et désignons par $-c$ et $+c$ les limites de t qui répondent à celles a' et b' de z, ou a et b de x; nous aurons à déterminer ces dernières en fonction de c.

L'expression de N deviendra par la substitution des valeurs précédentes

$$N = \frac{p^p q^q}{\mu^\mu}\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}} \int_{-c}^{c} dt e^{-t^2 + \frac{4(p-q)}{3\sqrt{2\mu pq}} - \text{etc.}}$$

$$= \frac{p^p q^q}{\mu^\mu}\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}} \int_{-c}^{c} dt e^{-t^2}\left\{1 + \frac{4(q-p)t^3}{4\sqrt{2\mu pq}} - \text{etc.}\right\}$$

$$= \frac{p^p q^q}{\mu^\mu}\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}} \int_{-c}^{c} e^{-t^2} dt,$$

en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{\mu}$.

Calcul de D. Appelons $l = \sqrt{\frac{q\mu}{2p}}$ et $l' = -\sqrt{\frac{p\mu}{2q}}$ les limites de t correspondant à celles 1 et 0 de x; nous aurons :

$$D = \int_0^1 ydx = \frac{p^p q^q}{\mu^\mu}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \int_{l'}^{l} e^{-t^2} dt;$$

pourvu que l et l' soient supérieurs à 4 en valeur absolue, on pourra étendre ces limites jusqu'à $\pm\infty$; et l'on aura :

$$D = \frac{p^p q^q}{\mu^\mu} \sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \sqrt{\pi}.$$

Par suite

$$P = \frac{N}{D} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-c}^{c} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-t^2} dt;$$

probabilité que x est compris entre a et b, ou, d'après la formule (a), entre

$$\frac{p}{\mu} \pm c \sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}};$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME DE LAPLACE SUR LA PROBABILITÉ DES RÉSULTATS MOYENS DES OBSERVATIONS.

92. *Les valeurs observées en* $p + p_1 + \cdots + p_i = \mu$ *épreuves étant* p *fois* w, p_1 *fois* w_1, etc., p_i *fois* w_i, *le résultat moyen approché des observations sera*

$$m = \frac{pw + p_1 w_1 + \cdots + p_i w_i}{p + p_1 + \cdots + p_i} = \frac{\Sigma p_i w_i}{\mu};$$

et si $x, x_1 \ldots x_i$ *désignent les probabilités inconnues des événements exclusifs* $w, w_1 \ldots w_i$, *de telle sorte que*

$$x + x_1 + \cdots + x_i = 1,$$

l'expression

$$v = wx + w_1 x_1 + \cdots + w_i x_i = \Sigma w_i x_i$$

sera le résultat moyen vrai des observations ; cela posé, il y aura une probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-t^2} dt$$

que l'écart $v - m$ *sera compris entre les limites*

$$\pm \frac{c}{\mu} \sqrt{2 \Sigma p_i (w_i - m)^2}$$

ou

$$\pm c \sqrt{\frac{2}{\mu} \left\{ \frac{\Sigma p_i w_i^2}{\mu} - \left(\frac{\Sigma p_i w_i}{\mu} \right)^2 \right\}},$$

μ, p, ... p_i *étant de grands nombres du même ordre.*

Premier cas. — **Deux événements.**

DÉMONSTRATION. Dans ce cas les données précédentes se réduisent à

$$p + p_1 = \mu; \quad m = \frac{pw + p_1 w_1}{\mu}; \quad x + x_1 = 1; \quad v = wx + w_1 x_1.$$

Soit k le coefficient de $x^p x_1^{p_1}$ dans le développement du binôme $(x + x_1)^\mu$; la probabilité que l'événement w arrive p fois, w_1, q fois sera

$$y\ k x^p x_1^{p_1} = k x^p (1 - x)^{p_1};$$

ou, en remplaçant x par $\frac{v - w_1}{w - w_1}$, $1 - x$ par $\frac{w - v}{w - w_1}$:

$$y = k \left(\frac{v - w_1}{w - w_1} \right)^p \left(\frac{w - v}{w - w_1} \right)^{p_1}.$$

Supposons $w_1 > w$; toutes les valeurs de v seront comprises entre w et w_1, et la probabilité d'une valeur de v sera par conséquent :

$$\frac{k \left(\frac{v - w_1}{w - w_1} \right)^p \left(\frac{w - v}{w - w_1} \right)^{p_1} dv}{\int_w^{w_1} k \left(\frac{v - w_1}{w - w_1} \right)^p \left(\frac{w - v}{w - w_1} \right)^{p_1} dv} = \frac{(v - w_1)^p (v - w)^{p_1} dv}{\int_w^{w_1} (v - w_1)^p (v - w)^{p_1} dv};$$

et par suite, la probabilité P, que v est compris entre a et b, sera :

$$P = \frac{\int_a^b (v - w_1)^p (w - v)^{p_1} dv}{\int_w^{w_1} (v - w_1)^p (w - v)^{p_1} dv} = \frac{N}{D}.$$

93. *Calcul de* N. Posons avec Laplace

$$v = m + z = \frac{pw + p_1 w_1}{\mu} + z;$$

d'où
$$dv = dz;\quad z = v - m = v - \frac{pw + p_1 w_1}{\mu},$$

écart entre la valeur vraie et la valeur moyenne; et soient α, β les limites de z qui répondent à celles a, b de x; nous aurons :

$$\mathrm{N} = \int_a^b (v - w_1)^p (w - v)^{p_1}\, dv$$
$$= (w - w_1)^\mu \frac{p^p p_1^{p_1}}{\mu^\mu} \int_\alpha^\beta \left[1 + \frac{\mu z}{p(w - w_1)}\right]^p \left[1 - \frac{\mu z}{p_1(w - w_1)}\right]^{p_1} dz.$$

Développons les facteurs sous le signe $\int$:

$$\left[1 + \frac{\mu z}{p(w - w_1)}\right]^p = e^{p\,\mathrm{l.}\left[1 + \frac{\mu z}{p(w - w_1)}\right]} = e^{\frac{\mu z}{w - w_1} - \frac{1}{2}\frac{\mu^2 z^2}{p(w - w_1)^2} + \frac{1}{3}\frac{\mu^3 z^3}{p^2(w - w_1)^3} \cdots}$$
$$\left[1 - \frac{\mu z}{p_1(w - w_1)}\right]^{p_1} = e^{p_1\,\mathrm{l.}\left[1 - \frac{\mu z}{p_1(w - w_1)}\right]} = e^{-\frac{\mu z}{w - w_1} - \frac{1}{2}\frac{\mu^2 z^2}{p_1(w - w_1)^2} - \frac{1}{3}\frac{\mu^3 z^3}{p_1^2(w - w_1)^3} \cdots}.$$

Substituant dans l'expression de N, nous aurons :

$$\mathrm{N} = (w - w_1)^\mu \frac{p^p p_1^{p_1}}{\mu^\mu} \int_\alpha^\beta dz\, e^{-\frac{\mu^2 z^2}{2(w - w_1)}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}\right) + \frac{\mu^3 z^3}{3(w - w_1)^3}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p_1^2}\right) - \cdots};$$

et si nous posons
$$\frac{\mu^2 z^2}{2(w - w_1)^2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}\right) = t^2;$$
d'où
$$z = t\sqrt{\frac{2pp_1(w - w_1)^2}{\mu^3}};\quad dz = dt\sqrt{},$$

et que nous désignions par $-c$, c les limites de t qui répondent à celles α, β de z, nous pourrons écrire, en supprimant les facteurs qui sortiront du signe $\int$, parce qu'ils se trouveront également dans D :

$$\mathrm{N} = \int_{-c}^{c} dt\, e^{-t^2} \cdot e^{\frac{4(p_1 - p)}{3\sqrt{2\mu pp_1}} t^3 - \cdots}$$
$$= \int_{-c}^{c} dt\, e^{-t^2} \left[1 + \frac{4(p_1 - p)}{3\sqrt{2\mu pp_1}} t^3 \cdots \cdots\right].$$

Les termes entre parenthèses sont au moins de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$: on a donc, à cet ordre près :

$$\mathrm{N} = \int_{-c}^{c} e^{-t^2} dt = 2\int_0^c e^{-t^2} dt.$$

94. *Calcul de* D. Soient l', l les limites de t qui répondent à celles w, w_1 de v :

$$\mathrm{D} = \int_{l'}^{l} e^{-t^2} dt.$$

Mais à

$$v = \begin{cases} w_1 \\ w \end{cases} \text{ répondent } z = \begin{cases} w_1 - \frac{pw + p_1 w_1}{p + p_1} = \frac{p(w_1 - w)}{\mu} \\ w - \frac{pw + p_1 w_1}{p + p_1} = \frac{p_1(w - w_1)}{\mu} \end{cases},$$

et par suite, puisque

$$t = z\frac{\mu\sqrt{\mu}}{2(w - w_1)\sqrt{pp_1}} \text{ on a : } t = \begin{cases} l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{p_1}}\sqrt{\mu} \\ l' = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_1}{p}}\sqrt{\mu} \end{cases};$$

il s'ensuit que l et l' sont de très-grands nombres de l'ordre $\sqrt{\mu}$, et qu'on pourra les remplacer par $\pm\infty$, ce qui donnera

$$\mathrm{D} = \sqrt{\pi}.$$

Par conséquent,
$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{N}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-t^2} dt,$$

probabilité que v est compris entre a et b.

Mais nous avons désigné par $-c$ et c les limites correspondantes de t, et comme

$$v = m + z = m + t\sqrt{\frac{2pp_1(w - w_1)^2}{\mu^3}},$$

il en résulte que
$$a = m - c\sqrt{},$$
$$b = m + c\sqrt{},$$

et que
$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-t^2} dt,$$

est la probabilité que v est compris entre

$$\frac{pw + p_1 w_1}{p + p_1} \pm c \sqrt{\frac{2pp_1 (w - w_1)^2}{\mu^3}},$$

ou que l'écart $v - m$ est compris entre

$$\pm \frac{c}{\mu} \sqrt{2 \{ p (w - m)^2 + p_1 (w_1 - m)^2 \}};$$

en effet, la fraction $\frac{pp_1 (w - w_1)^2}{\mu}$ se transforme aisément en :

$$\frac{pp_1^2 + p_1 p^2}{\mu^2} (w - w_1)^2 = p \left[\frac{p_1 (w - w_1)}{\mu} \right]^2 + p_1 \left[\frac{p (w - w_1)}{\mu} \right]^2$$

$$= p \left[\frac{(\mu - p) w - p_1 w_1}{\mu} \right]^2 + p_1 \left[\frac{(\mu - p) w_1 - pw}{\mu} \right]^2$$

$$= p \left[w - \frac{pw + p_1 w_1}{\mu} \right]^2 + p_1 \left[w_1 - \frac{pw + p_1 w_1}{\mu} \right]^2.$$

Première remarque. Si

$$w = 1, \quad w_1 = 0,$$

on a

$$m = \frac{p}{p + p_1}, \quad v = x;$$

alors

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-t^2} dt$$

est la probabilité que x est compris entre

$$\frac{p}{p + p_1} \pm c \sqrt{\frac{2pp_1}{(p + p_1)^3}},$$

ce qui est le théorème inverse de Bernouilli.

Deuxième remarque. 1° Si c, et par suite P, restent constants, les limites se resserreront à mesure que μ augmente.

2° Si les limites $\pm \frac{c}{\mu} \sqrt{}$ restent constantes, ce qui exige que c augmente avec μ, on voit que P s'approche de 1 à mesure que μ augmente.

Deuxième cas. — **Trois événements.**

95. M. Bienaymé a démontré ce théorème directement, et de la manière la plus générale, dans le tome V des *Mémoires des savants étrangers.*

Nous exposerons sa démonstration pour le cas de trois événements observés.

Dans ce cas nous avons

$$v = wx + w_1 x_1 + w_2 x_2$$
$$p + p_1 + p_2 = \mu$$
$$x + x_1 + x_2 = 1;$$

x et x_1 seront des fonctions de v et de x_2.

Nous supposerons $w < w_1 < w_2$, de sorte que toutes les valeurs possibles de v seront comprises entre w et w_2.

Soit k le coefficient du terme en $x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}$ dans le développement du polynôme

$$(x + x_1 + x_2)^\mu;$$

la probabilité que w arrive p fois, w_1, p_1 fois, w_2, p_2 fois, sera, dans l'hypothèse d'une valeur certaine de v :

$$kx^p x_1^{p_1} x_2^{p_2};$$

et par suite la probabilité de l'hypothèse d'une valeur de v sera (n° 69)

$$\frac{x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}}{\sum_w^{w_2} x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}};$$

et la probabilité que v est compris entre a et b sera

$$\frac{\sum_a^b x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}}{\sum_w^{w_2} x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}}.$$

Pour passer au cas de la continuité, multiplions par dx_2 et dv, et intégrons en sous-entendant les limites relatives à x_2 : nous aurons :

$$P = \frac{\iint_a^b x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} dx_2 dv}{\iint_w^{w_2} x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} dx_2 dv} = \frac{N}{D}.$$

Posons

$$x = \frac{p}{\mu} + z; \quad x_1 = \frac{p_1}{\mu} + z_1; \quad x_2 = \frac{p_2}{\mu} + z_2;$$

$$v = \frac{pw + p_1 w_1 + p_2 w_2}{\mu} + u;$$

nous aurons :

$$z + z_1 + z_2 = 0, \quad wz + w_1 z_1 + w_2 z_2 = u;$$

d'où

$$z = \frac{u - z_2(w_2 - w_1)}{w - w_1}; \quad z_1 = \frac{u - z_2(w_2 - w_1)}{w_1 - w};$$

et si nous désignons par a', b' les limites de u qui répondent à celles a, b de v, nous aurons l'expression suivante de N.

96. *Calcul de* N.

$$N = \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu} \iint_{a'}^{b'} \left(1 + \frac{\mu z}{p}\right)^p \left(1 + \frac{\mu z_1}{p_1}\right)^{p_1} \left(1 + \frac{\mu z_2}{p_2}\right)^{p_2} du dz_2,$$

ou en développant comme plus haut (n° 92).

$$N = \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu} \iint_{a'}^{b'} du dz_2 e^{\mu(z+z_1+z_2) - \frac{\mu^2}{2}\left(\frac{z_2^2}{p_2} + \frac{z_1^2}{p_1} + \frac{z^2}{p}\right) + \frac{\mu^3}{3}\left(\frac{z_2^3}{p_2} + \cdots\right) - \text{etc.}},$$

et, éliminant z_1 et z :

$$N = \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu} \iint_{a'}^{b'} du dz_2 e^{-\frac{\mu^2}{2(w-w_1)^2}\left\{z_2^2\left[\frac{(w_1-w)^2}{p_2} + \frac{(w-w_2)^2}{p_1} + \frac{(w_2-w_1)^2}{p}\right] - 2uz_2\left(\frac{w_1-w}{p_1} + \frac{w_2-w}{p_2}\right) + u^2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}\right)\right\} + \frac{\mu^3}{3}\left(\frac{z_2^3}{p_2^2} + \cdots\right) - \text{etc.}}$$

Faisons pour abréger

$$\frac{(w_1-w)^2}{p_2} + \frac{(w-w_2)^2}{p_1} + \frac{(w_2-w_1)^2}{p} = A^2; \quad u\left(\frac{w_2-w}{p_1} + \frac{w_2-w_1}{p}\right) = B;$$

$$u^2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}\right) = C;$$

N s'écrira :

$$N = \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu} \iint_{a'}^{b'} du dz_2 e^{-\frac{\mu^2}{2(w-w_1)^2}\left[Az_2 - \frac{B}{A}\right]^2} e^{-\frac{\mu^2}{2(w-w_1)^2}\left[C - \frac{B^2}{A^2} + \frac{\mu^3}{3}\left(\frac{z_2^3}{p_2^2} - \cdots\right) - \text{etc.}\right]},$$

et si nous posons

$$y = \frac{\mu}{(w - w_1)\sqrt{2}}\left(Az_2 - \frac{B}{A}\right);$$

d'où

$$z_2 = \frac{(w - w_1)\sqrt{2}}{\mu A} y + \frac{B}{A}; \quad dz_2 = \frac{(w - w_1)\sqrt{2}}{\mu A} dy;$$

nous aurons :

$$N = \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu} \frac{(w - w_1)\sqrt{2}}{\mu A} \int dy e^{-y^2} \int_{a'}^{b'} du e^{-\frac{\mu^2}{A^2}\left(\frac{CA^2 - B^2}{A^2}\right)} e^{\frac{\mu^3}{3}\left(\frac{z_2^3}{p_2^2} + \cdots\right)}.$$

Or le facteur

$$e^{\frac{\mu^3}{3}\left(\frac{z_2^3}{p_2^2} + \cdots\right)} = 1 + \frac{\mu^3}{3}\left(\frac{z_2^3}{p_2^2} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{\mu^3}{3} \cdot y^3 \frac{(w - w_1)^3(\sqrt{2})^3}{p_2^2 \mu^3 A^3} + \cdots = 1 + \frac{1}{3} y^3 \frac{1}{p_2^2} \frac{(w - w_1)^3(\sqrt{2})^3}{A^3} + \cdots$$

peut être supprimé comme ne différant de 1 que de quantités de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{p_2}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, vu les valeurs de A et de y, qui sont respectivement de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ et $\sqrt{\mu}$.

Il résulte également de ceci qu'on peut étendre les limites de y, quelles qu'elles soient, de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et par suite $\int dy e^{-y^2}$ étant égal à $\sqrt{\pi}$, on aura

$$N = \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu} \frac{(w - w_1)\sqrt{2}}{\mu A} \sqrt{\pi} \int_{a'}^{b'} du e^{-\frac{\mu^2}{2A^2} \frac{CA^2 - B^2}{(w - w_1)^2}}.$$

Développons la fraction $\frac{CA^2 - B^2}{(w - w_1)^2}$.

Nous avons posé

$$A^2 = \frac{(w_1 - w)^2}{p^2} + \frac{(w - w_2)^2}{p_1} + \frac{(w_2 - w_1)^2}{p}; \quad C = u^2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}\right) = u^2 \frac{\mu - p_2}{pp_1};$$

d'où

$$CA^2 = u^2 \frac{\mu}{pp_1p_2}(w_1 - w)^2 - u^2 \frac{(w_1 - w)^2}{pp_1} + u^2 \frac{\mu - p_2}{pp_1}\left[\frac{(w_2 - w_1)^2}{p} + \frac{(w_2 - w)^2}{p_1}\right].$$

De plus

$$B^2 = u^2\left[\frac{(w_2-w)^2}{p_1^2}+\frac{(w_2-w_1)^2}{p^2}+2\frac{(w_2-w)(w_2-w_1)}{pp_1}\right]$$

$$= u^2\left[\frac{(w_2-w)^2}{p_1^2}+\frac{(w_2-w_1)^2}{p^2}+\frac{(w_2-w)^2+(w_2-w_1)^2-(w_1-w)^2}{pp_1}\right]$$

$$= \frac{u^2}{pp_1}\left[\frac{(w_2-w)^2(p+p_1)}{p_1}+\frac{(w_2-w_1)^2(p+p_1)}{p}\right]-\frac{u^2}{pp_1}(w_1-w)^2$$

$$= \frac{(\mu-p_2)u^2}{pp_1}\left[\frac{(w_2-w)^2}{p_1}+\frac{(w_2-w_1)^2}{p}\right]-\frac{u^2}{pp_1}(w_1-w)^2;$$

et si nous faisons

$$t = u\sqrt{\frac{\mu^3}{2pp_1p_2A^2}},$$

d'où

$$u = t\sqrt{\frac{2pp_1p_2A^2}{\mu^3}};\quad du = dt\sqrt{};$$

en prenant $-c$ et c pour les limites de t qui répondent à celles a et b de v, nous aurons

$$N = \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu}\,\frac{w-w_1}{\mu A}\sqrt{\frac{2pp_1p_2A^2}{\mu^3}}\sqrt{2\pi}\int_{-c}^{c} e^{-t^2}dt.$$

97. *Calcul de* D. En appelant l' et l les limites de t qui répondent à celles w et w_2 de v, nous aurons

$$D = \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu}\,\frac{w-w_1}{\mu A}\sqrt{\frac{2pp_1p_2A^2}{\mu^3}}\sqrt{2\pi}\int_{l'}^{l} e^{-t^2}dt.$$

Comme aux limites w et w_2 de v, répondent celles

$$w_2 - \frac{pw+p_1w_1+p_2w_2}{\mu} = \frac{p(w_2-w)+p_1(w_2-w_1)}{\mu}$$

et $$w - \frac{pw+p_1w_1+p_2w_2}{\mu} = -\frac{p_1(w_2-w)+p_2(w_2-w)}{\mu} \text{ de } u,$$

il en résulte que les limites correspondantes l' et l de t seront

$$l' = -\frac{p_1(w_1-w)+p_2(w_2-w)}{\sqrt{2pp_1p_2A^2}}\sqrt{\mu}$$

$$l = \frac{p(w_2-w)+p_1(w_2-w_1)}{\sqrt{2pp_1p_2A^2}}\sqrt{\mu};$$

ces limites étant de l'ordre $\sqrt{\mu}$, on peut les étendre de $-\infty$ à $+\infty$, et alors

$$\int_{l'}^{l} e^{-t^2}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi};$$

de sorte qu'en divisant N par D nous obtiendrons

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-c}^{c} e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{c} e^{-t^2}dt:$$

probabilité que v est compris entre (n^os^ 95 et 96) :

$$\frac{pw+p_1w_1+p_2w_2}{\mu} \pm c\sqrt{\frac{2pp_1p_2A^2}{\mu^3}}.$$

Il nous reste à donner à ces limites l'expression formulée dans l'énoncé.

En remplaçant A^2 par sa valeur, nous aurons :

$$\sqrt{\frac{2pp_1p_2A^2}{\mu^3}} =$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\mu^4}\left\{(p+p_1+p_2)pp_1(w-w_1)^2+(p+p_1+p_2)p_1p_2(w_1-w_2)^2+(p+p_1+p_2)(w_2-w)^2\right\}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\mu^4}\left\{p^2p_1(w-w_1)^2+pp_1^2(w-w_1)^2+pp_1p_2(w-w_1)^2+pp_1p_2(w_1-w_2)^2+p_1^2p_2(w_1-w_2)^2 \right.}$$
$$\left. +p_1p_2^2(w_1-w_2)^2+p^2p_2(w_2-w)^2+pp_1p_2(w_2-w)^2+p^2p(w_2-w)^2\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\mu^4}\left\{p\left[p_1(w-w_1)+p_2(w-w_2)\right]^2-2pp_1p_2(w-w_1)(w-w_2)+pp_1p_2(w-w_1)^2\right.}$$
$$+p_1\left[p(w_1-w)+p_2(w_1-w_2)\right]^2-2pp_1p_2(w_1-w)(w_1-w_2)+pp_1p_2(w_1-w_2)^2$$
$$\left.+p_2\left[p(w_2-w)+p_1(w_2-w_1)\right]^2-2pp_1p_2(w_2-w)(w_2-w_1)+pp_1p_2(w_2-w)^2\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\mu^4}\left\{p\left[p_1(w-w_1)+p_2(w-w_2)\right]^2+p_1\left[p(w_1-w)+p_2(w_1-w)\right]^2\right.}$$
$$\left.+p_2\left[p_2(w_2-w)+p_1(w_2-w_1)\right]^2+\left[\sqrt{pp_1p_2}\left(\overline{w-w_1}+\overline{w_1-w_2}+\overline{w_2-w}\right)\right]^2\right\}.$$

Le dernier terme est nul, chacun des premiers peut se mettre sous une forme plus simple de la manière suivante :

$$p\left[p_1(w-w_1)+p_2(w-w_2)\right]^2=p\left[\mu w-(pw+p_1w_1+p_2w_2)\right]^2$$
$$=p\mu^2(w-m)^2;$$

et de même des autres; de sorte que le radical se réduit à

$$\frac{1}{\mu}\sqrt{2\left\{p(w-m)^2+p_1(w_1-m)^2+p_2(w_2-m)^2\right\}},$$

ou

$$\sqrt{\frac{2}{\mu}\left\{\frac{pw^2+p_1w_1^2+p_2w_2^2}{\mu}-\left[\frac{pw+p_1w_1+p_2w_2}{\mu}\right]^2\right\}}, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. 1° Si c, et par suite P, sont constants, les limites se resserreront de plus en plus à mesure que μ augmente;

2° Si les limites restent constantes, ce qui exige que c augmente avec μ, on voit que P approche de 1 à mesure que μ augmente.

CHAPITRE VII.

THÉORIE DES ERREURS DES OBSERVATIONS.

98. Nous admettrons que les causes des erreurs constantes sont éliminées.

Dans cette hypothèse, les erreurs fortuites existant seules, il n'y a pas de raison pour qu'une erreur positive $+a$ ait plus de chance que l'erreur négative $-a$.

Nous supposerons que les observations sont faites par les meilleures méthodes, au moyen des instruments les plus parfaits, et avec la plus grande habileté possible, de sorte que les erreurs des observations seront des quantités très-faibles.

La théorie des erreurs a pour objet de donner des règles pour obtenir les résultats les plus avantageux, et les moyens d'apprécier la précision de ces résultats.

Le nombre des observations est toujours supposé très-grand.

La probabilité d'une erreur est une fonction de cette erreur, et sera une quantité infiniment petite, parce que le nombre des chances est infiniment grand.

Si p_x désigne la probabilité d'une erreur x, on aura donc

$$p_x=\varphi(x)\,dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

L'équation $y=\varphi x$ est celle de la courbe de probabilité des erreurs.

On doit admettre :

1° Que $\varphi(x)$ est très-petit quand x est un peu grand;

2° Que $\varphi(x)$ est un maximum quand x est un minimum, ou quand $x=0$;

3° Que $\varphi(-x)=\varphi(x)$;

4° Que la valeur la plus avantageuse du résultat d'un grand nombre d'observations est celle que l'on déduit de leur moyenne arithmétique.

Car si dans un grand nombre μ d'observations on trouve que l'observation w_1 a lieu p_1 fois, ..., l'observation w_i, p_i fois, les probabilités des valeurs éventuelles à attendre seront (n° 71) :

$$\frac{p_1}{\mu}, \ldots, \frac{p_i}{\mu};$$

et ces probabilités seront d'autant plus exactes que μ sera plus grand. On aura donc pour la valeur à espérer :

$$m = w_1 \frac{p_1}{\mu} + \cdots + w_i \frac{p_i}{\mu} = \frac{p_1 w_1 + \cdots + p_i w_i}{\mu};$$

et cette valeur sera la plus avantageuse, puisque, μ étant très-grand, les erreurs positives se produiront à peu près aussi fréquemment que les négatives, de sorte que ces erreurs se compenseront, et que m différera peu de la valeur exacte.

Nous subdiviserons la théorie des erreurs de la manière suivante :

§ I. Expression de la probabilité d'une erreur x.

§ II. Calcul de la valeur la plus avantageuse d'une inconnue à déduire de plusieurs observations.

§ III. Calcul de la valeur d'une inconnue, lorsqu'une fonction de cette inconnue est donnée par un grand nombre d'observations.

§ IV. Calcul de plusieurs inconnues, lorsqu'une fonction de ces inconnues est donnée par un grand nombre d'observations.

§ Ier. — EXPRESSION DE LA PROBABILITÉ DE LA VALEUR x.

99. Théorème. *Les erreurs positives pouvant se produire avec la même facilité que les erreurs régulières de même valeur absolue, si nous désignons par* p_x *la probabilité d'une erreur* x, *par* h *une constante indéterminée dépendant du genre des observations, je dis qu'on aura*

$$p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Première démonstration (par le binôme). Si p et q désignent les probabilités de A et B, les termes du binôme $(p+q)^\mu$ seront les probabilités des diverses combinaisons avec répétition de A et B en μ épreuves. Soit D la combinaison la plus possible : elle aura pour probabilité le plus grand terme G du binôme, dont la valeur est (n° 51)

$$G = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\mu pq}} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Les l^{mes} termes, avant et après G, du binôme $(p+q)^\mu$ seront, en faisant $m = \mu p$, $n = \mu q$, (n° 51) :

$$G_{N-l} = G e^{-\frac{l^2+\frac{1}{2}l}{2m} + \frac{l^3+\frac{1}{2}l^2}{6m^2} - \frac{l^4+\frac{1}{3}l^3}{3m^3} - \frac{l^2-\frac{1}{2}l}{2n} - \frac{l^3-\frac{1}{2}l^2}{6n^2} - \frac{l^4-\frac{1}{2}l^3}{3n^3}}$$

$$G_{N+l} = G e^{-\frac{l^2-\frac{1}{2}l}{2m} - \frac{l^3-\frac{1}{2}l^2}{6m^2} - \frac{l^4-\frac{1}{3}l^3}{3m^3} - \frac{l^2+\frac{1}{2}l}{2n} + \frac{l^3+\frac{1}{2}l^2}{6n^2} - \frac{l^4+\frac{1}{2}l^3}{3n^3}}$$

Quand $p = q = \frac{1}{2}$, on a par les formules (2) et (3) :

$$G' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{2}}} \quad \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

$$G'_{N-l} = G' e^{-\frac{l^2}{\frac{\mu}{2}}}, \quad G'_{N+l} = G' e^{-\frac{l^2}{\frac{\mu}{2}}}. \quad \ldots \ldots \quad (\beta)$$

donc

$$G'_{N-l} = G'_{N+l}.$$

La plus grande probabilité G' est celle d'un écart nul; G'_{N-l} est la probabilité d'un écart l, G'_{N+l} celle d'un écart $-l$.

Pour passer au cas de la continuité, nous devons faire μ infiniment grand, et nous pourrons poser

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{2}}} = h dx, \quad h \text{ étant fini},$$

$$l dx = x, \quad l \text{ étant infiniment grand.}$$

Les formules (α) et (β) deviennent par là :

$$G' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} dx, \qquad \text{probabilité d'un écart nul.}$$

$$G'_{N-l} = G'.e^{-h^2x^2}, \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad x.$$

Actuellement si A et B sont les causes des erreurs positives et des négatives, agissant avec une même facilité, de sorte que $p = q = \frac{1}{2}$, les combinaisons de A et B dans un nombre infini d'épreuves donneront naissance à tous les écarts possibles : les probabilités de ces combinaisons étant en même temps celles des écarts, il est clair que la probabilité p_x d'un écart ou d'une erreur x sera

$$p_x = G'.e^{-h^2x^2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx.$$

100. Deuxième démonstration (d'après Laplace et Encke). Soients

$x_1,\ x_2 \ldots x_\mu$ les erreurs des observations

$w_1,\ w_2 \ldots w_\mu$;

$\varphi x_1, \varphi x_2 \ldots, \varphi x_\mu$ les probabilités de ces erreurs considérées comme certaines; la probabilité que ces erreurs auront lieu simultanément sera

$$y = \varphi x_1 . \varphi x_2 \ldots \varphi x_\mu;$$

et la probabilité de l'une quelconque x de ces valeurs $x_1 \ldots x_\mu$ sera

$$p_x = \frac{ydx}{\int_{-a}^{a} ydx} = \frac{\varphi x_1 . \varphi x_2 \ldots \varphi x_\mu dx}{\int_{-a}^{a} \varphi x_1 . \varphi x_2 \ldots \varphi x_\mu dx} = \mathrm{H} \varphi x_1 \varphi x_2 \ldots \varphi x_\mu dx,$$

en posant le dénominateur égal à $\frac{1}{\mathrm{H}}$.

Si chacune des observations $w_1 \ldots w_\mu$ n'arrive qu'une fois en μ épreuves, l'observation la plus avantageuse sera

$$a = \frac{w_1 + w_2 + \cdots w_\mu}{\mu};$$

d'où

$$w_1 - a + w_2 - a + \cdots + w_\mu - a = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Les erreurs déduites de l'observation seront :

$$x_1 = w_1 - a; \quad x_2 = w_2 - a; \ldots x_\mu = w_\mu - a.$$

Pour ces valeurs les plus probables des erreurs, l'expression p_x doit devenir un maximum :

$$y = \varphi x_1 . \varphi x_2 \ldots \varphi x_\mu = \max.$$

$$\mathrm{l}.\, y = \mathrm{l}.\, \varphi x_1 + \mathrm{l}.\, \varphi x_2 + \cdots + \mathrm{l}.\, \varphi x_\mu = \max.$$

Écrivons pour abréger

$$\frac{d\,\mathrm{l}.\, \varphi x_1}{dx_1} = \varphi' x_1, \text{ etc.};$$

nous devrons avoir :

$$\varphi' x_1 + \varphi' x_2 + \cdots + \varphi' x_\mu = 0,$$

ou

$$(w_1 - a)\frac{\varphi'(w_1 - a)}{w_1 - a} + (w_2 - a)\frac{\varphi'(w_2 - a)}{w_2 - a} + \cdots + (w_\mu - a)\frac{\varphi'(w_\mu - a)}{w_\mu - a} = 0. \quad (5)$$

Pour que cette relation puisse subsister simultanément avec la relation (4), il faut que :

$$\frac{\varphi'(w_1 - a)}{w_1 - a} = \frac{\varphi'(w_2 - a)}{w_2 - a} = \text{etc.} = \text{const.};$$

ou, généralement, que

$$\frac{\varphi' x}{x} = \text{const.} = k;$$

ou

$$\frac{d\,\mathrm{l}.\, \varphi x}{x dx} = k;$$

d'où en intégrant :

$$\varphi x = ce^{\frac{1}{2}kx^2}.$$

Comme φx doit être un maximum pour $x = 0$, il faut que k soit négatif; posons donc

$$\frac{1}{2} k = -h^2,$$

nous aurons :

$$\varphi x = ce^{-h^2x^2}.$$

De plus :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi x dx = 1 = c\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}dx = \frac{c}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{c}{h}\sqrt{\pi};$$

d'où $c = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$; et par suite

$$p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

101. Premier corollaire. La probabilité P que x est compris entre a et b est

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_a^b e^{-h^2x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{ah}^{bh} e^{-t^2}dt;$$

et par suite, la probabilité que x est compris entre $\pm a$ sera

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-ah}^{ah} e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ah} e^{-t^2}dt \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Cette valeur exprime aussi le nombre des erreurs comprises entre 0 et a, quand on prend pour unité le nombre total D de toutes les erreurs possibles; car toutes les erreurs étant supposées également possibles, la probabilité que l'erreur x est une de celles qui sont comprises entre 0 et a sera

$$P = \frac{N}{D} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ah} e^{-t^2}dt;$$

d'où

$$N = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ah} e^{-t^2}dt \times D = \theta . D.$$

Exemple. Soit $D = 1000$, et $h = 1$, il y aura entre 0 et 0,5; 0 et 1,0; 0 et 2,0 respectivement $1000\theta = 520$; $= 840$; $= 995$ erreurs tant positives que négatives; donc

de	0 à 0,5	il y en a	520	
de	0,5 à 1,0	»	840 — 520 = 320	
de	1,0 à 2,0	»	995 — 840 = 155, etc.	

102. Deuxième corollaire. *Cherchons la limite supérieure* ρ *qui correspond à* $P = \frac{1}{2}$. Nous aurons à déterminer la valeur de ρ pour laquelle

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho} e^{-t^2}dt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\int_0^{\rho} e^{-t^2}dt = \frac{1}{4}\sqrt{\pi};$$

d'où, en développant :

$$\rho - \frac{1}{3}\rho^3 + \frac{1}{5}\frac{\rho^5}{1.2} - \text{etc.} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi};$$

on en déduira $\rho = 0{,}476936$.

103. Troisième corollaire. *Cherchons la valeur* r *de* a *qui donne* $P = \frac{1}{2}$, *dans*

$$P = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a} e^{-h^2x^2}dx; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

En faisant $P = \frac{1}{2}$, $a = r$ et $h = xt$, nous aurons

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hr} e^{-t^2}dt.$$

Nous en conclurons, par la formule (7), que

$$\rho = hr; \quad \text{d'où} \quad r = \frac{\rho}{h} \quad \text{et} \quad h = \frac{\rho}{r}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

r se nomme l'*erreur probable*.

En changeant dans la formule (8) h en $\frac{\rho}{r}$, elle devient :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho\frac{a}{r}} e^{-t^2}dt = \frac{N}{D};$$

d'où

$$N = D \times \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho\frac{a}{r}} e^{-t^2}dt = D \times \theta\left(\rho\frac{a}{r}\right). \quad . \quad . \quad (10)$$

Exemple. Soit

$r = 0'',2657$; $\quad D = 470$;

$a = 0'',1$; $\quad 0'',2$; $\quad 0'',3$; ...

$\frac{a}{r} = 0{,}3792$; $\quad 0{,}7584$; $\quad 1{,}1376$; ...

ρ étant égal à 0,476936, on trouve :

$$\theta\left(\rho\frac{a}{r}\right) = 0{,}20186;\quad 0{,}59102,\quad 0{,}55705;\ \ldots$$

donc

entre 0",0 et 0",1 on a $N = 0{,}20186 \times 470 = 95$ erreurs,
» 0,1 et 0,2 » $N = 0{,}18916 \times 470 = 89$ »
» 0,2 et 0,3 » $N = 0{,}16605 \times 470 = 78$ »

104. Quatrième corollaire. La quantité h est appelée, par Gauss, *mesure de précision*, par Laplace, *poids des observations*.

La probabilité des erreurs x étant en effet

$$P_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}dx,$$

si x reste le même, P_x décroît avec h ; l'observation qui est affectée de l'erreur x devient d'autant plus précise ou a d'autant plus de poids que h est plus grand.

105. Cinquième corollaire. La probalité de x, dans un genre d'observations caractérisé par h étant

$$P_x = \frac{hdx}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}dx,$$

celle de x', dans un autre genre d'observations caractérisé par h', étant

$$P_{x'} = \frac{h'dx'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2x'^2},$$

si l'on a $P_x = P_{x'}$, on devra avoir

$$hx = h'x',\quad \text{ou}\quad h : h' = x' : x;$$

donc *lorsque deux erreurs sont également probables, elles sont inversement proportionnelles aux mesures de précision des observations.*

En outre comme

$$h = \frac{\rho}{r},\quad h' = \frac{\rho}{r'},$$

on en conclut

$$h : h' = r' : r;$$

donc *les erreurs probables sont inversement proportionnelles aux mesures de précision.*

106. Sixième corollaire. Dans un même genre d'observations, on a, entre les probabilités de deux erreurs x et x', la proportion (voir form. (a), n° 100).

$$P_x : P_{x'} = e^{-h^2x^2} : e^{-h^2x'^2}.$$

Soit $x' = 0$; on aura :

$$P_x : P_0 = e^{-h^2x^2} : 1;$$

et réciproquement, si dans un genre d'observations, on a

$$P_x : P_0 = e^{-mx^2} : 1,$$

on aura $h = \sqrt{m}$ dans ce genre d'observations.

107. Septième corollaire. *Construction de la courbe de probabilité*

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}.$$

Pour construire cette courbe, il faut connaître h; et pour cela, il faut connaître, ou la valeur

$y = k$ qui répond à une valeur $x = a$ de x;
ou la valeur
$y = G$ » » $x = o$ »
ou la valeur
$y = L$ » » $x = r$ »

On peut encore déterminer h si l'on connaît r, puisque $h = \frac{\rho}{r}$; ou si l'on connaît le rapport

$$\frac{P_x}{P_0} = e^{-mx^2};$$

d'où $h = \sqrt{m}$.

Propriétés de la courbe. 1° $\frac{dy}{dx} = 0$ donne

$$x = 0 \quad\text{et}\quad y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} = \max.$$

Le sommet de la courbe est donc sur l'axe des y à une distance $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$; la courbe est symétrique par rapport à cet axe.

2° $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ donne

$$x=\frac{1}{h\sqrt{2}},\quad y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}};$$

chaque moitié de la courbe a donc un point d'inflexion.

3° Pour $x=\infty$ on a $y=0$: l'axe des x est donc une asymptote.

4° Les ordonnées diminuent rapidement quand x devient un peu grand.

En prenant $h=1$, on trouve

$$\text{pour } x=3,\ y=0{,}0000610,$$
$$\text{»}\quad x=5,\ y=0{,}000000000009.$$

§ II. DÉTERMINATION DES LIMITES DE h ET DE r DANS UN GENRE D'OBSERVATIONS CARACTÉRISÉ PAR CES VALEURS.

108. 1° *Détermination des limites probables de* h. Soit a la valeur moyenne d'un grand nombre d'observations $w_1 \ldots w_\mu$ d'une même inconnue x.

On pourra concevoir une erreur moyenne m telle que chacune des erreurs vraies $x-w_1=\varepsilon_1 \ldots x-w_\mu=\varepsilon_\mu$ puisse être remplacée par cette erreur moyenne, de sorte que la probabilité du concours de toutes les erreurs différentes soit la même que la probabilité du concours des μ erreurs égales à m.

Nous donnerons plus bas le moyen de calculer m à l'aide des erreurs fournies par l'observation; nous pourrons donc supposer m connu.

La probabilité d'une erreur m étant

$$P_m=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2m^2}dm,$$

celle du concours de μ erreurs m sera

$$P=\frac{h^\mu}{(\sqrt{\pi})^\mu}e^{-\mu h^2m^2}(dm)^\mu.$$

Si h se change en $h+\Delta$ et P en P′, on aura :

$$P'=\frac{(h+\Delta)^\mu}{(\sqrt{\pi})^\mu}e^{-\mu(h+\Delta)^2m^2}(dm)^\mu;$$

d'où

$$\frac{P'}{P}=\left(1+\frac{\Delta}{h}\right)^\mu e^{-2\mu hm^2\Delta-\mu m^2\Delta^2},$$

et,

$$\text{l.}\,\frac{P'}{P}=\mu\,\text{l.}\left(1+\frac{\Delta}{h}\right)-2\mu hm^2\Delta-\mu m^2\Delta^2$$
$$=\left(\frac{\mu}{h}-2\mu hm^2\right)\Delta-\mu\Delta^2\left(\frac{1}{2h^2}+m^2\right),$$

en négligeant les puissances supérieures de Δ.

Pour que P devienne un maximum, il faut que l. $\frac{P'}{P}$ soit négatif, donc que

$$\frac{\mu}{h}-2\mu hm^2=0;\quad \text{d'où}\quad h=\frac{1}{m\sqrt{2}}.$$

Posant cette valeur égale à h_0, nous aurons

$$m=\frac{1}{h_0\sqrt{2}},$$

et

$$\text{l.}\left[\frac{P'}{P}\right]=-\frac{\mu\Delta^2}{h_0^2};\quad \left[\frac{P'}{P}\right]=e^{-\frac{\mu\Delta^2}{h_0^2}},$$
$$[P]:[P']=1:e^{-\frac{\mu\Delta^2}{h_0}}.$$

[P] est la probabilité qui répond à la valeur h_0 de h;
[P′] celle qui répond à la valeur $h_0+\Delta$ de h.

La mesure de précision de [P′] est donc

$$h'=\frac{\sqrt{\mu}}{h_0},$$

et l'on peut écrire

$$[P']=\frac{h'}{\sqrt{\pi}}e^{-h'^2\Delta^2}d\Delta.$$

L'erreur probable R de Δ est par conséquent $R=\pm\frac{\rho}{h'}$; c'est-à-dire qu'on peut parier un contre un que h est compris entre $h_0 \pm R$.

La valeur probable de h est comprise entre les limites

$$h_0 - R < h < h_0 + R.$$

Ces limites deviennent, en remplaçant h_0 et R par leurs valeurs

$$h_0 = \frac{1}{m\sqrt{2}}, \quad R = \frac{\rho}{h'} = \frac{\rho h_0}{\sqrt{\mu}} = \frac{\rho}{m\sqrt{2\mu}}:$$

$$\frac{1}{m\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right) < h < \frac{1}{m\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right); \quad . \quad . \quad (a)$$

et la probabilité de ces limites est égale à $\frac{1}{2}$.

109. 2° *Détermination des limites probables de* r, *ou de l'erreur probable d'une observation.* Nous avons trouvé $r = \frac{\rho}{h}$; et si nous substituons à h ses limites probables, nous aurons une probabilité $\frac{1}{2}$ que

$$\frac{\rho}{\frac{1}{m\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right)} < r < \frac{\rho}{\frac{1}{m\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right)},$$

ou que,

$$\rho\sqrt{2}.m\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right) < r < \rho\sqrt{2}m\left(1 + \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right). \quad . \quad . \quad (b)$$

Calcul de m. Soient $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu$ les erreurs vraies des μ observations $w_1 \ldots w_\mu$ d'une inconnue x; les probabilités des erreurs

$$x - w_1 = \varepsilon_1 \text{ sont } P_{\varepsilon_1} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_1^2} d\varepsilon_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x - w_\mu = \varepsilon_\mu \qquad P_{\varepsilon_\mu} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_\mu^2} d\varepsilon_\mu.$$

La probabilité du concours de ces erreurs sera donc

$$P = \frac{h^\mu}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2(\varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_\mu^2)} d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_\mu;$$

et cette probabilité ne changera pas si l'on pose

$$\varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_\mu^2 = \mu m^2,$$

ou

$$m = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_\mu^2}{\mu}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

ou si l'on fait

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = m.$$

La formule (c) n'est pas propre au calcul de m; car on ne connaît pas les ε, x étant inconnu; mais en prenant pour x sa valeur la plus avantageuse

$$x = \frac{w_1 + \cdots + w_\mu}{\mu} = a,$$

on pourra calculer m.

On posera à cet effet

$$a - w_1 = \varepsilon_1' \ldots a - w_\mu = \varepsilon_\mu'; \quad x - a = \varepsilon.$$

et comme

$$x - w_1 = \varepsilon_1 \ldots x - w_\mu = \varepsilon_\mu,$$

il s'ensuivra :

$$\varepsilon_1' + \varepsilon = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu' + \varepsilon = \varepsilon_\mu;$$

d'où

$$\sum_1^\mu \varepsilon_i'^2 + 2\varepsilon\sum_1^\mu \varepsilon_i' + \mu\varepsilon^2 = \sum_1^\mu \varepsilon_i^2;$$

mais on a par définition $\sum_1^\mu \varepsilon_i' = 0$; donc

$$\sum_1^\mu \varepsilon_i'^2 + \mu\varepsilon^2 = \sum_1^\mu \varepsilon_i^2 = \mu m^2.$$

Si nous posons $\varepsilon^2 = \frac{m^2}{\mu}$, nous aurons

$$\sum_1^\mu \varepsilon_i'^2 = (\mu - 1)m^2;$$

d'où

$$m = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon_1'^2 + \cdots + \varepsilon_\mu'^2}{\mu - 1}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

110. *Généralisation de la formule*

$$P_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx.$$

Dans la démonstration de cette formule, nous avons supposé que les observations $w_1 \ldots w_\mu$ avaient la même probabilité $\frac{1}{\mu}$, c'est-à-dire la même précision.

Mais si ces valeurs $w_1 \ldots w_\mu$ se répètent respectivement $p_1 \ldots p_\mu$ fois, leurs probabilités ou leurs précisions seront respectivement

$$\frac{p_1}{p_1 + \cdots + p_\mu} \cdots \frac{p_\mu}{p_1 + \cdots + p_\mu};$$

dans ce cas la valeur la plus avantageuse ou la plus probable sera

$$a = \frac{p_1 w_1 + \cdots + p_\mu w_\mu}{p_1 + \cdots + p_\mu};$$

ce qui donne l'équitation

$$p_1 (w_1 - a) + \cdots + p_\mu (w_\mu - a) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

La formule (5) du n° 100 s'écrit alors

$$p_1 (w_1 - a) \frac{\varphi' (w_1 - a)}{p_1 (w_1 - a)} + \cdots + p_\mu (w_\mu - a) \frac{\varphi' (w_\mu - a)}{p_\mu (w_\mu - a)} = 0. \quad . \quad (5)$$

Et pour que ces deux équations aient lieu simultanément, il faut que

$$\frac{\varphi' x_1}{p_1 x_1} = \frac{\varphi' x_2}{p_2 x_2} = \cdots = \frac{\varphi' x_\mu}{p_\mu x_\mu};$$

d'où

$$\frac{\varphi' x}{p x} = k, \quad \text{et} \quad \varphi x = c e^{-p h^2 x^2}.$$

La détermination de la constante donnera

$$c = \frac{h \sqrt{p}}{\sqrt{\pi}};$$

d'où

$$P_x = \varphi x dx = \frac{h \sqrt{p}}{\sqrt{\pi}} e^{-p h^2 x^2} dx = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 x^2} dx,$$

en posant $h \sqrt{p} = H$.

Les géomètres allemands nomment la quantité p, le poids de x ou de l'observation correspondante w.

Ce poids exprime le nombre de répétitions d'une même observation w; c'est le numérateur de la fraction $\frac{p}{p_1 + \cdots + p_\mu}$ qui indique la probabilité approchée de w.

Donc si h est la mesure de précision d'une observation simple w, ou de son erreur x, $H = h \sqrt{p}$ sera celle de x lorsque l'observation w s'est répétée p fois.

L'erreur probable R sera dans ce cas

$$R = \frac{\rho}{H} = \frac{\rho}{h \sqrt{p}} = \frac{r}{\sqrt{p}},$$

r étant l'erreur probable d'une observation simple.

111. **Premier corollaire.** Pour deux séries d'observations du même genre, c'est-à-dire pour lesquelles h est le même, on aura

$$H = h \sqrt{p}; \quad H' = h \sqrt{p'};$$

donc

$$H^2 : H'^2 = p : p' :$$

les poids sont proportionnels aux carrés des mesures de précision.

Dans la même hypothèse, on a

$$R = \frac{\rho}{h} \frac{1}{\sqrt{p}}; \quad R' = \frac{\rho}{h} \frac{1}{\sqrt{p'}}:$$

donc

$$R^2 : R'^2 = p' : p :$$

les poids sont inversement proportionnels aux carrés des erreurs probables.

Enfin on a également

$$P_x = \frac{p \sqrt{h}}{\sqrt{\pi}} e^{-p h^2 x^2} dx; \quad P_{x'} = \frac{p' \sqrt{h}}{\sqrt{p}} e^{-p' h^2 x'^2} dx';$$

si donc $P_x = P_{x'}$, on aura

$$p h^2 x^2 = p' h^2 x'^2;$$

d'où

$$x' : x = \sqrt{p} : \sqrt{p'} : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

les erreurs également probables sont inversement proportionnelles aux racines carrées des poids.

112. **Deuxième corollaire.** La probabilité qu'une erreur x, qui se rapporte au poids p, est comprise entre $\pm a$ est :

$$P = \frac{p \sqrt{h}}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-p h^2 x^2} dx,$$

ou, par une transformation bien connue :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah\sqrt{p}} e^{-t^2} dt;$$

pour une erreur qui se rapporte au poids p' on aurait de même

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a'h\sqrt{p'}} e^{-t^2} dt.$$

P′ sera égal à P si

$$ah\sqrt{p} = a'h\sqrt{p'},$$

ou si

$$a : a' = \sqrt{p'} : \sqrt{p}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ce qui s'accorde avec la formule (1).

Si nous posons $y = y_1 y_2 \dots y_\mu$, la probabilité Y d'une valeur de x sera

$$Y = \frac{y dx}{\int_{-\infty}^{\infty} y dx};$$

ou en posant

$$\int_{-\infty}^{\infty} y dx = \frac{1}{K}:$$

$$Y = K y dx;$$

et, en remplaçant y par sa valeur :

$$Y = K \frac{h^\mu \sqrt{p_1 \dots p_\mu}}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2 \sum_1^\mu p_i \varepsilon_i^2} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Les observations w sont d'autant meilleures qu'elles diffèrent moins de x, ou que les erreurs ε sont plus faibles, ou que les probabilités P_ε de ces erreurs sont plus grandes.

La probabilité (1) est la plus grande possible quand on a

$$\sum_1^\mu p_i \varepsilon_i^2 = \sum_1^\mu p_i (x - w_i)^2 = \text{min.}$$

d'où

$$\sum_1^\mu p_i (x - w_i) = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{\sum_1^\mu p_i w_i}{\sum_1^\mu p_i} = a.$$

Démontrons que cette valeur de x est la plus avantageuse.

Posons $x = a + u$, u sera l'erreur de la moyenne arithmétique a; et l'on aura :

$$a + u - w_1 = \varepsilon_1 \dots a + u - w_\mu = \varepsilon_\mu;$$

et par suite, puisque $dx = du$:

$$Y = K \frac{h^\mu \sqrt{p_1 \dots p_\mu}}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2 \sum_1^\mu p_i (a - w_i + u)^2} du$$

$$= K \frac{h^\mu \sqrt{p_1 \dots p_\mu}}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2 \left\{ \left(\sum_1^\mu p_i\right) u^2 + 2u \sum_1^\mu p_i (a - w_i) + \sum_1^\mu p_i (a - w_i)^2 \right\}} du;$$

et comme $\Sigma p_i (a - w_i) = 0$:

$$Y = \frac{h^\mu \sqrt{p_1 \dots p_\mu}}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2 \left\{ u^2 \sum_1^\mu p_i + \sum_1^\mu p_i (a - w_i)^2 \right\}} du.$$

Or, si nous développons $\sum_1^\mu p_i (a - w_i)^2$, nous trouverons

$$\sum_1^\mu p_i (a - w_i)^2 = \sum_1^\mu p_i a^2 - 2a \sum_1^\mu p_i w_i + \sum_1^\mu p_i w_i^2$$

$$= \frac{\sum_1^\mu (p_i w_i)^2}{\left(\sum_1^\mu p_i\right)^2} \sum_1^\mu p_i - 2 \frac{\left(\sum_1^\mu p_i w_i\right)^2}{\sum_1^\mu (p_i)^2} \sum_1^\mu p_i + \sum_1^\mu p_i w_i^2$$

$$= \sum_1^\mu p_i w_i^2 - \frac{\left(\sum_1^\mu p_i w_i\right)^2}{\Sigma p_i};$$

et par suite

$$Y = K \frac{h^\mu \sqrt{p_1 \dots p_\mu}}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2 u^2 \sum_1^\mu p_i} . e^{-h^2 \left\{ \sum_1^\mu p_i w_i^2 - \frac{\left(\sum_1^\mu p_i w_i\right)^2}{\sum_1^\mu p_i} \right\}} du.$$

Pour déterminer K reprenons la valeur de Y

$$Y = \frac{y dx}{\int_{-\infty}^{\infty} y dx},$$

d'où l'on tire

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y dx = 1.$$

Nous aurons par suite

$$1 = K\frac{h^\mu\sqrt{p_1\ldots p_\mu}}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2\left\{\sum_1^\mu p_i w_i^2 - \frac{\left(\sum_1^\mu p_i w_i\right)^2}{\sum_1^\mu p_i}\right\}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\sum_1^\mu p_i u^2} du$$

$$= K\frac{h^\mu\sqrt{p_1\ldots p_\mu}}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2\left\{\sum_1^\mu p_i w_i^2 - \frac{\left(\sum_1^\mu p_i w_i\right)^2}{\sum_1^\mu p_i}\right\}} \frac{1}{h\sum_1^\mu p_i}\sqrt{\pi};$$

d'où

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} h\sqrt{\sum_1^\mu p_i} \frac{(\sqrt{\pi})^\mu}{h^\mu\sqrt{p_1\ldots p_\mu}} e^{-h^2\left\{\sum_1^\mu p_i w_i^2 - \frac{\left(\sum_1^\mu p_i w_i\right)^2}{\sum_1^\mu p_i}\right\}};$$

et substituant cette valeur dans l'expression précédente de Y, nous aurons :

$$Y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} h\sum_1^\mu p_i e^{-h^2u^2\sum_1^\mu p_i} du:$$

probabilité que u est l'erreur commise en prenant

$$x = \frac{\sum_1^\mu p_i w_i}{\sum_1^\mu p_i}.$$

On voit que le maximum de Y répond à $u = 0$, et par suite que

$$x = \frac{\sum_1^\mu p_i w_i}{\sum_1^\mu p_i}$$

est la valeur la plus avantageuse; ce maximum est

$$Y = \frac{h\sum_1^\mu p_i}{\sqrt{\pi}} du.$$

113. Corollaire. Si dans la formule

$$P_x = \frac{h\sqrt{\sum_1^\mu p_i}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2u^2\sum_1^\mu p_i} du$$

qui exprime la probabilité de l'erreur de

$$x = a = \frac{\sum_1^\mu p_i w_i}{\sum_1^\mu p_i},$$

on pose

$$H = h\sqrt{\sum_1^\mu p_i},$$

on aura

$$P_u = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2u^2} du.$$

Donc : 1° la mesure de précision de la moyenne

$$a = \frac{\sum_1^\mu p_i w_i}{\sum_1^\mu p_i}$$

est

$$h\sqrt{\sum_1^\mu p_i} = h\sqrt{p_1 + \cdots + p_\mu}.$$

2° Le poids de $x = a$ est

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu = \sum_1^\mu p_i;$$

la précision de a est donc proportionnelle à la racine carrée du poids.

3° L'erreur probable de la moyenne a est

$$R = \frac{\rho}{H} = \frac{\rho}{h\sqrt{\sum_1^\mu p_i}} = \frac{r}{\sqrt{\sum_1^\mu p_i}};$$

c'est-à-dire qu'on peut parier un contre un que

$$-\frac{r}{\sqrt{\Sigma p_i}} < u < \frac{r}{\sqrt{\Sigma p_i}}$$

ou que

$$a - R < x < a + R.$$

114. 2° Les observations ont la même précision. Dans ce cas on peut poser

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_\mu = 1;$$

d'où

$$\sum_1^\mu p_i = \mu; \quad \sum_1^\mu p_i w_i = \sum^\mu w_i.$$

Le résultat le plus avantageux sera

$$x = a' = \frac{\sum_1^\mu w_i}{\mu}.$$

La probabilité de l'erreur u' de ce résultat sera

$$P' = \frac{h\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu h^2 u'^2} du',$$

ou

$$P' = \frac{H'}{\sqrt{\pi}} e^{-H'^2 u'^2} du',$$

en posant $H' = h\sqrt{\mu}$.

Donc :

1° La mesure de précision de la moyenne $a' = \frac{\sum_1^\mu w_i}{\mu}$ est $h\sqrt{\mu}$.

2° Le poids de $x = a'$ est μ. La précision de a' est donc proportionnelle à la racine carrée du poids.

3° L'erreur probable de la moyenne a' est

$$R' = \frac{\rho}{H'} = \frac{\rho}{h\sqrt{\mu}} = \frac{r}{\sqrt{\mu}};$$

on a donc une probabilité $\frac{1}{2}$ que

$$a' - R' < x < a' + R'.$$

Remarque. L'erreur moyenne $m = \pm\sqrt{\frac{\sum_1^\mu \varepsilon_i'^2}{\mu - 1}}$ déduite d'une série d'observations $w_1 \ldots w_\mu$ exprime que l'erreur à craindre dans une nouvelle observation est comprise entre $\pm m$, ou que cette observation est comprise entre $a \pm m$. Soit w cette nouvelle

observation; ε son erreur; on aura, pour la probabilité que cette erreur est comprise entre $\pm m$:

$$P_\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-m}^{m} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^m e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hm} e^{-t^2} dt.$$

Pour une autre série d'observations on aurait

$$P_{\varepsilon'} = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m'} e^{-h'^2\varepsilon'^2} d\varepsilon' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h'm'} e^{-t^2} dt;$$

Si donc $P_\varepsilon = P_{\varepsilon'}$, on aura $hm = h'm'$, ou

$$m : m' = h' : h;$$

donc, toutes choses égales d'ailleurs, les erreurs moyennes sont inversement proportionnelles aux mesures de précision.

Ainsi les observations faites avec un instrument B, dont l'erreur moyenne est double de celle qui est relative aux observations de la même inconnue par un instrument A, sont de moitié moins précises que ces dernières.

Calcul approximatif de u et de u'.

115. *Calcul de u'.* Nous avons posé

$$x = a' + u' = \frac{\sum_1^\mu w_i}{\mu} + u';$$

et nous avons trouvé pour la probabilité de l'erreur u' commise en prenant pour x la moyenne arithmétique a' :

$$p_{u'} = \frac{h\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu h^2 u'^2} du'; \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

et pour la probabilité de l'erreur moyenne

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sum_1^\mu \varepsilon_i'^2}{\mu - 1}}$$

à craindre dans une observation future :

$$p_m = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2m^2} dm.$$

Or on peut supposer que la valeur moyenne a' se rencontre dans les observations futures ; alors u' aura la même probabilité que m, et de $p_{u'} = p_m$ on conclura

$$\mu h^2 u'^2 = h^2 m^2;$$

d'où

$$u' = \pm \frac{m}{\sqrt{\mu}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

et par conséquent :

$$a' - \frac{m}{\sqrt{\mu}} < x < a' + \frac{m}{\sqrt{\mu}}.$$

116. 2° *Calcul de u.* Une observation dont le poids est p_i, et l'erreur ε_i, prise parmi les observations $w_1 \ldots w_\mu$, peut être considérée comme étant la moyenne arithmétique

$$w_i = \frac{o_1 + o_2 + \cdots + o_{p_i}}{p_i} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

des p_i observations fictives o d'une même précision, ou ayant pour poids 1 ; car la probabilité de l'erreur ε_i de w_i est

$$p_{\varepsilon_i} = \frac{h\sqrt{p_i}}{\sqrt{\pi}} e^{-p_i h^2 \varepsilon_i^2} d\varepsilon_i$$

qui est de même forme que l'expression (β).

Soit u l'erreur moyenne d'une observation o, ou d'une observation dont le poids est 1 ; u'_i l'erreur de la moyenne (1) ; on aura, par la formule (a) :

$$u'_i = \pm \frac{K}{\sqrt{p_i}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

A l'aide de cette formule, on trouve aisément une valeur approchée de K ; car on peut d'abord, sans erreur sensible, remplacer u_i par ε_i, ce qui donne, au lieu de (b) :

$$p_i \varepsilon_i^2 = K^2;$$

d'où l'on tire, en faisant successivement $i = 1, 2 \ldots \mu$, et ajoutant

$$\mu K^2 = \sum_1^\mu p_i \varepsilon_i^2;$$

d'où

$$K = \pm \sqrt{\frac{\sum_1^\mu p_i \varepsilon_i^2}{\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dans cette formule, $\varepsilon_i = x - w_i$ est encore inconnu ; mais en prenant pour x la moyenne

$$a = \frac{\sum_1^\mu p_i w_i}{\sum_1^\mu p_i},$$

on connaîtra $\varepsilon_i' = a - w_i$, et il s'agira d'exprimer K en fonction de ε_i'.

Posons à cet effet $x - a = u$; d'où

$$\varepsilon_i' = a - w_i = x - w_i - u = \varepsilon_i - u;$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\sum_1^\mu p_i \varepsilon_i'^2 &= p_1 \varepsilon_1'^2 + \cdots + p_\mu \varepsilon_\mu'^2 = p_1(\varepsilon_1 - u)^2 + \cdots + p_\mu(\varepsilon_\mu - u)^2 \\ &= \sum_1^\mu p_i \varepsilon_i^2 - 2u \sum_1^\mu p_i \varepsilon_i + u^2 \sum_1^\mu p_i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_1^\mu p_i \varepsilon_i &= p_1 \varepsilon_1 + \cdots + p_\mu \varepsilon_\mu = p_1(x - w_1) + \cdots + p_\mu(x - w_\mu) \\ &= x\sum_1^\mu p_i - \sum_1^\mu p_i w_i = x \sum_1^\mu p_i - a \sum_1^\mu p_i = (x - a)\sum_1^\mu p_i = u \sum_1^\mu p_i.\end{aligned}$$

Et par suite

$$\sum_1^\mu p_i \varepsilon_i'^2 = \sum_1^\mu p_i \varepsilon_i^2 - u^2 \sum_1^\mu p_i.$$

Nous pourrons poser approximativement

$$u^2 \sum_1^\mu p_i = K^2;$$

car K et u sont à peu près inversement proportionnels à leurs poids 1 et $\sum_1^\mu p_i$: alors, en tenant compte de la formule (2), nous aurons :

$$\sum_1^\mu p_i \varepsilon_i'^2 = K^2(\mu - 1); \quad \text{d'où} \quad K = \pm \sqrt{\frac{\sum_1^\mu p_i \varepsilon_i'^2}{\mu - 1}}. \quad \ldots \quad (c)$$

K est l'erreur moyenne à craindre sur μ observations o de même précision dont le poids est pris pour unité.

La probabilité de K est

$$p_k = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2k^2} dk;$$

mais en supposant que la moyenne a se rencontre parmi les μ observations fictives o à venir, la probabilité de l'erreur u commise sur a, qui est

$$p_u = \frac{h\sqrt{\sum_1^\mu p_i}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2u^2\sum_1^\mu p_i} du$$

sera égale à p_k, et l'on aura, par suite :

$$h^2u^2 \sum_1^\mu p_i = h\mathrm{K}^2,$$

d'où

$$u = \pm \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{\sum_1^\mu p_i}} \cdot \quad \ldots \ldots \ldots \quad (d)$$

$\sum_1^\mu p_i$ est le poids P de u ; on peut donc écrire

$$u = \pm \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{\mathrm{P}}} \cdot$$

La formule (b) donne

$$p_i = \pm \frac{\mathrm{K}^2}{u_i'^2};$$

et par suite

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_1^\mu \frac{1}{u'^2}}} \cdot$$

Résumé des formules précédentes.

117. I. *Observations d'égale précision.*

$$x = \frac{\sum_1^\mu w_i}{\mu} = a', \quad \text{valeur la plus avantageuse.}$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{\sum_1^\mu \varepsilon_i'^2}{\mu - 1}}, \quad \text{erreur moyenne à craindre sur chaque nouvelle observation } w;$$

elle exprime que

$$a' - m < w < a' + m.$$

$$x' = a' + u'.$$

$$u' = \pm \frac{m}{\sqrt{\mu}}, \quad \text{erreur de la moyenne arithmétique } a';$$

elle exprime que

$$a' - \frac{m}{\sqrt{\mu}} < x < a' + \frac{m}{\sqrt{\mu}}.$$

μ est le poids de a'.

La précision de a' est proportionnelle à $\sqrt{\mu}$.

Les limites de l'erreur probable r d'une observation sont données par :

$$\rho\sqrt{2}m\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right) < r < \rho\sqrt{2}m\left(1 + \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right).$$

L'erreur probable de la moyenne a' est

$$\mathrm{R}' = \frac{\rho}{\mathrm{H}'} = \frac{\rho}{h\sqrt{\mu}} = \frac{r}{\sqrt{\mu}};$$

c'est-à-dire qu'on pourra parier un contre un que

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}}\rho\sqrt{2}m\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right) < \mathrm{R}' < \frac{1}{\sqrt{\mu}}\rho\sqrt{2}m\left(1 + \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right);$$

et que

$$a' - \mathrm{R}' < x < a' + \mathrm{R}'.$$

118. II. *Observations de précisions diverses.*

$$x = \frac{\sum_1^\mu p_i w_i}{\sum_1^\mu p_i} = a, \quad \text{valeur la plus avantageuse.}$$

$$\mathrm{K} = \pm \sqrt{\frac{\sum_1^\mu p_i \varepsilon_i'^2}{\mu - 1}}, \quad \text{valeur moyenne des observations } o \text{ de même précision dont le poids est pris pour unité;}$$

de sorte que

$$o - \mathrm{K} < w < o + \mathrm{K}.$$

$u'_i = \pm \dfrac{\mathrm{K}}{\sqrt{p_i}}$, erreur de w_i, en regardant w_i comme une moyenne arithmétique de p_i observations o d'égale précision ;

elle exprime que

$$w_i - u'_i < x < w_i + u'_i.$$

$u = \pm \dfrac{\mathrm{K}}{\sum_1^\mu p_i}$, erreur de a;

elle exprime que

$$a - \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{\sum_1^\mu p_i}} < x < a + \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{\sum_1^\mu p_i}}.$$

119. Premier exemple. *Observations d'égale précision.* Un angle a été mesuré, sans répétition, quatorze fois avec le même théodolite, et par le même observateur. Voici le tableau des observations :

Nos D'ORDRE.	$w.$	ε' $a'-w.$	$\varepsilon'^2.$
1	17°56'45",00	— 5",37	28",84
2	31,25	+ 8,38	70,22
3	42,50	— 2,87	8,24
4	45,00	— 5,37	28,84
5	37,50	+ 2,13	4,54
6	38,33	+ 1,30	1,69
7	27,50	+12,13	147,14
8	43,33	— 3,70	13,69
9	40,63	— 1,00	1,00
10	36,25	+ 3,38	11,42
11	42,50	— 2,87	8,24
12	39,17	+ 0,46	0,21
13	45,00	— 5,37	28,84
14	40,83	— 1,20	1,44
	Σw_i=554,79 =14 w	+27,78 —27,75	$\Sigma \varepsilon'^2$=354,35

w = .../39,63

1° $\quad a' = \dfrac{\sum_1^\mu w_i}{\mu} = \dfrac{554'',79}{14} = 59'',63.$

2° $\quad \varepsilon' = a' - w_i.$ } se trouvent dans le tableau.
3° $\quad \varepsilon'^2.$

4° $\quad m = \sqrt{\dfrac{\Sigma \varepsilon'^2}{\mu - 1}} = \sqrt{\dfrac{354,35}{13}} = 5'',22;$

l'erreur à craindre dans une nouvelle observation est donc comprise entre

$$59,63 - 5,22 = 54'',41$$

et

$$59,63 + 5,22 = 44'',85.$$

5° $\quad u' = \pm \dfrac{m}{\sqrt{\mu}} = \pm \dfrac{5,22}{\sqrt{14}} = \pm 1'',40;$

la vraie valeur de l'angle est donc comprise entre

$$59,63 - 1,40 = 58'',23$$

et

$$59,63 + 1,40 = 41'',03.$$

6° On trouvera, par les formules relatives aux limites de r et de R', qu'on peut parier un contre un que

$$r \text{ est entre } \pm 5'',52, \ \mathrm{R}' \text{ entre } \pm 0'',94;$$

ou qu'une observation future sera comprise entre

$$59,63 - 5,52 = 56'',11$$

et

$$59,63 + 5,52 = 45'',15.$$

et que la vraie valeur de x est entre

$$59,63 - 0,94 = 58'',69$$

et

$$59,63 + 0,94 = 40'',57.$$

120. Deuxième exemple. *Observations d'inégale précision.* Le

même angle a été observé, avec répétition, quatorze fois; on a formé le tableau suivant des observations :

Nos d'ordre.	p.	w.	pw.	ε'.	$p\varepsilon'$.	ε'^2.	$p\varepsilon'^2$.
1	5	17°56′45″,00	225,00	— 5,22	— 26,10	27,248	136,24
2	4	31,35	125,00	8,53	34,12	72,761	291,04
3	5	42,50	212,50	— 2,72	— 13,60	7,398	36,99
4	3	45,00	135,00	— 5,22	— 15,66	27,248	81,74
5	3	37,50	112,50	2,28	6,84	5,198	15,59
6	3	38,33	115,00	1,45	4,35	2,103	6,31
7	3	27,50	82,50	12,28	36,84	150,798	452,39
8	3	43,33	130,00	— 3,55	— 10,65	12,603	37,81
9	4	40,63	162,50	— 0,85	— 3,40	0,723	2,89
10	2	36,25	72,50	3,53	7,06	12,461	24,92
11	3	42,50	127,50	— 2,72	— 8,16	7,398	22,19
12	3	39,17	117,50	0,61	1,83	0,372	1,12
13	2	45,00	90,00	— 5,22	— 10,44	27,248	54,49
14	3	40,83	122,50	— 1,05	3,15	1,103	3,31
	46		1830,00		91,04 — 91,16		1167,03

$$1^\circ\quad a=\frac{\sum_1^\mu p_i\omega_i}{\sum_1^\mu p_i}=\frac{1850}{46}=59''78\,;$$

2° $\varepsilon'=a-\omega_i$;

3° $p\varepsilon'$; pour la vérification, il faut que $\sum_1^\mu p_i\varepsilon'_i=0$

4° ε'^2 et $p\varepsilon'^2$;

Ces valeurs sont données dans le tableau.

$$5^\circ\quad K=\sqrt{\frac{\sum_1^\mu p_i\varepsilon_i'^2}{\mu-1}}=\sqrt{\frac{1167,05}{13}}=\pm\,9''475\,;$$

$$6^\circ\quad u=\frac{\pm K}{\sqrt{\sum_1^\mu p_i}}=\frac{\pm\,9,475}{\sqrt{46}}=\pm\,1''397\,;$$

$$7^\circ\quad u'_i=\pm\frac{K}{\sqrt{p_i}}$$

donnera :

$$u'_1=u'_3=\pm\frac{9,475}{\sqrt{5}}=\pm\,4''24\,,$$

$$u'_2=u'_9=\pm\,4''74\,,$$

$$u'_4=u'_5=u'_6=u'_7=u'_8=u'_{11}=u'_{12}=u'_{14}=\pm\,5''47\,,$$

$$u'_{10}=u'_{13}=\pm\,6''70.$$

§ 3. — VALEUR LA PLUS AVANTAGEUSE D'UNE INCONNUE DONT UNE FONCTION EST DONNÉE PAR UN GRAND NOMBRE D'OBSERVATIONS.

121. I. *Équations de condition.*

Soit φ une fonction $f(X)$ de l'inconnue X, donnée par μ observations $\varphi_1\ldots\varphi_\mu$; A une valeur très-approchée de X; x sa correction très-petite, de sorte que

$$X=A+x.$$

Soient $\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\mu$ les erreurs des observations; les valeurs exactes seront $\varphi_1+\varepsilon_1\ldots\varphi_\mu+\varepsilon_\mu$; et l'on aura

$$\varphi_1+\varepsilon_1=f_1(A+x)=f_1A+f'_1A.x+\frac{f''A}{1.2}x^2+\cdots=f_1A+f'_1Ax,$$

x étant très-petit,

. . . .

$$\varphi_\mu+\varepsilon_\mu=f_\mu A+f'_\mu Ax.$$

Ou, si nous posons $f_1A=\alpha_1\ldots f_\mu A=\alpha_\mu$; $f'_1A=a_1\ldots f'_\mu A=a_\mu$:

d'où

$$\varphi_1+\varepsilon_1=\alpha_1+a_1x\;\ldots\ldots\;\varphi_\mu+\varepsilon_\mu=\alpha_\mu+a_\mu x\,;$$

$$\varepsilon_1=\alpha_1-\varphi_1+a_1x\;\ldots\ldots\;\varepsilon_\mu=\alpha_\mu-\varphi_\mu+a_\mu x\,;$$

ou enfin, en faisant $\alpha_1-\varphi_1=n_1\ldots\alpha_\mu-\varphi_\mu=n_\mu$:

$$\varepsilon_1=n_1+a_1x\;\ldots\ldots\;\varepsilon_\mu=n_\mu+a_\mu x.$$

122. II. *Valeur la plus avantageuse de* x.

1° Les observations sont supposées de même précision.

Les probabilités des erreurs $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu$ seront respectivement

$$p_{\varepsilon_1} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\varepsilon_1^2}\, d\varepsilon_1 \;\ldots\ldots\; p_{\varepsilon_\mu} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\varepsilon_\mu^2}\, d\varepsilon_\mu\,;$$

et la probabilité de l'existence simultanée de ces erreurs sera

$$\mathrm{P} = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{\mu} e^{-h^2\sum\limits_1^{\mu}\varepsilon_i^2}\, d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_\mu.$$

Cette probabilité sera un maximum pour

$$\sum_1^{\mu}\varepsilon_i^2 = \text{min.}; \quad \text{ou} \quad (n_1 + a_1 x)^2 + \cdots + (n_\mu + a_\mu x)^2 = \text{min.}$$

d'où :

$$a_1(n_1 + a_1 x) + \cdots + a_\mu(n_\mu + a_\mu x) = 0,$$

et par suite

$$x = -\frac{\sum\limits_1^{\mu} n_i a_i}{\sum\limits_1^{\mu} a_i^2} = a.$$

Démontrons que cette valeur est la plus avantageuse.

Soit u l'erreur commise en prenant x pour la valeur a; de sorte que $x = a + u$, et cherchons la valeur la plus probable de x.

Si nous représentons par Y l'expression

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{\mu} e^{-h^2\sum\limits_1^{\mu}(n_i + a_i x)^2}$$

qui est, au facteur $d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_\mu$ près, la probabilité de l'existence simultanée des erreurs $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu$, la probabilité d'une valeur de x sera

$$\mathrm{P}_x = \frac{\mathrm{Y}dx}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Y}dx} = \frac{e^{-h^2\sum\limits_1^{\mu}(n_i + a_i x)^2}\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\sum\limits_1^{\mu}(n_i + a_i x)^2}\,dx} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}.$$

123. *Calcul de* **N.** Appelons u l'erreur commise en prenant x égal à a, nous aurons

$$x = -\frac{\sum\limits_1^{\mu} n_i a_i}{\sum\limits_1^{\mu} a_i^2} + u\,;$$

et

$$\mathrm{N} = e^{-h^2\sum\limits_1^{\mu}(n_i + a_i x)^2}\, dx$$

$$= e^{-h^2\left\{\left[n_1 + a_1 u - a_1\frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2}\right]^2 + \cdots + \left[n_\mu + a_\mu u - a_\mu\frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2}\right]^2\right\}}\, du$$

$$= du \,.\, e^{-h^2\left\{a_1^2u^2 + 2a_1 u\left(n_1 - a_1\frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2}\right) + \left(n_1 - a_1\frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2}\right)^2 + \cdots + a_\mu^2 u^2 + 2a_\mu u\left(n_\mu - a_\mu\frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2}\right) + \left(n_\mu - a_\mu\frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2}\right)^2\right\}}$$

$$= du \,.\, e^{-h^2\left\{\left(n_1 - a_1\frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2}\right)^2 + \cdots + \left(n_\mu - a_\mu\frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2}\right)^2\right\}}$$

$$\times\, e^{-2h^2 u\left\{a_1\left(n_1 - a_1\frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2}\right) + \cdots + a_\mu\left(n_\mu - a_\mu\frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2}\right)\right\}}$$

$$\times\, e^{-h^2u^2(a_1^2 + \cdots + a_\mu^2)}.$$

Le premier facteur de du étant constant disparaîtra comme commun à N et à D; le second est égal à l'unité, car son exposant se réduit à $\Sigma n_i a_i - \Sigma a_i^2\frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2} = 0$; il reste donc :

$$\mathrm{N} = e^{-h^2u^2\sum\limits_1^{\mu}a_i^2}\, du.$$

124. *Calcul de* **D.** En laissant de côté les deux facteurs énumérés précédemment, l'expression de D se réduit à

$$\mathrm{D} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2u^2\sum\limits_1^{\mu}a_i^2}\, du,$$

qu'on ramène aisément à celle-ci

$$\mathrm{D} = \frac{1}{h\sum\limits_1^{\mu}a_i^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} = \frac{1}{h\sqrt{\sum\limits_1^{\mu}a_i^2}}\sqrt{\pi}.$$

Et par suite

$$P_x = \frac{h\sqrt{\sum_1^\mu a_i^2}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2u^2\sum_1^\mu a_i^2} du.$$

Cette probabilité est la plus grande possible quand $u=0$; et par suite la valeur

$$x = -\frac{\sum_1^\mu n_i a_i}{\sum_1^\mu a_i^2}$$

est la plus avantageuse.

Le poids de cette détermination de x est

$$\sqrt{\sum_1^\mu a_i^2}.$$

La probabilité que u est compris entre $\pm\delta$ sera :

$$P = \frac{h\sqrt{\sum_1^\mu a_i^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-h^2u^2\sum_1^\mu a_i^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\delta h\sqrt{\sum_1^\mu a_i^2}} e^{-t^2} dt.$$

2° En supposant que les observations soient d'inégale précision, on trouvera :

$$x = -\frac{\sum_1^\mu p_i n_i a_i}{\sum_1^\mu p_i a_i^2}.$$

§ 4. — DÉTERMINATION DES VALEURS LES PLUS PROBABLES DE PLUSIEURS INCONNUES, UNE FONCTION DE CES INCONNUES ÉTANT DONNÉE PAR PLUSIEURS OBSERVATIONS.

Observations de même précision.

125. I. *Équations de condition.* Supposons une fonction de six inconnues

$$\varphi = F(X, Y, Z, U, V, T),$$

donnée par les μ observations d'égale précision h : $\varphi_1 \ldots \varphi_\mu$.

Soient $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu$ les erreurs des observations, de sorte que les vraies valeurs de la fonction seront

$$\varphi_1 + \varepsilon_1 \ldots\ldots \varphi_\mu + \varepsilon_\mu.$$

Représentons par X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, T_0 des valeurs très-approchées des inconnues, et par x, y, z, u, v, t leurs corrections très-petites; de sorte que

$$X = X_0 + x, \text{ etc.}$$

Posons

$$F_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, T_0) = F_1; \text{ etc}; \quad F_\mu(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, T_0) = F_\mu$$

$$\frac{dF_1}{dX_0} = a_1, \quad \frac{dF_1}{dY_0} = b_1, \quad \frac{dF_1}{dZ_0} = c_1, \quad \frac{dF_1}{dU_0} = d_1, \quad \frac{dF_1}{dV_0} = e_1, \quad \frac{dF_1}{dT_0} = f_1, \text{ etc.}$$

$$\frac{dF_\mu}{dX_0} = a_\mu, \text{ etc.}$$

En remplaçant la fonction et les inconnues par leurs valeurs dans la première équation, nous aurons

$$\varepsilon_1 + \varphi_1 = F_1(X_0 + x, \ldots, T_0 + t), \text{ etc.}; \ \varepsilon_\mu + \varphi_\mu = F_\mu(X_0 + x, \ldots, T_0 + t);$$

ou, en développant et négligeant les termes d'ordres supérieurs :

$$\varepsilon_1 + \varphi_1 = F_1 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1u + e_1v + f_1t, \text{ etc.};$$
$$\varepsilon_\mu + \varphi_\mu = F_\mu + a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu u + e_\mu v + f_\mu t.$$

ou bien, en posant $F_1 - \varphi_1 = n_1$, etc., nous aurons les équations de condition

$$\varepsilon_1 = n_1 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1u + e_1v + f_1t, \text{ etc.};$$
$$\varepsilon_\mu = n_\mu + a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu u + e_\mu v + f_\mu t.$$

126. II. *Valeurs les plus probables des inconnues* x, y, ... t.

Les probabilités des erreurs $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu$ sont (n° 99) :

$$p_{\varepsilon_1} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_1^2} d\varepsilon_1 \ldots\ldots p_{\varepsilon_\mu} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_\mu^2} d\varepsilon_\mu;$$

et la probabilité de leur concours :

$$\mathrm{P} = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{\mu} e^{-h^2 \sum_1^{\mu} \varepsilon_i^2}\, d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_\mu .$$

Cette probabilité est un maximum lorsque

$$\Omega = \sum_1^{\mu} \varepsilon_i^2 = \text{min.};$$

c'est-à-dire quand $x, y \dots t$ seront déterminés par les équations :

$$\frac{d\Omega}{dx} = 0 = \sum_1^{\mu} \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx} = \varepsilon_1 \frac{d\varepsilon_1}{dx} + \dots + e_\mu \frac{d\varepsilon_\mu}{dx} = a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_\mu \varepsilon_\mu ,$$

$$\frac{d\Omega}{dy} = 0 = \sum_1^{\mu} \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dy} = \varepsilon_1 \frac{d\varepsilon_1}{dy} + \dots + e_\mu \frac{d\varepsilon_\mu}{dy} = b_1 e_1 + \dots + b_\mu \varepsilon_\mu , \text{ etc.};$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0 = \sum_1^{\mu} \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \varepsilon_1 \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \dots + e_\mu \frac{d\varepsilon_\mu}{dt} = f_1 \varepsilon_1 + \dots + f_\mu \varepsilon_\mu .$$

Si nous substituons aux ε leurs valeurs, et que nous posions, pour abréger :

$$a_1^2 + \dots + a_\mu^2 = [aa]; \quad a_1 b_1 + \dots + a_\mu b_\mu = [ab], \text{ etc.},$$

nous aurons les six équations :

$$\begin{aligned}
&[aa]\, x + [ab]\, y + [ac]\, z + [ad]\, u + [ae]\, v + [af]\, t + [an] = 0 ,\\
&[ab]\, x + [bb]\, y + [bc]\, z + [bd]\, u + [be]\, v + [bf]\, t + [bn] = 0 ,\\
&[ac]\, x + [bc]\, y + [cc]\, z + [cd]\, u + [ce]\, v + [cf]\, t + [cn] = 0 ,\\
&[ad]\, x + [bd]\, y + [cd]\, z + [dd]\, u + [de]\, v + [df]\, t + [dn] = 0 ,\\
&[ae]\, x + [be]\, y + [ce]\, z + [de]\, u + [ee]\, v + [ef]\, t + [en] = 0 ,\\
&[af]\, x + [bf]\, y + [cf]\, z + [df]\, u + [ef]\, v + [ff]\, t + [fn] = 0.
\end{aligned}$$

Ces six équations serviront à déterminer les six inconnues $x, y \dots t$.

127. III. *Élimination (par substitution).*

De la première équation nous tirerons x que nous substituerons dans les cinq autres;

De la première de celles-ci, nous tirerons y, que nous substituerons dans les quatre autres;

De la première de celles-ci, nous tirerons z, que nous substituerons dans les trois autres, et ainsi de suite.

La première des six équations donne

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[ad]}{[aa]}u - \frac{[ae]}{[aa]}v - \frac{[af]}{[aa]}t - \frac{[an]}{[aa]} .$$

Substituons cette valeur dans les cinq autres, et posons, pour abréger :

$$[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = (bb \,.\, 1); \qquad [cc] - \frac{[ad]}{[aa]}[ac] = (cc \,.\, 1);$$

$$[bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] = (bc \,.\, 1); \qquad [cd] - \frac{[ac]}{[aa]}[ad] = (cd \,.\, 1);$$

$$[bd] - \frac{[ab]}{[aa]}[ad] = (bd \,.\, 1); \qquad [ce] - \frac{[ac]}{[aa]}[ae] = (ce \,.\, 1);$$

$$[be] - \frac{[ab]}{[aa]}[ae] = (be \,.\, 1); \qquad [cf] - \frac{[ae]}{[aa]}[af] = (cf \,.\, 1);$$

$$[bf] - \frac{[ab]}{[aa]}[af] = (bf \,.\, 1);$$

$$[dd] - \frac{[ad]}{[aa]}[ad] = (dd \,.\, 1); \qquad [ee] - \frac{[ae]}{[aa]}[ae] = (ee \,.\, 1);$$

$$[de] - \frac{[ad]}{[aa]}[ae] = (de \,.\, 1); \qquad [ef] - \frac{[ae]}{[aa]}[af] = (ef \,.\, 1);$$

$$[df] - \frac{[ad]}{[aa]}[af] = (df \,.\, 1); \qquad [ff] - \frac{[af]}{[aa]}[af] = (ff \,.\, 1);$$

$$[bn] - \frac{[ab]}{[aa]}[an] = (bn \,.\, 1);$$

$$[cn] - \frac{[ac]}{[aa]}[an] = (cn \,.\, 1);$$

$$[dn] - \frac{[ad]}{[aa]}[an] = (dn \,.\, 1);$$

$$[en] - \frac{[ae]}{[aa]}[an] = (en \,.\, 1);$$

$$[fn] - \frac{[af]}{[aa]}[an] = (fn \,.\, 1).$$

Nous aurons ainsi les cinq équations :

$$(bb.1)\,y + (bc.1)\,z + (bd.1)\,u + (be.1)\,v + (bf.1)\,t + (bn.1) = 0,$$
$$(bc.1)\,y + (cc.1)\,z + (cd.1)\,u + (ce.1)\,v + (cf.1)\,t + (cn.1) = 0,$$
$$(bd.1)\,y + (cd.1)\,z + (dd.1)\,u + (de.1)\,v + (df.1)\,t + (dn.1) = 0,$$
$$(be.1)\,y + (ce.1)\,z + (de.1)\,u + (ee.1)\,v + (ef.1)\,t + (en.1) = 0,$$
$$(bf.1)\,y + (cf.1)\,z + (df.1)\,u + (ef.1)\,v + (ff.1)\,t + (fn.1) = 0.$$

128. On tire de la première de ces équations :

$$y = -\frac{(bc.1)}{(bb.1)}z - \frac{(bd.1)}{(bb.1)}u - \frac{(be.1)}{(bb.1)}v - \frac{(bf.1)}{(bb.1)}t - \frac{(bn.1)}{(bb.1)}.$$

Substituons cette valeur dans les quatre autres équations, et posons :

$$(cc.1) - \frac{(bc.1)}{(bb.1)}(bc.1) = (cc.2); \qquad (dd.1) - \frac{(bd.1)}{(bb.1)}(bd.1) = (dd.2);$$
$$(cd.1) - \frac{(bc.1)}{(bb.1)}(bd.1) = (cd.2); \qquad (de.1) - \frac{(bd.1)}{(bb.1)}(be.1) = (de.2);$$
$$(ce.1) - \frac{(bc.1)}{(bb.1)}(be.1) = (ce.2); \qquad (df.1) - \frac{(bd.1)}{(bb.1)}(bf.1) = (df.2);$$
$$(cf.1) - \frac{(bc.1)}{(bb.1)}(bf.1) = (cf.2);$$

$$(ee.1) - \frac{(be.1)}{(bb.1)}(be.1) = (ee.2); \qquad (ff.1) - \frac{(bf.1)}{(bb.1)}(bf.1) = (ff.2);$$
$$(ef.1) - \frac{(be.1)}{(bb.1)}(bf.1) = (ef.2);$$

$$(cn.1) - \frac{(bc.1)}{(bb.1)}(bn.1) = (cn.2);$$
$$(dn.1) - \frac{(bd.1)}{(bb.1)}(bn.1) = (dn.2);$$
$$(en.1) - \frac{(be.1)}{(bb.1)}(bn.1) = (en.2);$$
$$(fn.1) - \frac{(bf.1)}{(bb.1)}(bn.1) = (fn.2);$$

nous aurons les quatre équations :

$$(cc.2)\,z + (cd.2)\,u + (ce.2)\,v + (cf.2)\,t + (cn.2) = 0,$$
$$(cd.2)\,z + (dd.2)\,u + (de.2)\,v + (df.2)\,t + (dn.2) = 0,$$
$$(ce.2)\,z + (de.2)\,u + (ee.2)\,v + (ef.2)\,t + (en.2) = 0,$$
$$(cf.2)\,z + (df.2)\,u + (ef.2)\,v + (ff.2)\,t + (fn.2) = 0,$$

129. De la première on tire :

$$z = -\frac{(cd.2)}{(cc.2)}u - \frac{(ce.2)}{(cc.2)}v - \frac{(cf.2)}{(cc.2)}t - \frac{(cn.2)}{(cc.2)}.$$

Substituons cette valeur dans les trois autres équations, et posons pour abréger :

$$(dd.2) - \frac{(cd.2)}{(cc.2)}(cd.2) = (dd.3); \qquad (ee.2) - \frac{(ce.2)}{(cc.2)}(ce.2) = (ee.3);$$
$$(de.2) - \frac{(cd.2)}{(cc.2)}(ce.2) = (de.3); \qquad (ef.2) - \frac{(ce.2)}{(cc.2)}(cf.2) = (ef.3);$$
$$(df.2) - \frac{(cd.2)}{(cc.2)}(cf.2) = (df.3);$$

$$(ff.2) - \frac{(cf.2)}{(cc.2)}(cf.2) = (ff.3);$$

$$(dn.2) - \frac{(cd.2)}{(cc.2)}(cn.2) = (dn.3);$$
$$(en.2) - \frac{(ce.2)}{(cc.2)}(cn.2) = (en.3);$$
$$(fn.2) - \frac{(cf.2)}{(cc.2)}(cn.2) = (fn.3);$$

nous aurons les trois équations :

$$(dd.3)\,u + (de.3)\,v + (df.3)\,t + (dn.3) = 0,$$
$$(de.3)\,u + (ee.3)\,v + (ef.3)\,t + (en.3) = 0,$$
$$(df.3)\,u + (ef.3)\,v + (ff.3)\,t + (fn.3) = 0,$$

130. De la première on tire :

$$u = -\frac{(de.5)}{(dd.5)}v - \frac{(df.5)}{(dd.5)}t - \frac{(dn.5)}{(dd.5)}.$$

Substituons dans les deux autres, et posons, pour abréger :

$$(ee.5) - \frac{(de.5)}{(dd.5)}(de.5) = (ee.4), \quad (ff.5) - \frac{(de.5)}{(dd.5)}(df.5) = (ff.4)$$

$$(ef.5) - \frac{(de.5)}{(dd.5)}(df.5) = (ef.4),$$

$$(en.5) - \frac{(de.5)}{(dd.5)}(dn.5) = (en.4),$$

$$(fn.5) - \frac{(df.5)}{(dd.5)}(dn.5) = (fn.4);$$

nous aurons :

$$(ee.4)v + (ef.4)t + (en.4) = 0,$$
$$(ef.4)v + (ff.4)t + (fn.4) = 0.$$

131. On tire de la première :

$$v = -\frac{(ef.4)}{(ee.4)}t - \frac{(en.4)}{(ee.4)}.$$

Substituons dans la seconde, et posons

$$(ff.4) - \frac{(ef.4)}{(ee.4)}(ef.4) = (ff.5),$$

$$(fn.4) - \frac{(ef.4)}{(ee.4)}(en.4) = (fn.5);$$

nous aurons

$$(ff.5)t + (fn.5) = 0,$$

d'où

$$t = -\frac{(fn.5)}{(ff.5)}.$$

132. Résumé :

$$x + \frac{[ab]}{[aa]}y + \frac{[ac]}{[aa]}z + \frac{[ad]}{[aa]}u + \frac{[ae]}{[aa]}v + \frac{[af]}{[aa]}t + \frac{[an]}{[aa]} = 0,$$

$$y + \frac{(bc.1)}{(bb.1)}z + \frac{(bd.1)}{(bb.1)}u + \frac{(be.1)}{(bb.1)}v + \frac{(bf.1)}{(bb.1)}t + \frac{(bn.1)}{(bb.1)} = 0,$$

$$z + \frac{(cd.1)}{(cc.2)}u + \frac{(ce.2)}{(cc.2)}v + \frac{(cf.2)}{(cc.2)}t + \frac{(cn.2)}{(cc.2)} = 0,$$

$$u + \frac{(de.5)}{(dd.5)}v + \frac{(df.5)}{(dd.5)}t + \frac{(dn.5)}{(dd.5)} = 0,$$

$$v + \frac{(ef.4)}{(ee.4)}t + \frac{(en.4)}{(ee.4)} = 0,$$

$$t + \frac{(fn.5)}{(ff.5)} = 0.$$

133. Théorème. *Je dis actuellement que si l'on pose :*

$$\begin{aligned}
A &= [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]u + [ae]v + [af]t + [an],\\
B' &= (bb.1)y + (bc.1)z + (bd.1)u + (be.1)v + (bf.1)t + (bn.1),\\
C'' &= (cc.2)z + (cd.2)u + (ce.2)v + (cf.2)t + (cn.2),\\
D''' &= (dd.5)u + (de.5)v + (df.5)t + (dn.5),\\
E^{\text{IV}} &= (ee.4)v + (ef.4)t + (en.4),\\
F^{\text{V}} &= (ff.5)t + (fn.5);
\end{aligned}$$

1° *La valeur de* Ω *ou* $\sum_1^{\mu}\varepsilon_i^2$ *sera donnée par une expression de la forme*

$$\Omega = \frac{A^2}{[aa]} + \frac{B'^2}{(bb.1)} + \frac{C''^2}{(cc.2)} + \frac{D'''^2}{(dd.5)} + \frac{E^{\text{IV}2}}{(ee.4)} + \frac{F^{\text{V}2}}{(ff.5)} + (nn.6);$$

2° *Les dénominateurs* [aa], (bb.1), ... (ff.5) *seront tous positifs.*

Démonstration. 1° Reprenons la valeur de Ω (n^{os} 125-126)

$$\Omega = (a_1x + b_1y + \cdots + f_1t + n_1)^2 + \cdots + (a_\mu x + b_\mu y + \cdots + f_\mu t + n_\mu)^2;$$

développons les carrés, et ordonnons, nous trouverons :

$$\begin{aligned}
\Omega = & [aa]\,x^2 + 2\left\{[ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,u + [ae]\,v + [af]\,t + [an]\right\} x \\
& + [bb]\,y^2 + 2\left\{[bc]\,z + [bd]\,u + [be]\,v + [bf]\,t + [bn]\right\} y \\
& + [cc]\,z^2 + 2\left\{[cd]\,u + [ce]\,v + [cf]\,t + [cn]\right\} z \\
& + [dd]\,u^2 + 2\left\{[de]\,v + [df]\,t + [dn]\right\} u \\
& + [ee]\,v^2 + 2\left\{[ef]\,t + [en]\right\} v \\
& + [ff]\,t^2 + 2\ \ [fn]\,t + [nn]. \\
& = \mathrm{P}x^2 + 2\mathrm{Q}x + \mathrm{R} = \frac{(\mathrm{P}x + \mathrm{Q})^2}{\mathrm{P}} + \mathrm{R} - \frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{P}},
\end{aligned}$$

en faisant pour abréger :

$$\mathrm{P} = [aa]$$
$$\mathrm{Q} = [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,u + [ae]\,v + [af]\,t + [an];$$

d'où

$$\mathrm{P}x + \mathrm{Q} = \mathrm{A}.$$

134. Mais on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{P}} = & \frac{[ab]^2}{[aa]}y^2 + 2\left\{\frac{[ab]}{[aa]}[ac]\,z + \frac{[ab]}{[aa]}[ad]\,u + \frac{[ab]}{[aa]}[ae]\,v + \frac{[ab]}{[aa]}[af]\,t + \frac{[ab]}{[aa]}[an]\right\} y \\
& + \frac{[ac]^2}{[aa]}z^2 + 2\left\{\frac{[ac]}{[aa]}[ad]\,u + \frac{[ac]}{[aa]}[ae]\,v + \frac{[ac]}{[aa]}[af]\,t + \frac{[ac]}{[aa]}[an]\right\} z \\
& + \frac{[ad]^2}{[aa]}u^2 + 2\left\{\frac{[ad]}{[aa]}[ae]\,v + \frac{[ad]}{[aa]}[af]\,t + \frac{[ad]}{[aa]}[an]\right\} u \\
& + \frac{[ae]^2}{[aa]}v^2 + 2\left\{\frac{[ae]}{[aa]}[af]\,t + \frac{[ae]}{[aa]}[an]\right\} v \\
& + \frac{[af]^2}{[aa]}t^2 + 2\ \ \frac{[af]}{[aa]}[an]\,t + \frac{[an]^2}{[aa]}.
\end{aligned}$$

Si donc nous posons

$$[nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} = (nn\,.\,1),$$

nous trouverons

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} - \frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{P}} = \Omega - \frac{(\mathrm{P}x + \mathrm{Q})^2}{\mathrm{P}} = \Omega - \frac{\mathrm{A}^2}{[aa]} \\
= & (bb\,.\,1)\,y^2 + 2\left\{(bc\,.\,1)\,z + (bd\,.\,1)\,u + (be\,.\,1)\,v + (bf\,.\,1)\,t + (bn.1)\right\} y \\
& + (cc\,.\,1)\,z^2 + 2\left\{(cd\,.\,1)\,u + (ce\,.\,1)\,v + (cf\,.\,1)\,t + (cn.1)\right\} z \\
& + (dd.1)\,u^2 + 2\left\{(de\,.\,1)\,v + (df\,.\,1)\,t + (dn.1)\right\} u \\
& + (ee\,.\,1)\,v^2 + 2\left\{(ef\,.\,1)\,t + (en\,.\,1)\right\} v \\
& + (ff\,.\,1)\,t^2 + 2\ \ (fn\,.\,1)\,t + (nn.1) \\
& = \mathrm{P}'y^2 + 2\mathrm{Q}'y + \mathrm{R}' = \frac{(\mathrm{P}'y + \mathrm{Q}')^2}{\mathrm{P}'} + \mathrm{R}' - \frac{\mathrm{Q}'^2}{\mathrm{P}'},
\end{aligned}$$

en posant

$$\mathrm{P}' = (bb\,.\,1),$$
$$\mathrm{Q}' = (bc\,.\,1)\,z + (bd\,.\,1)\,u + (be\,.\,1)\,v + (bf\,.\,1)\,t + (bn\,.\,1),$$

d'où

$$\mathrm{P}'y + \mathrm{Q}' = \mathrm{B}',$$

et

$$\Omega - \frac{\mathrm{A}^2}{[aa]} - \frac{\mathrm{B}'^2}{(bb\,.\,1)} = \mathrm{R}' - \frac{\mathrm{Q}'^2}{\mathrm{P}'}.$$

135. Mais on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Q}'^2}{\mathrm{P}'} = & \frac{(bc\,.\,1)^2}{(bb\,.\,1)}z^2 + 2\left\{\frac{(bc\,.\,1)}{(bb\,.\,1)}(bd\,.\,1)\,u + \frac{(bc\,.\,1)}{(bb\,.\,1)}(be\,.\,1)\,v + \frac{(bc\,.\,1)}{(bb\,.\,1)}(bf\,.\,1)\,t \right. \\
& \qquad \left. + \frac{(bc\,.\,1)}{(bb\,.\,1)}(bn\,.\,1)\right\} z \\
& + \frac{(bd.1)^2}{(bb\,.\,1)}u^2 + 2\left\{\frac{(bd.1)}{(be\,.\,1)}(be\,.\,1)\,v + \frac{(bd.1)}{(bb\,.\,1)}(bf\,.\,1)\,t + \frac{(bd.1)}{(bb\,.\,1)}(bn\,.\,1)\right\} u \\
& + \frac{(be\,.\,1)^2}{(bb\,.\,1)}v^2 + 2\left\{\frac{(be\,.\,1)}{(bb\,.\,1)}(bf\,.\,1)\,t + \frac{(be\,.\,1)}{(bb\,.\,1)}(bn\,.\,1)\right\} v \\
& + \frac{(bf\,.\,1)^2}{(bb\,.\,1)}t^2 + 2\ \ \frac{(bf\,.\,1)}{(bb\,.\,1)}(bn\,.\,1)\,t + \frac{(bn.1)^2}{(bb\,.\,1)};
\end{aligned}$$

et si nous faisons

$$(nn.1)-\frac{(bn.1)^2}{(bb.1)}=(nn.2),$$

nous aurons :

$$\Omega-\frac{A^2}{[aa]}-\frac{B'^2}{(bb.1)}=R'-\frac{Q'^2}{P'}=$$

$$(cc.2)z^2+2\{(cd.2)u+(ce.2)v+(cf.2)t+(cn.2)\}z$$

$$+(dd.2)u^2+2\{(de.2)v+(df.2)t+(dn.2)\}u$$

$$+(ee.2)v^2+2\{(df.2)t+(dn.2)\}v$$

$$+(ff.2)t^2+2\ \ (fn.2)t+(nn.2)$$

$$=P''z^2+2Q''z+R''=\frac{(P''_2+Q'')^2}{P''}+R''-\frac{Q''^2}{P''},$$

en faisant

$$P''=(cc.2)$$
$$Q''=(cd.2)u+(ce.2)v+(cf.2)t+(cn.2);$$

d'où

$$P''z+Q=C''$$

et

$$\Omega-\frac{A^2}{[aa]}-\frac{B'^2}{(bb.1)}-\frac{C''^2}{(cc.2)}=R''-\frac{Q''^2}{P''}.$$

156. Mais on a

$$\frac{Q''^2}{P''}=\frac{(cd.2)^2}{(cc.2)}u^2+2\left\{\frac{(cd.2)}{(cc.2)}(ce.2)v+\frac{(cd.2)}{(cc.2)}(cf.2)t+\frac{(cd.2)}{(cc.2)}(cn.2)\right\}u$$

$$+\frac{(ce.2)^2}{(cc.2)}v^2+2\left\{\frac{(ce.2)}{(cc.2)}(cf.2)t+\frac{(ce.2)}{(cc.2)}(cn.2)\right\}v$$

$$+\frac{(cf.2)^2}{(cc.2)}t^2+2\ \frac{(cf.2)}{(cc.2)}(cn.2)t+\frac{(cn.2)^2}{(cc.2)};$$

et si l'on pose

$$(nn.2)-\frac{(cn.2)^2}{(cc.2)}=(nn.3),$$

on aura

$$\Omega-\frac{A^2}{[aa]}-\frac{B'^2}{(bb.1)}-\frac{C''^2}{(cc.2)}=R''-\frac{Q''^2}{P''}$$

$$=(dd.3)u^2+2\{(de.3)u+(df.3)t+(dn.3)\}u$$

$$+(ee.3)v^2+2\{(ef.3)t+(en.3)\}v$$

$$+(ff.3)t^2+2\ \ (fn.3)t+(nn.3)$$

$$=P'''u^2+2Q'''u+R'''=\frac{(P'''u+Q''')^2}{P'''}+R'''-\frac{Q'''^2}{P'''},$$

en posant

$$P'''=(dd.3)$$
$$Q'''=(de.3)v+(df.3)t+(dn.3);$$

d'où

$$P'''u+Q'''=D''',$$

et

$$R'''-\frac{Q'''^2}{P'''}=\Omega-\frac{A^2}{[aa]}-\frac{B'^2}{(bb.1)}-\frac{C''^2}{(cc.2)}-\frac{D'''^2}{(dd.3)}.$$

157. Or on a

$$\frac{Q'''^2}{P'''}=\frac{(de.3)^2}{(dd.3)}v^2+2\left\{\frac{(de.3)}{(dd.3)}(df.3)t+\frac{(de.3)}{(dd.3)}(dn.3)\right\}v$$

$$+\frac{(df.3)^2}{(dd.3)}t^2+2\ \frac{(df.3)}{(dd.3)}(dn.3)t+\frac{(dn.3)^2}{(dd.3)};$$

et si l'on pose

$$(nn.3)-\frac{(dn.3)^2}{(dd.3)}=(nn.4),$$

on trouvera

$$\Omega-\frac{A^2}{[aa]}-\frac{B'^2}{(bb.1)}-\frac{C''^2}{(cc.2)}-\frac{D'''^2}{(dd.3)}=R'''-\frac{Q'''^2}{P'''}$$

$$=(ee.4)v^2+2\{(ef.4)t+(en.4)\}v$$

$$+(ff.4)t^2+2\ \ (fn.4)t+(nn.4)$$

$$=P^{\text{IV}}u^2+2Q^{\text{IV}}u+R^{\text{IV}}=\frac{(P^{\text{IV}}u+Q^{\text{IV}})^2}{P^{\text{IV}}}+R^{\text{IV}}-\frac{Q^{\text{IV}2}}{P^{\text{IV}}},$$

en faisant

$$P^{\text{IV}} = (ee\,.\,4),$$
$$Q^{\text{IV}} = (ef\,.\,4)\,t + (en\,.\,4),$$
$$R^{\text{IV}} = (ff\,.\,4)\,t^2 + 2\,(fn\,.\,4)\,t + (nn\,.\,4);$$

d'où

$$P^{\text{IV}}v + Q^{\text{IV}} = E^{\text{IV}}$$

et

$$R^{\text{IV}} - \frac{Q^{\text{IV}2}}{P^{\text{IV}}} = \Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{(bb\,.\,1)} - \frac{C''^2}{(cc\,.\,2)} - \frac{D'''^2}{(dd\,.\,3)} - \frac{E^{\text{IV}}}{(ee\,.\,4)}\,.$$

158. Mais on a

$$\frac{Q^{\text{IV}2}}{P^{\text{IV}}} = \frac{(ef.4)}{(ee.4)}\,t^2 + 2\,\frac{(ef.4)}{(ee.4)}\,(en.4)\,t + \frac{(en.4)^2}{(ee\,.4)},$$

et si l'on pose

$$(nn\,.\,4) - \frac{(en.4)^2}{(ee\,.4)} = (nn\,.\,5),$$

on trouvera

$$\Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{(bb.1)} - \frac{C''^2}{(cc.2)} - \frac{D'''^2}{(dd.3)} - \frac{E^{\text{IV}2}}{(ee.4)} = R^{\text{IV}} - \frac{Q^{\text{IV}2}}{P^{\text{IV}}}$$
$$= (ff.5)\,t^2 + 2\,(fn.5)\,t + nn\,.\,5$$
$$= P^{\text{V}}\,t^2 + 2\,Q^{\text{V}}\,t + R^{\text{V}} = \frac{(P^{\text{V}}t + Q^{\text{V}})^2}{P^{\text{V}}} + R^{\text{V}} - \frac{Q^{\text{V}2}}{P^{\text{V}}},$$

en posant

$$P^{\text{V}} = (ff\,.\,5); \quad Q^{\text{V}} = (fn\,.\,5); \quad R^{\text{V}} = (nn\,.\,5);$$

d'où

$$P^{\text{V}}t + Q^{\text{V}} = F^{\text{V}},$$

et

$$R^{\text{V}} - \frac{Q^{\text{V}2}}{P^{\text{V}}} = \Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{(bb.1)} - \frac{C''^2}{(cc.2)} - \frac{D'''^2}{(dd.3)} - \frac{E^{\text{IV}2}}{(ee.4)} - \frac{F^{\text{V}2}}{(ff.5)}\,.$$

Mais

$$\frac{Q^{\text{V}2}}{P^{\text{V}}} = \frac{(fn\,.5)^2}{(ff\,.\,5)};$$

donc

$$R^{\text{V}} - \frac{Q^{\text{V}2}}{P^{\text{V}}} = (nn\,.\,5) - \frac{(fn\,.\,5)^2}{(ff\,.\,5)};$$

posant

$$(nn\,.\,5) - \frac{(fn\,.\,5)^2}{(ff\,.\,5)} = (nn\,.\,6),$$

nous aurons enfin :

$$\Omega = \frac{A^2}{[aa]} + \frac{B'^2}{(bb.1)} + \frac{C''^2}{(cc.2)} + \frac{D'''^2}{(dd.3)} + \frac{E^{\text{IV}2}}{(ee.4)} + \frac{F^{\text{V}2}}{(ff.5)} + (nn.6), \text{ C.Q.F.D.}$$

2° Démontrons que les dénominateurs $[aa]$, $(bb, 1)$, ... $(ff, 5)$ sont tous positifs.

a). Pour le premier, c'est évident, puisque

$$[aa] = a_1^2 + \cdots + a_\mu^2\,.$$

b). Remarquons que la fonction $\Omega - \frac{A^2}{[aa]}$ ne renferme pas x; si donc dans Ω on substitue la valeur de x provenant de $A = 0$, on obtiendra $\Omega - \frac{A^2}{[aa]}$; et par suite, si dans chacun des ε, on avait substitué à x sa valeur provenant de $A = 0$, la somme des carrés des ε aurait donné (n° 133) $\Omega - \frac{A^2}{[aa]}$; mais, dans ce cas, le coefficient de y^2, qui est $(bb\,.\,1)$, est une somme de carrés; $(bb\,.\,1)$ est donc positif.

c). La fonction $\Omega = \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{(bb.1)}$ ne renferme ni x, ni y; si donc on substitue dans Ω à x sa valeur tirée de $A = 0$, et à y sa valeur tirée de $B' = 0$, on obtiendra la fonction précédente; ou bien encore si l'on substitue ces deux valeurs dans chacun des ε et qu'on fasse la somme des carrés; dans ce cas, le coefficient de z^2, qui est $(cc\,.\,1)$, est une somme de carrés; il est donc positif, et ainsi de suite.

139. Remarque. Si nous faisons

$$\Omega' = \frac{B'^2}{(bb\,.1)} + \frac{C''^2}{(cc\,.2)} + \frac{D'''^2}{(dd\,.3)} + \frac{E^{\text{IV}2}}{(ee\,.4)} + \frac{F^{\text{V}2}}{(ff\,.5)} + (nn\,.6),$$
$$\Omega'' = \frac{C''^2}{(cc\,.2)} + \cdots$$
$$\Omega''' = \frac{D'''^2}{(dd\,.3)} + \cdots$$
$$\Omega^{\text{IV}} = \frac{E^{\text{IV}2}}{(ee\,.\,4)} + \cdots$$
$$\Omega^{\text{V}} = \frac{F^{\text{V}2}}{(ff\,.5)} + (nn\,.6),$$

nous aurons

$$\begin{array}{llllll}
\Omega \;\; = \dfrac{A^2}{[\,aa\,]} + \Omega', & \text{où le premier terme seul renferme } x\,; & & & \\
\Omega' \; = \dfrac{B'^2}{(bb\,.\,1)} + \Omega'', & » & » & » & y\,; \\
\Omega'' = \dfrac{C''^2}{(cc\,.\,2)} + \Omega''', & » & » & » & z\,; \\
\Omega''' = \dfrac{D'''^2}{(dd\,.\,5)} + \Omega^{\text{IV}}, & » & » & » & u\,; \\
\Omega^{\text{IV}} = \dfrac{E^{\text{IV}2}}{(ee\,.\,4)} + \Omega^{\text{V}}, & » & » & » & v\,; \\
\Omega^{\text{V}} = \dfrac{F^{\text{V}2}}{(ff\,.\,5)} + (nn\,.\,6), & » & » & » & t\,;
\end{array}$$

140. IV. *Démontrer que les valeurs obtenues par la méthode des moindres carrés sont les plus probables.*

Nous venons de trouver, par cette méthode

$$t = -\frac{(fn\,.\,5)}{(ff\,.\,5)}.$$

Appelons τ l'erreur de cette détermination; la vraie valeur de t sera

$$t = -\frac{(fn\,.\,5)}{(ff\,.\,5)} + \tau,$$

d'où

$$\tau = t + \frac{(fn\,.\,5)}{(ff\,.\,5)}.$$

Cherchons la probabilité de τ.

Si t est constant, la probabilité des valeurs simultanées de x, y, z, u, v sera

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{\mu} e^{-h^2\Omega}\, dx\,dy\,dz\,du\,dv\,;$$

en effet, soient $x = a_0$, $y = b_0$, $z = c_0$, $u = d_0$, $v = e_0$, $t = f_0$ les valeurs de $x \ldots t$ déterminées par les équations normales

(nº 126); et $\xi, \eta, \xi, \upsilon, \nu, \tau$ les erreurs de ces déterminations; on aura

$$x = a_0 + \xi, \quad y = b_0 + \eta, \;\ldots\ldots\; t = f_0 + \tau\,;$$

d'où

$$dx = d\xi, \qquad dy = d\eta, \quad \ldots\ldots \quad dt = d\tau\,;$$

$$\varepsilon_1 = a_1\xi + b_1\eta + \cdots + f_1\tau,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_\mu = a_\mu\xi + b_\mu\eta + \cdots + f_\mu\tau\,;$$

la probabilité de l'existence simultanée des erreurs $\xi, \eta \ldots \tau$, en regardant t comme constant, sera

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{\mu} e^{-h^2\Omega} d\xi \ldots d\nu,$$

ou

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{\mu} e^{-h^2\Omega} dx \ldots dv.$$

Les limites des valeurs $x \ldots v$ étant en général $\pm\infty$, la probabilité de toutes les valeurs simultanées de $x \ldots v$, t étant constant, sera :

$$Y = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{\mu} {}_5\!\int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,dz\,du\,dv.$$

On aura donc pour la probabilité d'une valeur de t :

$$Q = \frac{Y dt}{\int_{-\infty}^{\infty} Y dt} = \frac{dt\; {}_5\!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega}\, dx\,dy\,dz\,du\,dv}{{}_6\!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega}\, dx\,dy\,dz\,du\,dv\,dt} = \frac{N}{D}.$$

141. *Calcul de* N. On a $\Omega = \frac{A^2}{[aa]} + \Omega'$, A seul renfermant x.

L'expression de A étant (nº 135)

$$A = [aa]\,x + [ab]\,y + \cdots + [an],$$

il s'ensuit

$$\frac{dA}{[aa]} = dx.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de N, on obtient

$$N = dt\; {}_4\!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega'}\, dy\,dz\,du\,dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \frac{A^2}{[aa]}} \frac{dA}{[aa]},$$

ou, par une transformation connue :

$$N = \frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{[aa]}} dt \, {}_4\!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega'} dy\,dz\,du\,dv.$$

On a de même (n° 139) :

$$\Omega' = \frac{B'^2}{(bb\,.\,1)} + \Omega'', \text{ B' seul renfermant } y.$$

L'expression de B' étant (n° 133) :

$$B' = (bb.1)\,y + (bc.1)\,z + (bd.1)\,u + (be.1)\,v + (bf.1)\,t + (bn.1),$$

il s'ensuit

$$\frac{dB'}{(bb\,.\,1)} = dy.$$

Substituant ces valeurs dans la dernière expression de N, on obtient

$$N = \frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{[aa]}} dt \, {}_3\!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega''} dz\,du\,dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2B'^2}{(bb\,.\,1)}} \frac{dB'}{(bb\,.\,1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{\pi})^2}{h^2\sqrt{[aa]\,(bb\,.\,1)}} dt \, {}_3\!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega''} dz\,du\,dv\,.$$

On trouvera de même :

$$N = \frac{(\sqrt{\pi})^3}{h^3\sqrt{[aa]\,(bb\,.\,1)\,(cc\,.\,2)}} dt \, {}_2\!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega'''} du\,dv.$$

$$= \frac{(\sqrt{\pi})^4}{h^4\sqrt{[aa]\,(bb\,.\,1)\,(cc\,.\,2)\,(dd\,.\,3)}} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega^{IV}} dv.$$

$$= \frac{(\sqrt{\pi})^5}{h^5\sqrt{[aa]\,(bb.1)\,(cc.2)\,(dd.3)\,(ee.4)}} e^{-h^2\left\{\frac{F^V}{(ff.5)} + (nn.6)\right\}} dt.$$

142. *Calcul de* D. En intégrant l'expression précédente entre $\pm\infty$, on aura

$$D = \frac{(\sqrt{\pi})^5}{h^5\sqrt{\ldots\ldots}} e^{-h^2(nn.6)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\frac{F^V}{(ff.5)}} dt;$$

et comme (n° 133) :

$$F^V = (ff\,.\,5)\,t + (fn\,.\,5),$$

en effectuant l'intégration, on aura :

$$D = \frac{(\sqrt{\pi})^6}{h^6\sqrt{[aa]\,(bb\,.\,1)\ldots(ee\,.\,4)\,(ff\,.\,5)}} e^{-h^2(nn\,.\,6)};$$

et par suite, la probabilité de t, ou de τ, sera :

$$Q = \frac{N}{D} = \frac{h\sqrt{(ff\,.\,5)}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\frac{F^{V2}}{(ff\,.\,5)}} dt,$$

$$= \frac{h\sqrt{(ff\,.\,5)}}{\sqrt{\pi 2}} e^{-h^2\left\{t + \frac{(fn\,.\,5)}{(ff\,.\,5)}\right\}^2 (ff\,.\,5)} dt,$$

$$= \frac{h\sqrt{(ff\,.\,5)}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(ff\,.\,5)\,\tau^2} d\tau.$$

Cette probabilité est un maximum pour $\tau = 0$; donc pour

$$t = -\frac{(fn\,.\,5)}{(ff\,.\,5)};$$

telle est donc la valeur la plus probable.

Le poids de cette valeur de t est $(ff\,.\,5)$, h étant considéré comme unité de poids.

Remarque. Soit P la probabilité que τ est compris entre $\pm c$; nous aurons

$$P = \frac{h\sqrt{(ff\,.\,5)}}{\sqrt{\pi}} \int_{-c}^{c} e^{-h^2(ff\,.\,5)\,\tau^2} d\tau.$$

Si nous changeons l'exposant en $-k^2$, nous aurons

$$\tau = \frac{k}{h\sqrt{(ff\,.\,5)}};$$

et à $r = c$ répondra $k = ch\sqrt{(ff\,.\,5)}$ que nous ferons égal à g.

Nous aurons ainsi :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^g e^{-k^2} dk\,;$$

probabilité que t est compris entre

$$f_0 \pm g = f_0 \pm ch\sqrt{(ff.5)} = -\frac{(fn.5)}{(ff.5)} \pm ch\sqrt{ff.5)}.$$

Observations d'inégales précisions.

143. Supposons que les observations $\varphi_1 \ldots \varphi_\mu$ soient de précisions différentes, et soient $p_1 \ldots p_\mu$ leurs poids respectifs, h étant pris pour unité de poids; nous aurons pour la probabilité des erreurs $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu$ (n° 126) :

$$p_{\varepsilon_1} = \frac{h\sqrt{p_1}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 p_1 \varepsilon_1^2} d\varepsilon_1$$

. . . .

$$p_\mu = \frac{h\sqrt{p_\mu}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 p_\mu \varepsilon_\mu^2} d\varepsilon_\mu;$$

la probabilité du concours de ces erreurs sera donc

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu \sqrt{p_1 \ldots p_\mu}\, e^{-h^2 \sum\limits_i^\mu p_i \varepsilon_i^2} d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_\mu;$$

nous aurons donc à rendre minimum $\Sigma p_i \varepsilon_i^2$, ce qui conduit aux équations normales :

$$[aap]\,x + [abp]\,y + \cdots + [anp] = 0,$$

. . . .

$$[afp]\,x + [bfp]\,y + \cdots + [fnp] = 0.$$

CHAPITRE VIII.

PROBABILITÉS RELATIVES A LA VIE HUMAINE.

144. La probabilité qu'a un enfant d'arriver à l'âge x est une fraction dont le numérateur est le nombre des chances de vie favorables à cet âge, et le dénominateur le nombre total des chances; ce dernier étant infini, l'on voit que la probabilité relative à l'âge x est infiniment petite; on pourra donc la représenter par

$$p_x = f(x)\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Considérons un nombre très-grand μ d'enfants nés à la même époque; la probabilité qu'a l'enfant i d'arriver à l'âge x sera

$$p_{ix} = f_i(x)\,dx.$$

La probabilité qu'il arrivera à un âge compris entre 0 et x sera la somme des probabilités relatives à tous les âges intermédiaires croissant par intervalles égaux à dx de 0 à x; elle sera donc

$$\int_0^x f_i(x)\,dx.$$

Soit ω la limite supérieure de la vie humaine; il est clair que

$$\int_0^\omega f_i(x)\,dx = 1;$$

et par suite

$$\int_x^\omega f_i(x)\,dx = \int_0^\omega - \int_0^x = 1 - \int_0^x f_i(x)\,dx:$$

cette formule exprime la probabilité que l'enfant i dépasse x ans.

On nomme vie probable la valeur de x pour laquelle

$$\int_x^\omega f_i(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot$$

Assimilons la durée de la vie à un gain éventuel : la somme de toutes les valeurs possibles de x, multipliées par leurs probabilités respectives, c'est-à-dire

$$\varepsilon_i = \int_0^\omega x f_i(x)\,dx$$

sera le *sort* de cet enfant, ou son espérance de vivre (voir n° 57).

La vie moyenne v_m est la somme de toutes les valeurs de ε_i relatives aux μ enfants, divisée par le nombre de ceux-ci; c'est-à-dire

$$v_m = \frac{\sum_1^\mu \varepsilon_i}{\mu} = \frac{1}{\mu}\sum_1^\mu \int_0^\omega x f_i(x)\,dx.$$

Tous les problèmes sur la probabilité de la vie dépendent de la fonction inconnue $f_i(x)$, qui est différente pour chaque enfant; mais la fonction moyenne $\frac{1}{\mu}\sum_1^\mu f_i(x)$, et par suite la vie moyenne v_m ne varient qu'avec lenteur par l'extinction des maladies et le perfectionnement de la société.

La fonction $f_i(x)$ ne pouvant être déterminée à priori, on doit avoir recours à l'observation, afin de rendre le calcul des formules *vraies* qui précèdent possible approximativement. Les observations qui font la base de ces calculs approximatifs constituent les tables de mortalité.

CONSTRUCTION DES TABLES DE MORTALITÉ ET LOIS EMPIRIQUES QUI LES RÉGISSENT.

145. Une table de mortalité indique, sur un grand nombre μ d'enfants nés à la même époque et dans le même pays, combien il y en a qui survivent après la 1re, la 2me, etc., année.

A. *Formation des tables de mortalité.* Supposons qu'en dépouillant des registres de l'état civil, on ait observé que 1000

individus décédés en une année aient donné lieu au classement suivant :

500	sont morts de		0 à 20 ans.
200	»	»	20 à 50 »
500	»	»	50 à 90 »

On en conclura que la date de la naissance de ces personnes précède l'année de l'observation,

Pour	500 de	1 à 20 ans.
»	200 de	20 à 50 »
»	500 de	50 à 90 »

ou bien, que, de 1000 enfants nés dans la même année

500	sont morts dans les		20	premières années.
700	»	»	50	» »
1000	»	»	90	» »

Donc, de 1000 individus nés en même temps

500	vivent encore à la fin de la		20me	année.
500	»	»	50me	»
0	»	»	90me	»

Ce sont ces nombres 500, 500, 0 qui constituent la table de mortalité.

Généralisons l'exemple ci-dessus : supposons que l'on ait extrait d'un registre de l'état civil un nombre A décès dans une période de 100 ans; et que ces décès se répartissent comme suit :

a	décès entre		0 et 1 an.
a'	»	»	1 et 5 ans.
a''	»	»	5 et 10 ans.
a'''	»	»	10 et 15 ans, etc.

On en conclura que, de A enfants nés à la même époque

$A - a$	vivront encore à		1 an.
$A - a - a'$	»	»	5 ans.
$A - a' - a''$	»	»	10 ans.
$A - a' - a'' - a'''$	»	»	15 ans, etc.

Si l'on applique à ces données premières la formule d'interpolation aux différences premières, secondes, troisièmes, etc., on obtiendra les nombres de survivants à 2, 3, 4, 6, etc., ans.

Ce mode de construction des tables de mortalité suppose que la population reste stationnaire, et il exprimerait exactement la loi de mortalité si le nombre A des individus qui ont servi à les former était infini; car alors une telle table pourrait être représentée par une courbe continue dont les ordonnées seraient les nombres de survivants, et les abscisses les âges correspondant à ces survivances.

En général une table de mortalité est d'autant plus exacte que le nombre A est plus grand, et que la population est elle-même plus grande et plus proche de l'état stationnaire.

On doit avoir soin, pour la construction de ces tables, d'exclure les années signalées par une mortalité extraordinaire, comme les années d'épidémies, de guerre, etc.

Les principales tables de mortalité sont les suivantes :

De Witt, grand pensionnaire de Hollande, a construit la première table de ce genre; elle est très-rare.

Halley, contemporain de Newton, en a construit une d'après les registres de l'état civil de Breslau. Elle n'est plus en usage.

Süssmilch a construit pour l'Allemagne une table exécutée avec soin, reposant sur un grand nombre d'observations. Retouchée et perfectionnée par Baumann, elle est encore d'un grand usage, surtout en Allemagne.

Wargentin a publié une bonne table d'après les observations recueillies en Suède.

Deparcieux a construit la première table publiée en France, d'après les décès observés dans des compagnies de tontines et de rentes viagères. Elle a été corrigée par Florencourt.

Simpson a donné une bonne table pour la ville de Londres.

Baumann, pour la province de Brandebourg.

Duvillard a donné pour la France une table qui repose sur des observations très-étendues.

Price a donné pour la ville de Northampton une table très-estimée.

Kerseboom en a construit une sur des documents pris dans les établissements de rentes viagères de la Hollande et de la Frise occidentale.

La table pour la Belgique fait la distinction entre la mortalité dans les villes et la mortalité dans les campagnes; et de plus entre la mortalité des hommes et celle des femmes.

La table de Monferrand, pour la France, est la plus récente et la plus soigneusement construite (voir son Mémoire sur les lois de la population et de la mortalité en France, *Journal de l'École polytechnique*, 26me cahier, t. XVI). Cette table, dans laquelle on a tenu compte de la variation de la population et de la correction relative aux mort-nés, est divisée en deux parties pour les deux sexes. Chacune contient sept colonnes, sous les titres : âge, décès, population, danger annuel, survivances, vie moyenne, vie probable. Nous verrons plus bas la formation des nombres rangés sous ces divers titres. La première colonne contient les âges de mois en mois jusqu'à un an, puis d'année en année jusqu'à la limite de la vie, qui est de 105 ans dans cette table (*).

(*) Nous ne pouvons passer ici sous silence les nombreux et importants travaux par lesquels M. Ad. Quetelet, directeur de l'Observatoire royal de Bruxelles, secrétaire perpétuel de l'Académie de Belgique, a contribué aux progrès de la statistique, dont il a été l'un des plus zélés promoteurs.

Les principaux travaux qu'il a publiés relativement à cette science, et dont plusieurs ont été traduits en différentes langues, sont, outre sa *Correspondance mathématique et physique* (1825-1839), les *Annales* et l'*Annuaire de l'Observatoire royal* (1833-1874) :

Recherches sur la population, etc., dans le royaume des Pays-Bas, in-8°, Bruxelles, 1827. — *Météorologie de la Belgique comparée à celle du globe*, in-8°, Bruxelles, 1852; 2e éd., 1867. — *Lettres sur la théorie des probabilités appliquée aux sciences morales et politiques*, in-8°, 1846. — *Du système social et des lois qui le régissent*, in-12, 1848. — *Sur la physique du globe*, in-4°, 1861. — *Physique sociale, ou essai sur le développement des facultés de l'homme*, 2 v. in-8°, 1835; 2e éd. 1869. — *Anthropométrie, ou mesure des différentes facultés de*

Table de mortalité de Süssmilch et Baumann.

AGE. m	SURVIVANTS. A_m	DÉCÉDÉS. B_m	SOMME des vivants. C_m	AGE. m	SURVIVANTS. A_m	DÉCÉDÉS. B_m	SOMME de vivants. C_m	AGE. m	SURVIVANTS. A_m	DÉCÉDÉS. B_m	SOMME des vivants. C_m
0	1 000	250	28 988	33	421	6	11 464	66	152	10	1 520
1	750	89	27 988	34	415	6	11 043	67	142	10	1 368
2	661	43	27 238	35	409	7	10 628	68	132	10	1 226
3	618	25	26 577	36	402	7	10 219	69	122	10	1 094
4	593	14	25 959	37	395	7	9 817	70	112	9	972
5	579	12	25 366	38	388	7	9 422	71	103	9	860
6	567	11	24 787	39	381	7	9 034	72	94	9	757
7	556	9	24 220	40	374	7	8 653	73	85	8	663
8	547	8	23 664	41	367	7	8 279	74	77	8	578
9	539	7	23 117	42	360	7	7 912	75	69	7	508
10	532	5	22 578	43	353	7	7 552	76	62	7	432
11	527	4	22 046	44	346	7	7 199	77	55	6	370
12	523	4	21 519	45	339	7	6 853	78	49	6	315
13	519	4	20 996	46	332	8	6 514	79	43	6	266
14	515	4	20 477	47	324	8	6 182	80	37	5	223
15	511	4	19 962	48	316	8	5 858	81	32	4	186
16	507	4	19 451	49	308	8	5 542	82	28	4	154
17	503	4	18 944	50	300	9	5 234	83	24	4	126
18	499	4	18 441	51	291	9	4 934	84	20	3	102
19	495	4	17 942	52	282	9	4 643	85	17	3	82
20	491	5	17 447	53	273	9	4 361	86	14	2	65
21	486	5	16 956	54	264	9	4 088	87	12	2	51
22	481	5	16 470	55	255	9	3 824	88	10	2	39
23	476	5	15 989	56	246	9	3 569	89	8	2	29
24	471	5	15 513	57	237	9	3 323	90	6	1	21
25	466	5	15 042	58	228	9	3 086	91	5	1	15
26	461	5	14 576	59	219	9	2 858	92	4	1	10
27	456	5	14 115	60	210	9	2 639	93	3	1	6
28	451	6	13 659	61	201	9	2 429	94	2	1	3
29	445	6	13 208	62	192	10	2 228	95	1	0	1
30	439	6	12 763	63	182	10	2 036	96	0	0	0
31	433	6	12 324	64	172	10	1 854				
32	427	6	11 891	65	162	10	1 682				

l'homme, in-8°, 1871. — *Congrès international de statistique*, in-4°, 1873. — *Tables de mortalité et leur développement*, in-4°, 1872.

Ces dernières tables sont relatives à huit pays différents, et la concordance des résultats qui y sont rapportés est vraiment remarquable. C'est la première fois, pensons-nous, qu'il se publie un travail aussi complet sur cette matière. Nous en donnerons un extrait à la fin de l'ouvrage.

F. F.

146. B. *Lois empiriques.* Divers auteurs, entre autres Lambert et Duvillard, ont donné des formules empiriques qui représentent plus ou moins bien les chiffres des tables de mortalité pour lesquelles elles avaient été construites. Mais aucune de ces formules n'est comparable, pour l'exactitude et la simplicité, à celle que Moser a donnée pour représenter les nombres de la table de Kerseboom, et d'après laquelle on a, jusqu'à l'âge de 30 ans,

$$y = a\sqrt[4]{x}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

x exprime l'âge, et y le nombre des décès jusqu'à cet âge; a se détermine au moyen de la table; ainsi, en représentant par l'unité le nombre des enfants nés à la même époque, on trouverait

$$a = 0,2 = \frac{1}{5};$$

car, d'après les tables de Kerseboom, sur 1 enfant nouveau-né, il y en a 0,627 qui atteignent 12 ans; et puisque $1 - a\sqrt[4]{x}$ exprime le nombre des survivants à l'âge x, on a

$$1 - a\sqrt[4]{12} = 0,627$$

d'où

$$a = \frac{0,575}{\sqrt[4]{12}} = 0,2004.$$

Pour les âges qui dépassent 30 ans, la formule (a) ne concorde plus avec les chiffres des tables. Moser donne pour ce cas la formule

$$y = 1 - 0,2\sqrt[4]{x} - \frac{0,7125}{10^5}\sqrt[4]{x^9} - \frac{0,1570}{10^8}\sqrt[4]{x^7},$$

qui représente fort bien la loi de mortalité de 30 à 60 ans.

147. C. *Quelques rapports remarquables reposant sur les tables de mortalité :*

$$\frac{\text{Nombre des décès des hommes}}{\text{Nombre des décès des femmes}} = \frac{100}{98} \text{ (pour la France, d'après Mathieu).}$$

$$\frac{\text{Nombre des naissances des garçons}}{\text{Nombre des naissances des filles}} = \frac{100}{94}$$ (id. pour les enfants légitimes).

$$= \frac{100}{105}$$ (id. pour les enfants naturels).

$$\frac{\text{Nombre des naissances}}{\text{Nombre des mariages}} = \frac{100}{22}$$

$$\frac{\text{Nombre des mariages}}{\text{Nombre des habitants}} = \frac{1}{155}$$ dans les grandes villes.

$$= \frac{1}{105}$$ dans les petites villes.

$$= \frac{1}{115}$$ dans les campagnes.

$$\frac{\text{Nombre des hommes veufs}}{\text{Nombre des femmes veuves}} = \frac{100}{555}$$

$$\frac{\text{Nombre des premiers mariages}}{\text{Nombre des seconds mariages}} = \frac{100}{29}$$ chez les hommes.

$$= \frac{100}{19}$$ chez les femmes

$$\frac{\text{Nombre des enfants légitimes}}{\text{Nombre des enfants naturels}} = \frac{15}{1}$$ pour la France.

$$\frac{\text{Nombre des décès en une année}}{\text{Nombre des vivants en cette année}} = \frac{1}{24}$$ dans les grandes villes.

$$= \frac{1}{32}$$ dans les petites villes.

$$= \frac{1}{40}$$ dans les campagnes.

Ce rapport exprime la mesure de la mortalité, ou le danger de mourir dans l'année.

$$\frac{\text{Nombre des naissances annuelles}}{\text{Nombre des vivants}} = \frac{1}{29} \text{ ou } \frac{1}{31}$$ dans les grandes villes.

$$= \frac{1}{24} \text{ ou } \frac{1}{25}$$ dans les petites villes.

$$= \frac{1}{22} \text{ ou } \frac{1}{23}$$ dans les campagnes.

Ce rapport exprime la mesure de la fécondité.

NATURE ET USAGE DES TABLES DE MORTALITÉ.

148. Les assurances sur la vie, les caisses des veuves et orphelins, etc., reposent sur les tables de mortalité, comme nous le verrons plus bas.

Pour le moment, nous nous bornons à l'usage immédiat de ces tables; nos exemples seront choisis dans celle de Süssmilch.

a.) *Description de la table.* Elle se compose de quatre colonnes portant en tête les indications m, A_m, B_m, C_m et contenant respectivement l'âge, les survivants, les décès, et la somme des vivants.

La première colonne m donne les âges des individus de la colonne A_m depuis 0 jusqu'à 96 ans, d'année en année.

La deuxième colonne A_m donne le nombre des survivants de l'âge correspondant à la première. Ainsi l'on voit que 595 individus sur 1000 sont encore vivants à l'âge de 4 ans.

La troisième colonne B_m indique le nombre des décès annuels; ainsi

250 est le nombre des décès de 0 à 1 an.
89 » » » 1 à 2 ans.

Ces nombres s'obtiennent par des soustractions consécutives entre ceux de la colonne A_m.

Premier exemple :

$$250 = 1000 - 750$$
$$89 = 750 - 661, \text{ etc.}$$

En général

$$B_m = A_m - A_{m+1}.$$

Deuxième exemple : De 1000 enfants nés à la même époque,

574 arriveront à 40 ans.

et dans l'année suivante

7 de ces 574 personnes mourront.

La quatrième colonne C_m se compose de la somme de tous les nombres de la deuxième colonne, depuis le nombre correspondant à celui de la quatrième jusqu'au dernier; ainsi

$$\begin{array}{ll} C_0 = A_0 + A_1 + \cdots + A_{96}, & \\ C_1 = \quad A_1 + \cdots + A_{96} & = C_0 - A_0, \\ C_2 = \qquad A_2 + \cdots + A_{96} & = C_1 - A_1, \\ \cdots & \\ C_m = \qquad\quad A_m + \cdots + A_{92} & = C_{m-1} - A_{m-1}. \end{array}$$

Ces nombres indiquent donc combien d'individus survivent, à l'âge m ou à un âge plus avancé, aux 1000 enfants nés à la même époque.

EXEMPLE. Le nombre 17,447 est celui des individus âgés de 20 à 96 ans qui, après 20 ans, survivront aux 1000 enfants nés en même temps.

b.) *Usage immédiat de la table.*

α. **Probabilités simples relatives à la vie humaine.**

149. PREMIER PROBLÈME. Chercher la probabilité qu'une personne de l'âge m vivra encore après 1, 2, etc., n ans.

SOLUTION. Soient

A_m le nombre des vivants du même âge que la personne A.

$A_{m+1} \dots A_{m+n}$ le nombre des vivants qui ont 1 ... n ans de plus.

Le nombre des cas favorables à ce que la personne A arrive à l'âge $m+1$ est A_{m+1}; le nombre de tous les cas possibles est A_m; la probabilité que cette personne vivra encore après 1 an sera donc

$$p_1 = \frac{A_{m+1}}{A_m}.$$

De même, la probabilité qu'elle vivra encore après 2 ... n ans sera :

$$p_2 = \frac{A_{m+2}}{A_m} \dots p_n = \frac{A_{m+n}}{A_m}.$$

PREMIER EXEMPLE. Quelle est la probabilité qu'une personne de 18 ans vivra encore au moins 13 ans?

La table donne

$$A_{18} = 499 \,.\, A_{18+13} = A_{31} = 433$$

donc

$$p_{13} = \frac{433}{499} = 0{,}86.$$

DEUXIÈME EXEMPLE. Dans une société d'assurances sur la vie le dépouillement des registres a fourni les indications suivantes :

a_0 personnes de 20 ans inscrites pendant la 1re année; a_1 pendant la 2me, etc.
b_0 » 21 » » » b_1 » »
c_0 » 22 » » » c_1 » »
. . . .
α_0 personnes de 20 ans mortes pendant la 1re année; α_1 pendant la 2me, etc.
β_0 » 21 » » » β_1 » »
γ_0 » 22 » » » γ_1 » »

1° Quelle est la probabilité que l'une des personnes de 20 ans arrivera à 21 ans?

Le nombre des personnes de 20 ans est $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$
» » décès de 20 à 21 ans est $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots$

la probabilité cherchée est donc

$$p_{20} = \frac{(a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1) + (a_2 - \alpha_2) + \dots}{a_0 + a_1 + a_2 + \dots}.$$

2° Quelle est la probabilité qu'une des personnes âgées de 21 ans atteindra sa 22me année?

Le nombre des personnes de 21 ans se compose :

Des personnes admises à cet âge et dont le nombre est

$$b_0 + b_1 + b_2 + \dots;$$

Des personnes admises à 20 ans, qui ont atteint leur 21me année, et dont le nombre est

$$(a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1) + (a_2 - \alpha_2) + \dots$$

Nous aurons donc

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + (a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1) + \ldots$$

pour le nombre des personnes de 21 ans.

Le nombre des décès de 21 à 22 ans est

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots;$$

la probabilité cherchée sera donc

$$p_{21} = \frac{(a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1) + \cdots + (b_0 - \beta_0) + (b_1 - \beta_1) + \ldots}{(a_0 - \alpha_0) + \cdots + b_0 + b_1 + \ldots}.$$

3° Quelle est la probabilité qu'une des personnes âgées de 22 ans atteindra sa 23^{me} année?

On trouvait par des raisonnements analogues aux précédents

$$p_{22} = \frac{(a_0 - \alpha_0) + \cdots + (b_0 - \beta_0) + \cdots + (c_0 - \gamma_0) + \ldots}{(a_0 - \alpha_0) + \cdots + (b_0 - \beta_0) + \cdots + c_0 + c_1 + \ldots}.$$

150. Deuxième problème. Chercher la probabilité qu'une personne de l'âge m mourra avant la fin de la 1^{re}, 2^{me}, ... n^{me} année.

Solution. Soient $q_1 \ldots q_n$ les probabilités cherchées; $p_1 \ldots p_n$ celles des événements contraires; nous aurons

$$p_1 + q_1 = 1 \ldots p_n + q_n = 1;$$

donc

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}; \quad q_n = 1 - \frac{A_{m+n}}{A_m}.$$

Corollaire I. Quelle est la probabilité que cette personne mourra dans le courant de la 2^{me}..., n^{me} année?

$\frac{A_{m+1}}{A_{m+1}}$ est la probabilité, à la fin de la 1^{re} année, que A vit encore à la fin de la 2^{me}; donc $1 - \frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}$ est la probabilité qu'elle mourra pendant cette 2^{me} année.

$\frac{A_{m+1}}{A_m}$ est la probabilité que A vivra à la fin de la 1^{re} année.

La probabilité cherchée sera donc

$$\left(1 - \frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\right)\frac{A_{m+1}}{A_m} = \frac{A_{m+1} - A_{m+2}}{A_m}.$$

De même la probabilité que A mourra dans le courant de la 3^{me} année sera

$$\left(1 - \frac{A_{m+3}}{A_{m+2}}\right)\frac{A_{m+2}}{A_m} = \frac{A_{m+2} - A_{m+3}}{A_m}.$$

Corollaire II. Chercher la probabilité que cette personne mourra dans l'intervalle de la p^{me} à la $(p+q)^{me}$ année.

Comme A_m personnes ont m ans, A_{m+p}, p ans de plus, A_{m+p+q}, $p+q$ ans de plus, il s'ensuit que $A_{m+p} - A_{m+p+q}$ mourront dans l'intervalle donné; la probabilité cherchée est donc

$$\frac{A_{m+p} - A_{m+p+q}}{A_m}.$$

La probabilité contraire sera

$$1 - \frac{A_{m+p} - A_{m+p+q}}{A_m} = \frac{A_m - A_{m+p} - A_{m+p+q}}{A_m}.$$

Exemple. Quelle est la probabilité qu'une personne de 20 ans mourra entre 50 et 60 ans?

Cette probabilité sera

$$\frac{A_{50} - A_{60}}{A_{20}} = \frac{500 - 210}{491} = \frac{90}{491} = 0{,}18.$$

151. Troisième problème. De l personnes âgées de m années, combien en meurt-il à l'âge de $m+1$ ans?

La table des mortalités montre que sur A_m personnes de l'âge m, il en meurt un nombre B_m de m à $m+1$ ans. On a donc la proportion

$$A_m : B_m = l : x; \; x = \frac{l . B_m}{A_m}.$$

Exemple : Si $l = 1000$, $m = 40$, on trouve $A_m = 374$, $B_m = 7$, donc

$$x = \frac{7.1000}{374} = 19.$$

Remarque. La quantité $\frac{1}{x}$ est appelée vitalité, ou le pouvoir de vivre relatif à l'âge m. Pour les personnes de 11 à 18 ans, on a $x = 8$; pour cet âge la vitalité est donc $\frac{1}{8}$.

Si l'on prend cette vitalité pour unité, elle sera $\frac{8}{x}$ pour tout autre âge; et x se détermine par la proportion ci-dessus.

En construisant une table d'après cette formule, on trouve que la vitalité est très-petite, dans les deux premières années, qu'elle augmente rapidement jusqu'à 10 ans, où elle est à son maximum. Elle reste alors stationnaire jusqu'à 20 ans; à partir de cet âge elle diminue, et après 80 ans elle redevient aussi faible que dans les premières années de l'existence.

Voici cette table :

Table de vitalité.

AGE.	NOMBRE de DÉCÈS par an.	Vitalité.	AGE.	NOMBRE de DÉCÈS par an.	Vitalité.
0	250	0,03	16	8	1,00
1	199	0,04	17	8	1,00
2	65	0,12	18	8	1,00
3	40	0,20	20	9	0,99
4	24	0,33	25	11	0,73
5	21	0,36	30	14	0,57
6	19	0,42	35	17	0,47
7	16	0,50	40	19	0,42
8	15	0,53	45	21	0,39
9	13	0,62	50	30	0,27
10	9	0,99	55	35	0,23
11	8	1,00	60	43	0,19
12	8	1,00	65	62	0,13
13	8	1,00	70	80	0,10
14	8	1,00	75	102	0,08
15	8	1,00	80	135	0,06

152. Quatrième problème. De l individus nés ensemble, combien en survit-il après m années?

D'après la table ci-dessus, de $A_0=1000$ individus nés en même temps, A_m survivent après m ans, on a donc :

$$A_0 : A_m = l : x, \quad x = \frac{lA_m}{A_0}.$$

Cinquième problème. De l personnes âgées de m ans, combien survivront après p années?

On a la proportion

$$A_m : A_{m+p} = l : x, \quad x = l.\frac{A_{m+p}}{A_m}.$$

Sixième problème. De l personnes âgées de m ans, combien en meurt-il dans p années?

Ce nombre sera $l - l\frac{A_{m+p}}{A_m} = l.\frac{A_m - A_{m+p}}{A_m}$.

Donc de l individus de l'âge m, il en meurt dans l'année suivante

$$l.\frac{A_m - A_{m+1}}{A_m} = l\frac{B_m}{A_m}.$$

153. Définition. La *durée moyenne* de ce qui reste à vivre, à une personne de l'âge m, est le nombre qui indique combien d'années chacune des l personnes, ayant m ans actuellement, auraient encore à vivre, si toutes arrivaient au même âge.

Septième problème. Chercher la durée moyenne F_m de ce qui reste à vivre à une personne âgée de m ans?

Solution. Soient m, $m+1$, $m+2$, $m+3$, etc., les âges consécutifs; A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, A_{m+3}, etc., les survivants à ces âges; $A_m - A_{m+1}$, $A_{m+1} - A_{m+2}$, $A_{m+2} - A_{m+3}$, etc., les individus décédés de chaque année;

$\frac{2m+1}{2}$, $\frac{2m+3}{2}$, $\frac{2m+5}{2}$, etc., la durée moyenne de la vie de chaque décédé;

$$\frac{2m+1}{2}(A_m - A_{m+1}),$$

$$\frac{2m+3}{2}(A_{m+1} - A_{m+2}),$$

$$\frac{2m+5}{2}(A_{m+2} - A_{m+3}), \text{ etc.},$$

sont les durées moyennes de la vie de tous les décédés.

Les durées à partir de l'âge m seront :

$$\frac{1}{2}(A_m - A_{m+1}),$$
$$\frac{5}{2}(A_{m+1} - A_{m+2}),$$
$$\frac{5}{2}(A_{m+2} - A_{m+3}), \text{ etc.}$$

La somme de toutes ces durées sera :

$$\frac{1}{2}A_m + A_{m+1} + A_{m+2} + A_{m+3} + \text{etc.}$$

Donc la durée moyenne de ce qui reste à vivre, à la personne de l'âge m est

$$F_m = \frac{\frac{1}{2}A_m + A_{m+1} + A_{m+2} + \cdots}{A_m} = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+1} + A_{m+2} + \cdots}{A_m} = \frac{1}{2} + \frac{C_{m+1}}{A_m}. \quad (1)$$

Exemple. Quelle est la durée moyenne de la vie d'une personne de 30 ans?

La table donne $A_m = 439$, $C_{m+1} = 12524$, donc

$$F_m = \frac{1}{2} + \frac{12524}{439} = 28^{\text{ans}},57.$$

Remarque. I. Comme on a

$$F_m = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+1} + A_{m+2} + A_{m+3} \cdots}{A_m} = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+1}}{A_m}\left[1 + \frac{A_{m+2} + A_{m+3} + \cdots}{A_{m+1}}\right].$$

$$F_{m+1} = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+2} + A_{m+3} + \cdots}{A_m} = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+2}}{A_m}\left[1 + \frac{A_{m+3} + \cdots}{A_{m+2}}\right].$$

$$F_{m+2} = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+3} + A_{m+4} + \cdots}{A_m} = \text{etc.},$$

on trouvera :

$$F_m = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+1}}{A_m}\left[F_{m+1} + \frac{1}{2}\right],$$
$$F_{m+1} = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\left[F_{m+2} + \frac{1}{2}\right], \text{ etc.}$$

Au moyen de ces formules on peut donc déduire F_{m+1} de F_m, F_{m+2} de F_{m+1}, ainsi de suite, et former une table de la durée moyenne du temps qui reste encore à vivre.

La table ci-dessous a été construite de cette manière.

Table de la durée moyenne de la vie.

m	F_m	m	F_m	m	F_m	m	F_m	m	F_m
0	28,49	19	37,57	38	23,78	57	13,52	76	6,74
1	36,72	20	35,03	39	23,21	58	13,04	77	6,23
2	40,71	21	34,39	40	22,64	59	12,55	78	5,93
3	42,50	22	33,74	41	22,06	60	12,07	79	5,69
4	43,28	23	33,09	42	21,48	61	11,58	80	5,53
5	43,31	24	32,44	43	20,89	62	11,10	81	5,31
6	43,22	25	31,78	44	20,31	63	10,69	82	5,00
7	43,06	26	31,12	45	19,72	64	10,28	83	4,75
8	42,76	27	30,45	46	19,12	65	9,88	84	4,60
9	42,39	28	29,79	47	18,58	66	9,50	85	4,32
10	41,94	29	29,18	48	18,04	67	9,13	86	4,14
11	41,33	30	28,57	49	17,49	68	8,79	87	3,75
12	40,65	31	27,96	50	16,95	69	8,47	88	3,40
13	39,96	32	27,35	51	16,46	70	8,18	89	3,12
14	39,26	33	26,73	52	15,96	71	7,85	90	3,00
15	38,56	34	26,11	53	15,48	72	7,55	91	2,50
16	37,86	35	25,49	54	14,98	73	7,30	92	2,00
17	37,16	36	24,92	55	14,50	74	7,01	93	1,50
18	36,46	37	24,35	56	14,01	75	6,76	94	1,00

Remarque II. Soient

$$\frac{A_{m+1}}{A_m} = p_{m+1}, \quad \frac{A_{m+2}}{A_m} = p_{m+2}, \text{ etc.};$$

ces rapports expriment les probabilités d'atteindre $m + 1$, $m + 2$, etc., ans; la formule (1) devient, en les employant :

$$F_m = \frac{1}{2} + p_{m+1} + p_{m+2} + p_{m+3} + \text{etc.}$$

Comme

$$F_{m+1} = \frac{1}{2} + p_{m+2} + p_{m+3} + \text{etc.},$$

on aura

$$F_m = \frac{1}{2} + p_{m+1}\left(F_{m+1} + \frac{1}{2}\right),$$

donc

$$p_{m+1} = \frac{F_m - \frac{1}{2}}{F_{m+1} + \frac{1}{2}}.$$

Donc, à l'aide d'une table de la durée moyenne de la vie, on peut former une table de mortalité, car puisque

$$p_{m+1} = \frac{A_{m+1}}{A_m},$$

il en résulte

$$A_{m+1} = A_m p_{m+1}.$$

154. Définition. *La vie probable* ou la durée probable de ce qui reste à vivre à une personne de l'âge m, est le laps de temps pendant lequel la moitié des personnes de cet âge sont mortes. Si G_m désigne la vie probable, on pourra parier 1 contre 1, qu'une personne de m ans, vivra encore G_m ans, ou mourra avant d'avoir atteint ce terme.

Huitième problème. Trouver la vie probable G_m d'une personne âgée de m ans.

Il faut prendre le nombre A_m correspondant à l'âge m, chercher, dans la colonne m, le nombre k correspondant au nombre $\frac{1}{2}A_m$ pris dans la colonne A_m; la vie probable, à partir de l'âge m, sera

$$G_m = k - m.$$

Exemple. Chercher la vie probable d'une personne de 30 ans. La colonne A_m donne 300; donc $\frac{1}{2}A_m = 150$; ce dernier nombre correspond à $k = 66,2$. Donc

$$G_m = 66,2 - 50 = 16,2.$$

155. Définition. Le danger annuel de mourir est égal au rapport du nombre des décès de chaque âge à la population correspondante.

Le complément arithmétique de ce rapport est la probabilité d'arriver à la période suivante.

β. Probabilités composées relatives à la vie humaine.

156. Premier problème. Deux personnes A et B âgées de m et de n ans, sont associées pour un terme de t ans; quelles sont les probabilités que ces personnes vivront, ou seront mortes après ce terme ?

La probabilité	p_1	que A vit après		t	années	$= \dfrac{A_{m+t}}{A_m}$
»	p_2	» B	»	t	»	$= \dfrac{A_{n+t}}{A_n}$
»	q_1	» A soit mort après t			»	$= 1 - \dfrac{A_{m+t}}{A_m}$
»	q_2	» B	»	t	»	$= 1 - \dfrac{A_{n+t}}{A_n}.$

1° La probabilité composée p_1p_2 que les deux personnes existent encore après t ans, est

$$\frac{A_{m+t}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+t}}{A_n};$$

2° La probabilité que A et B, ou l'un au moins, n'existe plus après t ans, est

$$1 - \frac{A_{m+t}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+t}}{A_n};$$

3° La probabilité p_1q_2 que A vit et que B est mort après t ans, est

$$\frac{A_{m+t}}{A_m}\left(1 - \frac{A_{n+t}}{A_n}\right);$$

4° La probabilité p_2q_1 que B vit et que A est mort après t ans, est

$$\frac{A_{n+t}}{A_n}\left(1 - \frac{A_{m+t}}{A_m}\right);$$

5° La probabilité $q_1 q_2$ que A et B sont morts ensemble après t ans, est

$$\left(1 - \frac{A_{m+t}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{n+p}}{A_n}\right).$$

Remarque I. Les probabilités désignées sous les numéros 1°, 3°, 4°, 5°, sont fournies par les termes du produit

$$(p_1 + q_1)(p_2 + q_2) = 1.$$

Remarque II. Les probabilités composées relatives à trois personnes associées pour un certain terme, sont données par le produit

$$(p_1 + q_1)(p_2 + q_2)(p_3 + q_3) = 1.$$

157. Deuxième problème. Soit M un nombre de couples mariés, les hommes ayant tous m ans, et les femmes n; quels sont les nombres de couples vivants ou morts après t années?

1° Après t ans, un nombre $M.\frac{A_{m+t}}{A_m}.\frac{A_{n+t}}{A_n}$ de ces couples vivront encore;

2° Après t ans, un nombre $M.\frac{A_{n+t}}{A_n}\left(1-\frac{A_{m+t}}{A_m}\right)$ de veuves vivront encore;

3° Après t ans, un nombre $M\,\frac{A_{m+t}}{A_m}\left(1-\frac{A_{n+t}}{A_n}\right)$ de veufs vivront encore;

4° Après t ans, un nombre de couples

$$M\left(1 - \frac{A_{m+t}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{n+t}}{A_n}\right)$$

n'existeront plus.

Exemple. De 1000 couples, dont les maris ont 30 ans, et les femmes 20 ans,

$$1000.\frac{A_{30+10}}{A_{20}} = 762 \text{ couples vivront encore après 10 ans;}$$

$$1000.\frac{A_{20+10}}{A_{20}}\left(1 - \frac{A_{30+10}}{A_{30}}\right) = 132 \text{ veuves vivent » » 10 ans;}$$

$$1000.\frac{A_{30+10}}{A_{30}}\left(1 - \frac{A_{20+10}}{A_{20}}\right) = 90 \text{ veufs » » » 10 ans;}$$

$$1000\left(1 - \frac{A_{30+10}}{A_{30}}\right)\left(1 - \frac{A_{20+10}}{A_{20}}\right) = 16 \text{ couples n'existeront plus » 10 ans;}$$

Total. . . 1000

158. Définition. La durée moyenne du mariage est le nombre moyen des années pendant lesquelles un couple donné vit ensemble, jusqu'au décès de l'un des époux.

Troisième problème. Chercher la durée moyenne des mariages.

Soient M couples dont les maris ont m ans, les femmes n ans; de ces couples, il y en aura :

$M.\frac{A_{m+1}}{A_m}.\frac{A_{n+1}}{A_n}$ vivant ensemble après la 1re année;

$M.\frac{A_{m+2}}{A_m}.\frac{A_{n+2}}{A_n}$ » » 2me »

$M.\frac{A_{m+3}}{A_m}.\frac{A_{n+3}}{A_n}$ » » 3me » etc.

Cette suite doit être prolongée jusqu'à ce que, d'après la table de mortalité, l'un des facteurs $\frac{A_{m+p}}{A_m}$ ou $\frac{A_{n+p}}{A_n}$ devienne zéro.

Soit k la durée moyenne des mariages, on a

$$K = \frac{\dfrac{M\left[A_{m+1}A_{n+1} + A_{m+2}A_{n+2} + A_{m+3}A_{n+3} + \cdots\right]}{A_m A_n}}{M}$$

$$= \frac{\text{somme des nombres de couples survivants jusqu'à la mort d'un des conjoints}}{\text{nombre des couples primitifs}}$$

$$= \frac{1}{A_m A_n}.\left[A_{m+1}A_{n+1} + A_{m+2}A_{n+2} + \text{etc.}\right]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

159. Quatrième problème. Chercher la durée moyenne du veuvage des femmes.

Soit L cette durée moyenne; on aura

$$L = \frac{\text{somme des nombres de veuves survivantes jusqu'à la mort de la dernière}}{\text{nombre des couples primitifs}}$$

$$= \frac{M\left[A_{n+1}\left(1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}\right) + A_{n+2}\left(1 - \frac{A_{m+2}}{A_m}\right) + \frac{A_{n+3}}{A_n}\left(1 - \frac{A_{m+3}}{A_m}\right) + \cdots\right]}{M.A_n}$$

$$= \frac{A_{n+1}\left(1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}\right) + A_{n+2}\left(1 - \frac{A_{m+2}}{A_m}\right) + \text{etc.}}{A_n}.$$

Et comme

$$A_{n+1} + A_{n+2} + A_{n+3} + \cdots = C_{n+1},$$

on trouvera, en tenant compte de la formule (a), n° 158 :

$$L = \frac{C_{n+1}}{A_n} - K.$$

Remarque I. On trouve de même pour durée moyenne H du veuvage des hommes

$$H = \frac{A_{m+1}\left(1 - \frac{A_{n+1}}{A_n}\right) + A_{m+2}\left(1 - \frac{A_{n+2}}{A_n}\right) + \text{etc.}}{A_m} = \frac{C_{m+1}}{A_n} - K.$$

Remarque II. Soit G la durée moyenne d'un nombre donné M de couples. En faisant $t = 1, 2$, etc., dans

$$M\left(1 - \frac{A_{m+t}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{n+t}}{A_n}\right), \text{ nombre de couples morts après } t \text{ ans},$$

on a

$$G = \left(1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{n+1}}{A_n}\right) + \left(1 - \frac{A_{m+2}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{n+2}}{A_n}\right) + \text{etc.}$$

Et si N est le nombre de termes de cette suite,

$$G = N - \frac{C_{m+1}}{A_m} - \frac{C_{n+1}}{A_n} + K.$$

Remarque III. Dans les quatre formules K, L, H, G, on a supposé que les séparations des couples avaient lieu au commencement de chaque année; mais il est plus exact de supposer que ces séparations aient lieu uniformément pendant tout le cours de l'année : ce qui revient à en transporter l'origine au milieu. Mais alors il faut ajouter $^1/_2$ aux quatre formules trouvées, par la même raison que l'on a ajouté $^1/_2$ ci-dessus à la durée de la vie moyenne.

Exemple. Cherchons 1° la durée moyenne K du mariage; 2° la durée moyenne L du veuvage de la femme; 3° la durée moyenne H du veuvage du mari, d'un couple dont le mari a 90 ans, et la femme 80 ans.

La table de mortalité donne

$A_{91} = 5$	$A_{81} = 32$	produit $= 160$
$A_{92} = 4$	$A_{82} = 28$	» $= 112$
$A_{93} = 3$	$A_{83} = 24$	» $= 72$
$A_{94} = 2$	$A_{84} = 20$	» $= 40$
$A_{95} = 1$	$A_{85} = 17$	» $= 17$
$A_{96} = 0$	$A_{86} = 14$	» $= 0$
		Somme $= 401$

On a

$$A_m = A_{90} = 6$$
$$A_n = A_{80} = 57$$
$$C_{n+1} = C_{81} = 186$$
$$C_{m+1} = C_{91} = 15$$

Donc

$$K = \frac{1}{2} + \frac{401}{222} = 2{,}51 \text{ ans.}$$

$$L = \frac{1}{2} + \frac{C_{n+1}}{A_n} - K = \frac{1}{2} + \frac{186}{57} - 2{,}51 = 3{,}22 \text{ ans.}$$

$$H = \frac{1}{2} + \frac{C_{m+1}}{A_m} - K = \frac{1}{2} + \frac{15}{6} - 2{,}51 = 0{,}69 \text{ ans.}$$

160. Cinquième problème. On connaît la durée moyenne K du mariage d'un couple dont le mari a m ans, et la femme n ans, en conclure la durée moyenne K′ du mariage d'un autre couple, dont le mari a $m + p$ ans, et la femme $n + p$ ans.

Solution. On a

$$K = \frac{1}{A_m A_n}\left[A_{m+1}A_{n+1} + A_{m+p}A_{n+p}\right] + \frac{1}{A_m A_n}\left[A_{m+p+1}A_{n+p+1} + \text{etc.}\right]$$
$$= Q + \frac{1}{A_m A_n}\left[A_{m+p+1}A_{n+p+1} + A_{m+p+2}A_{n+p+2} + \text{etc.}\right],$$

mais on a

$$K' = \frac{1}{A_{m+p}A_{n+p}}\left[A_{m+p+1}A_{n+p+1} + A_{m+p+2}A_{n+p+2} + \ldots\right]$$
$$= \left[K - Q\right]\frac{A_m A_n}{A_{m+p}A_{n+p}}.$$

Exemple. Soient $m = 40$, $n = 50$, d'où $K = 17{,}11$
$m + p = 41$, $n + p = 51$; chercher K′.

On a $p = 1$, donc

$$Q = \frac{A_{41} . A_{31}}{A_{40} . A_{30}} = 0,968,$$

donc

$$K' = (17,11 - 0,968)\frac{574}{567} \cdot \frac{439}{455} = 16,66 \text{ ans.}$$

161. Durée moyenne des mariages. Soit n mariages entre n garçons de l'âge a, et n filles de l'âge a'.

Soit φ la probabilité qu'un garçon qui se marie à l'âge a parvienne à l'âge $a + x$; on a par la table

$$\varphi = \frac{A_{a+x}}{A_a};$$

soit

$$A_a = p', \quad A_{a+x} = q',$$

on aura :

$$\varphi = \frac{q'}{p'},$$

d'où

$$n\varphi = \frac{nq'}{p'},$$

nombre des maris vivants à l'âge de $a + x$ ans.

Soit ψ la probabilité qu'une fille se marie à l'âge a' parvienne à l'âge $a' + x$; on a par la table

$$\psi = \frac{A_{a'+x}}{A_{a'}},$$

et si l'on fait $A_{a'} = p''$, $A_{a'+x} = q''$

$$\psi = \frac{q''}{p''}, \quad n\psi = \frac{nq''}{p''}$$

nombre des femmes vivantes à l'âge $a' + x$.

$\varphi\psi$ est la probabilité que leur mariage subsiste après x ans.

$nC_i(\varphi . \psi)^i(1 - \varphi\psi)^{n-i}$ est la probabilité que sur les n mariages il en subsiste encore i après la $x^{ième}$ année. (Voir n° 20).

Le plus grand terme de $[\varphi\psi + (1 - \varphi\psi)]^n$, est celui dans lequel on a

$$\varphi\psi : 1 - \varphi\psi = i : n - i$$

d'où

$$i = n\varphi\psi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Donc le nombre des mariages qui subsiste le plus probablement après x ans est

$$i = n\varphi\psi = n\frac{A_{a+x}}{A_a}\frac{A_{a'+x}}{A_{a'}} = \frac{nq'q''}{p'p''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

A l'aide de cette formule (2) on pourra former d'année en année une table des valeurs de i. En faisant la somme de tous les nombres de cette table, et en la divisant par n, on aura la durée moyenne des mariages faits à l'âge a pour les garçons, et à l'âge a' pour les filles.

Faisons pour simplifier $a = a'$, $\varphi = \psi$, $q'' = q'$, $p'' = p'$, ce qui revient à supposer que les conjoints sont du même âge, et que la probabilité de la vie des hommes soit la même que celle des femmes : la formule (2) devient

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

la formule (1) devient

$$i = n\varphi^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

162. Problème. Chercher la probabilité que l'erreur de $i = \frac{nq'^2}{p'^2}$ est comprise entre $\pm s$.

Si de p individus de l'âge a, q parviennent à l'âge $a + x$, en supposant que p et q soient infinis, on aura exactement :

$$\varphi = \frac{q}{p},$$

d'où

$$\frac{p - q}{p} = 1 - \varphi.$$

Pour un grand nombre p' d'individus, on aura $q' = \frac{p'q}{p}$.

Si z est l'erreur de cette détermination, on aura exactement

$$q' = \frac{p'q}{p} + z,$$

donc

$$\frac{q}{p} = \varphi = \frac{q'}{p'} - \frac{z}{p'}, \quad i = n\varphi^2 = n\left(\frac{q'}{p'} - \frac{z}{p'}\right)^2 = \frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2} \quad (5)$$

en négligeant le dernier terme qui est de l'ordre de $\frac{z^2}{p'}$; et la probabilité Π de z sera (n° 112) :

$$\Pi = \sqrt{\left\{\frac{p^3}{2qp'(p-q)(p+p')\pi}\right\}}\, e^{-\frac{p^3z^2}{2qp'(p-q)(p+p')}}\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left\{2\pi\frac{q}{p}p'\frac{p-q}{p}\left(1+\frac{p'}{p}\right)\right\}}}\, e^{-\frac{z^2}{\frac{2qp'}{p}\left(\frac{p-q}{p}\right)\left(1+\frac{p'}{p}\right)}}\, dz.$$

Négligeons $\frac{p'}{p}$ vis-à-vis de 1, nous aurons

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varphi p'(1-\varphi)}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2\varphi p'(1-\varphi)}}\, dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

C'est aussi la probabilité de la valeur (5), qui est la vraie valeur de i.

Maintenant cherchons :

1° La probabilité de l dans l'expression

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2} + l = n\varphi^2 + l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Comme $i = n\varphi\psi$ est l'exposant de $\varphi\psi$ du plus grand terme de $[\varphi\psi + (1-\varphi\psi)]^n$, il est clair que $n\varphi^2$ est l'exposant du plus grand terme de $[\varphi^2 + (1-\varphi^2)]^n$. Donc la probabilité de l, dans l'expression (7), sera le $l^{\text{ème}}$ terme de $[\varphi^2 + (1-\varphi^2)]^n$ après le plus grand terme de ce binôme.

Or, d'après le théorème de Bernouilli, le plus grand terme G du binôme $(p+q)^k$ est (n° 51)

$$G = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \cdot$$

Si G_{n-l}, G_{n+l} désignant respectivement le $l^{\text{ème}}$ terme avant, et le $l^{\text{ème}}$ terme après le plus grand G, on a (n° 51)

$$G_{n-l} + G_{n+l} = \frac{2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\, e^{-\frac{l^2}{2\mu pq}}.$$

Cela posé, en prenant approximativement

$$G_{n+l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\, e^{-\frac{l^2}{2\mu pq}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

on n'aura qu'à faire $p = \varphi^2$, $q = 1 - \varphi^2$, $\mu = n$, et la probabilité Π′ de l, dans l'expression $i = n\varphi^2 + l$, sera

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\varphi^2(1-\varphi^2)}}\, e^{-\frac{l^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}}\, dl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

donc la probabilité Π_1 de l'existence simultanée de z et de l, dans l'expression

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2} + l. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

sera

$$\Pi_1 = \Pi \,.\, \Pi' = \frac{e^{-\frac{z^2}{2p'\varphi(1-\varphi)} - \frac{l^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}}}{2\pi\sqrt{np'\varphi^5(1-\varphi^2)(1+\varphi)}}\, dzdl \quad . \quad (10)$$

Mais si s est l'erreur de i, dans $i = \frac{nq'^2}{p'^2}$, la valeur de i sera

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2} + s, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

donc pour que (α) soit aussi la vraie valeur de i, on doit avoir

$$\frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2} + l = \frac{nq'^2}{p'^2} + s,$$

ou

$$l = s + \frac{2nq'z}{p'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

donc

$$\Pi_1 = \frac{e^{-\frac{z^2}{2p'\varphi(1-\varphi)} - \frac{\left(s+\frac{2nq'z}{p'^2}\right)^2}{2n\varphi'(1-\varphi^2)}}}{2\pi\sqrt{np'\varphi^5(1-\varphi^2)(1+\varphi)}}\, dzds. \quad . \quad . \quad (13)$$

est la probabilité de s dans l'expression

$$i = n\varphi^2 + l = \frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2} + l = \frac{nq'^2}{p'^2} + s.$$

2° Cherchons la probabilité P que l'erreur de $i = \frac{nq'^2}{p'^2}$ est comprise entre $\pm s$.

Pour cela il faut intégrer (15) par rapport à z entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, et par rapport à s, entre $-s$ et $+s$; on trouvera ainsi :

$$P = \frac{1}{2\pi\sqrt{np'\varphi^3(1-\varphi^2)(1+\varphi)}} \int_{-s}^{+s} ds \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{z^2}{2\varphi(1-\varphi)\varphi'} - \frac{\left(s+\frac{2nq'}{p'}\right)^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}}$$

soit

$$c = \frac{1}{2\pi\sqrt{np'\varphi^3(1-\varphi^2)(1+\varphi)}},$$

alors

$$P = c\int_{-s}^{+s} dse^{-\frac{s^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} dze^{-\left[\left\{\frac{1}{2\varphi(1-\varphi)} + \frac{4n^2q'^2}{2np'^4\varphi^2(1-\varphi^2)}\right\} z + \frac{4nq'sz}{2np'^2\varphi^2(1-\varphi)^2}\right]}$$

comme $\varphi = \frac{q'}{p'}$ approximativement, d'où $q' = \varphi p'$, on a :

$$P = c\int_{-s}^{+s} dse^{-\frac{s^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} dze^{-\left[\frac{p'^2(1+\varphi)+4n\varphi}{2p'^2\varphi(1-\varphi^2)} z^2 + \frac{2sz}{p'\varphi(1-\varphi^2)}\right]}.$$

Posons :

$$h = \frac{p'^2(1+\varphi)+4n\varphi}{2p'^2\varphi(1-\varphi^2)}, \quad g = \frac{2p's}{p'^2(1+\varphi)+4n\varphi},$$

alors $$P = c\int_{-s}^{+s} dse^{-\frac{s^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}} \int_{-z}^{+z} dze^{-h(z^2+2gz)}$$

$$= c\int_{-s}^{+s} dse^{-\left[\frac{s^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)} - hg^2\right]} \int_{-z}^{+z} dze^{-h(z+g)^2}$$

et comme

$$\int_{-z}^{+z} dze^{-h(z+g)^2} = \frac{1}{h}\sqrt{\pi},$$

on aura $$P = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}} c\int_{-s}^{+s} dse^{-\left\{\frac{s^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)} - hg^2\right\}} =$$

$$\frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{2\pi\left[p'^2(1+\varphi)+4n\varphi\right] n\varphi^2(1+\varphi)}} \int_{-s}^{+s} dse^{-\left\{\frac{p'}{2n\varphi^2(1-\varphi)[p'^2(1+\varphi)+4n\varphi]}\right\} s^2}$$

ou bien, en posant :

$$k^2 = \frac{p'}{2n\varphi^2(1-\varphi)\left[p'^2 + (p'^2+4n)\varphi\right]}$$

$$P = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_{-s}^{+s} dse^{-k^2s^2} = \frac{2k}{\sqrt{\pi}}\int_0^s dse^{-k^2s^2}.$$

DURÉE MOYENNE D'UNE ASSOCIATION QUELCONQUE DE n INDIVIDUS.

163. Soient $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ les âges respectifs de ces n personnes;
» $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$ leurs probabilités respectives de vivre encore x années; on aura :

$$p_1 = \frac{A_{a_1+x}}{A_{a_1}}, \quad p_2 = \frac{A_{a_2+x}}{A_{a_2}}, \dots p_n = \frac{A_{a_n+x}}{A_{a_n}}.$$

Soit i le nombre des associations existantes après x ans, écoulés depuis l'origine de l'association, on a :

$$i = n \,.\, p_1 p_2 \dots p_n. \qquad (1)$$

Remarque. Si les associés sont du même âge, et que r soit leur nombre, on a

$$i = np_1^r. \qquad (2)$$

La somme des valeurs de (1) ou de (2) correspondantes à toutes les valeurs de x, divisée par n, sera la durée moyenne de ce genre d'association.

DURÉE MOYENNE DE LA VIE.

164. Premier problème. Soit $\omega = l + n\mu$, déterminer la probabilité P_ω que la somme des âges auxquels parviendront n individus, nés à la même époque, est égale à ω.

Soit a l'âge le plus élevé;

Soient o, da, $2da$, $3da \dots x \dots a$ les âges respectifs des n personnes;

Soient $\varphi(o)$, $\varphi(da)$, $\varphi(2da) \dots \varphi(x) \dots \varphi(a)$, les probabilités correspondantes.

On aura :

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\int_0^a \varphi(x)\,dx = \varphi(o) + \varphi(da) + \varphi(2da) + \cdots + \varphi(a) = 1,
\end{array}\right.$$

c'est-à-dire que la probabilité que les n individus auront ou o, ou da, ou $2da \ldots$ ou a années, est une *certitude ;*

$$\int_0^a x\varphi(x)\,dx = o\varphi(o) + da\varphi(da) + 2da\varphi(2da) + \cdots$$

somme des produits des âges par les probabilités correspondantes, sera la vraie durée de la vie moyenne ;

$$\int_0^a x^2\varphi(x)\,dx = o^2\varphi(o) + da^2\varphi(da) + (2da)^2\varphi(2da) + \text{etc.}$$

somme des produits des carrés des âges par les probabilités correspondantes ;

$$\int_0^a x^3\varphi(x)\,dx = o^3\varphi(o) + da^3\varphi(da) + (2da)^3\varphi(2da) + \cdots \text{etc.}$$

somme des produits des cubes des âges par les probabilités correspondantes ; (1)

et ainsi de suite.

Posons $\quad x = ax', \quad \varphi(ax') = \psi(x'),$

$$\int_0^1 \psi x'dx' = k, \quad \int_0^1 x'\psi x'dx' = k_1, \quad \int_0^1 x'^2\psi(x')\,dx' = k_2, \text{ etc.}$$

Il vient

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^a \varphi(x)\,dx &= a\int_0^1 \psi x'\,dx' = ak = 1,\\
\int_0^a x\varphi(x)\,dx &= a^2\int_0^1 x'\psi x'\,dx' = a^2k_1,\\
\int_0^a x^2\varphi(x)\,dx &= a^3\int_0^1 x\psi x'\,dx' = a^3k_2.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Les termes du produit

$$\{\varphi(o) + \varphi(da) + \varphi(2da) + \cdots + \varphi(a)\}^n = 1.$$

exprimeront toutes les probabilités composées possibles des âges simultanés des n individus.

Soit

$$X = \{\varphi(o) + \varphi(da)\,t^{da} + \varphi(2da)\,t^{2da} + \cdots\}^n = \Sigma P_\omega t^\omega,$$

alors P_ω sera la probabilité que la somme des âges auxquels les n enfants parviendront est ω.

Pour trouver P_ω, posons $t = e^{-\varpi\sqrt{-1}}$, on aura

$$\begin{aligned}
X &= \{\varphi(o) + \varphi(da)\,e^{-\omega da\sqrt{-1}} + \varphi(2da)\,e^{-2\varpi da\sqrt{-1}} + \cdots\}^n = \Sigma P_\omega e^{-\varpi\omega\sqrt{-1}}\\
&= P_0 + P_1 e^{-da\varpi\sqrt{-1}} + \text{etc.} + P_\omega e^{-\varpi\omega\sqrt{-1}} + P_{\omega+1}e^{-\varpi(\omega+da)\sqrt{-1}} + \text{etc.} \quad (3)
\end{aligned}$$

On a $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\varpi m\sqrt{-1}}\,d\varpi = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} d\varpi = 2\pi \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Donc en multipliant (3) par $e^{\varpi\omega\sqrt{-1}}d\varpi$, et en intégrant entre les limites $\varpi = -\pi$ et $\varpi = \pi$, tous les termes du second membre disparaissent à l'exception du terme en P_ω, et l'on a

$$\int_{-\pi}^{+\pi} X e^{\varpi\omega\sqrt{-1}}\,d\varpi = P_\omega \,.\, 2\pi,$$

d'où

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X e^{\varpi\omega\sqrt{-1}}\,d\varpi,$$

et comme $\omega = l + n\mu$

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\varpi e^{l\varpi\sqrt{-1}}\left\{e^{\mu\varpi\sqrt{-1}}\left[\varphi(o) + \varphi(da)\,e^{-\varpi da\sqrt{-1}} + \varphi(2da)\,e^{-2\varpi da\sqrt{-1}} + \cdots\right]\right\}^n.$$

Soit

$$A = \left\{e^{\mu\varpi\sqrt{-1}}\left[\varphi(o) + \varphi(da)\,e^{-\varpi da\sqrt{-1}} + \varphi(2da)\,e^{-2\varpi da\sqrt{-1}} + \cdots\right]\right\}^n, \quad (5)$$

nous aurons :

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi e^{l\varpi\sqrt{-1}} A \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}.A &= n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\,\mathrm{l}.\left\{\varphi(o) + \varphi(da)\,e^{-\varpi da\sqrt{-1}} + \varphi(2da)\,e^{-2\varpi da\sqrt{-1}} + \text{etc.}\right\}\\
&= n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\,\mathrm{l}.\left\{\varphi(o) + \varphi(da)\left[1 - \varpi da\sqrt{-1} - \frac{\varpi^2 da^2}{2} + \frac{\varpi^3 da^3}{2\,.\,3}\sqrt{-1} + \text{etc.}\right]\right.\\
&\qquad + \varphi(2da)\left[1 - \varpi 2da\sqrt{-1} - \frac{\varpi^2\overline{2da}^2}{2} + \frac{\varpi^3\overline{2da}^3}{2\,.\,3}\sqrt{-1} + \text{etc.}\right]\\
&\qquad + \varphi(3da)\left[1 - \varpi 3da\sqrt{-1} - \frac{\varpi^2\overline{3da}^2}{2} + \frac{\varpi^3\overline{3da}^3}{2\,.\,3}\sqrt{-1} + \text{etc.}\right]\\
&\qquad \left. + \text{etc.}\right\}\\
&= n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\,\mathrm{l}.\left\{\left[\varphi(o) + \varphi(da) + \varphi(2da) + \varphi(3da) + \text{etc.}\right]\right.\\
&\qquad - \varpi\sqrt{-1}\left[\varphi(o) + \varphi(da)\,da + \varphi(2da)\,da + \cdots\right]\\
&\qquad - \frac{\varpi^2}{2}\left[\varphi(o) + \varphi(da)\,da^2 + \varphi(2da)\,da^2 + \text{etc.}\right]\\
&\qquad \left. + \frac{\varpi^3}{2\,.\,3}\sqrt{-1}\left[\varphi(o) + \varphi(da)\,da^3 + \varphi(2da)\,da^3 + \text{etc.}\right] + \text{etc.}\right\}.
\end{aligned}$$

On a ajouté $\varphi(o) = 0$ dans les polynômes entre parenthèses, et à cause des équations (1) et (2), on pourra écrire :

$$\mathrm{l.\,A} = n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\,\mathrm{l.}\left\{\int_0^a \varphi x dx - \varpi\sqrt{-1}\int_0^a x\varphi x dx \right.$$

$$\left. - \frac{\varpi^2}{2}\int_0^a x^2\varphi x dx + \frac{\varpi^3}{2.3}\sqrt{-1}\int_0^a x^3\varphi x dx + \text{etc.}\right\}$$

$$\mathrm{l.\,A} = n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\,\mathrm{l.}\left\{1 - \varpi\sqrt{-1}\,a^2k_1 - \frac{\varpi^2}{2}\,a^3k_2 + \frac{\varpi^3}{2.3}\sqrt{-1}\,a^4k_3 + \text{etc.}\right\}$$

$$= n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\,\mathrm{l.}\left\{1 - \varpi\sqrt{-1}\,\frac{ak_1}{k} - \frac{\varpi^2}{2}\,\frac{a^2k_2}{k} + \frac{\varpi^3}{2.3}\sqrt{-1}\,\frac{a^3k_3}{k} + \text{etc.}\right\}$$

Si l'on développe le logarithme en série on trouvera :

$$\mathrm{l.\,A} = n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\left\{-\varpi\sqrt{-1}\,\frac{ak_1}{k} - \frac{\varpi^2}{2}\,\frac{a^2k_2}{k} + \frac{1}{2}\varpi^2\frac{a^2k_1^2}{k^2} - \text{etc.}\right\}$$

$$= \left(\mu - \frac{ak_1}{k}\right)n\varpi\sqrt{-1} - na^2\varpi^2\left(\frac{kk_2 - k_1^2}{2k^2}\right) - \text{etc.}$$

μ étant quelconque, on fait disparaître le premier terme imaginaire en posant (v. page 292) :

$$\mu = \frac{ak_1}{k} = \frac{a^2k_1}{ak} = a^2k_1 = \int_0^a x\varphi x dx,$$

vraie durée de la vie moyenne. Alors

$$\mathrm{l.\,A} = -\,n\,\frac{kk_2 - k_1^2}{2k^2}\,a^2\varpi^2 - \text{etc.}$$

Passant aux nombres :

$$\mathrm{A} = e^{-n\frac{kk_2 - k_1^2}{2k^2}a^2\varpi^2};$$

n étant très-grand, on peut négliger tous les autres termes de l'exposant de e, d'où

$$\mathrm{P}_\omega = \frac{1}{2\mu}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi e^{l\varpi\sqrt{-1}}\,e^{-n\frac{kk_2 - k_1^2}{2k^2}a^2\varpi^2},$$

on peut étendre les limites à $\pm\,\infty$, et poser

$$\mathrm{P}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\varpi e^{l\varpi\sqrt{-1} - n\frac{kk_2 - k_1^2}{2k^2}a^2\varpi^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Pour effectuer l'intégration de (6), il faut faire en sorte que l'exposant de e devienne un carré ; on a :

$$l\varpi\sqrt{-1} - n\frac{kk_2 - k_1^2}{2k^2}a^2\varpi^2 = -\,n\,\frac{kk_2 - k_1^2}{2k^2}\,a^2\left\{\varpi^2 - \frac{2k^2l\sqrt{-1}}{na^2(kk_2 - k_1^2)}\,\varpi\right\}$$

$$= -\,n\,\frac{kk_2 - k_1^2}{2k^2}\,a^2\left\{\left[\varpi - \frac{k^2l\sqrt{-1}}{na^2(kk_2 - k_1^2)}\right]^2 - \left[\frac{k^2l\sqrt{-1}}{na^2(kk_2 - k_1^2)}\right]^2\right\}.$$

Soit

$$\beta^2 = \frac{k^2}{2\,(kk_2 - k_1^2)},$$

il viendra

$$l\varpi\sqrt{-1} - n\frac{kk_2 - k_1^2}{2k^2}a^2\varpi^2 = -\left(\frac{a\sqrt{n}}{2\beta}\right)^2\left\{\left[\varpi - \frac{2\beta^2}{na^2}\,l\sqrt{-1} + \frac{4\beta^4l^2}{n^2a^4}\right]\right\}$$

$$= -\left\{\frac{\varpi a\sqrt{n}}{2\beta} - \frac{\beta l\sqrt{-1}}{a\sqrt{n}}\right\}^2 - \frac{\beta^2l^2}{na^2},$$

donc

$$\mathrm{P}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\varpi e^{-\left\{\frac{\varpi a\sqrt{n}}{2\beta} - \frac{\beta l\sqrt{-1}}{a\sqrt{n}}\right\}^2}\,e^{-\frac{\beta^2l^2}{na^2}}.$$

Soit

$$\frac{\varpi a\sqrt{n}}{2\beta} - \frac{\beta l\sqrt{-1}}{a\sqrt{n}} = t,$$

d'où

$$d\varpi = \frac{2\beta}{a\sqrt{n}}\,dt;$$

on aura

$$\mathrm{P}_\omega = \frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{\beta^2l^2}{na^2}}.\,\frac{2\beta}{a\sqrt{n}}\int_{-a}^{\infty} e^{-t^2dt},$$

mais

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2dt} = \sqrt{\pi},$$

donc

$$\mathrm{P}_\omega = \frac{\beta}{a\sqrt{n\pi}}\,e^{-\frac{\beta^2l^2}{na^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

probabilité que la somme des âges auxquels parviendront un très-grand nombre n d'enfants, est :

$$\omega = l + n\mu = l + na^2k_1 = l + n\int_0^a x\varphi x dx,$$

c'est-à-dire que cette somme est égale à l, plus n fois la durée de la vie moyenne.

165. Deuxième problème. Chercher la probabilité P que la somme des âges auxquels parviendront les n individus, est comprise entre

$$n\mu \pm l = na^2k_1 \pm ar\sqrt{n} = n\left[a^2k_1 \pm \frac{ar}{\sqrt{n}}\right].$$

En faisant varier l d'une manière continue depuis $-l$ jusqu'à $+l$, on a

$$P = \frac{\beta}{a\sqrt{n\pi}}\int_{-l}^{+l} e^{-\frac{\beta^2 l^2}{na^2}}\,dl = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\beta}{a\sqrt{n}}\int^{l} e^{-\frac{\beta^2 l^2}{na^2}}\,dl = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r \beta e^{-\beta^2 r^2}\,dr \quad (8)$$

P est donc aussi la probabilité que le rapport de la somme des âges auxquels parviendront les n individus, au nombre des individus, est compris entre $a^2k_1 \pm \frac{ar}{\sqrt{n}}$ ou entre la vraie durée de la vie moyenne augmentée ou diminuée de $\frac{ar}{\sqrt{n}}$.

Remarque. Quand n est très-grand, on a à peu près :

$$\int_0^a x\varphi x dx = a^2k_1 = G$$

rapport de la somme des âges auxquels parviennent les n personnes, à ce nombre n, ou durée de la vie moyenne ;

$$\int_0^a x\varphi x dx = \frac{a^2k_2}{k} = H$$

rapport de la somme des carrés de ces âges, au nombre n.

On a donc (voir p. 292)

$$k_1 = \frac{G}{a^2} = \frac{Gak}{a^2} = \frac{Gk}{a},$$

$$k_1^2 = \frac{G^2k^2}{a^2},$$

$$k_2 = \frac{Hk}{a^2};$$

$$\beta^2 = \frac{k^2}{2(kk_2 - k_1^2)} = \frac{a^2k^2}{2(k^2H - Gk^2)} = \frac{a^2}{2(H - G^2)}$$

$$\beta = \frac{a}{\sqrt{2(H-G^2)}},\ \text{et}\ \frac{1}{2\beta} = \frac{\sqrt{H-G^2}}{a\sqrt{2}}.$$

166. Troisième problème. Chercher l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur la durée moyenne G de la vie.

La probabilité de r est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\beta e^{-\beta^2 r^2}\,dr;$$

donc la valeur moyenne de r est

$$\pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \beta r dr e^{-\beta^2 r^2}.$$

La valeur moyenne de $\frac{ar}{\sqrt{n}}$ est

$$\pm\frac{a}{\sqrt{n\pi}}\int_0^\infty \beta r dr e^{-\beta^2 r^2},$$

mais

$$\int \beta e^{-\beta^2 r^2} r dr = -\frac{e^{-\beta^2 r^2}}{2\beta} + C,\quad \int_0^\infty \beta e^{-\beta^2 r^2} r dr = \frac{1}{2\beta},$$

donc la valeur moyenne de $\frac{ar}{\sqrt{n}}$ est

$$\pm\frac{a}{2\beta\sqrt{n\pi}} = \pm\frac{\sqrt{H-G^2}}{\sqrt{2n\pi}},$$

mais

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\pi \beta dr e^{-\beta^2 r^2}$$

est la probabilité que le rapport de la somme des âges auxquels parviendront n personnes, au nombre n, est compris entre la vraie durée de la vie moyenne $\pm\frac{ar}{\sqrt{n}}$, ou bien, que G est compris entre la vraie durée de la vie moyenne augmentée ou diminuée de

$$\frac{\sqrt{H-G^2}}{\sqrt{2n\pi}};$$

donc en prenant G pour la vraie durée moyenne de la vie, on risque de commettre une erreur comprise entre

$$\pm\frac{\sqrt{H-G^2}}{\sqrt{2n\pi}}.$$

Remarque. Ces résultats sont encore vrais relativement à la durée moyenne de ce qui reste à vivre, lorsqu'au lieu de partir de l'époque de la naissance, on part d'une époque quelconque de la vie.

167. Quatrième problème. Déterminer la durée moyenne de la vie dans le cas où une des causes A de mortalité venait à disparaître.

Il suffit de connaître le nombre de survivants de l'âge x, si la cause A n'existait pas; car alors on pourrait former une table de mortalité pour ce cas, et en déduire la durée de la vie moyenne, en comparant cette durée à celle que l'on conclut des tables de mortalité ordinaires, dans lesquelles on n'a pas fait abstraction de A. On aura l'influence de la cause A sur la durée de la vie moyenne.

Soient Y, le nombre des individus qui, sur n naissances, vivraient à l'âge x, si la cause A disparaissait;

y, le nombre des individus qui, sur n naissances, vivraient encore à l'âge x, dans le cas où la cause A subsiste;

$\varphi(x)\,dx$, la probabilité qu'un individu de l'âge x périra de la cause A dans l'intervalle de temps dx.

$y\varphi x dx$, le nombre des individus qui périront par cette cause dans ce même intervalle de temps dx.

$Y\psi x dx$ le nombre des individus de l'âge x, qui périraient dans l'intervalle dx, si la cause A ne subsistait plus.

On a donc, en remarquant que y et Y diminuent, lorsque x augmente :

$$y dx \{\varphi x + \psi x\} = - dy,$$

et

$$Y\psi(x)\,dx = - dY.$$

Éliminant $\psi(x)$, on trouve :

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dy}{y} + \varphi(x)\,dx$$

$$\mathrm{l}.Y = \mathrm{l}.ye^{\int\varphi x dx}, \quad Y = ye^{\int\varphi x dx}.$$

L'intégrale $\int\varphi x dx$ se trouve approximativement par les tables de mortalité, car en faisant $dx = 1$ an, on peut considérer $\int\varphi x dx$

comme étant le rapport du nombre des individus que la cause A fait périr chaque année, au nombre n de ceux qui vivent encore au milieu de cette année.

DE LA POPULATION.

168. Théorème. Si dans un pays les rapports de la population aux naissances et aux décès annuels sont des nombres constants, les naissances, les décès et la population à la fin de la première, de la seconde, de la troisième, etc., année, à partir d'une époque donnée a, constitueront trois séries de nombres en progression géométrique.

Démonstration. Soient :

P, D, N respectivement la population, les nombres des décès et des naissances à l'époque a;
P_1, D_1, N_1, les mêmes nombres à la fin de la première année à partir de l'époque a;
P_2, D_2, N_2, » » seconde année » »
P_3, D_3, N_3, » » troisième année » » etc.

On a par hypothèse

$$\frac{P}{N} = n, \quad \frac{P}{D} = d \quad \text{d'où} \quad N = \frac{P}{n}, \quad D = \frac{P}{d}, \quad \frac{D}{N} = \frac{n}{d}$$

$$\frac{P_1}{N_1} = n, \quad \frac{P_1}{D_1} = d \quad \text{d'où} \quad N_1 = \frac{P_1}{n}, \quad D_1 = \frac{P_1}{d}, \quad \frac{D_1}{N_1} = \frac{n}{d}, \text{ etc.}$$

Soient

$$r = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{d};$$

et $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2 \ldots$ les excès annuels des naissances sur les décès.

On a

1°
$$\Sigma = N - D = \frac{P}{n} - \frac{P}{d} = P\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{d}\right)$$

$$\Sigma_1 = N_1 - D_1 = \;.\;.\;.\; P_1\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{d}\right)$$

$$\Sigma_2 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; P_2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{d}\right), \text{ etc.}$$

$$P = nN$$

$$P_1 = P + \Sigma = P\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{d}\right) = Pr$$

$$P_2 = P_1 + \Sigma_1 = \ldots\ldots\ P_1 r$$

$$\vdots$$

$$P_i = P_{i-1} + \Sigma_{i-1} = \ldots\ldots\ P_{i-1} r,$$

multipliant par ordre et réduisant, on trouve :

$$P_i = nNr^i = Pr^i \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$

donc

$$P_{i+1} = Pr^{i+1}$$

d'où

$$r = \frac{P_{i+1}}{P_i} \quad \ldots\ldots\ldots (b)$$

2°

$$N_i = \frac{P_i}{n},$$

donc

$$N_i = \frac{nNr^i}{n},$$

d'où

$$N_i = Nr^i, \quad N_{i+1} = Nr^{i+1},$$

et

$$r = \frac{N_{i+1}}{N} \quad \ldots\ldots\ldots (c)$$

3°

$$D_i = \frac{P_i}{d},$$

et par suite de (a),

$$D_i = \frac{nNr^i}{d},$$

et puisque

$$\frac{D}{N} = \frac{n}{d},$$

$$D_i = Dr^i, \quad D_{i+1} = Dr^{i+1} \quad \ldots\ldots (d)$$

et

$$r = \frac{D_{i+1}}{D_i} \quad \ldots\ldots\ldots (e)$$

Par les formules

$$P_i = Pr^i \qquad r = \frac{P_{i+1}}{P_i}$$

$$N_i = Nr^i \qquad r = \frac{N_{i+1}}{N_i}$$

$$D_i = Dr^i \qquad r = \frac{D_{i+1}}{D_i}$$

il est clair que la population, les naissances et les décès forment des progressions géométriques dont la raison sera connue, si l'on connaît deux termes consécutifs de l'une quelconque de ces progressions.

169. **Problème I.** Les naissances et les décès annuels étant proportionnels à la population, trouver le nombre i d'années nécessaires, pour que la population soit devenue égale à m fois la population primitive.

Solution. P étant la population actuelle,

Pr^i est la population après la première année;

donc

$$Pr^i = mP, \quad \text{et} \quad i = \frac{\log. m}{\log. r}.$$

Problème II. Les naissances et les décès annuels étant proportionnels à la population; et Σ exprimant l'excès des naissances sur les décès pendant la période de i années, trouver la raison de la progression géométrique qui exprime la population à partir d'une époque donnée.

Solution. On a

$$P_i = Pr^i$$

d'où

$$r = \sqrt[i]{\frac{P_i}{P}} = \sqrt[i]{\frac{P + \Sigma}{P}} = \sqrt[i]{1 + \frac{\Sigma}{P}}.$$

Soit

$$r = 1 + \rho,$$

on aura

$$\rho = 1 - \left(1 + \frac{\Sigma}{iP}\right) = \frac{\Sigma}{iP}$$

$$r = 1 + \frac{\Sigma}{iP} = 1 + \frac{P_i - P}{iP}.$$

Problème III. Soit N' le nombre des naissances des enfants nés i années avant l'époque actuelle, par conséquent le nombre des naissances des enfants qui ont actuellement de i à $i+1$ ans;

Soit P_{i+1} le nombre des décès actuels des enfants de i à $i+1$ ans correspondant aux N' naissances;

Chercher le nombre Δ_{i+1} de décès des enfants de i à $i+1$ ans correspondant aux N naissances.

Solution. On a la proportion

$$\Delta_{i+1} : D_{i+1} = N_i : N'$$

$$\Delta_{i+1} = \frac{ND_{i+1}}{N'};$$

or

$$N_i = Nr^i$$

ou, en changeant N_i en N et N en N',

$$N = N'r^i,$$

d'où

$$N' = \frac{N}{r^i},$$

donc

$$\Delta_{i+1} = \frac{ND_{i+1}}{\frac{N}{r^i}} = D_{i+1}r^i,$$

et

$$\Delta_i = D_i r^{i-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

170. Problème IV. Connaissant les nombres N, r, B, ainsi que la répartition des décès suivant les âges à une époque donnée a, trouver les nombres des survivants à la fin de la 1^{re}, de la 2^{me}, de la 3^{me}, etc., $i^{ème}$ année à partir de cette époque.

Solution. Soient respectivement N, D, P les nombres des naissances, des décès et de la population à l'époque a;

Soit A_i le nombre des survivants à la fin de la $i^{ème}$ année à partir de a;

Soit Δ_i le nombre des décès des enfants de $i-1$ à i ans, correspondants aux N naissances; on aura :

$$A_i = A_{i-1} - \Delta_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

Soit D_i le nombre des décès des enfants ayant de $i-1$ à i ans, nés $i-1$ ans avant l'époque actuelle, et qui répond à $N' = \frac{N}{r^{i-1}}$ naissances; on a, par l'équation (e)

$$\Delta_i = D_i r^{i-1}$$

donc

$$A_i = A_{i-1} - D_i r^{i-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

faisons successivement $i = 1, 2, 3 \ldots i$

$$\begin{aligned} A &= N \\ A_1 &= N - D_1 \\ A_2 &= A_1 - D_2 r \\ A_3 &= A_2 - D_3 r, \text{ etc.,} \\ A_i &= A_{i-1} - D_i r^{i-1}. \end{aligned}$$

En ajoutant et en réduisant, on a

$$A_i = N - \{ D_1 + D_2 r + D_3 r^2 + \cdots + D_i r^{i-1} \}. \quad . \quad . \quad (b)$$

Cette formule sert à construire une table de mortalité, lorsque la population croît en progression géométrique, et que l'on connait la répartition des décès par âges.

Si la population est stationnaire, on a

$$r = 1, \; N = D \text{ et } A_i = D - D_1 - D_2 - \text{etc.} - D_i.$$

Cette formule correspond à l'hypothèse de la table de mortalité de Halley.

Formation des tables de population.

La population actuelle P se compose : des N enfants qui viennent de naître; des N_1 enfants âgés de 0 à 1 an; des N_2 enfants âgés de 1 à 2 ans, etc.; des N_ω individus âgés de $\omega - 1$ à ω ans, ω étant le terme de la vie.

Soient :

N'_1 le nombre des enfants de 1 an;
N'_2 » » de 2 ans;
N'_3 » » de 3 ans, etc.;
N'_ω » des individus de ω ans,

on peut prendre

$$N_1 = \frac{N + N'_1}{2}, \quad N_2 = \frac{N'_1 + N'_2}{2}, \quad N_3 = \frac{N'_2 + N'_3}{2}, \text{ etc.,}$$

$$N_\omega = \frac{N'_{\omega-1} + N_\omega}{2},$$

et l'on aura :

$$P = N_1 + N_2 + \cdots + N_\omega = \frac{1}{2} N + N'_1 + N'_2 + \cdots + N'_{\omega-1} + \frac{1}{2} N'_\omega. \quad (1)$$

Soient : A_i le nombre des survivants après i années; et $N = A_0$. La probabilité d'avoir i ans sera

$$p_i = \frac{A_i}{A_0} = \frac{A_i}{N},$$

mais quand la population croît en raison géométrique, le nombre des naissances correspondant à cet âge est $\frac{N}{r_i}$; donc le nombre des individus de i ans sera

$$N'_i = \frac{N}{r^i}\frac{A_i}{N} = \frac{A_i}{r^i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Donc l'équation (1) devient

$$P = \frac{1}{2} N + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \cdots + \frac{A_{\omega-1}}{r^{\omega-1}} + \frac{A_\omega}{r^\omega} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Corollaire. Pour $r = 1$, la population est stationnaire, et l'on a :

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} N + A_1 + A_2 + \cdots\cdots \text{ etc.} \\ &= N\left\{\frac{1}{2} + \frac{A_1 + A_2 + \cdots}{N}\right\} = N_1 M \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3^{bis})$$

M étant la somme $\frac{1}{2} + \frac{A_1 + A_2 + \cdots}{N}$, qui représente la durée de la vie moyenne.

Les formules (3) et (3^{bis}) servent à former des tables de population.

Usage de ces tables.

171. La population totale étant d'un million d'hommes, soient :

n le nombre des hommes âgés de m ans,

p » » » q ans;

$n - p$ sera le nombre des hommes âgés de m à q ans sur un million; et sur H hommes, ce nombre sera $\frac{H(n-p)}{1000000}$.

Problème. Que devient une population donnée après un temps quelconque t?

Supposons que la population croisse en proportion géométrique, tandis que le temps croît en progression arithmétique; et que l'on ait :

$$p = ke^{at},$$

a et k étant des nombres constants, et e la base des logarithmes népériens; on aura :

$$p_n = ke^{at_n},$$

d'où

$$\frac{p}{p_n} = e^{a(t-t_n)}.$$

Soit $n = 0$, on a $p_n = p_0$, population au moment où l'on commence à compter le temps; $t_n = t_0 = 0$.

On aura :

$$p = p_0 e^{at}$$

et

$$\frac{dp}{dt} = ap_0 e^{at} = ap \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

La constante a se détermine quand on connait une valeur de p correspondante à une valeur de t; par exemple, si p devient $2p$, quant t devient $t + 25$, on trouve

$$a = 0{,}01204\ldots$$

En général ap diminue en Europe; cette quantité se nomme *Énergie* du développement de la population.

Soit P_0 la population normale; et supposons que ap s'affaiblisse de $g(P-P_0)$, c'est-à-dire proportionnellement à l'accroissement de la population, la formule (a) devient

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dt}=a-g\,\frac{P-P_0}{1}=\frac{ap-gp+gP_0}{p}=\frac{gP_0-(g-a)P}{P}.$$

Faisons

$$g-a=m,$$

d'où

$$gP_0=mP;$$

et

$$\frac{1}{p}\,\frac{dp}{dt}=\frac{m(P-p)}{p}$$

$$dt=\frac{dp}{m(P-p)}$$

$$t+c=-\frac{1}{m}\,\mathrm{l}.\,(p-P);$$

$t=0$, donne $p=P_0$, donc

$$c=-\frac{1}{m}\mathrm{l}.\,(p_0-P)$$

$$t=\frac{1}{m}\mathrm{l}.\frac{P-p_0}{P-p}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(b)$$

$$\mathrm{l}.\,(P-p)=\mathrm{l}.\,(P-p_0)-mt=\mathrm{l}.\left[(P-p_0)\,e^{-mt}\right]$$

$$P-p=(P-p_0)\,e^{-mt}$$

$$p=P\,(P-p_0)\,e^{-mt}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(c)$$

Il reste à déterminer les constantes P, m, p_0.

Si l'on donne les valeurs t_0, p_0; t_1, p_1; $2t_1$, p_2; la formule (b) donne

$$t_1=\frac{1}{m}\,\mathrm{l}.\,\frac{P-p_0}{P-p_1}$$

et

$$2t_1=\frac{1}{m}\,\mathrm{l}.\,\frac{P-p_0}{P-p_2},$$

en éliminant m, on obtient

$$P=\frac{p_1^2-p_0p_2}{2p_1-(p_0+p_2)}$$

donc

$$m=\frac{1}{t_1}\,\mathrm{l}.\,\frac{P-p_0}{P-p_1}=\frac{1}{t_1}\mathrm{l}.\left\{\frac{\dfrac{p_1^2-p_0p_2}{2p_1-(p_0+p_2)}-p_0}{\dfrac{p_1^2-p_0p_2}{2p_1-(p_0+p_2)}-p_1}\right\}.$$

THÉORIE DE LAPLACE SUR LA DÉTERMINATION DE LA POPULATION D'UN EMPIRE.

172. Problème I. Chercher le rapport a de la population aux naissances annuelles.

Solution. On fait le dénombrement exact des habitants d'une partie de l'empire.

Soit p le nombre des habitants de cette partie;

q » naissances correspondantes;

on aura :

$$a=\frac{p}{q}.$$

Exemple. En 1802, au 22 septembre, on a trouvé dans ces communes choisies de trente départements, distribués de manière à compenser les effets de la variété des climats :

110512 est le nombre des garçons nés du 22 septembre 1799 au 22 septembre 1802;

105287 est celui des filles nées dans le même intervalle.

$$q=\frac{110512+105287}{3}=71866.$$

On a trouvé $p=2037615$ habitants au 22 septembre 1802.

Ainsi

$$a=\frac{p}{q}=28,\ 352845.$$

Problème II. Étant donné le rapport a, et le nombre q' des naissances annuelles de tout l'empire, trouver la population p'.

Solution. On a

$$p' = aq' = \frac{pq'}{q}.$$

Exemple. Les mêmes données que précédemment étant prises, soit 1° $q' = 1000000$, on aura

$$p' = 1000000 \times 28{,}552845 = 28\,552\,845\,;$$

soit 2° $q' = 1500000$, on a

$$p' = 42529267.$$

Problème III. Chercher la probabilité Π de l'erreur z que l'on peut craindre sur la détermination précédente de $p' = \frac{pq'}{q}$.

Solution. La première formule pour les erreurs d'une table de mortalité donne (n° 162)

$$\Pi = \sqrt{\left\{\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')\pi}\right\}}\, e^{-\frac{q^3z^2}{2pq'(p-q)(p+q')}}$$

Problème IV. Chercher la probabilité P que $p' = \frac{pq'}{q}$ est comprise entre $\frac{pq'}{q} \pm z$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \sqrt{\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')\pi}} \int_{-z} dz e^{-\frac{q^3z^2}{2pq'}} \\ &= 2\sqrt{\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')\pi}} \int_{-z}^{+z} dz e^{-\frac{q^3z^2}{2pq'(p-q)(q+q')}} \end{aligned}$$

probabilités que la population calculée p' est comprise entre les limites $\frac{pq'}{q} \pm z$,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P} &= 2\sqrt{\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')\pi}} \int_0^z dz e^{-\frac{q^3z^2}{2pq'(p-q)(q+q')}} \\ &= 1 - 2\sqrt{\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')\pi}} \int_z^\infty e^{-\frac{q^3z^2}{2pq'(p-q)(p+q')}} \end{aligned}\right\} (1).$$

Soit

$$\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')} = a, \quad az^2 - t^2, \quad z = \frac{t}{\sqrt{a}} = \alpha,$$

on pourra écrire

$$\mathrm{P} = 1 - 2\int_\alpha^\infty dt e^{-t^2} = 1 - \frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha\sqrt{\Pi}}\left\{1 - \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{1.5}{2^2\alpha^4} - \right\} \quad (2).$$

Exemple :

$$z = \alpha = 500000,$$
$$p = 2037615,$$
$$q = 71866.$$

$p' = \frac{pq'}{q} = 42529267$, population correspondante 1500000 naissances.

La formule (2) donne

$$\mathrm{P} = 1 - \frac{1}{1162} = \frac{1161}{1162}.$$

Il y a donc 1161 à parier contre 1 qu'en fixant à 42529267 la population correspondante à 1500000 naissances, on ne se trompera pas de 500000 ou $\frac{1}{2}$ million.

CHAPITRE IX.

ASSURANCES SUR LA VIE.

175. Le principe qui sert à mettre en équation les questions d'assurances consiste en ce que les recettes de l'établissement doivent être égales aux dépenses.

Les recettes se composent :

1.) De la somme S qu'on doit payer, ou du prix;

2.) De la contribution σ, temporaire ou viagère que le participant s'oblige à payer ordinairement par anticipation à la fin de chaque année.

Les dépenses se composent :

1.) De la rente temporaire ou viagère ρ, ou bien du capital ρ payé en une seule fois, ou par terme, au bénéfice du participant ou du survivant, ou des héritiers;

2.) Des frais d'administration.

Les recettes et les dépenses doivent être conçues comme des capitaux portant intérêt, et qu'on doit réduire à leurs valeurs actuelles, afin de pouvoir juger d'avance de l'état de l'opération.

Soit γ le taux de l'intérêt, c'est-à-dire que $\gamma = 1{,}05$ à 5 pour cent, $\gamma = 1{,}04$ à 4 pour cent.

PROBLÈME I. On demande quel prix S une personne A âgée de m ans doit donner d'abord à un établissement d'assurance, pour que, en payant par anticipation à la fin de chaque année une somme σ pendant les a premières années, l'établissement lui assure une rente annuelle ρ pendant c ans à partir de la $b^{ième}$ année après le contrat.

SOLUTION. I. *Évaluation des rentes :*

1° Soient M le nombre des personnes de l'âge m contractant avec l'établissement sous les conditions du problème, l'établissement recevra en prix la somme actuelle MS;

2° De ces M personnes un nombre $M\frac{A_{m+1}}{A_m}$ survivent à la fin de la 1re année, et payent $M\sigma\frac{A_{m+1}}{A_m}$ de contribution à la fin de cette 1re année. Cette somme, à raison de r pour 1, réduite à sa valeur actuelle, est $\frac{M\sigma}{r}\frac{A_{m+1}}{A_m}$;

3° On trouvera de même que la recette du chef de la contribution σ, à la fin de la 2me année, réduite à sa valeur actuelle, est

$$\frac{M\sigma}{r^2}\cdot\frac{A_{m+2}}{A_m};\ \text{etc.}$$

A la fin de la $a^{ème}$ année elle est

$$\frac{M\sigma}{r^a}\,\frac{A_{m+a}}{A_m};$$

4° La recette totale provenant des M individus est

$$M\left\{S+\frac{\sigma}{A_m}\left[\frac{A_{m+1}}{r}+\frac{A_{m+2}}{r^2}+\cdots+\frac{A_{m+a}}{r^a}\right]\right\}$$

donc en divisant par M, la recette moyenne par individu sera

$$X = S+\frac{\sigma}{A_m}\left[\frac{A_{m+1}}{r}+\frac{A_{m+2}}{r^2}+\cdots+\frac{A_{m+a-1}}{r^a}\right]. \quad . \quad . \quad .(1)$$

II. *Évaluation de la dépense :*

1° Pendant les b premières années l'établissement ne paye rien.

2° A la fin de la $(b+1)^{ème}$ année le nombre des survivants sera

$$\frac{A_{m+b+1}}{A_m},$$

la dépense à la fin de la $(b+1)^{ème}$ année, réduite au commencement de la 1re année, sera, pour les M individus,

$$\frac{M\rho}{r^{b+1}}\cdot\frac{A_{m+b+1}}{A_m};$$

3° A la fin de la 2me année elle sera, réduite en valeur actuelle,

$$\frac{M\rho}{r^{b+2}}\cdot\frac{A_{m+b+2}}{A_m},\ \text{etc.}$$

A la fin de la $c^{ème}$ année elle sera, réduite de même :

$$\frac{M\rho}{r^{b+c}} \cdot \frac{A_{m+b+c}}{A_m}.$$

En ajoutant, puis en divisant par M, on a la valeur moyenne actuelle des rentes payées par individu, savoir :

$$Y = \frac{\rho}{A_m\, r^b}\left\{\frac{A_{m+b+1}}{r} + \frac{A_{m+b+2}}{r^2} + \cdots + \frac{A_{m+b+c}}{r^c}\right\} \ . \ . \ . \ (\text{II})$$

Nous ferons abstraction des frais d'administration, et nous aurons ainsi :

$$X = Y \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (\text{A})$$

Remarque. — Lorsque la contribution annuelle σ est viagère, ce que nous indiquons en posant $a = \omega$, le nombre des termes dans la série de X doit s'étendre jusqu'à la limite de la table de mortalité, qui est représentée par cette lettre ω.

Lorsque la rente annuelle est *viagère*, ce que nous indiquerons en posant $c = \omega$, il faudra prolonger les termes de la parenthèse du second membre de Y jusqu'à cette limite.

La formule (A) fait connaître l'une des quantités S, σ, ρ quand on connaît les deux autres; a, r, b, c sont supposés connus.

Cas particuliers.

Premier cas. Posons :

$$\sigma = 0, \quad b = 0, \quad c = \omega,$$

la formule (A) nous donnera :

$$S = \frac{\sigma}{A_m}\left\{\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \text{etc.}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (a)$$

c'est-à-dire que la personne A doit donner à la caisse de l'établissement un capital S, pour constituer sur sa tête une rente viagère ρ.

Deuxième cas. Posons :

$$\sigma = 0, \quad c = \omega,$$

d'où :

$$S = \frac{\sigma}{A_m r^b}\left\{\frac{A_{m+b+1}}{r} + \frac{A_{m+b+2}}{r^2} + \text{etc.}\right\}.$$

Troisième cas. Posons :

$$S = 0, \quad c = \omega,$$

d'où :

$$\sigma = \frac{\rho}{r^b}\left\{\frac{\dfrac{A_{m+b+1}}{r} + \dfrac{A_{m+b+2}}{r^2} + \cdots}{A_m + \dfrac{A_{m+1}}{r} + \cdots}\right\}.$$

Quatrième cas. Posons :

$$\sigma = 0, \quad b = 0,$$

d'où :

$$S = \frac{\rho}{A_m}\left\{\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+1}}{r^2} + \cdots \frac{A_{m+c}}{r^c}\right\}.$$

Cinquième cas. Posons :

$$S = 0,$$

d'où :

$$\sigma = \frac{\rho}{r^b}\left\{\frac{\dfrac{A_{m+b+1}}{r} + \cdots \dfrac{A_{m+b+c}}{r^2}}{A_m + \dfrac{A_{m+1}}{r} + \cdots \dfrac{A_{m+b+1}}{r^{a+1}}}\right\}.$$

Remarque. — Soit S_1 le capital à fournir par une personne de l'âge de $m + 1$, on a d'après la formule (a) du premier cas :

$$S = \frac{A_{m+1}}{A_m}\,\frac{S_{1+\rho}}{1 + r} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (b)$$

Cette formule peut servir à construire une table de rentes viagères sur une tête, au taux de r pour 1 d'intérêt.

174. Problème II. On demande quelle somme S une personne A âgée de m ans doit donner à un établissement pour que, en payant par anticipation à la fin de chaque année une rente σ pendant les a premières années, la caisse paye à ses héritiers un capital ρ

après sa mort, pourvu que le décès n'ait lieu ni avant la $b^{\text{ème}}$ année, ni après la $(b+c)^{\text{ème}}$ année, à partir de l'époque de contrat.

Solution. I. La recette est la même que dans le problème précédent.

II. Quant aux dépenses, en voici le tableau :

Nombre des décès :		*Dépense réduite :*
de la $b^{\text{ème}}$ à la $(b+1)^{\text{e}}$ année	$M\dfrac{A_{m+b}-A_{m+b+1}}{A_m}$	$\dfrac{M\rho}{r^{b+1}}\cdot\dfrac{A_{m+b}-A_{m+b+1}}{A_m}$
» $(b+1)^{\text{e}}$ » $(b+2)^{\text{e}}$ »	$M\dfrac{A_{m+b+1}-A_{m+b+2}}{A_m}$	$\dfrac{M\rho}{r^{b+2}}\cdot\dfrac{A_{m+b+1}-A_{m+b+2}}{A_m}$
etc.		
» $(b+c-1)^{\text{e}}$ » $(b+c)^{\text{e}}$ »	$M\dfrac{A_{m+b+c-1}-A_{m+b+c}}{A_m}$	$\dfrac{M\rho}{r^{b+c}}\cdot\dfrac{A_{m+b+c-1}-A_{m+b-c}}{A_m}$

En ajoutant et en divisant par M, on obtient le payement moyen de la caisse par individu, savoir :

$$\left.\begin{aligned} &S+\frac{\sigma}{A_m}\left[A_m+\frac{A_{m+1}}{r}+\cdots+\frac{A_{m+a-1}}{r^{a+1}}\right] \\ &=\frac{\rho}{A_m r^b}\left[\left\{\frac{A_{m+b}}{r}+\frac{A_{m+b+1}}{r^2}+\cdots+\frac{A_{m+b+c-1}}{r^c}\right\}\right. \\ &\left.-\left\{\frac{A_{m+b+1}}{r}+\frac{A_{m+b+2}}{r^2}+\cdots\frac{A_{m+b+c}}{r^c}\right\}\right] \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Cas particuliers :

Premier cas. Posons :

$$S=o,\quad a=\omega,\quad b=o,\quad c=\omega,$$

on a

$$\sigma=\rho\left\{\frac{\left[\frac{A_m}{r}+\frac{A_{m+1}}{r^e}+\text{etc.}\right]-\left[\frac{A_{m+1}}{r}+\frac{A_{m+2}}{r^2}+\text{etc.}\right]}{A_m+\frac{A_{m+1}}{r}+\frac{A_{m+2}}{r^2}+\text{etc.}}\right\}$$

σ est la rente viagère que A doit payer à l'établissement pour assurer à ses héritiers un capital ρ après sa mort.

Deuxième cas. Soient :

$$S=o,\quad b=o,\quad c=a.$$

Troisième cas. Soient :

$$\sigma=o,\quad b=o,\quad a=\omega,\quad c=\omega,$$

Quatrième cas. Soient :

$$S=o,\quad b=o,\quad a=\omega,\quad c=\omega.$$

Les formules relatives à ces cas se déduisent aisément de la formule (B).

Problème III. On demande quelle somme S une personne A, âgée de m ans doit donner à un établissement, pour qu'en payant une somme σ pendant les a années, la caisse assure à une autre personne B âgée de n ans, et désignée par A, un capital ρ après sa mort, sous la condition que le décès n'ait pas lieu avant la $b^{\text{ème}}$ année à partir de l'époque du contrat.

I. *Recette.* La probabilité de la survivance des deux personnes à la fin de la première année est

$$\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{A_m A_n};$$

la caisse reçoit donc

$$\frac{\sigma}{r}\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{A_m A_n}\ \text{à la fin de cette année;}$$

elle reçoit

$$\frac{\sigma}{r^2}\frac{A_{m+2}A_{n+2}}{A_m A_n}\ \text{à la fin de la 2}^{\text{me}}\text{ année; etc.}$$

et

$$\frac{\sigma}{r^a}\frac{A_{m+a}A_{n+a}}{A_m A_n}\ \text{à la fin de la } a^{\text{ème}}\text{ année;}$$

la recette totale est

$$S+\frac{\sigma}{A_m A_n}\left[\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r}+\frac{A_{m+2}A_{n+2}}{r^2}+\cdots+\frac{A_{m+a}A_{n+a}}{r^a}\right]$$

mais les payements se faisant par anticipation, cette recette se réduit à :

$$S+\frac{\sigma}{A_m A_n}\left\{A_m A_n+\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r}+\cdots+\frac{A_{m+a-1}A_{n+a-1}}{r^{a-1}}\right\}\ldots\quad (I)$$

II. *Dépenses.* 1° La caisse ne paye rien si A meurt avant la $b^{ème}$ année;

2° Soient M couples d'individus de m et n ans, dans les conditions du couple (AB), subsistant à la fin de la 1re année; ce nombre à la fin de la $b^{ème}$ année se réduit à

$$M_1 = M\,\frac{A_{m+b}A_{n+b}}{A_m A_n},$$

à la fin de la $(b+1)^{ème}$ année,

$$M_1\,\frac{A_{n+b+1}}{A_{n+b}}\left\{1-\frac{A_{m+b+1}}{A_{m+b}}\right\}$$

est le nombre des couples survivants dans lesquels un individu de l'âge n survit, tandis qu'un individu de l'âge m est décédé.

La caisse doit donc payer

$$\frac{M\rho}{r^{b+1}}\,\frac{A_{n+b+1}}{A_{n+b}}\left\{1-\frac{A_{m+b+1}}{A_{m+b}}\right\};$$

3° A la fin de la $(b+1)^{ème}$ année, il survivra

$$M_2 = M\,\frac{A_{m+b+1}A_{n+b+1}}{A_m A_n}$$

paires de m et n ans; à la fin de $(b+2)^{ème}$ année

$$M_2\,\frac{A_{n+b+2}}{A_{n+b+1}}\left\{1-\frac{A_{m+b+2}}{A_{m+b+1}}\right\}$$

sera le nombre des couples dans lesquels un individu de n ans vit encore, tandis qu'un de ceux de m ans sera mort.

La caisse paye de ce chef

$$\frac{M_2\rho}{r^{b+2}}\cdot\frac{A_{n+b+2}}{A_{n+b+1}}\left\{1-\frac{A_{m+b+2}}{A_{m+b+1}}\right\};$$

4° En posant

$$M_3 = M\cdot\frac{A_{m+b+2}A_{n+b+2}}{A_m A_n},$$

on trouve que la caisse paye à la fin de la $(b+3)^{ème}$ année :

$$\frac{M_3\rho}{r^{b+3}}\,\frac{A_{n+b+3}}{A_{n+b+2}}\left\{1-\frac{A_{m+b+3}}{A_{m+b+2}}\right\},\ \text{etc.}$$

En ajoutant, substituant les valeurs de M_1, M_2, M_3, etc., puis en divisant par M on a la dépense totale moyenne par individu, et en l'égalant à la recette (I), on a :

$$\left.\begin{aligned}
&S+\frac{\sigma}{A_m A_n}\left[A_m A_n+\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r}+\cdots\cdots+\frac{A_{m+a-1}A_{n+a-1}}{r^{a-1}}\right]\\
&=\frac{\rho}{r^b A_m A_n}\left[\frac{A_{m+b}A_{n+b+1}-A_{m+b+1}A_{n+b+1}}{r}+\frac{A_{m+b+1}A_{n+b+2}-A_{m+b+2}A_{n+b+2}}{r^2}\right.\\
&\left.+\frac{A_{m+b+2}A_{n+b+3}-A_{m+b+3}A_{n+b+3}}{r^3}+\text{etc.}\right]
\end{aligned}\right\}\quad(C)$$

Les cas particuliers sont :

1° Celui où $a=\omega$, $b=0$;
2° » $S=0$, $b=0$, $a=\omega$;
3° » $\sigma=0$, $b=0$, $a=\omega$.

173. Problème IV. On demande quelle somme S deux époux A, B, âgés de m et n ans doivent donner à un établissement pour qu'en payant une rente annuelle σ, la caisse assure au survivant après la mort de l'un des conjoints, un capital ρ.

I. La *Recette* est la même que dans le problème précédent.

II. *Dépense.* Soient M couples de conjoints âgés respectivement de m et n ans; on aura les nombres suivants de

Couples survivants :	*Couples dont l'un des conjoints est mort :*	
A la fin de la 1re année $N_1 = N\,\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{A_m A_n}$	$N\left[\frac{A_{m+1}}{A_m}\left(1-\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)+\frac{A_{n+1}}{A_n}\left(1-\frac{A_{m+1}}{A_m}\right)\right]$	(1′)
» 2me » $N_2 = N\,\frac{A_{m+2}A_{n+2}}{A_m A_n}$	$N_1\left[\frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\left(1-\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}\right)+\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}\left(1-\frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\right)\right]$	(2′)
» 3me » $N_3 = N\,\frac{A_{m+3}A_{n+3}}{A_m A_n}$	$N_2\left[\frac{A_{m+3}}{A_{m+2}}\left(1-\frac{A_{n+3}}{A_{n+2}}\right)+\frac{A_{n+3}}{A_{n+2}}\left(1-\frac{A_{m+2}}{A_{m+2}}\right)\right]$	(3′)
etc.	etc.	

donc la dépense totale sera

$$\frac{\rho N}{r}\times(1') + \frac{\rho N_1}{r^2}\times(2') + \frac{\rho N_2}{r^3}\times(3') + \text{etc.},$$

et substituant les valeurs de N_1, N_2, etc., puis divisant par N, on a la dépense cherchée; et par suite

$$\left.\begin{aligned} &S + \frac{\sigma}{A_mA_n}\left[A_mA_n + \frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2}A_{n+2}}{r^2} + \text{etc.}\right] \\ &= \frac{\rho}{A_mA_n}\left[\frac{A_{m+1}A_n + A_mA_{n+1} - 2A_{m+1}A_{n+1}}{r}\right. \\ &\left. + \frac{A_{m+2}A_{n+1} + A_{n+2}A_{m+1} - 2A_{m+2}A_{n+2}}{r^2} + \text{etc.}\right] \end{aligned}\right\} \quad (D).$$

176. Problème V. On demande quel capital deux personnes A, B, de m et n ans, doivent donner à un établissement pour qu'en payant une rente σ jusqu'à la mort de l'un des conjoints la caisse assure au survivant une rente viagère ρ.

I. La *Recette* est la même que dans le problème précédent.

II. *Dépense*. Soient M couples d'individus de m et n ans; ils se répartiront ainsi pour l'évaluation de la dépense :

Nombre des couples

	où l'un, âgé de m ans, est mort, » l'autre, » n » vivant,	où l'un, âgé de n ans, est mort, » l'autre, » m » vivant,
1re année	$N\frac{A_{n+1}}{A_n}\left(1-\frac{A_{m+1}}{A_m}\right)$	$N\frac{A_{m+1}}{A_m}\left(1-\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)$,
2de »	$N\frac{A_{n+2}}{A_n}\left(1-\frac{A_{m+2}}{A_m}\right)$	$N\frac{A_{m+2}}{A_m}\left(1-\frac{A_{n+2}}{A_n}\right)$,
etc.		etc.

Le survivant recevant la rente viagère ρ, on a :

$$\text{Dépense de la 1}^{\text{re}}\text{ année } \frac{N\rho}{r}\left\{\frac{A_{n+1}}{A_n}\left(1-\frac{A_{m+1}}{A_m}\right) + \frac{A_{m+1}}{A_m}\left(1-\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)\right\}$$

$$\text{» » 2}^{\text{me}}\text{ année } \frac{N\rho}{\rho^2}\left\{\frac{A_{n+2}}{A_n}\left(1-\frac{A_{m+2}}{A_m}\right) + \frac{A_{m+2}}{A_m}\left(1-\frac{A_{n+2}}{A_n}\right)\right\},$$

etc.

En ajoutant, et en divisant par N, on a la dépense moyenne; donc

$$\left.\begin{aligned} &S + \frac{\sigma}{A_mA_n}\left\{A_mA_n + \frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2}A_{n+2}}{r^2} + \text{etc.}\right\} \\ &= \frac{\rho}{A_mA_n}\left\{\frac{A_{n+1}A_m + A_{m+1}A_n - 2A_{n+1}A_{m+1}}{r}\right. \\ &\left. + \frac{A_{m+2}A_m + A_{m+2}A_n - 2A_{n+2}A_{m+2}}{r^2} + \text{etc.}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (E).$$

177. Problème VI. On demande quel capital S deux personnes A, B de m et n ans doivent donner à un établissement, pour qu'en payant annuellement une somme σ, la caisse assure au couple (AB) une rente ρ qui doit cesser à la mort de l'un des conjoints.

I. La *Recette* est la même que dans le problème précédent.

II. *Dépenses*. De N couples il reste :

A la fin de la 1re année $N\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{A_mA_n}$ couples;

» » 2me » $N\frac{A_{m+2}A_{n+2}}{A_mA_n}$ couples, etc.

Donc la dépense moyenne se trouve en multipliant ces restes respectivement par $\frac{\rho}{r}$, $\frac{\rho}{r^2}$, etc., ajoutant les produits, puis divisant la somme par N. On a donc

$$\left.\begin{aligned} &S + \frac{\sigma}{A_mA_n}\left\{A_mA_n + \frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r} + \text{etc.}\right\} \\ &= \frac{\rho}{A_mA_n}\left\{\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2}A_{n+2}}{r^2} + \text{etc.}\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (F).$$

178. Problème VII. On demande quelle somme S deux associés A, B de m et n ans doivent donner à un établissement pour qu'en payant une rétribution annuelle σ, la caisse leur assure une rente viagère ρ.

I. La *Recette* est la même que dans le cas précédent.

II. *Dépense*. La probabilité qu'après t ans l'un au moins des associés vit encore est

$$\frac{A_{m+t}}{A_m}+\frac{A_{n+t}}{A_n}-\frac{A_{m+t}A_{n+t}}{A_mA_n}.$$

On aura donc

$$\left.\begin{aligned}
&S+\frac{\sigma}{A_mA_n}\left(A_mA_n+\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r}+\text{etc.}\right)\\
&=\frac{\rho}{A_m}\left(\frac{A_{m+1}}{r}+\frac{A_{m+2}}{r^2}+\text{etc.}\right)+\frac{\rho}{A_n}\left(\frac{A_{n+1}}{r}+\frac{A_{n+2}}{r^2}+\text{etc.}\right)\\
&-\frac{\rho}{A_mA_n}\left(\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r}+\frac{A_{m+2}A_{n+2}}{r^2}+\text{etc.}\right)
\end{aligned}\right\}\ (G).$$

179. Problème VIII. On demande la somme S que deux associés A, B de m et n ans, doivent donner à un établissement, sous la condition que A payant une rétribution annuelle σ, B reçoive de la caisse à la mort de A, une rente viagère ρ, pourvu que le décès de A n'arrive pas avant la $b^{\text{ème}}$ année à partir de l'époque du contrat; et en tenant compte des frais d'administration δ, occasionnés par le couple (AB) jusqu'au moment de sa complète extinction.

Solution. La probabilité qu'après t ans B existe encore et que A est mort est :

$$\frac{A_{n+b+t}}{A_n}\left(1-\frac{A_{m+b+t}}{A_m}\right).$$

On trouve pour la dépense

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho}{A_n}\left[\frac{A_{n+b+1}}{r}+\frac{A_{n+b+2}}{r^2}+\text{etc.}\right]\\
&-\frac{\rho}{A_mA_n}\left[\frac{A_{m+b+1}A_{n+b+1}}{r}+\frac{A_{m+b+2}A_{n+b+2}}{r^2}+\text{etc.}\right]\quad(1')
\end{aligned}$$

Maintenant évaluons les frais d'administration. Soient :

N le nombre des couples dans les conditions du problème;

$N\frac{A_{m+t}A_{n+t}}{A_mA_n}$, le nombre des couples en vie après t ans;

$N\frac{A_{n+t}}{A_n}\left(1-\frac{A_{m+t}}{A_m}\right)$, le nombre des couples où l'individu âgé de n ans vit encore et où celui âgé de m ans est mort.

La somme de ces deux derniers nombres est $N\frac{A_{n+t}}{A_n}$;

Les frais à la fin de la première année sont $\delta\frac{A_{n+1}}{A_n}$;

Les frais à la fin de la deuxième année sont $\delta\frac{A_{n+2}}{A_n}$; etc.

La somme des frais est donc

$$\frac{\delta}{A_n}\left\{\frac{A_{n+1}}{r}+\frac{A_{n+2}}{r^2}+\text{etc.}\right\}.$$

La recette est la même que dans le problème précédent; donc

$$\left.\begin{aligned}
&S+\frac{\sigma}{A_mA_n}\left\{A_mA_n+\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r}+\frac{A_{m+2}A_{n+2}}{r^2}+\text{etc.}\right\}\\
&=\frac{\rho}{A_n}\left[\frac{A_{m+b+1}}{r}+\frac{A_{n+b+2}}{r^2}+\text{etc.}\right]\\
&-\frac{\rho}{A_mA_n}\left[\frac{A_{m+b+1}A_{n+b+1}}{r}+\frac{A_{m+b+2}A_{n+b+2}}{r^2}+\text{etc.}\right]\\
&+\frac{\delta}{A_n}\left[\frac{A_{n+1}}{r}+\frac{A_{n+2}}{r^2}+\text{etc.}\right].
\end{aligned}\right\}\ (H)$$

180. Problème. IX. Constituer une rente viagère sur plusieurs individus âgés respectivement de

$$m,\quad m+a_1,\quad m+a_1+a_2,\ \text{etc.},$$

de sorte que la rente reste au dernier survivant. Il faut chercher le capital S actuel, équivalent à la rente viagère ρ.

Solution. 1° La probabilité qu'a la 1re personne de vivre à l'âge $m+x$, est $\frac{A_{m+x}}{A_m}$.

La probabilité qu'à cet âge elle aura cessé de vivre est $1-\frac{A_{m+x}}{A_m}$.

2° La probabilité pour la 2me personne de vivre à l'âge $m+a_1+x$ est $\frac{A_{m+a_1+x}}{A_{m+a_1}}$, et celle qu'elle aura cessé d'exister à cet égard est $1-\frac{A_{m+a_1+x}}{A_{m+a_1}}$, etc.

La probabilité qu'aucun des associés n'existera à cette époque est

$$P = \left(1 - \frac{A_{m+x}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{m+a_1+x}}{A_{m+a_1}}\right)\left(1 - \frac{A_{m+a_1+a_2+x}}{A_{m+a_1+a_2}}\right)\cdots$$

Donc $1 - P = u$, est la probabilité qu'un de ces individus au moins sera vivant à la fin de la $x^{ème}$ année de la constitution de la rente. On aura par suite

$$S = \rho \sum \frac{u}{r^x} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (K)$$

Autrement : Soient plusieurs individus A, B, C... pour lesquels on a placé une somme S. En vertu de ce placement, ces personnes reçoivent tous les ans une certaine somme qui doit être payée tant que les individus ne seront pas tous morts.

Soit σ la somme annuelle à payer et qu'il faut déterminer.

Soient $p_1, p_2, p_3 \ldots$ les probabilités que ces personnes vivront encore après un temps t quelconque.

Soient $q_1, q_2, q_3 \ldots$ les probabilités contraires.

La probabilité que toutes sont mortes au bout de ce temps est

$$\varpi_t = q_1 q_2 q_3 \ldots.$$

Les tables de mortalité donnent

$$\varpi_t = \varpi_1, \quad \varpi_2, \quad \varpi_3 \ldots.$$

pour la 1^re^, la 2^e^, la 3^e^, etc. année. On a donc

$$S = \frac{\sigma}{r}\varpi_1 + \frac{\sigma}{r^2}\varpi_2 + \frac{\sigma}{r^2}\varpi_3 + \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (L)$$

181. Problème X. Une urne renferme des boules de diverses couleurs (1) (2) ... etc. Une personne A en tire une boule, puis la remet dans l'urne ; le bénéfice de A est v_1 si la boule est de la couleur (1) ; v_2 si la boule est de la couleur (2) ... etc. Il y a t tirages, et l'on demande la probabilité u_0 que dans t tirages le bénéfice de A sera $\sigma = t\mu + l$.

Soient $p_1, p_2 \ldots$ etc. les probabilités relatives au tirage d'une boule de couleur (1), (2), etc.

Les bénéfices de A correspondants à ces tirages seront éventuellement

$p_1 v_1$ pour une boule de couleur (1),
$p_2 v_2$ » » » (2),
etc.

On a

$$p_1 + p_2 + \text{etc.} = 1,$$
$$p_1 u^{v_1} + p_2 u^{v_2} + \text{etc.} = \Sigma U_\sigma u^\sigma.$$

Soit $u^{v_n} = e^{\varpi v_n \sqrt{-1}}$, on aura

$$X = \left[p_1 e^{\varpi v_1 \sqrt{-1}} + p_2 e^{\varpi v_2 \sqrt{-1}} + \cdots\right]^t = \Sigma U_\sigma e^{\varpi\sigma\sqrt{-1}}$$

d'où

$$\begin{aligned} U\sigma &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\varpi\sigma\sqrt{-1}} X d\varpi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi e^{-l\varpi\sqrt{-1}} \left\{ e^{-\mu\pi\sqrt{-1}}\left(p_1 e^{\varpi v_1\sqrt{-1}} + p_2 e^{\varpi v_2 \sqrt{-1}} + \text{etc.}\right)\right\}^t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi e^{-l\varpi\sqrt{-1}} A \end{aligned}$$

en posant

$$A = \left\{ e^{-\mu\varpi\sqrt{-1}}\left(p_1 e^{\varpi v_1 \sqrt{-1}} + p_2 e^{\varpi v_2 \sqrt{-1}} + \text{etc.}\right)\right\}^t;$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{l. } A &= -t\mu\varpi\sqrt{-1} + t \text{ l. } \left[p_1 e^{\varpi v_1 \sqrt{-1}} + p_2 e^{\varpi v_2 \sqrt{-1}} + \text{etc.}\right] \\ &= -t\mu\varpi\sqrt{-1} + t \text{ l. } \left[p_1\left(1 + \varpi v_1\sqrt{-1} - \frac{\varpi^2 v_1^2}{1.2} - \text{etc.}\right) \right. \\ &\qquad \left. + p_2\left(1 + \varpi v_2\sqrt{-1} - \frac{\varpi^2 v_2^2}{1.2} - \text{etc.}\right)\right] \\ &= -t\mu\varpi\sqrt{-1} + t \text{ l. } \left[p_1 + p_2 + \text{etc.} + (p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots)\varpi\sqrt{-1} \right. \\ &\qquad \left. - (p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots)\frac{\varpi^2}{1.2} + \text{etc.}\right] \\ &= -t\mu\varpi\sqrt{-1} + t \text{ l. } \left\{ 1 + (p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots)\varpi\sqrt{-1} \right. \\ &\qquad \left. - (p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots)\frac{\varpi^2}{1.2} + \text{etc.} \right\}. \end{aligned}$$

Développant le logarithme du second membre en série, on trouvera

$$\text{l. A} = t\varpi\sqrt{-1}\,\{p_1v_1 + p_2v_2 + \cdots - \mu\}$$
$$-\frac{\varpi^2 t}{2}\left[(p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + \cdots) - (p_1v_1 + p_2v_2 + \cdots)^2\right].$$

On peut négliger les termes en ϖ^3, etc. parce que l'on suppose t très-grand et que l'expression précédente devient un exposant négatif de e.

Maintenant posons

$$\mu = p_1v_1 + p_2v_2 + \cdots$$

et

$$2k^2 = p_1v_1^2 + p_2v^2 + \cdots - (p_1v_1 + p_2v_2 + \cdots)^2,$$

on aura

$$\text{l. A} = -\varpi^2 tk^2,$$

d'où

$$\text{A} = e^{-tk^2\varpi^2},$$

donc

$$\text{U}_\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi e^{-[tk^2\varpi^2 + l\varpi\sqrt{-1}]}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi e^{-[tk^2\varpi^2 + l\varpi\sqrt{-1}]}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\varpi e^{-tk^2\left(\varpi + \frac{l\sqrt{-1}}{tk^2}\right)^2 - \left(\frac{l\sqrt{-1}}{2tk^2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi e^{-tk^2\left(\varpi + \frac{l\sqrt{-1}}{tk^2}\right)^2}.$$

Soit

$$\tau = k\sqrt{t}\left(\varpi + \frac{l\sqrt{-1}}{tk^2}\right),$$

d'où

$$d\varpi = \frac{d\tau}{k\sqrt{t}},$$

on aura

$$\text{U}\sigma = \frac{1}{2\pi k\sqrt{t}} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-\tau^2} = \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} \quad . \quad . \quad (a)$$

182. **Problème XI.** Chercher la probabilité P que le bénéfice réel de A est compris entre les limites $\pm l$.

Solution : P est évidemment la probabilité résultante obtenue en faisant varier l dans (a) de $-l$ à $+l$, par continuité, ce qui donne :

$$\text{P} = \frac{1}{k\sqrt{\pi t}}\int_{-l'}^{l} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} dl = \frac{1}{k\sqrt{\pi t}}\int_0^{l} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} dl,$$

expression de la probabilité que la somme des bénéfices est comprise entre

$$\mu t \pm l, \quad \text{ou} \quad t\{p_1v_1 + p_2v_2 + \cdots\} \pm l.$$

Soit

$$\frac{l}{2k\sqrt{t}} = r', \quad l = 2kr'\sqrt{t}, \quad dl = 2k\sqrt{t}dr',$$

alors

$$\sigma = \mu t + l = \mu t + 2kr'\sqrt{t},$$

donc

$$\text{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{l} e^{-r'^2} dr'$$

sera la probabilité que le bénéfice réel de A est compris entre

$$\mu t \pm l, \quad \text{ou} \quad t\{p_1v_1 + p_2v_2 + \cdots\} \pm 2k\sqrt{t}.r'.$$

183. **Problème XII.** Le capital S qu'un individu de l'âge m doit donner à un établissement pour en avoir une rente viagère ρ est

$$\text{S} = \frac{\rho}{\text{A}_m}\left\{\frac{\text{A}_{m+1}}{r} + \frac{\text{A}_{m+2}}{r^2} + \text{etc.}\right\}.$$

Si b est l'avantage que l'établissement retire de ce placement pour cet individu, trouver la probabilité que le bénéfice total de l'établissement, pour t individus, est compris entre des limites données.

Solution. Soit

$$p_1 = \frac{\text{A}_{m+1}}{\text{A}_m}, \quad p_2 = \frac{\text{A}_{m+2}}{\text{A}_m}, \text{ etc.},$$
$$v_1 = \frac{\rho}{r}, \qquad v_2 = \frac{\rho}{r^2}, \text{ etc.};$$

d'où

$$p_1v_1 + p_2v_2 + \text{etc.} = \frac{\rho}{r}\frac{A_{m+1}}{A_m} + \frac{\rho}{r^2}\frac{A_{m+2}}{A_m} + \text{etc.},$$

$$2k^2 = \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\frac{A_{m+1}}{A_m} + \left(\frac{\rho}{r^2}\right)^2\frac{A_{m+2}}{A_m} + \text{etc.} - \left[\frac{\rho}{r}\frac{A_{m+1}}{A_m} + \frac{\rho}{r^2}\frac{A_{m+2}}{A_m} + \cdots\right]^2.$$

On aura

$$S + b = p_1v_1 + p_2v_2 + \cdots$$

Donc, par le problème précédent,

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^l e^{-r'^2}\,dr'$$

est la probabilité que le bénéfice réel de la caisse est entre

$$tS + t\rho \pm 2k\sqrt{t}\,.\,r' \text{ ou entre } tb \pm 2k\sqrt{t}\,.\,r'.$$

Remarque. Si t est infini, alors $l = 2kr'\sqrt{t}$ est infini et $P = 1$. Le bénéfice de l'établissement est donc alors infini et certain. Donc dans tout établissement d'assurances, si le nombre d'affaires t est grand, et si l'avantage de chacune est b, il est très-probable que le bénéfice réel de la caisse est tb.

184. Problème XIII. Deux personnes A et B de même âge m, ayant la même fortune annuelle, veulent placer en viager chacune un capital q; elles peuvent le faire séparément, ou s'associer et constituer une rente viagère sur leurs têtes, de manière que la rente soit réversible sur celle qui survit à l'autre : quel est le parti le plus avantageux, en ayant égard à la fortune morale?

Premier mode de placement.

Solution. Soient :

La fortune annuelle de chaque personne $= 1$;
Le capital que chacune veut placer $= q$;
La rente viagère si elles placent séparément $= \beta$;
Leur fortune annuelle dans ce cas $= 1 + \beta$.

La fortune morale y correspondante à la fortune physique x est

$$y = k \log x + \log h,$$

en désignant par k et h des constantes.

Donc la fortune morale correspond à

$$1 + p = k\log(1+\beta) + \log h.$$

Soit $\frac{A_{m+x}}{A_m} = y_x$ la probabilité pour A de vivre encore x ans; la fortune morale de chacune des deux personnes à la fin de la $x^{\text{ème}}$ année est

$$y_x\left[k\log(1+\beta) + \log h\right].$$

Soit S la somme des fortunes morales de chaque personne, à la fin de la 1re, de la 2me, de la 3me, etc., année, on aura

$$S = \left[k\log(1+\beta) + \log h\right]\Sigma y_x = k\log(1+\beta]\,\Sigma y_x + \log h\,\Sigma y_x\,. \quad \text{(I)}$$

C'est la fortune morale viagère de chacune, quand elles placent le capital q séparément.

Second mode de placement.

Si elles placent le capital $2q$ sur les deux têtes, soit β' la rente viagère totale; elles en touchent chacune la moitié ou $\frac{1}{2}\beta'$ tant qu'elles vivent ensemble.

La fortune morale annuelle est

$$k\log\left(1 + \frac{1}{2}\beta'\right) + \log h.$$

La probabilité qu'elles vivront toutes deux à la fin de la $x^{\text{ème}}$ année est

$$y_x^2.$$

La fortune morale viagère de A, relativement à leur existence simultanée, est

$$\left[k\log\left(1 + \frac{\beta'}{2}\right) + \log h\right]\Sigma y_x^2.$$

La probabilité que A existe seul à la fin de la $x^{ème}$ année est

$$y_x - y_x^2.$$

La fortune morale viagère correspondante qui rend la fortune annuelle égale à $1 + \beta'$, après la mort de B, est

$$\left[k \log (1 + \beta') + \log h\right] \Sigma (y_x - y_x^2).$$

Soit S′ la fortune morale viagère de A, relative au second mode de placement, on aura

$$\left.\begin{aligned} S' &= \left[k \log\left(1 + \frac{\beta'}{2}\right) + \log h\right] \Sigma y_x^2 + \left[k \log + (1 \beta') + \log h\right] \Sigma (y_x - y_x^2) \\ &= k \log\left(1 + \frac{\beta'}{2}\right) \Sigma y_x^2 + k \log (1 + \beta') \left[\Sigma y_x - \Sigma y_x^2\right] + \log h \Sigma y_x. \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

Selon que $S \gtrless S'$, le premier ou le second mode sera le plus avantageux.

Pour cette comparaison, il faut d'abord exprimer β' en fonction de β. Or on a

$$q = \frac{\beta}{A_m}\left[\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \text{etc.}\right] = \beta \Sigma \frac{y_x}{r^x} \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

où, ρ étant l'intérêt de 1,

$$r = 1 + \rho.$$

On a aussi :

$$2q = \frac{\beta'}{A_m}\left\{\frac{2A_{m+1} - A_{m+1}^2}{r} + \frac{2A_{m+2} - A_{m+2}^2}{r^2} + \text{etc.}\right\} = \beta' \Sigma \frac{2y_x - y_x^2}{r^x} \quad (2').$$

Des équations (1′) et (2′), on déduit

$$\beta' = 2\beta \frac{\sum \frac{y_x}{r^x}}{\sum \frac{2y_x - y_x^2}{r^x}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

Pour faciliter la comparaison de S et de S′, supposons que β et β' soient des fractions très-petites, on aura :

$$\Sigma\, y_x \log (1 + \beta) = \beta \Sigma y_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

$$\sum y_x^2 \log \left(1 + \frac{\beta'}{2}\right) + \left[\Sigma y_x - \Sigma y_x^2\right] \log (1 + \beta') = \frac{\beta'}{2} \Sigma y_x^2$$
$$+ \beta' \Sigma y_x - \beta' \Sigma y_x^2 = \frac{\beta'}{2}\left[2\Sigma y_x - \Sigma y_x^2\right].$$

Donc, par la formule (3′),

$$\left.\begin{aligned} &\sum y_x^2 \log\left(1 + \frac{\beta'}{2}\right) + \left[\Sigma y_x - \Sigma y_x^2\right] \log (1 + \beta') \\ &= \frac{2\beta \sum \frac{y_x}{r^x}}{2 \sum \frac{2y_x - y_x^2}{r^x}}\left[2\Sigma y_x - \Sigma y_x^2\right] = \frac{\beta\left[2\Sigma y_x - \Sigma y_x^2\right] \sum \frac{y_x}{r^x}}{\sum \frac{2y_x - y_x^2}{r^x}} \end{aligned}\right\} . \quad (\beta)$$

Cela posé, le second mode de placement sera le plus avantageux si l'on a $S' > S$, ou

$$\Sigma y_x^2 \log \left(1 + \frac{\beta'}{2}\right) + \left[\Sigma y_x \Sigma y_x^2\right] \log (1 + \beta') > \Sigma y_x \log (1 + \beta),$$

donc par suite des formules (α) et (β), quand on aura

$$\frac{\left[2\Sigma y_x - \Sigma y_x^2\right] \sum \frac{y_x}{r^x}}{\sum \frac{2y_x - y_x^2}{r^x}} > \Sigma y_x,$$

ou

$$\left[2\Sigma y_x - \Sigma y_x^2\right] \sum \frac{y_x}{r^x} > \Sigma y_x \left[2 \sum \frac{y_x}{r^x} - \sum \frac{y_x^2}{r^x}\right],$$

ou

$$\frac{2\Sigma y_x}{\Sigma y_x} - \frac{\Sigma y_x^2}{\Sigma y_x} > \frac{2 \sum \frac{y_x}{r^x}}{\sum \frac{y_x}{r^x}} - \frac{\sum \frac{y_x^2}{r^x}}{\sum \frac{y_x}{r^x}},$$

ou

$$2 - \frac{\Sigma y_x^2}{\Sigma y_x} > 2 - \frac{\sum \frac{y_x^2}{r^x}}{\sum \frac{y_x}{r^x}},$$

ou bien enfin

$$\frac{\sum \frac{y_x^2}{r^x}}{\sum \frac{y_x}{r^x}} > \frac{\Sigma y_x^2}{\Sigma y_x}.$$

Cette relation est généralement vraie, puisque $\frac{1}{r} < 1$; donc le placement en viager sur deux têtes est le plus avantageux.

CHAPITRE X.

DE LA PROBABILITÉ DES TÉMOIGNAGES ET DES JUGEMENTS.

§ I. DES TÉMOIGNAGES.

185. Nous nous proposons de déterminer quelle est la probabilité qu'un fait, qui est rapporté par témoignage, a eu réellement lieu; et nous distinguerons les cas suivants :

I. Le fait est rapporté par un seul témoin. Quelle est la probabilité de son existence : 1° dans l'hypothèse que le fait est ordinaire; 2° dans celle qu'il est extraordinaire?

II. Le fait est rapporté par plusieurs témoins, 1° successivement; 2° par tradition successive.

Pour pouvoir appliquer le calcul à cet ordre de problèmes, nous aurons à distinguer dans chaque témoin la personne intelligente et la personne voulante. La première sera dans le vrai ou dans le faux, la seconde sera véridique ou non.

Nous désignerons par p la probabilité que le témoin ne trompe pas; par r celle qu'il ne se trompe pas; $1 - p$ sera la probabilité qu'il trompe; $1 - r$ celle qu'il se trompe.

I. LE FAIT EST RAPPORTÉ PAR UN SEUL TÉMOIN.

1° **Il est ordinaire.**

186. Premier problème. On extrait un numéro d'une urne qui en renferme n; un témoin oculaire affirme que le numéro i est sorti : quelle est la probabilité que ce fait a eu lieu?

Nous pouvons faire les quatre hypothèses suivantes :

1). Le témoin ne trompe pas, ni ne se trompe.
2). Le témoin ne trompe pas et se trompe.

3). Le témoin trompe et ne se trompe pas.
4). Le témoin trompe et se trompe.

D'après le théorème de Bayes, la probabilité cherchée P est égale à la somme des probabilités dues aux hypothèses favorables à la vérité de la déposition divisée par la somme des probabilités dues à toutes les hypothèses.

Probabilité due à la première hypothèse.

Cette probabilité se compose du concours des probabilités suivantes :

1° De la probabilité p que le témoin ne trompe pas ;
2° » » r » ne se trompe pas ;
3° » » $\frac{1}{n}$ de la sortie du numéro i.

La probabilité due à la première hypothèse est donc

$$\Pi_1 = \frac{pr}{n}.$$

Cette première hypothèse est favorable à la vérité de la déposition.

Probabilité due à la deuxième hypothèse.

Cette probabilité se compose du concours des probabilités suivantes :

1° De la probabilité p que le témoin ne trompe pas ;
2° » » $1-r$ » se trompe ;
3° » » $\frac{n-1}{n}$ que le numéro i n'est pas sorti ;
4° » » $\frac{1}{n-1}$ que, parmi les numéros non sortis, l'erreur du témoin lui a fait choisir le numéro i ; car, puisqu'il se trompe, au lieu de i, c'est un autre numéro qui est sorti et qu'il prend pour i ; et il doit le choisir parmi les $n-1$ numéros non sortis de l'urne.

La probabilité due à la deuxième hypothèse est donc

$$\Pi_2 = p(1-r)\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1} = \frac{p(1-r)}{n}.$$

Cette deuxième hypothèse n'est pas favorable à la vérité de la disposition.

Probabilité due à la troisième hypothèse.

Cette probabilité se compose du concours des probabilités suivantes :

1° De la probabilité $(1-p)$ que le témoin se trompe ;
2° » » r » ne se trompe pas ;
3° » » $\frac{n-1}{n}$ que le numéro i n'est pas sorti ;
4° » » $\frac{1}{n-1}$ qu'il a choisi le numéro i parmi $n-1$ numéros non sortis.

La probabilité due à la troisième hypothèse est donc

$$\Pi_3 = \frac{(1-p)r}{n}.$$

Cette troisième hypothèse n'est pas favorable à la vérité de la déposition.

Probabilité due à la quatrième hypothèse.

Dans cette hypothèse il y a deux cas à distinguer.

Premier cas. Le numéro i est sorti ; soit pour ce cas Π_4 la probabilité due à la quatrième hypothèse.

Cette probabilité se compose du concours des probabilités suivantes :

1° De la probabilité $(1-p)$ que le témoin trompe ;
2° » » $(1-r)$ qu'il se trompe ;
3° » » $\frac{1}{n}$ que le numéro i est sorti ;
4° » » $\frac{1}{n-1}$ du choix que le témoin fait de i ; car il croit qu'un autre numéro est sorti, et choisit i parmi les $n-1$ numéros qu'il ne croit pas sortis.

On aura donc

$$\Pi_4 = (1-p)(1-r)\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}.$$

Cette probabilité est favorable à la vérité de la déposition.

Second cas. Le numéro i n'est pas sorti; soit pour ce cas Π_5 la probabilité due à la quatrième hypothèse.

Cette probabilité se compose du concours des probabilités suivantes :

1° De la probabilité $(1-p)$ que le témoin trompe;
2° » » $1-r$ » » se trompe;
3° » » $\frac{n-1}{n}$ que le numéro i n'est pas sorti;
4° » » $\frac{1}{n-1}$ qu'il choisira i parmi les $n-1$ numéros qu'il ne croit pas sortis.

On aura donc

$$\Pi_5 = (1-p)(1-r)\frac{n-1}{n}\,\frac{1}{n-1} = \frac{(1-p)(1-r)}{n}.$$

Cette probabilité n'est pas favorable à la vérité de la déposition.

Appliquant maintenant le théorème de Bayes, nous trouverons

$$P = \frac{\Pi_1+\Pi_4}{\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4+\Pi_5}$$

$$= \frac{\dfrac{pr}{n}+\dfrac{(1-p)(1-r)}{n(n-1)}}{\dfrac{pr}{n}+\dfrac{p(1-r)}{n}+\dfrac{(1-p)r}{n}+\dfrac{(1-p)(1-r)}{n(n-1)}+\dfrac{(1-p)(1-r)}{n}}$$

$$= \frac{pr+\dfrac{(1-p)(1-r)}{n-1}}{1+\dfrac{(1-p)(1-r)}{n-1}}.$$

Si le témoin ne se trompe pas, on a $r=1$ et $P=p$;
» » ne trompe pas, on a $p=1$ et $P=r$;
Si n est très-grand, on a, à peu près, $P=p.r$.

2° Le fait, rapporté par un seul témoin, est extraordinaire.

187. Deuxième problème. Une urne renferme $n-1$ boules noires et une blanche; on en extrait une boule, et un témoin affirme qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité que ce fait a eu lieu?

Nous ferons les mêmes hypothèses que dans le problème précédent.

Première hypothèse. Le témoin ne trompe pas, ni ne se trompe.

La probabilité due à cette première hypothèse se compose :

1° De la probabilité p que le témoin ne trompe pas;
2° » » r » » ne se trompe pas;
3° » » $\frac{1}{n}$ de la sortie de la boule blanche.

La probabilité Π_1 due à la première hypothèse est donc

$$\Pi_1 = \frac{pr}{n}.$$

Deuxième hypothèse. Le témoin ne trompe pas et se trompe.

La probabilité due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité p que le témoin ne trompe pas;
2° » » $(1-r)$ qu'il se trompe;
3° » » $\frac{n-1}{n}$ de la sortie d'une boule noire.

La probabilité Π_2 due à la deuxième hypothèse est donc

$$\Pi_2 = \frac{p(1-r)(n-1)}{n}.$$

Troisième hypothèse. Le témoin trompe et ne se trompe pas.

La probabilité due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $(1-p)$ que le témoin trompe;
2° » » r qu'il ne se trompe pas;
3° » » $\frac{n-1}{n}$ de la sortie d'une boule noire.

La probabilité Π_3 due à cette troisième hypothèse est donc

$$\Pi_3 = (1-p)\,r\,\frac{n-1}{n}.$$

Quatrième hypothèse. Le témoin trompe et se trompe.

Dans ce cas, il est évident que la boule blanche est sortie.

La probabilité due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $(1-p)$ que le témoin se trompe;

2° » » $1-r$ » » trompe;

3° » » $\frac{1}{n}$ de la sortie de la boule blanche.

La probabilité Π_4 due à cette quatrième hypothèse est donc

$$\Pi_4 = \frac{(1-p)(1-r)}{n}.$$

Comme la première et la quatrième hypothèse sont favorables à la vérité de la déposition, nous aurons en vertu du théorème de Bayes

$$\mathrm{P} = \frac{\Pi_1 + \Pi_4}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4}$$

$$= \frac{\dfrac{pr}{n} + \dfrac{(1-p)(1-r)}{n}}{\dfrac{pr}{n} + \dfrac{p(1-r)(n-1)}{n} + \dfrac{(1-p)\,r(n-1)}{n} + \dfrac{(1-p)(1-r)}{n}}.$$

Faisons $pr + (1-p)(1-r) = q$; q sera la probabilité que le témoin énonce un fait vrai, soit qu'il ne trompe pas, ni ne se trompe, soit qu'il trompe et se trompe; alors P s'écrira

$$\mathrm{P} = \frac{q}{q + (1-q)(n-1)}; \quad 1 - \mathrm{P} = \frac{(1-q)(n-1)}{q + (1-q)(n-1)}.$$

Si n est très-grand, la déposition du témoin deviendra très-peu probable, à moins que q ne soit très-rapproché de l'unité; dans ce cas la sortie de la boule blanche est un fait extraordinaire; et l'on voit que cette circonstance affaiblit en général la probabilité de la vérité de la déposition.

188. Troisième problème. Une urne renferme un très-grand nombre n de boules blanches; une seconde urne le même nombre de noires; on extrait de l'une de ces urnes une boule que l'on remet dans l'autre; puis on extrait une boule de cette dernière.

Un témoin du premier tirage affirme qu'une blanche est sortie; un témoin du second tirage affirme également qu'il a vu sortir une blanche; quelle est la probabilité qu'une boule blanche est effectivement sortie dans les deux tirages?

Soit q la probabilité que le premier témoin énonce la vérité, c'est-à-dire, en nous conformant aux notations précédentes

$$q = pr + (1-p)(1-r).$$

Désignons par q' la même probabilité relativement au second témoin.

Nous pouvons faire les quatre hypothèses suivantes :

1). Le premier et le second témoin disent la vérité.

2). » témoin dit la vérité, le second ment.

3). » » ment, le second dit la vérité.

4). » et le second témoin mentent.

Première hypothèse. Les deux témoins disent la vérité.

La probabilité du fait observé, due à cette hypothèse, se compose:

1° De la probabilité q que le premier témoin dit la vérité;

2° » » q' » second témoin dit la vérité;

3° » » $\frac{1}{2}$ qu'une boule blanche est sortie au premier tirage; car la boule extraite peut être sortie également de la première ou de la seconde urne;

4° De la probabilité $\frac{1}{n-1}$ de l'extraction d'une blanche de la seconde urne, puisqu'il a été extrait une blanche de la première, et que la seconde renferme par suite n noires, plus la blanche qu'on y a ajoutée.

La probabilité due à la première hypothèse est donc

$$\Pi_1 = qq'\,\frac{1}{2(n+1)}.$$

Deuxième hypothèse. Le premier témoin dit la vérité, le second ment.

La probabilité due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité q que le premier témoin dit la vérité ;

2° » » $1-q'$ que le second témoin ment ;

3° » » $\frac{1}{2}$ que la boule blanche a été extraite de la première urne ;

4° De la probabilité $\frac{n}{n+1}$ qu'on a extrait une boule noire de la seconde urne.

La probabilité Π_2 due à la deuxième hypothèse sera donc

$$\Pi_2 = q(1-q')\frac{n}{2(n+1)}.$$

Troisième hypothèse. Le premier témoin ment, le second dit la vérité.

La probabilité due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $1-q$ que le premier témoin ment ;

2° » » q' que le second témoin dit la vérité ;

3° » » $\frac{1}{2}$ que la boule a été extraite de la seconde urne ;

4° De la probabilité $\frac{n}{n+1}$ qu'on a extrait une boule blanche de la première urne.

La probabilité Π_3 due à la troisième hypothèse sera donc

$$\Pi_2 = (1-q)q'\frac{n}{2(n+1)}.$$

Quatrième hypothèse. Aucun des deux témoins ne dit la vérité.

La probabilité due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $1-q$ que le premier témoin ment ;

2° » » $1-q'$ que le second témoin ment ;

3° » » $\frac{1}{2}$ que la boule a été extraite de la seconde urne ;

4° De la probabilité $\frac{1}{n+1}$ qu'on a extrait une boule noire de la première urne au second tirage.

La probabilité due à la quatrième hypothèse sera donc

$$\Pi_4 = \frac{(1-q)(1-q')}{2(n+1)}.$$

La première hypothèse seule étant favorable à la vérité de la déposition, nous aurons pour la probabilité cherchée

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\Pi_1}{\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4} \\
&= \frac{\dfrac{qq'}{2(n+1)}}{\dfrac{qq'}{2(n+1)}+\dfrac{q(1-q')n}{2(n+1)}+\dfrac{(1-q)q'n}{2(n+1)}+\dfrac{(1-q)(1-q')}{2(n+1)}} \\
&= \frac{qq'}{qq'+n[q(1-q')+q'(1-q)]+(1-q)(1-q')}.
\end{aligned}$$

C'est la probabilité de l'existence de ce fait qu'une boule blanche aurait été extraite au premier tirage, et aurait reparu au second.

On voit qu'en général cette probabilité devient très-faible quand n devient très-grand, ou que la probabilité du fait résultant de l'ensemble des deux témoignages est fort affaiblie quand ce fait est extraordinaire.

II. LE FAIT EST RAPPORTÉ PAR PLUSIEURS TÉMOINS.

—

1° Simultanément.

189. Quatrième problème. Une urne renferme n numéros ; on en extrait un, et deux témoins affirment que le numéro i est sorti. On demande quelle est la probabilité que ce fait est réellement arrivé.

Admettons, pour simplifier le problème, que les deux témoins ne se soient pas trompés ; et soient p et p' respectivement les probabilités qu'ils disent la vérité. Il n'y aura que deux hypothèses possibles :

1). Ils disent la vérité.
2). Ils mentent.

Première hypothèse. Les témoins disent la vérité.

La probabilité due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité p que le premier témoin dit la vérité;
2° » » p' que le second témoin dit la vérité;
3° » » $\frac{1}{n}$ que le numéro i est sorti.

Nous aurons donc

$$\Pi_1 = \frac{pp'}{n}.$$

Deuxième hypothèse. Les témoins mentent.

La probabilité Π_2 due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $1-p$ que le premier témoin ment;
2° » » $1-p'$ que le second témoin ment;
3° » » $\frac{n-1}{n}$ que le numéro i n'est pas sorti.
4° De la probabilité $\frac{1}{(n-1)^2}$ que les deux témoins font à la fois le même choix du numéro i parmi les $n-1$ numéros qui ne sont pas sortis.

Nous aurons donc

$$\Pi_2 = (1-p)(1-p')\frac{n-1}{n}\,\frac{1}{(n-1)^2} = \frac{(1-p)(1-p')}{n(n-1)}.$$

Comme la première hypothèse seule est favorable à la vérité de la déposition, la probabilité P sera

$$P = \frac{\Pi_1}{\Pi_1+\Pi_2} = \frac{pp'}{pp' + \dfrac{(1-p)(1-p')}{pp'}} = \frac{1}{1+\dfrac{(1-p)(1-p')}{n(n-1)pp'}}.$$

La probabilité contraire sera

$$1-P = \frac{1}{1+\dfrac{n(n-1)pp'}{(1-p)(1-p')}}.$$

Si n est très-grand, P s'approche beaucoup de l'unité; il est donc très-probable dans ce cas que le numéro i est sorti. La raison en est que, si les témoins mentent, il est fort difficile qu'ils portent leur choix sur le même numéro.

Si $n=2$, la sortie du numéro i aura pour probabilité $\frac{1}{2}$; et la probabilité qu'elle a eu lieu, d'après l'attestation de deux témoins, est

$$P = \frac{pp'}{pp' + \frac{1}{2}(1-p)(1-p')}.$$

Cette formule exprime la probabilité d'un fait attesté par deux témoins, lorsque l'existence et la non-existence de ce fait sont également probables.

Si les deux témoins sont également véridiques, on a $p=p'$ et cette formule devient

$$P = \frac{p^2}{p^2 + \frac{1}{2}(1-p)^2}.$$

En général, si s témoins également véridiques affirment un fait dont l'existence et la non-existence sont également probables, la probabilité de ce fait résultant de leurs témoignages sera

$$P = \frac{p^s}{p^s + \frac{1}{2}(1-p)^s}.$$

190. Cinquième problème. Une urne renferme n numéros; un premier témoin affirme que le numéro i est sorti; un second témoin affirme que c'est i'; quelle est la probabilité que i est réellement sorti?

Soient, comme précédemment, $r=r'=1$; p la probabilité que le premier témoin dit la vérité; p' la probabilité que le second la dit.

On pourra faire les trois hypothèses suivantes :

1). Le premier témoin dit la vérité, le second ment.
2). » » ment, le second dit la vérité.
3). Les deux témoins mentent.

Première hypothèse. Le premier témoin dit la vérité, le second ment.

La probabilité Π_1 due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité p que le premier témoin dit la vérité;
2° » » $1-p'$ que le second témoin ment;
3° » » $\frac{1}{n}$ que le numéro i est sorti;
4° » » $\frac{1}{n-1}$ que le second témoin a fait choix du numéro i' parmi les $n-1$ numéros différents de i.

On aura donc

$$\Pi_1 = \frac{p(1-p')}{n(n-1)}.$$

Deuxième hypothèse. Le premier témoin ment, le second dit la vérité.

La probabilité Π_2 due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $1-p$ que le premier témoin ment.
2° » » p' que le second témoin dit la vérité.
3° » » $\frac{1}{n}$ que le numéro i' est sorti;
4° » » $\frac{1}{n-1}$ que le premier témoin a fait choix du numéro i.

On aura donc

$$\Pi_2 = \frac{(1-p')p'}{n(n-1)}.$$

Troisième hypothèse. Les deux témoins mentent à la fois.

La probabilité Π_3 due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $1-p$ que le premier témoin ment;
2° » » $1-p'$ que le second témoin ment;
3° » » $\frac{n-2}{n}$ qu'aucun des n^{os} i et i' n'est sorti;
4° » » $\frac{1}{(n-1)^2}$ que le premier témoin choisit i et le second i'.

On aura donc

$$\Pi_3 = \frac{(n-2)(1-p)(1-p')}{n(n-1)^2}.$$

La première hypothèse seule étant favorable à la vérité de la déposition du premier témoin, la probabilité cherchée sera

$$\begin{aligned} P &= \frac{\Pi_1}{\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3} \\ &= \frac{\dfrac{p(1-p')}{n(n-1)}}{\dfrac{p(1-p')}{n(n-1)} + \dfrac{(1-p)p'}{n(n-1)} + \dfrac{(n-2)(1-p)(1-p')}{n(n-1)^2}} \\ &= \frac{p(1-p')(n-1)}{p+p'-2+n(1-pp')}. \end{aligned}$$

Si $n=2$, l'existence de chacun des faits attestés est aussi probable que sa non-existence; et si de plus $p=p'=\frac{1}{2}$, la probabilité cherchée est égale à $\frac{1}{2}$; en effet, alors les deux témoignages se détruisent mutuellement.

2° Témoignage traditionnel de r témoins successifs.

191. Sixième problème. Un témoin présent au tirage affirme avoir vu sortir d'une urne, qui renferme n numéros, le numéro i; ce même fait a été confirmé par une chaîne traditionnelle de r témoins : chercher la probabilité que le numéro i est effectivement sorti.

Désignons par y_r la probabilité cherchée; de sorte que l'addition d'un nouveau témoignage la changera en $r+1$.

Cette dernière probabilité se compose de la somme des deux probabilités suivantes :

a). De la probabilité P que le numéro i était sorti et que le nouveau témoin a dit la vérité.

b). De la probabilité que le numéro i n'était pas sorti et que le nouveau témoin, quoique ne disant pas la vérité, a fait choix du numéro i.

La probabilité P est due au concours des probabilités suivantes :

1° De la probabilité p_{r+1} que le nouveau témoin dit la vérité;
2° » » y_r que le numéro i est sorti.

On a donc

$$P = p_{r+1} y_r.$$

La probabilité Q se compose des probabilités suivantes :

1° De la probabilité $1 - p_{r+1}$ que le nouveau témoin ment;

2° » » $1 - y_r$ que le numéro i n'est pas sorti;

3° » » $\frac{1}{n-1}$ du choix que le témoin a fait du numéro i.

On a donc

$$Q = \frac{(1 - p_{r+1})(1 - y_r)}{n-1},$$

et par suite

$$y_{r+1} = P + Q = p_{r+1} y_r + \frac{(1-p_{r+1})(1-y_r)}{n-1} = \frac{n p_{r+1} y_r - p_{r+1} - y_r + 1}{n-1};$$

d'où, en écrivant $y_r + \Delta y_r$ au lieu de y_{r+1}, et $p_r + \Delta p_r$ au lieu de p_{r+1} :

$$(n-1)\,\Delta y_r = (n y_r - 1)(p_r + \Delta p_r - 1).$$

L'intégrale de cette équation aux différences est

$$y_r = \frac{1}{n} + C\,\frac{(np_1 - 1)(np_2 - 1)\ldots(np_r - 1)}{(n-1)^r},$$

C étant une constante qui se détermine par cette condition que la probabilité du fait en vertu du premier témoignage est p_1, de sorte que $y_1 = p_1$, d'où

$$p_1 = \frac{1}{n} + C\,\frac{np_1 - 1}{n-1}, \quad \text{et} \quad C = \frac{n-1}{n}.$$

La probabilité cherchée est donc

$$y_r = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\,\frac{(np_1 - 1)\ldots(np_r - 1)}{(n-1)^r}.$$

Si $n = \infty$, cette valeur de y_r devient

$$y_r = p_1 \ldots p_r.$$

Si $n = 2$, ou si l'existence et la non-existence du fait sont également probables,

$$y_r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p_1 - 1)\ldots(2p_r - 1).$$

En général, à mesure que la chaîne des traditions se prolonge, la probabilité qui en résulte se rapproche indéfiniment de la limite $\frac{1}{n}$, qui est la probabilité à priori de la sortie du numéro i. Le terme

$$\frac{n-1}{n}\,\frac{(np_1 - 1)\ldots(np_r - 1)}{(n-1)^r}$$

est donc ce que la chaîne des témoignages ajoute à cette dernière probabilité.

On voit par là que la probabilité d'un fait rapporté par des traditions successives s'affaiblit à mesure que la tradition se prolonge.

§ 2. PROBABILITÉ DES JUGEMENTS.

192. Il s'agit de déterminer la probabilité de la bonté d'un jugement rendu par un tribunal dans les différentes circonstances qui peuvent se présenter. Nous nous bornerons à l'examen des cas suivants :

Premier problème. Si p désigne la probabilité que chacun des juges prononce la vérité, quelle est la probabilité de la bonté du jugement d'un tribunal qui prononce entre deux opinions contradictoires à l'unanimité des r juges qui le composent?

Si r témoins d'une égale véracité affirment un fait dont l'existence est aussi probable que sa non-existence, la probabilité de ce fait, résultant de leur témoignage, sera (voir n° 189)

$$P = \frac{p^r}{p^r + (1-p)^r}. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Or on peut assimiler le jugement d'un tribunal qui prononce entre deux opinions contraires au résultat des témoignages de plusieurs personnes relativement à l'extraction d'un numéro d'une urne qui n'en renferme que deux; de sorte que la formnle (1) exprime la probabilité cherchée. On peut déterminer p par l'observation du rapport des jugements rendus à l'unanimité par le tribunal au nombre total des jugements. Lorsque ce nombre est très-grand, en le désignant par n, et par i le nombre des jugements rendus à l'unanimité, on aura, à fort peu près (*),

$$p^r + (1-p)^r = \frac{i}{n};$$

la résolution de cette équation donnera la véracité p des juges.

Si l'on suppose le tribunal formé de trois juges, on aura

$$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4i-n}{12n}};$$

nous adopterons le signe $+$; car il est naturel de supposer à chaque juge une plus grande probabilité pour la vérité que pour l'erreur. Si la moitié des jugements rendus par le tribunal a été rendue à l'unanimité, alors $\frac{i}{n} = \frac{1}{2}$, et $p = 0{,}789$.

La probabilité de la bonté d'un nouveau jugement rendu à l'unanimité sera (**)

$$1 - \frac{n}{i}(1-p)^r.$$

En général, on voit que cette probabilité est d'autant plus grande que r est un plus grand nombre, et que les valeurs de p et de $\frac{i}{n}$ sont plus grandes, ce qui dépend des lumières des juges. Il y a donc un grand avantage à former des tribunaux d'appel, composés d'un grand nombre de juges choisis parmi les personnes les plus éclairées.

Deuxième problème. Trouver la probabilité de l'erreur à craindre sur la bonté d'un jugement en matière criminelle prononcé par $p+q$ juges, dont p condamnent et q absolvent l'accusé.

Un accusé ne peut être condamné que quand la probabilité a

(*) Voir Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, livre II, n° 50.
(**) *Ibid.*

de son délit est telle que la société ait plus à craindre des attentats qui pourraient résulter de son acquittement que de l'erreur du tribunal. Nous supposerons donc que le juge qui condamne l'accusé prononce par là que la probabilité de son délit est au moins égale à a.

Désignons par n la probabilité que le juge ne se trompe pas, probabilité que nous supposons égale ou supérieure à $\frac{1}{2}$ et variant par des degrés infiniments petits, égaux à dx, et également possibles; $1-x$ sera la probabilité que le juge se trompe, x^q, celle que les q juges qui absolvent ne se trompent pas; $(1-x)^p$, celle que les p juges qui le condamnent se trompent; x^p, qu'ils ne se trompent pas; enfin, $(1-x)^q$ celle que les q juges qui l'absolvent se trompent.

$x^p(1-x)^q$ exprimera le nombre des chances favorables à la condamnation; $x^q(1-x)^p$ celles favorables à l'acquittement.

Si x était certain, et que l'accusé fût condamné

$$\varpi = \frac{x^p(1-x)^q}{x^p(1-x)^q + x^q(1-x)^p},$$

exprimerait la probabilité de la bonté de ce jugement.

Mais la cause x n'étant que probable, nous avons à multiplier ϖ par la probabilité de x déduite de l'observation; et comme x peut varier par degrés infiniment petits, nous désignerons par $\varphi(x)\,dx$ la probabilité d'une de ses valeurs.

L'événement observé, c'est que p juges ont condamné, et q absous; par suite

$$\varphi(x)\,dx = \frac{x^p(1-x)^q + (1-x)^p x^q}{\int_{1/2}^{1}\left[x^p(1-x)^q + (1-x)^p x^q\right]dx}\,dx.$$

La probabilité de la bonté du jugement, eu égard à l'une des valeurs de x, sera donc

$$\varpi\varphi(x)\,dx = \frac{x^p(1-x)^q\,dx}{\int_{1/2}^{1}\left[x^p(1-x)^q + (1-x)^p x^q\right]dx}.$$

On simplifie le dénominateur en remarquant que, si l'on fait $1-x=y$, on obtient :

$$\int_{1/2}^{1}(1-x)^p x^q dx = -\int_{1/2}^{0} y^p(1-y)^q dy = \int_0^{\frac{1}{2}} x^p(1-x)^q dx;$$

de sorte que l'expression précédente devient

$$\varpi\varphi(x)\,dx = \frac{x^p(1-x)^q\,dx}{\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx}.$$

Eu égard à toutes les valeurs de x cette probabilité se changera en

$$Q = \frac{\int_{1/2}^{1} x^p(1-x)^q\,dx}{\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx},$$

La probabilité contraire, c'est-à-dire celle de l'erreur à craindre sur la bonté du jugement sera

$$P = 1 - Q = 1 - \frac{\int_{1/2}^{1} x^p(1-x)^q\,dx}{\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx};$$

ou bien

$$P = \frac{\int_0^{1/2} x^p(1-x)^q\,dx}{\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

comme on s'en assure aisément par des transformations analogues aux précédentes.

Effectuons les intégrations indiquées, et faisons, à cet effet, $y=2x$; nous aurons :

$$\int_0^{1/2} x^p(1-x)^q\,dx = \frac{1}{2^{p+q+1}}\int_0^1 y^p\left[1+(1-y)\right]^q dy$$

$$= \frac{1}{2^{p+q+1}}\left\{\int_0^1 y^p dy + q\int_0^1 y^p(1-y)\,dy + \frac{q(q-1)}{1.2}\int_0^1 y^p(1-y)^2 dy + \cdots + \int_0^1 y^p(1-y)^q dy\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{p+q+1}}\left\{\frac{1}{p+1} + q\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2)}{\Gamma(p+3)} + \frac{q(q-1)}{1.2}\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(3)}{\Gamma(p+4)} + \cdots + \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{p+q+1}}\left\{\frac{1}{p+1} + \frac{q}{(p+1)(p+2)} + \frac{q(q-1)}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \cdots + \frac{q\ldots 2.1}{(p+1)\ldots(p+q+1)}\right\}.$$

De plus nous savons que

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{1\ldots q}{(p+1)\ldots(p+q+2)}.$$

Donc enfin nous aurons

$$P = \frac{1}{2^{p+q+1}}\left\{1 + \frac{p+q+1}{1} + \frac{(p+q+1)(p+q)}{1.2} + \cdots + \frac{(p+q+1)\ldots(p+2)}{1.2\ldots q}\right\}.$$

Dans le cas ordinaire de $p+q=12$, on obtient pour les valeurs successives 0, 1, 2, 3, 4, 5 de q :

$$P = \frac{1}{8192},\ \frac{14}{8192},\ \frac{92}{8192},\ \frac{378}{8192},\ \frac{1093}{8192},\ \frac{2380}{8192},$$

formule qui exprime respectivement la probabilité de l'erreur des condamnations par les 12 jurés

Par	11	voix contre	1,
»	10	»	2,
»	9	»	3,
»	8	»	4,
»	7	»	5.

A la majorité de 7 contre 5, cette probabilité est presque égale à $\frac{2}{7}$; de sorte que sur un très-grand nombre d'accusés condamnés à cette majorité, il serait très-probable que les $\frac{2}{7}$ n'auraient pas dû l'être.

La majorité d'une seule voix dans un tribunal nombreux indique donc que l'affaire dont il s'agit est à peu près douteuse ; la condamnation de l'accusé serait alors contraire aux principes d'humanité, protecteurs de l'innocence.

L'unanimité donnerait une très-grande probabilité à la bonté du jugement; mais si on l'exigeait, trop de coupables seraient acquittés. On doit donc, ou limiter le nombre des juges, si l'on veut qu'ils soient unanimes, ou accroître la majorité nécessaire pour condamner si le tribunal est plus nombreux.

La table suivante justifie ces principes, qui sont du reste suggérés par le simple bon sens :

$p+q$	p	q	$\frac{p}{q}$	P
4	3	1	3,000	0,187
6	4	2	2,000	0,227
10	6	4	1,500	0,274
16	9	7	1,285	0,314

Dans cette table, la différence entre la majorité qui condamne et la minorité qui absout est supposée égale partout à 2; de sorte que pour un tribunal très-nombreux, les voix qui condamnent et celles qui absolvent sont à peu près en nombre égal; et l'on voit par la dernière colonne que la probabilité de l'erreur à craindre s'accroît à mesure que le nombre des juges augmente, quand la majorité reste la même. Si donc ce nombre augmente, on doit augmenter proportionnellement la majorité requise pour la condamnation. — Ce principe est vérifié par la table suivante :

$p+q$	p	q	$\frac{p}{q}$	P
3	2	1	1	0,313
6	4	2	2	0,227
10	7	3	2,3	0,113
18	14	4	3,5	0,009

Dans cette table la majorité requise augmente avec le nombre des juges, et l'on voit que la probabilité de l'erreur à craindre diminue en même temps que les nombres de l'avant-dernière colonne augmentent.

Voici enfin la table qui se rapporte au cas de l'unanimité des voix :

$p+q$	P
3	0,0625..
6	0,0078..
10	0,0005..
18	0,0000..

et l'on voit que la probabilité de la bonté du jugement est dans ce cas d'autant plus grande que le tribunal est plus nombreux.

III. DES DÉCISIONS A LA MAJORITÉ DES VOIX.

La valeur et la sûreté d'une décision prise à la majorité des voix dépendent d'abord du rapport de la majorité à la minorité, ensuite de l'intelligence et de la moralité des votants.

C'est à tort que l'on n'a souvent pas égard à la première de ces conditions, puisqu'on décide même à une seule voix de majorité; dans ce cas, si le nombre des votants est $n+1$, la majorité sera composée de $\frac{n}{2}+1$ voix, et la minorité de $\frac{n}{2}$; toutes choses égales d'ailleurs, comme le rapport $\frac{\frac{n}{2}+1}{n+1}$ est à peu près égal à $\frac{1}{2}$ si n est un peu considérable, la probabilité que l'opinion de la majorité est la vraie est donc très-peu supérieure à $\frac{1}{2}$; tandis qu'elle serait égale à 1 dans le cas de l'unanimité. On voit que ce n'est que le rapport de la majorité à la minorité qui doit décider, entre ces deux cas extrêmes, du degré de probabilité du résultat du vote.

Dans plusieurs assemblées ou tribunaux on fixe une majorité minimum qui doit être atteinte pour que la décision soit valable. Il faut alors, pour la sûreté des décisions, que le nombre des votants soit peu considérable, comme on le voit par la table suivante :

Nombre DES VOTANTS.	MAJORITÉ.	MINORITÉ.	RAPPORT.
4	3	1	1 : 3
6	4	2	1 : 2
8	5	3	1 : 1,67
10	6	4	1 : 1,50
26	14	12	1 : 1,17
50	26	24	1 : 1,08
100	51	49	1 : 1,04

La différence minimum entre la majorité et la minorité est supposée égale à 2 dans cette table; et l'on voit qu'à mesure que le nombre des votants augmente, le rapport de la première à la seconde tend vers l'unité, de sorte que les décisions prises deviennent de plus en plus incertaines.

D'autre part, une assemblée peu nombreuse offrant moins de garanties qu'une assemblée nombreuse, on devra choisir, pour fixer la majorité minimum, un rapport constant entre la majorité et la minorité; ainsi, une décision serait valable si elle était prise à la majorité d'un nombre de voix au moins égal à une fois, deux fois, etc., celui des voix de la minorité. Dans ce cas les décisions seront d'autant plus sûres que l'assemblée sera plus nombreuse, comme le montre la table ci-jointe :

Nombre DES VOTANTS.	MAJORITÉ.	MINORITÉ.	DIFFÉRENCE.	RAPPORT.
4	3	1	2	1 : 3
12	9	3	6	»
24	18	6	12	»
164	123	41	82	»

On voit par l'avant-dernière colonne que la différence entre la majorité et la minorité augmente avec le nombre des votants, et par suite aussi la sûreté de l'opinion admise.

Il résulte de ce qui précède :

1° Qu'il n'est pas prudent de décider, dans les assemblées délibérantes, à la simple majorité;

2° Qu'il convient de fixer une majorité minimum pour la validité des décisions;

3° Que pour fixer cette majorité, l'on ne doit pas prendre un rapport arithmétique, mais bien un rapport géométrique entre le nombre des voix de la majorité et celui des voix de la minorité.

Quant à l'intelligence et à la moralité des votants, il serait difficile de les introduire dans le calcul.

ADDITIONS.

I

THÉORIE DES ERREURS D'APRÈS LAPLACE.

1. Inconnue donnée par s observations.

Problème I. Déterminer la probabilité que la somme des carrés des erreurs d'un nombre très-grand s d'observations est $\omega = l + \mu s$.

Solution. On suppose les erreurs positives aussi probables que les négatives; ou $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Les erreurs positives ont toutes les valeurs comprises depuis $x = 0$, jusqu'à $x = a$; les erreurs négatives toutes celles comprises depuis $x = 0$, jusqu'à $x = -a$.

L'intervalle des limites des erreurs est donc $2a$.

La suite des erreurs rangées dans l'ordre croissant de leurs grandeurs est

$$-a, \ldots -x, \ldots -2da, \; -da, \; 0, \; da, \; 2da \ldots x, \ldots a.$$

Si l'on fait

$$X = \left\{ \varphi(-a)\, t^{(-a)^2} + \cdots + \varphi(-x)\, t^{(-x)^2} + \cdots + \varphi(-2da)\, t^{(-2da)^2} + \varphi(-da)\, t^{(-da)^2} + \varphi(0)\, t^{0^2} + \cdots + \varphi(a)\, t^{a^2} \right\}^s = \Sigma P_\omega t^\omega,$$

P_ω sera la probabilité cherchée. Elle est indépendante de t.

Soit $t = e^{\theta\sqrt{-1}}$, on aura

$$X = \left\{ \varphi(-a)\, e^{a^2\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi(-x)\, e^{x^2\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi(0) + \cdots + \varphi(x)\, e^{x^2\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi(a)\, e^{a^2\theta\sqrt{-1}} \right\}^s = \Sigma P_\omega e^{\omega\theta\sqrt{-1}},$$

multipliant par $e^{-\omega\theta\sqrt{-1}}d\theta$, puis intégrant entre $-\pi$ et $+\pi$, on a

$$\int_{-\pi}^{+\pi} X e^{-\omega\theta\sqrt{-1}}\, d\theta = 2\pi P_\omega,$$

d'où

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\omega\theta\sqrt{-1}}\,d\theta\,.\,X$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-(l+\mu s)\theta\sqrt{-1}}\,d\theta\,\Big\{\varphi(0) + 2\varphi(da)\,e^{da^2\sqrt{-1}}$$

$$+ 2\varphi(2da)\,e^{(2da)^2\sqrt{-1}} + \cdots + 2\varphi(x)\,e^{x^2\theta\sqrt{-1}} + \cdots + 2\varphi(a)\,e^{a^2\theta\sqrt{-1}}\Big\}^s$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-l\theta\sqrt{-1}}\,d\theta\,.\,A,$$

en désignant par A, le produit du polynôme entre parenthèses par $e^{-\mu s\theta\sqrt{-1}}$; développant l. A en série, on trouve

$$\text{l. A} = -\mu s\theta\sqrt{-1} + s\,\text{l.}\Big\{\varphi(0) + 2\varphi(da)\Big[1 + (da)^2\theta\sqrt{-1} - \frac{da^4\theta^2}{1.2} - \ldots\Big]$$

$$+ 2\varphi(2da)\Big[1 + \overline{2da}^2\theta\sqrt{-1} - \frac{\overline{2da}^4}{1.2}\theta^2 - \cdots\Big] + \cdots$$

$$+ 2\varphi(a)\Big[1 + a^2\theta\sqrt{-1} - \frac{a^4}{1.2}\theta^2 - \cdots\Big]\Big\}$$

$$= -\mu s\theta\sqrt{-1} + s\,\text{l.}\,\Big\{\big[\varphi(0) + 2\varphi(da) + 2\varphi(2da) + \cdots + 2\varphi(a)\big]$$

$$+ 2\theta\sqrt{-1}\,\big[\varphi(da)\,da^2 + \varphi(2da)\,(2da)^2 + \cdots + \varphi(a)\,a^2\big]$$

$$- \theta^2\big[\varphi(da)\,(da^2)^2 + \varphi(2da)\,(\overline{2da}^2)^2 + \cdots + \varphi(a)\,(a^2)^2\big] + \text{etc.}\Big\}$$

$$= -\mu s\theta\sqrt{-1} + s\,\text{l.}\Big\{-\varphi(0) + \int_0^a 2\varphi x dx$$

$$+ 2\theta\sqrt{-1}\int_0^a x^2\varphi x dx - \theta^2\int_0^a x^4\varphi x dx - \text{etc.}\Big\}.$$

Posons

$$x = a\,x', \quad \varphi(x) = \varphi(ax') = \psi(x').$$

Aux limites 0 et a de x correspondent 0 et 1 pour x'.

Posons en outre

$$2\int_0^1 \psi x' dx' = k + \frac{\varphi(0)}{a},$$

$$\int_0^1 x'\psi x' dx' = k',$$

$$\int_0^1 x'^2\psi x' dx' = k'',$$

$$\int_0^1 x'^3\psi x' dx' = k''',$$

$$\int_0^1 x'^4\psi x' dx' = k^{\text{IV}},$$

et observons que dans $\int_0^a 2\varphi(x)\,dx$, $\varphi(o)$ entre deux fois, nous aurons :

$$\int_0^a 2\varphi x dx = 2a\int_0^1 \psi x' dx' = ak + \varphi(o) = 1 + \varphi(o),$$

en faisant $ak = 1$;

$$\int_0^a x^2\varphi x dx = a^3\int_0^1 x'^3\psi x' dx' = a^3 k'',$$

$$\int_0^a x^4\varphi x dx = a^5\int_0^1 x'^4\psi x' dx' = a^5 k^{\text{IV}}, \text{ etc.}$$

Il vient ainsi

$$\text{l. A} = -\mu s\theta\sqrt{-1} + s\,\text{l.}\,\{-\varphi(o) + ak + \varphi(o) + 2\theta\sqrt{-1}\,a^3k'' - \theta^2a^5k^{\text{IV}} - \text{etc.}\}$$

$$= -\mu s\theta\sqrt{-1} + s\,\text{l.}\,\{ak + 2\theta\sqrt{-1}\,a^3k'' - \theta^2a^5k^{\text{IV}} - \text{etc.}\}$$

$$= -\mu s\theta\sqrt{-1} + s\,\text{l.}\,ak\Big\{1 + 2\theta\sqrt{-1}\,\frac{a^2k''}{k} - \frac{\theta^2a^4k^{\text{IV}}}{k} - \text{etc.}\Big\}$$

$$= -\mu s\theta\sqrt{-1} + \frac{2k''a^2}{k}s\theta\sqrt{-1} - \frac{k^{\text{IV}}}{k}a^4s\theta^2 - \frac{4k''^2}{2k^2}a^4s\theta^2 - \text{etc.}$$

$$= \Big[\frac{2k''}{k} - \frac{\mu}{a^2}\Big]a^2s\theta\sqrt{-1} - \Big[\frac{k^{\text{IV}}}{k} - \frac{4k''^2}{2k^2}\Big]a^4s\theta^2 - \text{etc.};$$

pour faire disparaître le terme imaginaire posons

$$p = \frac{2k''a^2}{k}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

il viendra

$$\text{l. A} = -\Big[\frac{kk^{\text{IV}} - 2k''^2}{k^2}\Big]a^4s\theta^2 - \text{etc.},$$

$$A = e^{-\frac{kk^{\text{IV}} - 2k^2}{k^2}a^4s\theta^2},$$

s étant très-grand on peut négliger tous les autres termes. Donc

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-l\theta\sqrt{-1} - \frac{kk^{\text{IV}} - 2k''^2}{k^2} sa^4\theta^2}.$$

Soit

$$a^4\theta^2 s = \beta^2\theta^2,\ \beta = \frac{k}{\sqrt{kk^{\text{IV}} - 2k''^2}},\ \theta = \frac{\beta t}{a^2\sqrt{s}},\ t = \frac{\theta a^2\sqrt{s}}{\beta},\ d\theta = \frac{\beta dt}{a^2\sqrt{s}};$$

Les limites de θ, $-\pi$ et $+\pi$, correspondent pour t à $-\frac{\pi a^2\sqrt{s}}{\beta} = -\infty$, et à $\frac{\pi a^2\sqrt{s}}{\beta} = \infty$, à cause de s supposé très-grand.

Soit de plus

$$r^2 = \frac{l^2}{a^4 s},\quad \frac{l}{a^2} = r\sqrt{s},\quad l\theta = \frac{l}{a^2\sqrt{s}}\beta t = r\beta t;$$

on aura :

$$\left.\begin{aligned} P_\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta dt}{a^2\sqrt{s}} e^{-[r\beta t\sqrt{-1}+t^2]} = \frac{\beta}{2\pi}\cdot\frac{e^{-\frac{\beta^2 r^2}{4}}}{a^2\sqrt{s}}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\left[t+\frac{r\beta}{2}\sqrt{-1}\right]^2} \\ &= \frac{\beta}{2a^2\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\beta^2 r^2}{4}}; \end{aligned}\right\}(\alpha)$$

la probabilité que la somme des carrés des erreurs des s observations est

$$\omega = l + \mu s = l + \frac{2k''a^2}{k}s$$

sera donc

$$P_\omega = \frac{\beta}{2a^2\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\beta^2}{4}\frac{l^2}{a^4 s}}.dl \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

On a partout sous-entendu dans l'expression P_ω la différentielle de la variable, car on a toujours $p_x = f(x)\,dx$.

Problème II. Trouver la probabilité P que la somme des carrés des erreurs des s observations est comprise entre $\mu s \pm l$, μ étant égal à

$$\frac{2k''a^2}{k}.$$

Solution. Il faut intégrer la formule (2) entre les limites $\pm l$; on aura donc

$$P = \frac{\beta}{2a^2\sqrt{\pi s}}\int_{-l}^{l} e^{-\frac{\beta^2 l^2}{4a^4 s}} dl = \frac{\beta}{a^2\sqrt{\pi s}}\int_0^l e^{-\frac{\beta^2 r^2}{4}} a^2\sqrt{s}\,dr = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\int_0^l e^{-\frac{\beta^2 r^2}{4}} dr,$$

en posant $l = ra^2\sqrt{s}$.

Cette formule exprime la probabilité que la somme des carrés des erreurs des s observations est comprise entre

$$\mu s \pm l = \frac{2k''a^2}{k}s \pm a^2 r\sqrt{s} \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

La formule (α) exprime la probabilité de r; elle fait voir que P_ω est un maximum quand $r = 0$, donc la somme des carrés des erreurs, la plus probable, correspond à $r = 0$.

Si l'on pose

$$\frac{\beta^2 r^2}{4} = t^2,\quad \frac{\beta r}{2} = t,\quad dr = \frac{2dt}{\beta},\quad r = \frac{2t}{\beta},\quad ra^2\sqrt{s} = \frac{2t}{\beta}a^2\sqrt{s} = l,$$

on trouvera

$$P = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\int_0^l e^{-t^2}\frac{2dt}{\beta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^l e^{-t^2} dt,$$

probabilité que la somme des carrés des erreurs est comprise entre

$$\frac{2k''a^2}{k}s \pm \frac{2ta^2\sqrt{s}}{\beta}.$$

P est la probabilité que la moyenne des carrés des erreurs, ou $\int x^2\varphi x dx$, est entre les limites

$$\frac{2k''a^2}{k} \pm \frac{2ta^2}{\beta\sqrt{s}}$$

mais

$$\frac{2k''a^2}{k} = \frac{\Sigma_i^s \varepsilon_i'^2}{s};$$

P est donc la probabilité que la moyenne des carrés des erreurs, ou $\mu_2 = \int x^2 \varphi x dx$, est comprise entre

$$\frac{\Sigma_i^s \varepsilon_i'^2}{s} \pm t \frac{2a^2}{\beta\sqrt{s}} = \frac{\Sigma_i^s \varepsilon_i'^2}{s} \pm \frac{l}{s},$$

où

$$\varepsilon' = \omega_i - m, \quad m = \frac{\omega_1 + \cdots + \omega_s}{s}.$$

La somme des carrés des erreurs la plus probable est, par suite de la formule (β), égale à

$$\frac{2k''a^2s}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Or comme s est très-considérable, la somme des carrés des erreurs différera très-peu de celle (γ) qui répond à la probabilité maximum.

Soient donc $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_s$ les erreurs d'observations.

Soit $m = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_s}{s}$, on aura approximativement

$$\varepsilon_1' = \omega_1 - m$$
$$\varepsilon_2' = \omega_2 - m$$
$$\varepsilon_s' = \omega_s - m.$$

Donc

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_s^2 = \Sigma_1^s \varepsilon_i'^2 = \Sigma_1^s (\omega_i - m)^2.$$

On a donc à peu près

$$\Sigma_1^s (\omega_i - m)^2 = \frac{2k''a^2s}{k} = \Sigma_1^s \varepsilon_i'^2 \quad \ldots\ldots \quad (\delta)$$

Problème I. Soit $2a$ l'intervalle compris entre les limites des erreurs de chaque observation; chercher la probabilité P_l que la somme des erreurs d'un très-grand nombre s d'observations sera l; les erreurs positives ont la même probabilité que les erreurs négatives, ou $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Solution. On a la suite de toutes les erreurs

$$-a, \cdots -x, \cdots -2da, -da, 0, da, 2da, \cdots x, \cdots a.$$

Les probabilités correspondantes sont

$$\varphi(-a), \ldots \varphi(-x), \ldots \varphi(-2da), \varphi(-da), \varphi(0), \varphi(da), \varphi(2da), \ldots \varphi(x) \ldots \varphi(a).$$

On a

$$\int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx = 2\int_0^a \varphi(x)\,da = \varphi(-a) + \cdots$$
$$+ \varphi(-x) + \cdots + \varphi(0) + \cdots + \varphi(x) \cdots + \varphi(a) = 1.$$

$$\int_{-a}^{a} x\varphi x dx = 0 = -a\,\varphi(-a) \cdots - x\,\varphi(-x) \cdots + x\,\varphi(x) + \cdots + a\,\varphi(a),$$

vraie moyenne des erreurs d'une observation.

$$\int_{-a}^{a} x^2 \varphi\, x dx = (-a)^2 \varphi(-a) + \cdots + (-x)^2 \varphi(-x) + \cdots$$
$$+ x^2 \varphi x + \cdots + a^2 \varphi a,$$

vraie moyenne des carrés des erreurs d'une observation.

Soit

$$X = \{\varphi(-a)\, t^{-a} + \cdots + \varphi(-x)\, t^{-x} + \cdots + \varphi(0) + \cdots$$
$$+ \varphi(x)\, t^x + \cdots \varphi a t^a\}^s = \Sigma P_l\, t^l$$

P_l sera la probabilité que la somme des erreurs des s observations est l. Posant $t = l^{\theta\sqrt{-1}}$, on aura

$$X = \{\varphi(-a)\, e^{-a\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi(-x)\, e^{-x\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi 0 + \cdots$$
$$+ \varphi x e^{x\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi a e^{a\theta\sqrt{-1}}\}^s = \Sigma P_l e^{l\theta\sqrt{-1}};$$

multipliant par $e^{-l\theta\sqrt{-1}} d\theta$ et intégrant entre les limites $\pm\pi$ on trouve

$$P_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X\, e^{-l\theta\sqrt{-1}}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, e^{-l\theta\sqrt{-1}} \{\varphi 0 + \varphi(da)\left[e^{da\theta\sqrt{-1}} + e^{-da\theta\sqrt{-1}}\right]$$
$$+ \varphi(2da)\left[e^{-2da\theta\sqrt{-1}} + e^{-2da\theta\sqrt{-1}}\right] + \cdots + \varphi x\left[e^{x\theta\sqrt{-1}} + e^{-x\theta\sqrt{-1}}\right] + \cdots$$
$$+ \varphi a\left[e^{a\theta\sqrt{-1}} + e^{-a\theta\sqrt{-1}}\right]\}^s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[d\theta \cos l\theta + \sqrt{-1}\, d\theta \sin\theta\right]$$
$$\{\varphi 0 + \varphi(da)\left[e^{da\theta\sqrt{-1}} + e^{-da\theta\sqrt{-1}}\right] + \cdots + \varphi(x)\left[e^{x\theta\sqrt{-1}} + e^{-x\theta\sqrt{-1}}\right] + \cdots$$
$$+ \varphi(a)\left[e^{a\theta\sqrt{-1}} + e^{-a\theta\sqrt{-1}}\right]\}^s.$$

Représentons par N le polynôme entre accolades, nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P}_l &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cos l\theta \mathrm{N}^s + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \sin l\theta \mathrm{N}^s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cos l\theta \mathrm{N}^s \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \cos l\theta \left\{ \varphi 0 + 2\varphi(da)\cos(da\theta) + 2\varphi(2da)\cos(2da\theta) + \cdots \right. \\ &\quad \left. + 2\varphi(x)\cos(x\theta) + \cdots + 2\varphi a \cos(a\theta) \right\}^s \end{aligned}\right\} (a)$$

$$\mathrm{P}_l = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \cos l\theta \left\{ -\varphi o + \int_0^a 2\varphi(x)\cos(x\theta)\, d\theta \right\}^s,$$

mais

$$2\varphi(x)\cos(x\theta) = 2\varphi(x)\left\{ 1 - \frac{x^2\theta^2}{2} + \text{etc.} \right\} = 2\varphi(x) - x^2\theta^2\varphi(x) + \text{etc.}$$

$$\int_0^a 2\varphi(x)\cos(x\theta)\, dx = 2\int_0^a \varphi x dx - \theta^2\int_0^a x^2\varphi x dx + \text{etc.}$$

$$= ak + \varphi(o) - \theta^2 a^3 k'' + \text{etc.}$$

En négligeant les puissances supérieures

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P}_l &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \cos l\theta \left\{ ak - a^3\theta^2 k'' \right\}^s \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \cos l\theta \left\{ ak\left(1 - a^2\theta^2\frac{k''}{k}\right)\right\}^s \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \ (b)$$

probabilité que la somme des erreurs des s observations est l.

Pour développer cette formule (b) en série convergente, posons

$$\left(1 - \frac{k''}{k}a^2\theta^2\right)^s = e^{-t^2}\,;\ ak = 1$$

$$s\,\mathrm{l.}\left(1 - \frac{k''}{k}a^2\theta^2\right) = -t^2.$$

Par le développement du logarithme on a

$$s\frac{k''}{k}a^2\theta^2 = t^2, \quad \text{d'où} \quad \theta = \frac{t}{a}\sqrt{\frac{k}{k''s}},\ d\theta = \frac{dt}{a}\sqrt{\frac{k}{k''s}},$$

et aux limites de θ, 0 et π correspondent pour t les limites

$$o \text{ et } \frac{a\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{k''s}}} = \infty\,.$$

Donc

$$\mathrm{P}_l = \frac{1}{a\pi}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\int_0^{\infty} dt e^{-t^2}\cos\left[\frac{lt}{a}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\right],$$

et comme

$$\int_0^{\infty} dt e^{-t^2}\cos mt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{4}m^2},$$

il viendra.

$$\mathrm{P}_l = \frac{1}{a\pi}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{4}\frac{l^2}{a^2}\frac{k}{k''s}} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\, e^{-\frac{l^2k}{4a^2k''s}},$$

ou bien, en posant

$$\frac{l^2k}{4a^2k''s} = t^2, \text{ d'où } l = 2t\sqrt{s}\,a\sqrt{\frac{k''}{k}}: \quad \mathrm{P}_l = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\, e^{-t^2},$$

la plus grande valeur de P_l répond à $l = 0$ ou $t = 0$.

Problème II. Chercher la probabilité P que la somme des erreurs des s observations est comprise entre $\pm\, l$.

Solution. On a

$$\mathrm{P}_l = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\, e^{-\frac{l^2k}{4a^2k''s}} dl, \ (*)$$

donc

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\int_{-l}^{l} e^{-\frac{l^2k}{4a^2k''s}} dl = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\int_0^{l} e^{-\frac{l^2k}{4a^2k''s}} dl.$$

Si l'on pose

$$\frac{l^2k}{4a^2k''s} = \frac{kr^2}{4k''} = t^2;$$

d'où

$$l = ar\sqrt{s}$$

$$= 2t\sqrt{s}\,.\,a\sqrt{\frac{k''}{k}},$$

on trouvera aisément

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{k}{\pi k''}}\int_0^{r} e^{-\frac{kr^2}{4k''}} dr, \quad . \quad . \quad . \ (c)$$

(*) En réintroduisant le facteur dl supprimé par abréviation dans le problème précédent.

probabilité que la somme des erreurs des s observations est comprise entre

$$\pm l \text{ ou } \pm ar\sqrt{s}, \text{ ou } \pm 2ta\sqrt{\frac{k''}{k}}\sqrt{s};$$

ou bien, probabilité que la somme des erreurs des s observations, divisée par s, ou leur moyenne arithmétique est comprise entre

$$\pm \frac{l}{s} \text{ ou } \pm \frac{ar}{\sqrt{s}} \text{ ou } \pm 2ta\sqrt{\frac{k''}{k}}\frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Remarque I. Comme on a

$$\frac{2k''a^2s}{k} = \Sigma_1^s(\omega_i - m)^2 = \Sigma_1^s\,\varepsilon^2$$

on trouve

$$a\sqrt{\frac{k''}{k}} = \sqrt{\frac{\Sigma_1^s(\omega_i - m)^2}{2s}}$$

donc

$$\frac{ar}{\sqrt{s}} = 2ta\sqrt{\frac{k}{k''}}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{t}{s}\sqrt{2\Sigma_1^s(\omega_i - m)^2}$$

et

$$P = \sqrt{\frac{k}{\pi k''}}\int_0^r e^{-\frac{kr^2}{4k''}}dr = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

est la probabilité que la moyenne arithmétique des erreurs est comprise entre

$$\pm\frac{t}{s}\sqrt{2\Sigma_1^s(\omega_i - m)^2}.$$

Remarque II. Soit x une grandeur inconnue fournie par s observations $\omega_1 \dots \omega_s$; les erreurs vraies sont

$$x - \omega_1 = \varepsilon_1' \dots x - \omega_s = \varepsilon_s'.$$

Si l'on fait

$$m = \frac{\omega_1 + \cdots + \omega_s}{s},$$

on aura

$$\frac{\varepsilon_1' + \cdots + \varepsilon_s'}{s} = x - m,$$

donc

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

est la probabilité que $x - m$ est entre

$$\pm\frac{t}{s}\sqrt{2\Sigma\varepsilon_i'^2},$$

ou que

$$x = m \pm \frac{s}{t}\sqrt{2\Sigma_1^s(\omega_i - m)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nous avons vu que la plus grande valeur de P_l répond à $l = o$, ou à $t = o$; mais alors $x = m$; donc m est la valeur la plus probable de x; mais on obtient cette valeur de x, par l'équation

$$\Sigma_1^s\varepsilon_i'^2 = \text{minimum};$$

donc la règle des moindres carrés donne la valeur la plus avantageuse.

Remarque III. Les formules (1) et (2) conduisent aux conséquences suivantes :

1° Si t reste constant, et par suite P, les limites de (2) se resserrent à mesure que s augmente.

2° Si $\pm\frac{t}{s}\sqrt{2\Sigma_1^s(\omega_i - m)^2}$ reste constant, ce qui exige que t augmente avec s, P convergera vers 1, à mesure que s ou t augmente.

Remarque IV. Si $\varphi(x)$ est une constante, c par exemple,

$$k = 2\int_0^1 \varphi x' dx' = 2\int_0^1 c\,dx' = 2c$$

$$k'' = \int_0^1 x'^2\varphi x' dx' = \int_0^1 c x'^2 dx' = \frac{c}{3}$$

d'où

$$\frac{k}{k''} = 6.$$

Remarque V. Les formules (A) peuvent servir à s'assurer si un phénomène est dû à une cause constante; car en supposant que le phénomène soit dû à des causes accidentelles, on a la probabilité

$$P = \sqrt{\frac{k}{\pi k''}} \int_0^r e^{-\frac{kr^2}{4k''}} dr,$$

que la somme des erreurs des s observations est comprise entre $\pm\, ar\sqrt{s}$; donc qu'elle est inférieure à $ar\sqrt{s}$, abstraction faite du signe, c'est-à-dire en valeur absolue.

Donc si P est peu différent de 1, et que la somme des erreurs soit $\gtreqless ar\sqrt{s}$, il sera très-probable que le phénomène est dû à une cause constante, qu'il faut alors rechercher.

Exemple. Vers 9 heures du matin le baromètre est plus élevé que vers 9 heures du soir; ensuite il remonte jusque vers 11 heures du soir, et il redescend jusque vers 4 heures du matin, pour revenir à son maximum de hauteur vers 9 heures.

Il faut examiner si cette variation diurne est due à une cause constante, ou si elle est le résultat de causes accidentelles.

Soit h_i' la hauteur du baromètre à 9 h. du matin le i^{me} jour :
— h_i — — à 9 h. du soir le i^{me} —

faisons

$$\omega_i = (h_i' - h_i)$$
$$m = \frac{\omega_1 + \cdots + \omega_s}{s};$$

d'où

$$ms = \omega_1 + \cdots + \omega_s.$$

Si x désigne la vraie valeur inconnue donnée par les s observations, on aura

$$x - \omega_1 = \varepsilon_1' \ldots x - \omega_s = \varepsilon_s'$$

et

$$\Sigma_1^s \varepsilon_i' = (x - m)s;$$

faisons

$$sx = q,$$
$$\Sigma_1^s \varepsilon_i' = q - ms.$$

En supposant que le phénomène de la variation diurne soit accidentel, on a :

$$P = \sqrt{\frac{k}{\pi k''}} \int_0^r e^{-\frac{kr^2}{4r''}} dr;$$

probabilité que q est compris entre $\pm\, ar\sqrt{s}$.

Par les observations de Ramond on a à peu près $x = 1$ millimètre; donc en prenant $s = 400$ jours et en posant pour les limites des ω, $\pm\, 4$ millimètres, d'où $a = 4$, on aura :

$$r = \frac{l}{a\sqrt{s}} = \frac{q}{a\sqrt{s}} = \frac{400}{a\sqrt{400}} = 5;$$

comme $\frac{k}{k''} = 6$ au moins (voir p. 365), on a :

$$\frac{kr^2}{4k''} = 37{,}5 \text{ au moins, ou } t = \sqrt{37{,}5}.$$

Donc

$$P = \sqrt{\frac{k}{\pi k''}} \int_0^r e^{-\frac{kr^2}{4k''}} dr$$
$$= 1 - \frac{1}{2\sqrt{37{,}5\pi}} \int_t^\infty e^{-t^2} dt$$
$$= 1 - \frac{e^{-t^2}}{2\sqrt{37{,}5\pi}} (1 - \text{etc.}) = 1 \text{ à peu près,}$$

probabilité que sx ou q est $< ar\sqrt{s}$, < 400.

Mais l'observation donnant $q = 400$, on a une forte probabilité que le phénomène de la variation diurne du baromètre est dû à une cause constante, ce qui engage à chercher cette cause.

La valeur $x = 1$ millimètre n'est qu'approximative, mais on a une probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt,$$

que

$$x - m = \pm \frac{t}{s} \sqrt{2\Sigma_1^s (m - \omega_i)^2}.$$

2. Fonctions d'une seule inconnue.

Une fonction inconnue $f(\xi)$ est donnée par s observations $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_s$, on connaît ξ à une très-petite fraction près; soient A cette valeur approchée et z sa correction inconnue, on aura :

$$\xi = A + z.$$

Soit ε_i l'erreur vraie de la $i^{ème}$ observation, on a :

$$\varepsilon_i = f(\xi) - \omega_i = f(A + z) - \omega_i$$
$$\varepsilon_i = f(A) + f'A \,.\, z - \omega_i$$
$$\varepsilon_i = a_i z - n_i\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en posant

$$f'(A) = a_i \text{ et } \omega_i - f(A) = n_i\,.$$

Remarque. Si $f(\xi) = \xi = z$, d'où $\varepsilon_i = z - \omega_i$, on a :

$$a_i = 1\,,\quad n_i = \omega_i\,,\quad A = 0;$$

multiplions la formule (1) par le facteur entier et positif h_i, on aura :

$$h_i\varepsilon_i = h_i a_i z - h_i n_i\,,$$

h_i étant une quantité indéterminée.

En faisant $i = 1, 2, \ldots s$, et en ajoutant, on a

$$E = \Sigma_1^s h_i\varepsilon_i = \Sigma_1^s h_i a_i z = \Sigma_1^s h_i n_i \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Déterminons z par la condition que $E = o$, l'équation (2) donne

$$z = \frac{\Sigma_1^s h_i n_i}{\Sigma_1^s h_i a_i} = M \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Soit u l'erreur de ce résultat, on aura

$$z = \frac{\Sigma_1^s h_i n_i}{\Sigma_1^s h_i a_i} + u = M + u$$

$$E = \Sigma_1^s h_i a_i (M + u) - \Sigma_1^s h_i n_i = u\Sigma_1^s h_i a_i. \quad \ldots \quad (4)$$

Problème I. Déterminer la probabilité que la somme E a pour valeur l.

Solution. Soit $\pm\, a$ les limites entre lesquelles varient les erreurs x de chaque observation, $\varphi x dx$ sera la probabilité d'une erreur x, et l'on aura

$$\int_{-a}^{a} \varphi x dx t^{h_i x} = \{\, \varphi(-a)t^{-h_i a} + \cdots + \varphi(x)t^{h_i x} + \cdots + \varphi(a)t^{h_i a}\,. \quad (5)$$

Soit

$$X = \int_{-a}^{a} \varphi x dx t^{h_1 x} \times \int_{-a}^{a} \varphi x dx t^{h_2 x} \ldots \times \int_{-a}^{a} \varphi x dx t^{h_s x} = \Sigma P_l t^l,$$

le produit X aura dans chacun de ses termes, comme exposant, l'une des valeurs de toutes les sommes que l'on peut former en ajoutant s des quantités $h_1x, h_2x, \ldots h_sx$, prises à volonté, et pour coefficient la probabilité de cette valeur, x désignent les erreurs ε_i. Donc P_l est la probabilité que la valeur de $E = \Sigma_1^s h_i\varepsilon_i$ est l.

Soit $t = e^{\omega\sqrt{-1}}$, et $\varphi(-x) = \varphi(x)$, on a :

$$P_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\, e^{-l\omega\sqrt{-1}}\, d\omega\,,$$

mais

$$\int_{-a}^{a} \varphi x dx e^{h_i x\omega\sqrt{-1}} = \int_{-a}^{0} \varphi x dx e^{h_i x\omega\sqrt{-1}} + \int_{0}^{a} \varphi x dx e^{h_i x\omega\sqrt{-1}}$$
$$= \int_{0}^{a} \varphi(-x) dx e^{h_i x\omega\sqrt{-1}} + \int_{0}^{a} \varphi x dx e^{h_i x\omega\sqrt{-1}}$$
$$= \int_{0}^{a} \varphi x dx \left\{ e^{h_i x\omega\sqrt{-1}} + e^{-h_i x\omega\sqrt{-1}} \right\} = 2\int_{0}^{a} \varphi x dx \cos(h_i x\omega).$$

Donc

$$X = 2\int_0^a \varphi x dx \cos(h_1 x\omega)\, 2\int_0^a \varphi x dx \cos(h_2 x\omega) \ldots 2\int_0^a \varphi x dx \cos(h_s x\omega)\,.$$

Soient

$$x = ax',\quad \varphi(ax') = \psi x',$$

$$\int_0^a \varphi x dx = a\int_0^1 \psi x' dx' = \frac{1}{2}ak\,,\qquad 2\int_0^1 \psi x' dx' = k\,,$$

$$\int_0^a x^2 \varphi x dx = a^3\int_0^1 x'^2 \psi x' dx' = a^3 k'',\quad \int_0^1 x'^2 \psi x' dx' = k'',$$

$$\int_0^a x^4 \varphi x dx = a^5\int_0^1 x'^4 \psi x' dx' = a^5 k^{IV},\quad \int_0^1 x'^4 \psi x' dx' = k^{IV}, \text{ etc.},$$

$$2\int_0^a \varphi x dx = \int_{-a}^{a} \varphi x dx = ak = 1\,, \text{ etc.}$$

Mais on a

$$\int_0^a \varphi x dx \cos(h_i x\omega) = \int_0^a \varphi x dx \left[1 - \frac{(h_i x\omega)^2}{2} + \frac{h_i^4 \omega^4 (x\omega)^4}{24} - \cdots\right]$$

$$= \int_0^a \varphi x dx - \frac{h_i^2\omega^2}{2}\int_0^a x^2 \varphi x dx + \frac{h_i^4\omega^4}{24}\int_0^a x^4 \varphi x dx - \cdots$$

$$= \frac{1}{2} ak - \frac{h_i^2\omega^2}{2} a^3 k'' + \frac{h_i^4\omega^4}{24} a^5 k^{\text{IV}} - \cdots$$

$$2\int_0^a \varphi x dx \cos(h_i x) = ak\left\{1 - h_i\omega^2 a^2 \frac{k''}{k} + \frac{h_i^4\omega^4}{12} a^4 \frac{k^{\text{IV}}}{k} - \right\};$$

d'où, comme $ak = 1$:

$$\text{l.}\left[2\int_0^a \varphi x dx \cos(h_i x)\right] = \text{l.}\left\{1 - h_i\omega^2 a^2 \frac{k''}{k} + \text{etc.}\right\}$$

$$= -\frac{k''}{k} h_i^2 a^2 \omega^2 + \frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k^2} h_i^2 a^4 \omega^4 - \text{etc.}$$

Donc

$$\text{l.X} = \sum_1^s \text{l.}\left[2\int_0^a \varphi x dx \cos(h_i x\omega)\right]$$

$$= -\frac{k''}{h} a^2\omega^2 \sum_1^s h_i^2 + \frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k} a^4\omega^4 \sum_1^s h_i^4 - \cdots$$

$$\text{X} = e^{-\frac{k''}{k} a^2\omega^2 \sum_1^s h_i^2} \cdot e^{\frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k} a^4\omega^2 \sum_1^s h_i^4}$$

$$= e^{-\frac{k''}{k} a^2\omega^2 \sum_1^s h_i^2}\left\{1 + \frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k^2} a^4\omega^4 \sum_1^s h_i^4 - \cdots\right\},$$

donc

$$\text{P}_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\omega \left\{e^{-l\omega\sqrt{-1} - \frac{k''}{k} a^2\omega^2 \sum_1^s h_i^2}\left(1 + \frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k^2} a^4\omega^4 \sum_1^s h_i^4 - \cdots\right)\right\};$$

faisons $t = \omega a\sqrt{s}$, il viendra :

$$\text{P}_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi a\sqrt{s}}^{\pi a\sqrt{s}} \frac{dt}{a\sqrt{s}}\left(1 + \frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k^2} \cdot \frac{\sum_1^s h_i^4}{s^2} t^4 + \cdots\right) e^{-\left[t^2 \frac{k''}{k}\frac{\sum_1^s h_i^2}{s} + \frac{lt\sqrt{-1}}{a\sqrt{s}}\right]}.$$

Or $\sum_1^s h_i^2$, $\sum_1^s h_i^4$, etc., sont évidemment de l'ordre s, donc $\frac{\sum_1^s h_i^2}{s^2}$ est

de l'ordre $\frac{1}{s}$, qu'on néglige, s étant très-grand. L'exposant étant très-petit aux limites $\pm\sqrt{s}$, on peut remplacer celles-ci par $\pm\infty$. Donc

$$\text{P}_l = \frac{1}{2\pi a\sqrt{s}}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\left[\frac{k''}{k}\frac{\sum_1^s h_i^2}{s} t^2 + \frac{l\sqrt{-1}}{a\sqrt{s}} t\right]}$$

$$= \frac{1}{2\pi a\sqrt{s}} e^{-\frac{kl^2}{4a^2k''\sum h_i^2}}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{k''}{k}\frac{\sum_1^s h_i^2}{s}\left[t + \frac{l\sqrt{-1}}{2a}\frac{k}{k''}\frac{\sqrt{s}}{\sum_1^s h_i^2}\right]^2}.$$

Posons

$$\frac{k''\sum_1^s h_i^2}{ks}\left(t + \frac{lk\sqrt{s}\sqrt{-1}}{2ak''\sum h_i^2}\right)^2 = v^2;$$

et nous trouverons :

$$\text{P}_l = \frac{1}{2\sqrt{\pi}.a\sqrt{\frac{k''}{k}\sum h_i^2}} e^{-\frac{kl^2}{4k''a^2\sum h_i^2}} dl,$$

pour la probabilité que la somme $\text{E} = \Sigma h_i \varepsilon_i$ a pour valeur l.

La plus grande valeur de P_l répond à $l = o$.

Problème II. Chercher la probabilité P que la valeur de E sera comprise entre $\pm l$.

Cette probabilité sera

$$\text{P} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{k''}{k}\sum_1^s h_i^2}}\int_{-l}^{l} e^{-\frac{kl^2}{4k''a^2\sum h_i^2}} dl$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{k''}{k}\sum h_i^2}}\int_0^l e^{-\frac{kl^2}{4k''a^2\sum h_i^2}} dl.$$

Soit $l = ar\sqrt{s}$, d'où

$$\text{P} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{\frac{k''}{k}\sum h_i^2}}\int_1^1 e^{-\frac{kr^2 s}{4k''\sum h_i^2}} dr \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

probabilité que E est compris entre $\pm ar\sqrt{s}$ ou $\pm l$.

Problème III. Chercher la probabilité P_u que la valeur de u dans

$$z = M + u = \frac{\sum_1^s h_i n_i}{\sum_1^s h_i a_i} + u,$$

est comprise entre $\pm u$.

Solution. La valeur de P de la formule (a) est la probabilité que

$$E \text{ ou } \sum_1^s h_i a_i z - \sum_1^s h_i n_i$$

est compris entre $\pm ar\sqrt{s}$; ou que

$$z - \frac{\Sigma h_i n_i}{\Sigma h_i a_i},$$

ou bien u, est compris entre

$$\pm \frac{ar\sqrt{s}}{\Sigma h_i a_i}.$$

Comme $E = u \sum_1^s h_i a_i = l = ar\sqrt{s}$, on a

$$u = \frac{ar\sqrt{s}}{\Sigma h_i a_i}, \quad r = \frac{u \sum_1^s h_i a_i}{a\sqrt{s}}.$$

Substituant cette valeur dans (a), alors P devient P_u, donc

$$P_u = \frac{\sum_1^s h_i a_i}{a\sqrt{\frac{k''}{k}\pi \Sigma h_i^2}} \int_0^u du\, e^{-\frac{k(\Sigma h_i a_i)^2}{4k'' a^2 \Sigma h_i^2} u^2},$$

probabilité que l'erreur de $z = M = \frac{\Sigma h_i n_i}{\Sigma h_i a_i}$ est entre $\pm u$.

Soit P'_u la probabilité que $z = M$ est fautif de u, on aura :

$$P'_u = \frac{\sum_1^s h_i a_i}{a\sqrt{\frac{k''}{k}\pi \Sigma h_i^2}} e^{-\frac{k(\Sigma h_i a_i)^2}{4k'' a^2 \Sigma h_i^2} u^2} du.$$

Cette probabilité est la plus grande possible quand $u = o$.

Soit

$$\frac{k(\Sigma h_i n_i)}{4k'' a^2 \Sigma h_i^2} = t^2, \quad u = \frac{2at\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i}$$

d'où $t = o$, quand $u = o$, et

$$P_u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t dt\, e^{-t^2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

probabilité que l'erreur de $z = \frac{\Sigma h_i n_i}{\Sigma h_i a_i}$ est comprise entre

$$\pm \frac{2ta\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i} = \pm u.$$

Donc :

1° Si t reste constant, et par suite P_u, l'intervalle $\pm u$ se resserre d'autant plus que

$$\frac{a\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i}$$

sera plus petit.

2° Si t augmente, et par suite P_u, il faut diminuer

$$\frac{a\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i}$$

proportionnellement, pour que l'intervalle $\pm u$ ne change pas. Ainsi cet intervalle restant le même, la probabilité P_u que u tombe dans cet intervalle est d'autant plus grande que le facteur

$$\frac{a\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i}$$

est plus petit.

Donc le système de facteurs h_i le plus avantageux sera celui pour lequel

$$a\sqrt{\frac{k''}{k}}\cdot\frac{\sqrt{\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i}$$

est un minimum.

Or en égalant à zéro la différentielle de ce facteur par rapport à h_i et supprimant le coefficient $a\sqrt{\frac{k''}{k}}$, on a :

$$h_i = \frac{\Sigma_1^s h_i^2}{\Sigma_1^s h_i a_i}\, a_i = \mu a_i\,,$$

μ étant le facteur $\frac{\Sigma_1^s h_i^2}{\Sigma_1^s h_i a_i}$ qui reste constant pour toutes les valeurs de $i = 1, 2, 3 \ldots s$.

A ce système de facteurs le plus avantageux correspond

$$z = \frac{\Sigma_1^s \mu a_i n_i}{\Sigma_1^s \mu a_i^2} = \frac{\Sigma_1^s a_i n_i}{\Sigma_1^s a_i^2} = m\,. \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

L'erreur de cette valeur de z sera

$$u = \frac{2at\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma_1^s \mu^2 a_i^2}}{\mu \Sigma_1^s a_i^2} = 2ta\sqrt{\frac{k''}{k}}\,\frac{1}{\sqrt{\Sigma_1^s a_i^2}}\,.$$

Le résultat (c) est le même que celui qu'on obtient par la méthode des moindres carrés, ou par le minimum de

$$\Sigma_1^s \varepsilon_i^2 = \Sigma_1^s (a_i z - n_i)^2,$$

car en égalant à zéro la différentielle par rapport à z, on obtient

$$\Sigma_1^s a_i (a_i z - n_i) = 0$$

$$z\Sigma_1^s a_i^2 - \Sigma_1^s a_i n_i = 0,$$

$$z = \frac{\Sigma_1^s a_i n_i}{\Sigma_1^s a_i^2}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Reprenons la formule (b). Comme on a (pp. 368 et 360) :

$$\varepsilon_i' = (a_i m - n_i)\,, \quad 2sa^2\frac{k''}{k} = \Sigma_1^s \varepsilon_i'^2, \quad a\sqrt{\frac{k''}{k}} = \frac{1}{\sqrt{2s}}\sqrt{\Sigma_1^s \varepsilon_i'^2},$$

cette formule (b)

$$P_u = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt\,,$$

exprimera la probabilité que

$$z = m \pm \frac{2ta\sqrt{\frac{k''}{k}}}{\sqrt{\Sigma_1^s a_i^2}}$$

$$= m \pm 2t\sqrt{\frac{2\Sigma_1^s \varepsilon_i'^2}{4s\Sigma_1^s a_i^2}} = m \pm \frac{t}{\sqrt{s\Sigma a_i^2}}\sqrt{2\Sigma \varepsilon_i'^2}.$$

Si $f(\xi) = \xi = z$, on a :

$$A = 0, \quad a_i = 1,$$

$$\varepsilon_i' = a_i m - n_i = m - \omega_i$$

$$\Sigma_1^s a_i^2 = s,$$

alors

$$P_u = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t dt e^{-t^2}$$

est la probabilité que

$$\xi = z = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_s}{s} \pm \frac{t}{s}\sqrt{2\Sigma_1^s (m - \omega_i)^2}$$

ce qui est connu.

Remarque I. L'expression $\Sigma_1^s \varepsilon_i'^2 = \Sigma_1^s [a_i m - n_i]^2$ peut se mettre sous une autre forme :

$$\Sigma_1^s \varepsilon_i'^2 = \Sigma_1^s [a_i m - n_i]^2 = \Sigma_1^s \left[a_i\left(\frac{\Sigma_1^s a_i n_i}{\Sigma_1^s a_i^2}\right) - n_i\right]^2 = \Sigma_1^s \left\{\frac{a_i \Sigma_1^s a_i n_i - n_i \Sigma_1^s a_i^2}{\Sigma_1^s a_i^2}\right\}^2.$$

En développant le carré on a

$$\Sigma_1^s \varepsilon_i'^2 = \frac{\Sigma_1^s a_i^2 \cdot \Sigma_1^s n_i^2 - (\Sigma_1^s a_i^2 n_i)^2}{(\Sigma_1^s a_i^2)^2}.$$

Donc

$$P_u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2}\, dt$$

est la probabilité que

$$z = m \pm \frac{t}{s} \sqrt{\left\{ \frac{\sum_1^s \alpha_i^2 . \sum_1^s n_i^2 - \left(\sum_1^s \alpha_i^2 n_i \right)^2}{\left(\sum_1^s \alpha_i^2 \right)^2} \right\}}.$$

Remarque II. Le plus grand terme de la somme P_u répond à $u = 0$, ou à $t = 0$; mais alors $z = m$; donc la valeur la plus probable de z est m.

II.

THÉORIE DES ERREURS D'APRÈS BIENAYMÉ (*).

1. Fonction d'une seule inconnue, cette fonction étant donnée par un très-grand nombre d'observations.

Soit ξ l'inconnue, $f(\xi)$ la fonction donnée par les n observations 0_1, 0_2 ... 0_n, n étant très-grand.

On connaît ξ à peu près; soit A cette valeur approchée, et x sa correction très-petite.

Soient ε_1, ε_2 ... ε_n les erreurs inconnues des observations.

En négligeant les puissances supérieures de x, on aura exactement

$$0_h + \varepsilon_h = f(A + x) = a_h x + \alpha_h;$$

chaque observation donne une équation semblable.

Soit

$$0_h - \alpha_h = n_h, \quad \varepsilon_h + n_h = \omega_h;$$

on aura

$$\omega_h = a_h x. \qquad (1)$$

Multiplions les n équations (1) par les facteurs indéterminés k_h; nous aurons, en faisant la somme :

$$S\omega_h k_h = x S a_h k_h.$$

Si nous posons

$$S a_h k_h = 1,$$

nous aurons

$$x = S\omega_h k_h = S(\varepsilon_h + n_h)\, k_h = S\varepsilon_h k_h + S n_h k_h.$$

(*) *Journal de Liouville*, t. XVII, février 1852.

En faisant $x' = \mathrm{S}n_h k_h$ on commet une erreur

$$r = \mathrm{S}\varepsilon_h k_h .$$

C'est aussi l'erreur dont est affecté le résultat

$$x = \mathrm{S}\omega_h k_h .$$

Si l'on ne prend pas $\mathrm{S}a_h k_h$ pour unité, on a :

$$x_1 = \frac{\mathrm{S}\omega_h k_h}{\mathrm{S}a_h k_h} = \frac{x}{\mathrm{S}a_h k_h},$$

$$x'_1 = \frac{\mathrm{S}n_h k_h}{\mathrm{S}a_h k_h} = \frac{x'}{\mathrm{S}a_h k_h},$$

et ce résultat est affecté de l'erreur

$$r_1 = \frac{\mathrm{S}a_h k_h}{\mathrm{S}\varepsilon_h k_h}.$$

Si l'on fait $k_h = a_h$, les facteurs k seront, comme nous le verrons, les plus avantageux, c'est-à-dire ceux que fournit la méthode des moindres carrés. On a alors

$$x_2 = \frac{\mathrm{S}\omega_h a_h}{\mathrm{S}a_h^2},$$

$$x'_2 = \frac{\mathrm{S}n_h a_h}{\mathrm{S}a_h^2},$$

$$r_2 = \frac{\mathrm{S}\varepsilon_h a_h}{\mathrm{S}a_h^2}.$$

Problème I. *Chercher la probabilité de l'erreur* r.

En prenant les intégrales entre les limites jusqu'auxquelles les erreurs peuvent s'étendre, et en désignant par $\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$ la probabilité d'une erreur ε, puis en posant

$$\mathrm{P} = \int \varphi\varepsilon_1 d\varepsilon_1 e^{\varepsilon_1 k_1 \alpha\sqrt{-1}} . \int \varphi\varepsilon_2 d\varepsilon_2 e^{\varepsilon_2 k_2 \alpha\sqrt{-1}} \ldots\ldots \int \varphi\varepsilon_h d\varepsilon_h e^{\varepsilon_h k_h \alpha\sqrt{-1}} \ldots\ldots$$
$$\int \varphi\varepsilon_n d\varepsilon_n e^{\varepsilon_n k_n \alpha\sqrt{-1}} = \Sigma \mathrm{R} e^{r\alpha\sqrt{-1}},$$

il est clair que R sera la probabilité de r.

Mais en posant $\mathrm{R} = \Psi r dr$, et changeant en conséquence le signe Σ en $\int$, on aura :

$$\mathrm{P} = \int \Psi r dr e^{r\alpha\sqrt{-1}},$$

les limites de l'intégrale étant sous-entendues.

Multipliant par $d\alpha e^{-r\alpha\sqrt{-1}}$, et intégrant entre $\pm\infty$, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P} d\alpha e^{-r\alpha\sqrt{-1}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{-r\alpha\sqrt{-1}} \int \Psi r dr e^{r\alpha\sqrt{-1}} = 2\pi\Psi r;$$

d'où

$$\Psi r = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{-r\alpha\sqrt{-1}}\, \mathrm{P}.$$

Si nous omettons les indices de ε, qui ne sont là que pour plus de clarté, nous pourrons écrire

$$\Psi r = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{-r\alpha\sqrt{-1}} \prod_1^n{}_h \left\{ \int \varphi\varepsilon d\varepsilon e^{\varepsilon\alpha k_h\sqrt{-1}} \right\}.$$

Or

$$\int \varphi\varepsilon d\varepsilon e^{\varepsilon k_h \alpha\sqrt{-1}} = \int \varphi\varepsilon d\varepsilon \left[1 + \alpha k_h \varepsilon\sqrt{-1} - \frac{\alpha^2 k_h^2}{2}\varepsilon^2 - \frac{\alpha^3 k_h^3}{6}\varepsilon^3\sqrt{-1} + \frac{\alpha^4 k_h^4}{24}\varepsilon^4 + \cdots \right]$$
$$= 1 + \mu_1 \alpha k_h\sqrt{-1} - \frac{\mu_2}{2}\alpha^2 k_h^2 - \frac{\mu_2}{6}\alpha^3 k_h^3\sqrt{-1} + \frac{\mu_4 \alpha^4 k_h^4}{24} + \cdots$$
$$= 1 + z = e^\nu;$$

on a posé

$$\mu_\beta = \int \varepsilon^\beta \varphi\varepsilon d\varepsilon$$

$$\nu = l.(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

$$= \mu_1 \alpha k_h\sqrt{-1} - \alpha^2 k_h^2 \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} - \frac{\alpha^3 k_h^3}{6}\sqrt{-1}\,(\mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3)$$
$$+ \frac{\alpha^4 k_h^4}{24}(\mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4) + \cdots$$
$$= \mu_1 \alpha k_h\sqrt{-1} - \alpha^2 k_h^2 \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} - \mathrm{M}_3 \frac{\alpha^3 k_h^3}{6}\sqrt{-1} + \mathrm{M}_4 \frac{\alpha^4 k_h^4}{24} + \cdots$$

On aura par suite

$$\int \varphi\varepsilon d\varepsilon\, e^{\alpha\varepsilon k_h\sqrt{-1}} = e^{\mu_1\alpha k_h\sqrt{-1}-\alpha^2k_h^2\frac{\mu_2-\mu_1^2}{2}-\mathrm{M}_3\frac{\alpha^3k_h^3}{6}\sqrt{-1}+\mathrm{M}_4\frac{\alpha^4k_h^4}{24}+\cdots}$$

d'où

$$\prod_1^n{}_h\int \varphi\varepsilon d\varepsilon\, e^{\alpha\varepsilon k_h\sqrt{-1}} = e^{\mu_1\alpha\mathrm{S}k_h\sqrt{-1}-\frac{\mu_2-\mu_1^2}{2}\alpha^2\mathrm{S}k_h^2-\mathrm{M}_3\frac{\alpha^3}{6}\sqrt{-1}\mathrm{S}k_h^3+\mathrm{M}_4\frac{\alpha^4}{24}\mathrm{S}k_h^4+\cdots}$$

et

$$\Psi r = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-r\alpha\sqrt{-1}}\, e^{\mu_1\alpha\mathrm{S}k_h\sqrt{-1}-\frac{\mu_1-\mu_1^2}{2}\alpha^2\mathrm{S}k_h^2-\mathrm{M}_3\frac{\alpha^3}{6}\sqrt{-1}\mathrm{S}k_h^3+\mathrm{M}_4\frac{\alpha^4}{24}\mathrm{S}k_h^4+\cdots}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-(r-\mu_1\mathrm{S}k_h)\alpha\sqrt{-1}-\frac{\mu_2-\mu_1^2}{z}\alpha^2\mathrm{S}k_h^2}$$

$$\times\left(1-\frac{\mathrm{M}_3\sqrt{-1}}{6}\alpha^3\,\mathrm{S}k_h^3+\frac{\mathrm{M}_4}{24}\alpha^4\,\mathrm{S}k_h^4\right),$$

en s'arrêtant aux termes en α^4.

Soit

$$r-\mu_1\mathrm{S}k_h = \rho\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)},\quad dr = d\rho\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)},$$

$$\alpha = \frac{z}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1^2)}},\quad d\alpha = \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1^2)}},$$

nous aurons

$$\Psi r = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1^2)}}\, e^{-2\rho z\sqrt{-1}-z^2\mathrm{S}k_h^2}\,.\,\mathrm{Q},$$

en faisant

$$\mathrm{Q} = 1-\frac{1}{6}\sqrt{-1}\,.\,\frac{\mathrm{M}_3\mathrm{S}k_h^3\,.\,z^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1^2)}\right)^3}+\frac{1}{24}\,\frac{\mathrm{M}_4\mathrm{S}k_h^4\,.\,z^4}{\frac{1}{4}(\mu_2-\mu_1^2)^2}$$

$$= 1-\frac{1}{6}\sqrt{-1}\,\mathrm{N}_3z^3+\frac{1}{24}\mathrm{N}_4z^4.$$

Problème II. *Chercher la probabilité* p *que* r *est compris entre deux limites.*

En prenant l'intégrale entre ces limites, on aura :

$$p = \int \Psi r dr$$

$$= \frac{1}{\pi}\int d\rho\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-2\rho z\sqrt{-1}-z^2\mathrm{S}k_h^2}\left(1-\frac{1}{6}\sqrt{-1}\,\mathrm{N}_3z^3+\frac{1}{24}\mathrm{N}_4z^4\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int d\rho\, e^{-\frac{\rho^2}{\mathrm{S}k_h^2}}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-\mathrm{S}k_h^2\left(z+\frac{\rho\sqrt{-1}}{\mathrm{S}k_h^2}\right)^2}\,.\left(1-\frac{1}{6}\sqrt{-1}\,\mathrm{N}_3z^3+\frac{1}{24}\mathrm{N}_4z_4\right).$$

Soit

$$\rho = t\sqrt{\mathrm{S}k_h^2},\quad \beta^2 = \mathrm{S}k_h^2\left(z+\frac{\rho\sqrt{-1}}{\mathrm{S}k_h^2}\right),\quad \beta = z\sqrt{\mathrm{S}k_h^2}+t\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{L}_1 = \frac{3\mathrm{N}_3}{(\sqrt{\mathrm{S}k_h^2})^3},\quad \mathrm{L}_2 = \frac{\mathrm{N}_3}{(\sqrt{\mathrm{S}k_h^2})^3},$$

$$\mathrm{G}_1 = \frac{\mathrm{N}_4}{(\sqrt{\mathrm{S}k_h^2})^4},\quad \mathrm{G}_2 = \frac{6\mathrm{N}_4}{(\sqrt{\mathrm{S}k_h^2})^4}.$$

Comme la dernière intégrale est prise entre les limites $\pm\infty$, les puissances impaires de β disparaîtront, et l'on aura :

$$p = \frac{1}{\pi}\int dt\, e^{-t^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2}d\beta\left\{1-\frac{1}{6}(\mathrm{L}_1\beta^2t+\mathrm{L}_2t^3)+\frac{1}{24}(\mathrm{G}_1\beta^4-\mathrm{G}_2\beta^2t^2+\mathrm{G}_1t^4)\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int dt\, e^{-t^2}\left\{\sqrt{\pi}-\frac{1}{6}\left(\mathrm{L}_1t\int_{-\infty}^{\infty}\beta^2e^{-\beta^2}d\beta+\mathrm{L}_2t^3\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}d\beta\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{24}\left(\mathrm{G}_1\int_{-\infty}^{\infty}\beta^4e^{-\beta^2}d\beta-\mathrm{G}_2t^2\int_{-\infty}^{\infty}\beta^2e^{-\beta^2}d\beta+\mathrm{G}_1t^4\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}d\beta\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dt\, e^{-t^2}\left\{1-\frac{1}{6}\left(\mathrm{L}_1\frac{t}{2}+\mathrm{L}_2t^3\right)+\frac{1}{24}\left(\mathrm{G}_1\frac{1\,.\,3}{2^2}-\mathrm{G}_2\frac{t^2}{2}+\mathrm{G}_1t^4\right)\right\},$$

puisque

$$\int_{-\infty}^{\infty}\beta^{2i}e^{-\beta^2}d\beta = \frac{1\,.\,2\,...\,(2i-1)}{2^i}\sqrt{\pi}.$$

Prenons t entre les limites $\pm\gamma$; les puissances impaires de t disparaîtront; nous aurons donc :

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma dt\,e^{-t^2}\left\{1-\frac{1}{24}\left(\frac{1\,.\,3}{2^2}\,G_1-\frac{1}{2}\,G_2t^2+G_3t^4\right)\right\},$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma dt\,e^{-t^2}\left\{1-\frac{1}{24}\,\frac{M_4}{\frac{1}{4}(\mu_2-\mu_1^2)^2}\,\frac{Sk_h^4}{(Sk_h^2)^2}\left(\frac{1\,.\,3}{2^2}-3t^2+t^4\right)\right\}.$$

Or, Sk_h^4 étant de l'ordre n, $(Sk_h^2)^2$ de l'ordre n^2, $\frac{Sk_h^4}{(Sk_h^2)^2}$ est de l'ordre $\frac{1}{n}$, qu'on néglige; donc enfin

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma dt\,e^{-t^2}:$$

probabilité que

$$-\gamma<t<\gamma,$$

ou bien que

$$-\gamma<\frac{\rho}{\sqrt{Sk_h^2}}<\gamma,$$

$$-\gamma\sqrt{Sk_h^2}<\rho<\sqrt{Sk_h^2},$$

$$-\gamma\sqrt{Sk_h^2}<\frac{r-\mu_1Sk_h}{\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}}<\gamma\sqrt{Sk_h^2},$$

ou enfin que

$$\mu_1Sk_h-\gamma\sqrt{Sk_h^2}\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}<r<\mu_1Sk_h+\gamma\sqrt{Sk_h^2}\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}.$$

Remarque I. 1° Si γ, et par suite p, est constant, les limites de r seront les plus étroites possibles lorsque Sk_h^2 sera minimum, donc lorsque $k_h=a_h$, comme nous le verrons dans la remarque suivante.

2° Comme $\gamma=\frac{\rho}{\sqrt{Sk_h^2}}$, γ sera maximum, donc p le plus grand possible, lorsque Sk_h^2 sera minimum, ou lorsque $k_h=a_h$.

Donc un système de limites étant choisi, la probabilité que l'erreur ne sort pas de ces limites sera la plus grande possible quand x sera déterminé par la méthode des moindres carrés.

Remarque II. Démontrons que $Sk_h^2=\text{min.}$ répond à $k_h=a_h$; c'est-à-dire aux facteurs donnés par la méthode des moindres carrés.

En effet, ayant posé $Sa_hk_h=1$, on a aussi

$$Sa_h^2=1,$$

donc

$$Sa_hk_h=Sa_h^2;$$

et par suite, on a identiquement :

$$Sk_h^2-2Sa_hk_h=Sk_h^2-2Sa_h^2;$$

ou

$$Sk_h^2-2Sa_hk_h+Sa_h^2=Sk_h^2-Sa_h^2;$$

ou bien

$$S(k_h-a_h)^2=Sk_h^2-Sa_h^2;$$

d'où

$$Sk_h^2=Sa_h^2+S(k_h-a_h)^2;$$

d'où résulte la proposition à démontrer.

Remarque III. Le système le plus avantageux des facteurs k étant donc celui dans lequel $k_h=a_h$, on aura, pour ce système :

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2}dt:$$

probabilité que

$$\mu_1Sa_h-\gamma\sqrt{Sa_h^2}\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}<r<\mu_1Sa_h+\gamma\sqrt{Sa_h^2}\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)};$$

r est alors l'erreur commise en prenant pour x la valeur $S\omega_ha_h$, ou Sn_ha_h.

Mais comme on a pris $Sa_hk_h=1$, donc $Sa_h^2=1$, il est clair que p est aussi la probabilité que

$$\mu_1\frac{Sa_h}{Sa_h^2}-\gamma\frac{1}{\sqrt{Sa_h^2}}\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}<r<\mu_1\frac{Sa_h}{Sa_h^2}+\gamma\frac{1}{\sqrt{Sa_h^2}}\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)};$$

r est alors l'erreur commise en prenant

$$x=\frac{S\omega_ha_h}{Sa_h^2}\quad\text{ou}\quad x=\frac{Sn_ha_h}{Sa_h^2}.$$

Remarque IV. Lorsque $\mu_1 = \int \varepsilon\varphi\varepsilon d\varepsilon$ est nul, il n'y a pas d'erreurs constantes, et $\varphi(-\varepsilon)$ est égal à $\varphi(\varepsilon)$; alors

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$$

est la probabilité que

$$-\frac{\gamma}{\sqrt{Sa_h^2}}\sqrt{2\mu_2} < r < \frac{\gamma}{\sqrt{Sa_h^2}}\sqrt{2\mu_2}.$$

Mais on a

$$\mu_2 = \frac{S\varepsilon'^2_h}{n};$$

donc p est la probabilité que

$$-\frac{\gamma}{\sqrt{nSa_h^1}}\sqrt{2S\varepsilon'^2} < r < \frac{\gamma}{\sqrt{nSa_h^2}}\sqrt{2S\varepsilon'^2},$$

les valeurs de ε' étant données par

$$\varepsilon'_h = a_h \frac{Sn_h \cdot a_h}{Sa_h^2} - n_h = a_h \cdot m - n_h,$$

en posant

$$m = \frac{Sn_h \cdot a_h}{Sa_h}.$$

Remarque V. Si $f(\xi) = \xi$, on a :

$$a_h = 1; \quad n_h = o_h - \alpha_h = o_h,$$

puisque alors α_h est nul; et $Sa_h^2 = n$; donc

$$m = \frac{So_h}{n}, \quad \varepsilon'_h = \frac{So_h}{n} - o_h;$$

et alors p est la probabilité que

$$-\frac{\gamma}{n}\sqrt{2S\left(\frac{So_h}{n} - o_h\right)^2} < r < \frac{\gamma}{n}\sqrt{2S\left(\frac{So_h}{n} - o_h\right)^2};$$

r est alors l'erreur commise en prenant pour ξ la moyenne arithmétique $\frac{So_h}{n}$.

2. Fonction de plusieurs inconnues.

Une fonction $f(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_i \dots \xi_m)$ des m inconnues ξ_i est donnée par n observations $o_1, o_2, \dots o_h \dots o_n$, dont les erreurs sont:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_h \dots \varepsilon_n.$$

On connaît les valeurs approchées $A_1 \dots A_i \dots A$ des inconnues; désignons par $x_1 \dots x_i \dots x_m$ leurs corrections très-petites.

On aura n équations de la forme

$$\begin{aligned} o_h + \varepsilon_h &= f(A_1 + x_1, A_2 + x_2, \dots A_i + x_i, \dots A_m + x_m) \\ &= \alpha_h + a_{1,h} x_1 + a_{2,h} x_2 + \cdots + a_{i,h} x_i + \cdots + a_{m,h} x_m \end{aligned}$$

en négligeant les puissances supérieures des x_i.

Soit

$$o_h - \alpha_h = n_h, \quad \text{et} \quad \varepsilon_h + n_h = \omega_h,$$

l'équation précédente s'écrira :

$$\omega_h = a_{1,h} x_1 + a_{2,h} x_2 + \cdots + a_{i,h} x_i + \cdots + a_{m,h} x_m. \quad (1)$$

On aura n équations linéaires de cette forme en donnant à h les valeurs successives $1, 2 \dots n$.

Résolution des équations (1).

Si les quantités ω_h ou ε_h étaient connues, il suffirait de prendre m équations distinctes parmi les n équations (1). Mais il vaut mieux les faire servir toutes; car n étant très-grand, on peut espérer que les erreurs se balanceront.

1° Pour obtenir x_1, on multiplie les équations (1) par $k_{1,h}$ et l'on fait la somme, ce qui donne :

$$S\omega_h k_{1,h} = x_1 Sa_{1,h}k_{1,h} + x_2 Sa_{2,h}k_{1,h} + \cdots + x_m Sa_{m,h}k_{1,h};$$

puis on pose

$$\left.\begin{aligned} Sa_{1,h}\, k_{1,h} &= 1 \\ Sa_{2,h}\, k_{2,h} &= 0 \\ &\dots\dots \\ Sa_{m,h} k_{m,h} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

d'où

$$x_1 = \mathrm{S}\omega_h k_{1,h}.$$

2° Pour obtenir x_2, on multiplie les équations (1) par $k_{2,h}$, et l'on fait la somme, ce qui donne

$$\mathrm{S}\omega_h k_{2,h} = x_1 \mathrm{S}a_{1,h} k_{2,h} + x_2 \mathrm{S}a_{2,h} k_{2,h} + \cdots + x_m \mathrm{S}a_{m,h} k_{2,h}\,;$$

puis on pose

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{S}a_{2,h}\, k_{2,h} = 1 \\ \mathrm{S}a_{1,h}\, k_{2,h} = 0 \\ \mathrm{S}a_{3,h}\, k_{2,h} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathrm{S}a_{m,h}\, k_{2,h} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

d'où

$$x_2 = \mathrm{S}\omega_h k_{2,h}\,, \text{ etc.}$$

On a donc en général

$$x_i = \mathrm{S}a_h k_{i,h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

en posant

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{S}a_{i,h}\ \ k_{i,h} = 1 \\ \mathrm{S}a_{1,h}\ \ k_{i,h} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathrm{S}a_{i-1,h} k_{i,h} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathrm{S}a_{m,h}\ k_{i,h} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Les valeurs des m inconnues sont donc fournies par les m équations (a) dans lesquelles i prend les valeurs successives $1 \ldots . m$; chacune de ces équations renferme n facteurs $k_{i,h}$, h étant successivement égal à $1 \ldots . n$. Ces facteurs sont déterminés par m systèmes d'équations (γ), systèmes qui renferment chacun m équations.

On a donc m^2 équations pour déterminer les $m \,.\, n$ facteurs $k_{i,h}$; par suite il y aura $mn - m^2 = m\,(n - m)$ facteurs indépendants, ou bien il resterà $m - n$ facteurs indépendants dans chaque système d'équations (γ). C'est de ces facteurs restés arbitraires qu'on disposera pour rendre les valeurs des inconnues les plus exactes possibles.

A cet effet il faudra calculer la probabilité des erreurs r_i des x_i, et déterminer les facteurs k par la condition que ces erreurs soient renfermées dans les limites les plus étroites possibles.

Cherchons d'abord l'expression de r_i.

On a

$$\begin{aligned} x_i &= \mathrm{S}\omega_h k_{i,h} \\ &= \mathrm{S}(\varepsilon_h + n_h)\, k_{i,h} \\ &= \mathrm{S}\varepsilon_h k_{i,h} + \mathrm{S}n_h\, k_{i,h}\,; \end{aligned}$$

x_i est donc affecté de l'erreur

$$r_i = \mathrm{S}\varepsilon_h k_{i,h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Les déterminations précédentes de x_1, $x_2 \ldots x_m$ sont donc affectées des erreurs respectives

$$\begin{aligned} r_1 &= \mathrm{S}\varepsilon_h k_{1,h} \\ r_2 &= \mathrm{S}\varepsilon_h k_{2,h} \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r_m &= \mathrm{S}\varepsilon_h k_{m,h} \end{aligned}$$

1. *Calcul de* $\quad \mathrm{Q} = \Psi\,(r_1, r_2 \ldots r_m)\, dr_1 dr_2 \ldots dr_m.$

Q est la probabilité que les erreurs r_1, $r_2 \ldots r_m$ ont lieu en même temps.

Cette probabilité serait comme si l'on connaissait la fonction Ψ.

a) *Détermination de* Ψ.

Soit $\varphi\,(\varepsilon)\, d\varepsilon$ la probabilité d'une erreur ε.

On peut poser

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= \int \varphi\varepsilon_1 d\varepsilon_1 \nu_1^{\varepsilon_1 k_{1,1}}\, \nu_2^{\varepsilon_2 k_{2,1}} \ldots \nu_m^{\varepsilon_1 k_{m,1}} \times \int \varphi\varepsilon_2 d\varepsilon_2 \nu_1^{\varepsilon_2 k_{2,2}}\, \nu_2^{\varepsilon_2 k_{2,2}} \ldots \nu_m^{\varepsilon_2 k_{m,2}} \times \cdots \\ &\quad \times \int \varphi\varepsilon_h d\varepsilon_h \nu_1^{\varepsilon_h k_{1,h}}\, \nu_2^{\varepsilon_h k_{2,h}} \ldots \nu_m^{\varepsilon_h k_{m,h}} \times \cdots \times \int \varphi\varepsilon_n dr_n \nu_1^{\varepsilon_n k_{1,n}}\, \nu_2^{\varepsilon_n k_{2,n}} \ldots \nu_m^{\varepsilon_n k_{m,n}} \\ &= \Sigma\, \mathrm{Q}\, \nu_1^{r_1} \nu_2^{r_2} \ldots \nu_m^{r_m} \\ &= {}_m\!\int \Psi\,(r_1, r_2 \ldots r_m)\, \nu_1^{r_1} \nu_2^{r_2} \ldots \nu_m^{r_m} dr_1 \,.\, dr_2 \ldots dr_m. \end{aligned}$$

Soit

$$\nu_1 = e^{\alpha_1 \sqrt{-1}}, \quad \nu_2 = e^{\alpha_2 \sqrt{-1}}, \ldots \nu_m = e^{\alpha_m \sqrt{-1}}\,;$$

on aura

$$X = \prod_{1}^{n}{}_h \left\{ \int \varphi\varepsilon_h d\varepsilon_h e^{\varepsilon_h(\alpha_1 k_{1,h} + \alpha_2 k_{2,h} + \cdots + \alpha_m k_{m,h})\sqrt{-1}} \right\}$$
$$= {}_m\!\int \Psi(r_1, r_2 \ldots r_m)\, e^{(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_m\alpha_m)\sqrt{-1}} dr_1 \,.\, dr_2 \ldots dr_m \,.$$

Multiplions les deux membres par

$$d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_m e^{-(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_m\alpha_m)\sqrt{-1}},$$

puis intégrons m fois de suite les limites $\pm\,\infty$, nous aurons (*) :

$$\Psi(r_1, r_2 \ldots r_m) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m {}_m\!\int_{-\infty}^{\infty} X d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_m e^{-(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_m\alpha_m)\sqrt{-1}}.$$

b) *Détermination de* X.

On a

$$X = \prod_{1}^{n}{}_h \left\{ \int \varphi\varepsilon_h d\varepsilon_h e^{\varepsilon_h\sqrt{-1}\sum_{1}^{m}{}_i(\alpha_i k_{i,h})} \right\}.$$

Faisons, pour abréger,

$$\sum_{1}^{m}{}_i(\alpha_i k_{i,h}) = S_h ;$$

supprimons les indices des ε, que nous n'avons employés que pour plus de clarté, et posons

$$p_h = \int d\varepsilon\varphi\varepsilon\, e^{\varepsilon_h\sqrt{-1}\,S_h},$$

nous aurons

$$X = \prod_{1}^{n}{}_h p_h = p_1 \,.\, p_2 \ldots p_h \ldots p_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(C)}$$

En développant l'exponentielle dans la valeur de p_h, on obtient :

$$p_h = \int d\varepsilon\varphi\varepsilon \left\{ 1 + \varepsilon S_h\sqrt{-1} - \frac{\varepsilon^2 S_h^2}{2} - \frac{\varepsilon^3 S_h^3\sqrt{-1}}{6} + \frac{\varepsilon^4 S_h^4}{24} + \cdots \right\};$$

(*) Voir *Intégrales définies* de A. Meyer, p. 262, formule 121.

et si l'on pose

$$\mu_\beta = \int \varepsilon^\beta \varphi\varepsilon d\varepsilon, \quad \text{donc} \quad \mu_1 = \int \varepsilon\varphi\varepsilon d\varepsilon, \quad \mu_2 = \int \varepsilon^2\varphi\varepsilon d\varepsilon, \text{ etc.},$$

on aura à cause de $\int \varphi\varepsilon d\varepsilon = 1$:

$$p_h = 1 + \mu_1 S_h\sqrt{-1} - \frac{\mu_2 S_h^2}{2} - \frac{\mu_3 S_h^3}{6}\sqrt{-1} + \frac{\mu_4 S_h^4}{24} + \cdots = e^{\nu_h}$$

en faisant

$$\nu_h = l\left(1 + \mu_1 S_h\sqrt{-1} - \frac{\mu_2 S_h^2}{2} - \frac{\mu_3 S_h^3}{6}\sqrt{-1} + \frac{\mu_4 S_h^4}{24} + \cdots\right).$$
$$= \mu_1 S_h\sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} S_h^2 - \frac{M_3\sqrt{-1}}{6} S_h^3 + \frac{M_4}{24} S_h^4 + \cdots$$

expression dans laquelle

$$M_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 3\mu_1^3,$$
$$M_4 = \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 + 3\mu_2^2 + 12\mu_3\mu_1^2 - 6\mu_1^4.$$

Par suite on aura

$$p_h = e^{\mu_1 S_h\sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} S_h^2 - \frac{M_3\sqrt{-1}}{6} S_h^3 + \frac{M_4}{24} S_h^4 + \cdots} = e^{\nu_h};$$

et

$$X = \prod_{1}^{n}{}_h e^{\nu_h} = e^{S\nu_h}$$
$$= e^{\mu_1\{S(S_h)\}\sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}\{S(S_h^2)\} - \frac{M_3\sqrt{-1}}{6}\{S(S_h^3)\} + \frac{M_4}{24}\{S(S_h^4)\}}.$$

Soit

$$T_1 = \mu_1 S(S_h)$$
$$= \mu_1 S(S\alpha_i k_{i,h})$$
$$= \mu_1 S(\alpha_1 k_{1,h} + \alpha_2 k_{2,h} + \cdots + \alpha_m k_{m,h})$$
$$= \mu_1(\alpha_1 S k_{1,h} + \alpha_2 S k_{2,h} + \cdots + \alpha_m S k_{m,h})$$
$$= \mu_1 \sum_{1}^{m}{}_i(\alpha_i S k_{i,h}).$$

$$T_2 = (\mu_2 - \mu_1^2)\{S(S_h^2)\},$$
$$T_3 = M_3 S(S_h^3),$$
$$T_4 = M_4 S(S_h^4);$$

la valeur de X deviendra

$$\mathrm{X} = e^{\mathrm{T}_1\sqrt{-1} - \frac{\mathrm{T}_2}{2} - \frac{\mathrm{T}_3\sqrt{-1}}{6} + \frac{\mathrm{T}_4}{24} + \cdots}$$

$$= e^{\mathrm{T}_1\sqrt{-1} - \frac{\mathrm{T}_2}{2}}\left(1 - \frac{\mathrm{T}_3\sqrt{-1}}{6} + \frac{\mathrm{T}_4}{24} + \cdots - \frac{\mathrm{T}_3^2}{72} + \cdots\right)$$

$$= e^{\mu_1\sqrt{-1}(\alpha_1 \mathrm{S}k_{1,h} + \alpha_2 \mathrm{S}k_{2,h} + \cdots + \alpha_m \mathrm{S}k_{m,h}) - \frac{\mathrm{T}_2}{2}}\left(1 - \frac{\mathrm{T}_3\sqrt{-1}}{6} + \cdots\right),$$

en s'arrêtant aux termes du 4^me degré en α_i.

On a donc

$$\Psi(r_1, r_2 \ldots r_m) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m {}_m\!\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m e^{-(r_1\alpha_1 + \cdots + r_m\alpha_m)\sqrt{-1}} . \mathrm{X}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m {}_m\!\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m e^{-(r_1\alpha_1 + \cdots + r_m\alpha_m)\sqrt{-1}}$$

$$e^{\mu_1\sqrt{-1}\left\{\alpha_1 \mathrm{S}k_{1,h} + \cdots + \alpha_m \mathrm{S}k_{m,h}\right\} - \frac{1}{2}\mathrm{T}_2} \times \left(1 - \frac{\mathrm{T}_3}{6}\sqrt{-1} + \cdots\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m {}_m\!\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m e^{-\sqrt{-1}\sum_1^m \alpha_i\left(r_i - \mu_1 \mathrm{S}_1^n{}_h k_{i,h}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{T}_2}\left(1 - \frac{\sqrt{-1}}{6}\mathrm{T}_3 + \cdots\right).$$

2. *Détermination de la probabilité* P *que les erreurs* $\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2 \ldots \mathrm{r}_m$ *sont comprises entre deux limites.*

Cette probabilité sera exprimée, en sous-entendant les limites des intégrales, par :

$$\mathrm{P} = {}_m\!\int \Psi(r_1, r_2 \ldots r_m)\, dr_1 dr_2 \ldots dr_m$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m {}_m\!\int dr_1 \ldots dr_m \, {}_m\!\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m e^{-\sqrt{-1}\sum_1^m \alpha_i\left(r_i - \mu_1 \mathrm{S}_1^n{}_h k_{i,h}\right) - \frac{\mathrm{T}_2}{2}} \times \left(1 - \frac{\mathrm{T}_3}{6}\sqrt{-1} + \cdots\right).$$

A la place des variables r_i, α_i introduisons les nouvelles variables ρ_i, z_i, données par les équations

$$r_i - \mu_1 \mathrm{S}_1^n{}_h k_{i,h} = \rho_i \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d)$$

$$dr_i = d\rho_i \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}$$

$$\alpha_i = \frac{z_i}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}}, \qquad d\alpha_i = \frac{dz_i}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}},$$

$\frac{\mathrm{T}_2}{2}$, T_3, etc., deviendront des fonctions de z_i que nous désignerons par z_2, z_3, etc.; et nous aurons

$$\mathrm{P} = \frac{1}{\pi^m}\int d\rho_1 d\rho_2 \ldots d\mathrm{S}_m \int_{-\infty}^{\infty} dr_1 dr_2 \ldots dr_m e^{-2\sqrt{-1}\,\Sigma\rho_i z_i - \mathrm{Z}_2}\left(1 - \frac{\sqrt{-1}}{6}\mathrm{Z}_3 + \cdots\right).$$

Séparation des variables.

On a

$$\frac{\mathrm{T}_2}{2} = \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}\left\{\mathrm{S}(\mathrm{S}_h^2)\right\}$$

$$= \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}\left\{\mathrm{S}\left[\Sigma\alpha_i k_{i,h}\right]^2\right\}$$

$$= \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}\left\{\mathrm{S}\left[\alpha_1 k_{1,h} + \alpha_2 k_{2,h} + \cdots + \alpha_m k_{m,h}\right]^2\right\}$$

$$\begin{aligned} = \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}\Big\{\mathrm{S}\Big[&\alpha_1^2 k_{1,h}^2 + \alpha_2^2 k_{2,h}^2 + \cdots + \alpha_m^2 k_{m,h}^2 \\ &+ 2\alpha_1(\alpha_2 k_{1,h} k_{2,h} + \cdots + \alpha_m k_{1,h} k_{m,h}) \\ &+ 2\alpha_2(\alpha_3 k_{2,h} k_{3,h} + \cdots + \alpha_m k_{2,h} k_{m,h}) \\ &+ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ &+ 2\alpha_{m-1}\alpha_m k_{m-1,h} k_{m,h}\Big]\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}\Big\{&\alpha_1^2 \mathrm{S}k_{1,h}^2 + \alpha_2^2 \mathrm{S}k_{2,h}^2 + \cdots + \alpha_m^2 \mathrm{S}k_{m,h}^2 \\ &+ 2\alpha_1(\alpha_2 \mathrm{S}k_{1,h} k_{2,h} + \cdots + \alpha_m \mathrm{S}k_{1,h} k_{m,h}) \\ &+ 2\alpha_2(\alpha_3 \mathrm{S}k_{2,h} k_{3,h} + \cdots + \alpha_m \mathrm{S}k_{2,h} k_{m,h}) \\ &+ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ &+ 2\alpha_{m-1}\alpha_m \mathrm{S}k_{m-1,h} k_{m,h}\Big\}. \end{aligned}$$

Faisons pour abréger

$$\mathrm{S}k_{i,h} k_{i',h} = b_{i,i'} = b_{i',i};$$

et par suite

$$\mathrm{S}k_{i,h}^2 = b_{i,i};$$

puis remplaçons α_i par

$$\frac{z_i}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}};$$

nous aurons

$$
\begin{aligned}
Z_2 = \frac{T_2}{2} &= z_1^2 b_{1,1} + z_2^2 b_{2,2} + \cdots + z_m^2 b_{m,m} \\
&\quad + 2z_1(z_2 b_{1,2} + z_3 b_{1,3} + \cdots + z_m b_{1,m}) \\
&\quad + 2z_2(z_3 b_{2,3} + \cdots + z_m b_{2,m}) \\
&\quad + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&\quad + 2z_{m-1} z_m b_{m-1,m} \\
&= z_1^2 b_{1,1} + 2z_1z_2 b_{1,2} + 2z_1z_3 b_{1,1} + 2z_1z_4 b_{1,4} + \cdots \\
&\quad + \qquad z_2^2 b_{2,2} + 2z_2z_3 b_{2,3} + 2z_2z_4 b_{2,4} + \cdots \\
&\quad \qquad\qquad + \qquad z_3^2 b_{3,3} + 2z_3z_4 b_{3,4} + \cdots \\
&\quad \qquad\qquad\qquad\qquad + \qquad z_2^2 b_{4,4} + \cdots
\end{aligned}
$$

Soit maintenant

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= z_1 h_{1,1} + z_2 h_{1,2} + z_3 h_{1,3} + \cdots + z_m h_{1,m} + t_1\sqrt{-1} \\
\beta_2 &= \qquad\quad z_2 h_{2,2} + z_3 h_{2,3} + \cdots + z_m h_{2,m} + t_2\sqrt{-1} \\
\beta_1 &= \qquad\qquad\qquad\quad z_3 h_{3,3} + \cdots + z_m h_{3,m} + t_3\sqrt{-1} \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\beta_m &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad z_m h_{m,m} + t_m\sqrt{-1}
\end{aligned}
$$

Élevant au carré, faisant la somme, et posant

$$
\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_m^2 + (t_1^2 + t_2^2 + \cdot\cdot\cdot + t_m^2) = \mathrm{E}',
$$

nous aurons

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}' = 2h_{1,1}t_1z_1\sqrt{-1} &+ 2(h_{1,2}t_1 + h_{2,2}t_2)\, z_2\sqrt{-1} + \cdots \\
&+ 2(h_{1,m}t_1 + h_{2,m}t_2 + \cdots + h_{m,m}t_m)\, z_m\sqrt{-1} + \cdots \\
&+ z_1^2 h_{1,1}^2 + 2z_1z_2 h_{1,1}h_{1,2} + 2z_1z_3 h_{1,1}h_{1,3} \\
&+ z_2^2(h_{1,2}^2 + h_{2,2}^2) + 2z_2z_3(h_{1,2}h_{1,3} + h_{2,2}h_{2,3}) \\
&+ z_3^2(h_{1,3}^2 + h_{2,3}^2 + h_{3,3}^2) \\
&+ 2z_1z_4 h_{1,1}h_{1,4} \\
&+ 2z_2z_4(h_{1,2}h_{1,4} + h_{2,2}h_{2,4}) \\
&+ 2z_3z_4(h_{1,3}h_{1,4} + h_{2,3}h_{2,4} + h_{3,3}h_{3,4}) \\
&+ z_4^2(h_{1,4}^2 + h_{2,4}^2 + h_{3,4}^2 + h_{4,4}^2) \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Identifions $e^{-\mathrm{E}}$ et $e^{-\mathrm{E}'}$: pour cela, nous devrons poser

$$
\left.
\begin{aligned}
\rho_1 &= h_{1,1}t_1 \\
\rho_2 &= h_{1,2}t_1 + h_{2,2}t_2 \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\rho_m &= h_{1,m}t_1 + h_{2,m}t_2 + \cdots + h_{m,m}t_m
\end{aligned}
\right\} \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; (e)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
& b_{1,1} = h_{1,1}^2, \quad b_{1,2} = h_{1,1}h_{1,2}, \quad b_{1,3} = h_{1,1}h_{1,3}, \quad b_{1,4} = h_{1,1}h_{1,4}, \\
& b_{2,2} = h_{1,2}^2 + h_{2,2}^2, \quad b_{2,3} = h_{1,2}h_{1,3} + h_{2,2}h_{2,3}, \quad b_{2,4} = h_{1,2}h_{1,4} + h_{2,2}h_{2,4}, \\
& b_{3,3} = h_{1,3}^2 + h_{2,3}^2 + h_{3,3}^2, \quad b_{3,4} = h_{1,3}h_{1,4} + h_{2,3}h_{2,4} + h_{3,3}h_{3,4}, \\
& b_{4,4} = h_{1,4}^2 + h_{2,4}^2 + h_{3,4}^2 + h_{4,4}^2, \text{ etc.}
\end{aligned}
\right\} (f)
$$

On aura donc :

$$
e^{-2\sqrt{-1}\,\Sigma\rho_i z_i - \mathrm{Z}_2} = e^{-(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_m^2 + t_1 + t_2 + \cdot\cdot + t_m)}.
$$

De plus on a :

$$
\begin{aligned}
d\beta_1 &= dz_1 h_{1,1} & \qquad d\rho_1 &= dt_1 h_{1,1} \\
d\beta_2 &= dz_2 h_{2,2} & \qquad d\rho_2 &= dt_2 h_{2,2} \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
d\beta_m &= dz_m h_{m,m} & \qquad d\rho_m &= dt_m h_{m,m}\,;
\end{aligned}
$$

et par suite :

$$
dz_1 dz_2 \cdots dz_m d\rho_1 d\rho_2 \cdots d\rho_m = d\beta_1 d\beta_2 \cdots d\beta_m dt_1 dt_2 \cdots dt_m\,;
$$

d'où enfin

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P} = \frac{1}{\pi^m} \int_m dt_1 dt_2 \cdots dt_m e^{-(t_1^2 + t_2^2 + \cdots t_m^2)} \\
{}_m\!\int_{-\infty}^{\infty} d\beta_1 d\beta_2 \cdots d\beta_m e^{-(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_m^2)} \left(1 - \frac{\sqrt{-1}}{6}\mathrm{Z}_3 + \cdots\right).
\end{aligned}
$$

Effectuons les intégrations relatives aux β.

Soit

$$
\mathrm{R} = 1 - \frac{\sqrt{-1}}{6}\mathrm{Z}_3 + \frac{1}{24}\mathrm{Z}_4 - \frac{1}{72}\mathrm{Z}_3^2\,;
$$

et exprimons cette quantité en fonctions des β_i et des t_i.

Nous avons :

$$T_3 = M_3 S(s_h^3)$$
$$= M_3 \mathop{S}_1^n{}_h \left(\sum_1^m {}_i \alpha k_{i,h}\right)^3$$
$$= M_3 \mathop{S}_1^n{}_h (\alpha_1 k_{1,h} + \alpha_2 k_{2,h} + \cdots + \alpha_m k_{m,h})^3$$
$$= M_3 \left[\Sigma (\alpha_i^3 S k_{i,h}^3) + 3\Sigma (\alpha_i^2 \alpha_{i'} S k_{i,h}^2 k_{i',h}) + 6\Sigma (\alpha_i \alpha_{i'} \alpha_{i''} S k_{i,h} k_{i',h} k_{i'',h})\right],$$

où nous supposons $i < i' < i''$.

Donc

$$Z_3 = \frac{M_3}{\left[\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}\right]^3} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma (z_i^3 S k_{i,h}^3 + 3\Sigma (z_i^2 z_{i'} S k_{i,h}^2 k_{i',h}) \\ + 6\Sigma (z_i z_{i'} z_{i''} S k_{i,h} k_{i',h} k_{i'',h}) \end{array} \right\}.$$

De même on a

$$T_4 = M_4 S(s_h^4)$$
$$= M_4 S(\Sigma \alpha_i k_{i,h})^4$$
$$= M_4 S(\alpha_1 k_{1,h} + \alpha_2 k_{2,h} + \cdots + \alpha_m k_{m,h})^4$$
$$= M_4 [\Sigma \alpha_i^4 S k_{i,h}^4 + 4\Sigma (\alpha_i^3 \alpha_{i'} S k_{i,h}^3 k_{i',h})$$
$$+ 6\Sigma (\alpha_i^2 \alpha_{i'}^2 S k_{i,h}^2 k_{i',h}^2)$$
$$+ 12\Sigma (\alpha_i^2 \alpha_{i'} \alpha_{i''} S k_{i,h}^2 k_{i',h} k_{i'',h})$$
$$+ 24\Sigma (\alpha_i \alpha_{i'} \alpha_{i''} \alpha_{i'''} S k_{i,h} k_{i',h} k_{i'',h} k_{i''',h})]$$

où nous supposons $i < i' < i'' < i'''$.

Donc

$$Z_4 = \frac{M_4}{\left[\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}\right]^4} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma z_i^4 S k_{i,h}^4 + 4\Sigma (z_i^3 z_{i'} S k_{i,h}^3 k_{i',h}) \\ + 6\Sigma (z_i^2 z_{i'}^2 S k_{i,h}^2 k_{i',h}^2) \\ + 12\Sigma (z_i^2 z_{i'} z_{i''} S k_{i,h}^2 k_{i',h} k_{i'',h}) \\ + 24\Sigma (z_i z_{i'} z_{i''} z_{i'''} S k_{i,h} k_{i',h} k_{i'',h} k_{i''',h}) \end{array} \right\}.$$

Si l'on exprime les z_i en fonction de β_i et de t_i, les Z seront des sommes de termes de la forme $G\beta_i^a t_i^b$; et par suite on aura à intégrer relativement à β des expressions

$$G t_i^b \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta_i^2} \beta_i^a d\beta_i ;$$

or cette dernière intégrale est nulle quand a est impair ; et elle est égale à $\frac{1.3\ldots(a-1)}{2.2\ldots2}\sqrt{\pi}$, quand a est pair.

On aura par suite :

$$_m\int_{-\infty}^{\infty} d\beta_1 d\beta_2 \ldots d\beta_m e^{-(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_m^2)} R = (\sqrt{\pi})^m \left\{ 1 - \frac{1}{6} {}_3B + \frac{1}{24} B_4 - \frac{1}{72} B_6 \right\},$$

B_3 étant une fonction des t_i qui ne renferme que les puissances 1re, 2^{me} et 3^{me} de ces variables,

B_4 étant une fonction des t_i qui ne renferme que les puissances 0, 1, 2, 3 et 4 de ces variables,

B_6 étant une fonction des t_i qui ne renferme que les puissances 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 de ces variables.

Si l'on substitue l'expression précédente dans celle de P, on aura :

$$P = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m} {}_m\int dt_1\, dt_2 \ldots dt_m e^{-(t_1^2+t_2^2+\cdots+t_m^2)} \left(1 - \frac{1}{6} B_3 + \frac{1}{24} B_4 - \frac{1}{72} B_6\right).$$

Remarquons que B_3 provient de Z_3, où il n'entre que des produits de degrés impairs des z_i, et où il n'est resté que des puissances paires de β_i ; de sorte que B_3 ne renfermera que des puissances impaires des t_i ; il disparaîtra donc, puisque les intégrales seront prises entre les limites de la forme $\pm c$.

De même les puissances impaires des t_i disparaîtront dans B_4 et B_6, et avec elles les termes imaginaires.

Tous les termes de ces fonctions acquièrent des diviseurs qui contiennent les carrés des sommes finies des $k_{i,h}$ qui sont, dans chaque somme, au nombre de n. Si n est très-grand, chaque terme sera donc de l'ordre $\frac{1}{n}$; mais il y a m de ces termes, de sorte que l'ensemble des termes n'est que de l'ordre $\frac{m}{n}$.

Si l'on veut négliger la partie de l'intégrale qui renferme les termes B_4 et B_6, il faudra donc s'assurer si $\frac{n}{m}$ est un grand nombre ; s'il est assez grand, surtout, pour contre-balancer l'influence des puissances de γ, qui entre dans ces termes jusqu'à la 6^{me} puissance.

Il faudra, par conséquent, que $\gamma^6 . \frac{m}{n}$ reste de l'ordre des termes qu'on croira pouvoir négliger.

S'il n'en était pas ainsi, on ne pourrait être certain de quelque exactitude que si γ était assez petit.

En admettant que ces termes soient négligeables, nous aurons :

$$P = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m} \int_m dt_1\, dt_2 \dots dt_m e^{-(t_1^2+t_2^2+\dots+t_m^2)}.$$

Intégrons sous la condition que

$$u^2 = t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_m^2 < \gamma^2,$$

de sorte qu'aucun des termes t ne peut sortir des limites $\pm\gamma$.

En opérant successivement sur les variables t_i, on aura à intégrer chacune d'elles entre les limites

$$t_i = \pm\sqrt{\gamma^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_{i-1}^2};$$

ou bien on pourra prendre chaque intégrale entre

$$0 \text{ et } +\sqrt{\gamma^2 - t_1^2 - \dots - t_{i-1}^2},$$

et doubler le résultat.

Si nous posons

$$t_m = \sqrt{u^2 - t_1^2 - \dots - t_{m-1}^2},$$

d'où

$$dt_m = \frac{udu}{t_m},$$

au lieu de

$$P = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\gamma dt_m e^{-(t_1^2+\dots t_m^2)} \int_{m-1} dt_1 \dots dt_{m-1},$$

nous pourrons écrire

$$P = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\gamma udu\, e^{-u^2} \int_{m-1} \frac{dt_1 \dots dt_{m-1}}{\sqrt{u^2 - t_1^2 - \dots - t_{m-1}^2}}$$
$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\gamma udu\, e^{-u^2} . V,$$

en posant

$$V = \int_{m-1} \frac{dt_1 - dt_{m-1}}{\sqrt{u^2 - t_1^2 - \dots - t_{m-1}^2}}$$
$$= \int_0^{\sqrt{u^2}} dt_1 \int_0^{\sqrt{u^2-t_1^2}} dt_2 \int_0^{\sqrt{u^2-t_1^2-t_2^2}} dt_3 \dots \int_0^{\sqrt{u^2-t_1^2-\dots-t_{m-1}^2}} dt_{m-2} (u^2 - t_1^2 - \dots - t_{m-1}^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Pour effectuer toutes ces intégrations, qui sont de la forme

$$\int_0^{\sqrt{a}} dt\, (a - t^2)^{\frac{\delta}{2}},$$

rappelons-nous que

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

et que

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$$

et posons

$$a - t^2 = ax; \quad t = \sqrt{a}\sqrt{1-x}; \quad dt = -\sqrt{a}\frac{dx}{2\sqrt{1-x}};$$

nous aurons

$$\int_0^{\sqrt{a}} at(a - t^2)^{\frac{\delta}{2}} = \frac{a^{\frac{\delta+1}{2}}}{2} \int_0^1 x^{\frac{\delta+1}{2}-1} (1-x)^{\frac{1}{2}-1}$$
$$= \frac{a^{\frac{\delta+1}{2}}}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}+1\right)}.$$

En faisant successivement

$$\sqrt{u^2 - t_1^2 - \dots - t_{m-2}^2} = \sqrt{a}$$
$$\sqrt{u^2 - t_1^2 - \dots - t_{m-3}^2} = \sqrt{a}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2} = \sqrt{a}$$
$$\sqrt{u^2 - t_1^2} = \sqrt{a}$$
$$\sqrt{u^2} = \sqrt{a}$$

nous trouverons :

$$V = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \cdot \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot u^{m-2}$$

$$= u^{m-2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m} \frac{2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)};$$

d'où

$$P = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\gamma u^{m-1} e^{-u^2} du.$$

Reste à effectuer cette dernière intégration.

Intégration de $\int_0^\gamma u^{m-1} e^{-u^2} du.$

En intégrant par parties, on trouve successivement :

$$\int u^{m-1} du \,.\, e^{-u^2} = -\frac{1}{2}\int u^{m-2} \,.\, -2u e^{-u^2} du$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^{m-2} d \,.\, e^{-u^2}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-u^2} u^{m-2} + \frac{m-2}{2}\int u^{m-3} e^{-u^2} du.$$

$$\int u^{m-3} e^{-u^2} du = -\frac{1}{2} e^{-u^2} u^{m-4} + \frac{m-4}{2}\int u^{m-5} e^{-u^2} du.$$

$$\int u^{m-5} e^{-u^2} du = -\frac{1}{2} e^{-u^2} u^{m-6} + \frac{m-6}{2}\int u^{m-7} e^{-u^2} du.$$

. . . .

$$\int u^{m-2i-1} e^{-u^2} du = -\frac{1}{2} e^{-u^2} u^{m-2i-2} + \frac{m-2i-2}{2} u^{m-2i-3} e^{-u^2} du.$$

D'où l'on déduit, par des substitutions successives

$$\int u^{m-1} e^{-u^2} du = -\frac{1}{2} e^{-u^2} u^{m-2} + \frac{m-2}{2}\int e^{-u^2} u^{m-3} du$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-u^2} u^{m-2} + \frac{m-2}{2} e^{-u^2} u^{m-4}$$

$$+ \frac{(m-2)(m-4)}{2^2}\int e^{-u^2} u^{m-5} du$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-u^2} u^{m-2} - \frac{m-2}{2} e^{-u^2} u^{m-4}$$

$$- \frac{(m-2)(m-4)}{2^2} e^{-u^2} u^{m-6} - \cdots$$

$$- \frac{(m-2)(m-4)\ldots(m-2i)}{2^{i+1}} e^{-u^2} u^{m-2i-2}$$

$$+ \frac{(m-2)\ldots(m-2i-2)}{2^{i+1}}\int e^{-u^2} u^{m-2i-3} du;$$

et par suite

$$\int_0^\gamma u^{m-1} e^{-u^2} du = -\frac{1}{2} e^{-\gamma^2}\left\{\gamma^{m-2} + \frac{m-2}{2}\gamma^{m-4} + \frac{(m-2)(m-4)}{2^2}\gamma^{m-6} + \cdots\right.$$

$$+ \frac{(m-2)(m-4)\ldots(m-2i)}{2^{i+1}}\gamma^{m-2i-2}$$

$$\left.+ \frac{(m-2)\ldots(m-2i-2)}{2^{i+1}}\int_0^\gamma u^{m-2i-3} e^{-u^2} du\right\}.$$

1° Soit

$$m = 2g$$

et

$$i = g - 2.$$

On aura :

$$m - 2i = 4;$$

$$m - (2i + 2) = 2;$$

$$m - (2i + 3) = 1.$$

$$\int_0^\gamma u^{2g-1}e^{-u^2}du = -\frac{1}{2}e^{-\gamma^2}\,\frac{2g-2}{2}\,\frac{2g-4}{4}\cdots\frac{4}{2}\,\frac{2}{2}\left[\frac{\gamma^{2g-2}}{\frac{2g-2}{2}\,\frac{2g-4}{2}\cdots\frac{2}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma^{2g-4}}{\frac{2g-4}{2}\cdots\frac{2}{2}}+\cdots+\frac{\gamma^2}{2}+1\right]$$

$$+\left(\frac{2g-2}{2}\cdot\frac{2g-4}{2}\cdots\frac{4}{2}\cdot\frac{2}{2}\right)\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-\gamma^2}\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)\left[\frac{\gamma^{2g-2}}{\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)}+\frac{\gamma^{2g-4}}{\Gamma\left(\frac{2g-2}{2}\right)}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma^2}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}+1\right]+\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)$$

2° Soit

$$m = 2g-1;$$
$$i = g-2;$$
$$m-(2i+2) = 1;$$
$$m-(2i+3) = 0.$$

$$\int_0^\gamma u^{2g-2}e^{-u^2}du = -\frac{1}{2}e^{-\gamma^2}\frac{2g-3}{2}\cdot\frac{2g-5}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\gamma^{2g-3}}{\frac{2g-3}{2}\cdot\frac{2g-5}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma^{2g-5}}{\frac{2g-5}{2}\cdot\frac{2g-7}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\gamma}{\frac{1}{2}}\right]$$

$$+\frac{2g-3}{2}\cdot\frac{2g-5}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\gamma e^{-u^2}du$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-\gamma^2}\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)\left[\frac{\gamma^{2g-3}}{\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)}+\frac{\gamma^{2g-5}}{\Gamma\left(\frac{2g-3}{2}\right)}+\cdots+\frac{\gamma}{\Gamma\frac{3}{2}}\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)\int_0^\gamma e^{-u^2}du,$$

en vertu de la formule connue

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\,.\,3\,...\,(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi},$$

Soit quand

$$m = 2g, \qquad P = p_{2g},$$

ou quand

$$m = 2g-1, \quad P = p_{2g-1};$$

la valeur de P deviendra, dans chacun de ces deux cas :

$$\left.\begin{aligned} p_{2g} &= \frac{2}{\Gamma\frac{2g}{2}}\int_0^\gamma u^{2g-2}e^{-u^2}du \\ &= e^{-\gamma^2}\left[\frac{\gamma^{2g-2}}{\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)}+\frac{\gamma^{2g-4}}{\Gamma\left(\frac{2g-2}{2}\right)}+\cdots+\frac{\gamma^2}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}+1\right]+1 \end{aligned}\right\}\ (A)$$

$$\left.\begin{aligned} p_{2g-1} &= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)}\int_0^\gamma u^{2g-2}e^{-u^2}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-u^2}du \\ &- e^{-\gamma^2}\left[\frac{\gamma^{2g-3}}{\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)}+\frac{\gamma^{2g-5}}{\Gamma\left(\frac{2g-3}{2}\right)}+\cdots+\frac{\gamma}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right]. \end{aligned}\right\}\ (B)$$

On voit que p_{2g} et p_{2g-1} diminuent quand le nombre m des inconnues augmente. (A) et (B) expriment les probabilités que les m erreurs

$$\rho_i = t_1h_{1,i}+t_2h_{2,i}+t_3h_{3,i}+\cdots+t_ih_{i,i}$$

ne peuvent s'étendre au delà des limites assignées par la condition

$$t_1^2+t_2^2+\cdots+t_m^2 < \gamma^2,$$

condition qui ne permet à aucune des variables t_i d'excéder $\pm\gamma$.

Cherchons les limites extrêmes de ρ_i.

Soit

$$t_1^2+t_2^2+\cdots+t_m^2 = u,$$

et cherchons la plus grande valeur de

$$\rho_i = t_1 h_{1,i} + t_2 h_{2,i} + \cdots + t_i h_i, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Posons

$$t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_i^2 = u - t_{i+1}^2 - t_{i+2}^2 - \cdots - t_m^2 = \nu; \quad . \quad (2)$$

nous devrons regarder ν comme constant relativement aux i premières variables t, t_i étant considéré comme fonction des $i-1$ variables qui le précèdent.

Soit $t_{i'}$, l'une quelconque de ces premières variables : nous devons, pour le maximum de ρ_i, poser $\frac{d\rho_i}{dt_{i'}} = 0$, ou, en vertu de (1):

$$h_{i',i} + h_{i,i}\frac{dt_i}{dt_{i'}} = 0;$$

de plus, l'équation (2) donne :

$$t_{i'} dt_{i'} + t_i dt_i = 0;$$

d'où l'on déduit

$$h_{i',i} + h_{i,i}\left(-\frac{t_{i'}}{t_i}\right) = 0, \text{ ou } \frac{t_{i'}}{t_i} = \frac{h_{i',i}}{h_{i,i}}. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Donc, pour le maximum de ρ_i, il faut que les $t_{i'}$ soient proportionnels aux $h_{i',i}$ correspondants; posons, par suite :

$$t_{i'} = a h_{i',i}$$
$$t_{i'}^2 = a^2 h_{i',i}^2;$$

faisons successivement $i' = 1, 2 \ldots i$, et ajoutons; nous aurons :

$$a^2(h_{1,i}^2 + h_{2,i}^2 + \cdots + h_{i,i}^2) = \nu,$$

ou

$$a^2 b_{i,i} = \nu,$$

d'où

$$a = \sqrt{\frac{\nu}{b_{i,i}}}.$$

Le maximum de ρ_i sera par conséquent :

$$\rho_i = t_1 h_{1,i} + t_2 h_{2,i} + \cdots + t_i h_{i,i}$$
$$= a(h_{1,i}^2 + h_{2,i}^2 + \cdots + h_{i,i}^2)$$
$$= a b_{i,i} = b_{i,i}\sqrt{\frac{\nu}{b_{i,i}}}\sqrt{\nu b_{i,i}}.$$

Or comme $\nu = u - t_{i+1}^2 - \cdots - t_m^2$, la limite supérieure de ν sera u, ce que suppose que tous les t, de t_{i+1} à t_m, sont nuls.

Les limites extrêmes de ρ_i sont donc

$$\pm\sqrt{u b_{i,i}},$$

et u est nécessairement $< \gamma^2$.

Pour une probabilité déterminée par la constante γ, cette constante fixe l'étendue des limites des erreurs ρ_i sous la forme

$$-\gamma\sqrt{b_{i,i}} < \rho_i < \gamma\sqrt{b_{i,i}},$$

ou

$$-\gamma\sqrt{\mathrm{S}k_{i,h}^2} < \rho_i < \gamma\sqrt{\mathrm{S}k_{i,h}^2},$$

ou bien, en remplaçant ρ_i par sa valeur :

$$-\gamma\sqrt{\mathrm{S}k_{i,h}^2} < \frac{r_i - \mu_1 \mathrm{S}k_{i,h}}{\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}} < \gamma\sqrt{\mathrm{S}k_{i,h}^2}.$$

(A) et (B) expriment donc les probabilités que les erreurs r_i sont renfermées entre les limites

$$\mu_1 \mathrm{S}k_{i,h} - \gamma\sqrt{\mathrm{S}k_{i,h}^2}\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)} < r_i < \mu_1 \mathrm{S}k_{i,h} + \gamma\sqrt{\mathrm{S}k_{i,h}^2}\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'erreurs constantes, ou lorsque $\varphi(-\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$, on a $\mu_1 = 0$, et les probabilités (A) et (B) seront celles des limites

$$-\gamma\sqrt{\mathrm{S}k_{i,h}^2}\sqrt{2\mu_2} < r_i < \gamma\sqrt{\mathrm{S}k_{i,h}^2}\sqrt{2\mu_2}.$$

Cherchons les valeurs des facteurs $\mathrm{k}_{i,h}$, qui réduisent les erreurs r_i des x_i aux plus étroites limites possibles, pour une probabilité donnée; ou bien, les limites étant données, cherchons les valeurs de ces facteurs qui rendront la plus grande possible la probabilité que ces erreurs ne sortent pas de ces limites.

On voit d'abord que les limites des r_i seront les plus étroites possibles quand les $k_{i,h}$ satisferont à la condition

$$Sk^2_{i,h} = \min. \qquad \qquad (4)$$

Désignons par $A_{i,h}$ ce que deviennent les facteurs $k_{i,h}$, déterminés par la méthode des moindres carrés : la condition précédente (4) sera remplie quand on aura

$$k_{i,h} = A_{i,h}.$$

Démonstration. Les équations de condition étant

$$x_1 a_{1,h} + x_2 a_{2,h} + \cdots + x_i a_{i,h} + \cdots = \omega_h$$

la méthode des moindres carrés fournira les m équations

$$\begin{aligned} x_1 Sa_{1,h}a_{1,h} + x_2 Sa_{1,h}a_{2,h} + \cdots + x_i Sa_{1,h}a_{i,h} + \cdots &= Sa_{1,h}\omega_h \\ x_1 Sa_{2,h}a_{1,h} + x_2 Sa_{2,h}a_{2,h} + \cdots + x_i Sa_{2,h}a_{i,h} + \cdots &= Sa_{2,h}\omega_h \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 Sa_{m,h}a_{1,h} + x_2 Sa_{m,h}a_{2,h} + \cdots + x_i Sa_{m,h}a_{i,h} + \cdots &= Sa_{m,h}\omega_h. \end{aligned}$$

Pour effectuer l'élimination, on multiplie par des facteurs $B_1, B_2 \ldots B_m$, on ajoute, et l'on pose entre ces facteurs les relations nécessaires pour que l'on ait

$$\begin{aligned} x'_i &= B_1 Sa_{1,h}\omega_h + B_2 Sa_{2,h}\omega_h + \cdots + B_m Sa_{m,h}\omega_h \\ &= \omega_1 \sum_1^m{}_{i'} B_{i'} a_{i',1} + \omega_2 \sum_1^m{}_{i'} B_{i'} a_{i',2} + \cdots + \omega_h \sum_1^m{}_{i'} B_{i'} a_{i',h} + \cdots + \omega_n \sum_1^m{}_{i'} B_{i'} a_{i',n}. \end{aligned}$$

Mais, de même que

$$x_i = S\omega_h k_{i,h},$$

on a

$$\begin{aligned} x'_i &= S\omega_h A_{i,h} \\ &= \omega_1 A_{1,i} + \omega_2 A_{2,i} + \cdots + \omega_h A_{h,i} + \cdots + \omega_m A_{n,i}. \end{aligned}$$

Comparant cette valeur de x'_i à la précédente, on en déduit

$$A_{i,h} = \Sigma B_{i'} a_{i',h} \qquad \qquad (\alpha)$$

Or, comme nous avons posé

$$\begin{array}{lcl} Sa_{1,h}k_{i,h} = 0 & \text{et par suite} & Sa_{1,h}A_{i,h} = 0 \\ Sa_{2,h}k_{i,h} = 0 & \text{»} & Sa_{2,h}A_{i,h} = 0 \\ \cdots & & \cdots \\ Sa_{i,h}k_{i,h} = 1 & \text{»} & Sa_{i,h}A_{i,h} = 1 \\ \cdots & & \cdots \\ Sa_{m,h}k_{i,h} = 0 & \text{»} & Sa_{m,h}A_{i,h} = 0, \end{array}$$

nous en déduirons, en retranchant membre à membre, et multipliant respectivement par les facteurs $B_1, B_2 \ldots B_m$:

$$\begin{aligned} Sa_{1,h}(k_{i,h} - A_{i,h})B_1 &= 0 \\ Sa_{2,h}(k_{i,h} - A_{i,h})B_2 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ Sa_{m,h}(k_{i,h} - A_{i,h})B_m &= 0; \end{aligned}$$

et en ajoutant

$$S\left\{ \sum_1^m{}_{i'} B_{i'} a_{i',h}(k_{i,h} - A_{i,h}) \right\} = 0,$$

équation que nous pouvons écrire, en vertu de (α) :

$$S\left\{ A_{i,h}(k_{i,h} - A_{i,h}) \right\} = 0,$$

ou

$$SA_{i,h}k_{i,h} = SA^2_{i,h};$$

d'où nous déduirons

$$Sk^2_{i,h} - 2SA_{i,h}k_{i,h} = Sk^2_{i,h} - 2SA^2_{i,h}$$

$$Sk^2_{i,h} - SA^2_{i,h} = Sk^2_{i,h} - 2Sk_{i,h}A_{i,h} + SA^2_{i,h},$$

et enfin

$$Sk^2_{i,h} = SA^2_{i,h} + S(k_{i,h} - A_{i,h})^2.$$

$Sk^2_{i,h}$ est donc un minimum pour

$$k_{i,h} = A_{i,h}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On voit par là que si l'on détermine les inconnues par la méthode des moindres carrés, les erreurs r_i des x_i seront les plus étroites possibles; et alors (A) et (B) seront les probabilités que

$$\mu_1 SA_{i,h} - \gamma\sqrt{SA^2_{i,h}}\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)} < r_i < \mu_1 SA_{i,h} + \gamma\sqrt{SA^2_{i,h}}\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}.$$

Mais si l'on reprend la valeur de γ

$$\gamma = \frac{\rho_i}{\sqrt{Sk^2_{i,h}}},$$

on verra aussi que γ et, par suite, les probabilités (A) et (B) seront les plus grandes possibles quand $Sk^2_{i,h}$ sera un minimum, ou quand $k_{i,h}$ sera égal à $A_{i,h}$.

Ainsi donc, un système de limites étant choisi, la probabilité que les erreurs n'en sortiront pas sera la plus grande possible quand on aura déterminé les inconnues par la méthode des moindres carrés.

Les quantités μ_1 et μ_2 se déduisent des observations; leurs expressions sont

$$\mu_1 = \frac{\varepsilon_1' + \cdots + \varepsilon_n'}{n}, \qquad \mu_2 = \frac{\varepsilon_1'^2 + \cdots + \varepsilon_n'^2}{n},$$

et ε_i' est ce que devient ε_i, quand on remplace x_i par sa valeur obtenue en changeant les facteurs $k_{i,h}$ en $A_{i,h}$.

Erreur probable.

Il s'agit de déterminer les limites des erreurs qui répondent à une probabilité égale à $\frac{1}{2}$.

1° *Une seule inconnue.*

On devra poser, dans ce cas,

$$\gamma = 0{,}4769...$$

Alors en effet on aura :

$$p_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0,4769} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}:$$

probabilité que l'erreur r de x est comprise entre les limites

$$\mu_1 SA_h \pm 0{,}4769\sqrt{SA^2_h}\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}.$$

2° *Deux inconnues.*

Dans ce cas

$$\gamma = 0{,}83255461$$

donne

$$p_1 = 1 - e^{-\gamma^2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi dès qu'il y a deux inconnues, les limites comprennent un intervalle presque double; et l'on a une probabilité $\frac{1}{2}$ que l'erreur r_i de x_i est comprise entre

$$\mu_1 SA_{i,h} \pm 0{,}832...\sqrt{SA^2_{i,h}}\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}.$$

Si l'on veut que les erreurs puissent varier, on dira que $\frac{1}{2}$ est la probabilité de l'ensemble des systèmes

$$r_1 - \mu_1 SA_{1,h} = t_1\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)\,SA^2_{1,h}}$$

$$r_2 - \mu_1 SA_{2,h} = t_1\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)\frac{(SA_{1,h}A_{2,h})^2}{SA^2_{1,h}}} + t_2\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)\left[SA^2_{2,h} - \frac{(SA_{1,h}A_{2,h})^2}{SA^2_{1,h}}\right]},$$

les variables t_1 et t_2 étant assujetties à la condition

$$t_1^2 + t_2^2 < (0{,}8325...)^2 < 0{,}69314718...;$$

les quantités sous les radicaux sont déterminées par les relations entre les h et les b, en remplaçant les facteurs k par les facteurs A dans les expressions

$$b_{i,i'} = \mathrm{S} k_{i,h} k_{i',h}.$$

3° *Valeurs de γ pour 1 à 8 inconnues, quand* $\mathrm{p} = \frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
m &= 1, & \gamma_1 &= 0{,}47693 & & \\
m &= 2, & \gamma_2 &= 0{,}83255 &&= 1{,}7456\,\gamma_1 \\
m &= 3, & \gamma_3 &= 1{,}0876 &&= 2{,}2814\,\gamma_1 \\
m &= 4, & \gamma_4 &= 1{,}29551 &&= 2{,}7164\,\gamma_1 \\
m &= 5, & \gamma_5 &= 1{,}4750 &&= 3{,}0927\,\gamma_1 \\
m &= 6, & \gamma_6 &= 1{,}63525 &&= 3{,}4287\,\gamma_1 \\
m &= 7, & \gamma_7 &= 1{,}7812 &&= 3{,}7347\,\gamma_1 \\
m &= 8, & \gamma_8 &= 1{,}91623 &&= 4{,}0178\,\gamma_1.
\end{aligned}
$$

III

EXTENSION DU THÉORÈME DE BERNOUILLI AU BINOME DES FACTORIELLES.

Soit $a + b = c$, nous savons, par la théorie des factorielles, que

$$\frac{(a+b)^{\mu|-1}}{c^{\mu|-1}} = \mathrm{S}\,\frac{\mu!}{m!\,n!}\cdot\frac{a^{m|-1}b^{n|-1}}{c^{\mu|-1}} = 1,$$

et que le terme général de ce développement est

$$\mathrm{T}_n = \frac{\mu!}{m!\,n!}\,\frac{a^{m|-1}b^{n|-1}}{c^{\mu|-1}}.$$

Or il est facile de s'assurer (voir n° 22) que T_n est la probabilité d'extraire en $\mu = m + n$ tirages m boules blanches et n boules noires, d'une urne contenant $c = a + b$ boules, dont a blanches et b noires, lorsque l'on ne remet pas dans l'urne les boules extraites.

Les probabilités d'extraire en μ tirages $m + l$ blanches et $n - l$ noires, ou bien $m - l$ blanches et $n + l$ noires seront respectivement :

$$\mathrm{T}_{n-l} = \frac{\mu!}{m+l!\,n-l!}\cdot\frac{a^{m+l|-1}b^{n-l|-1}}{c^{\mu|-1}}$$

$$\mathrm{T}_{n+l} = \frac{\mu!}{m-l!\,n+l!}\cdot\frac{a^{m-l|-1}b^{n+l|-1}}{c^{\mu|-1}}.$$

La somme

$$\mathrm{P} = \mathrm{T}_{n-l} + \mathrm{T}_{n-l+1} + \cdots + \mathrm{T}_{n-1} + \mathrm{T}_n + \mathrm{T}_{n+1} + \cdots + \mathrm{T}_{n+l-1} + \mathrm{T}_{n+l}$$

est la probabilité qu'en μ tirages on extraira au plus $m + l$ et au moins $m - l$ boules blanches.

Soient $m = k$, $n = h$ les valeurs de m et de n propres à rendre T_n un maximum; M_n ce maximum, M_{n-l}, M_{n+l} les termes qui le précèdent ou le suivent de l rangs; la somme

$$Q = M_{n-l} + M_{n-l+1} + \cdots + M_{n-1} + M_n + M_{n+1} + \cdots + M_{n+l-1} + M_{n-l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

exprimera la probabilité qu'en μ tirages le nombre des boules blanches sorties sera compris entre $k + l$ et $k - l$.

I. *Détermination de* k, h, M_n. Comparons les trois valeurs

$$T_n = \frac{\mu\,!}{m\,!\,n\,!}\frac{a^{m|-1}b^{n|-1}}{c^{\mu|-1}};$$

$$T_{n-1} = \frac{\mu\,!}{m+1\,!\,n+1\,!}\frac{a^{m+1|-1}b^{n-1|-1}}{c^{\mu|-1}} = T_n \cdot \frac{n}{m+1}\frac{a-m}{b-n+1};$$

$$T_{n+1} = \frac{\mu\,!}{m-1\,!\,n-1\,!}\frac{a^{m-1|-1}b^{n+1|-1}}{c^{\mu|-1}} = T_n \frac{m}{n+1}\frac{b-n}{a-m+1};$$

les valeurs de m et de n propres à rendre T_n un maximum se déduiront de :

$$T_n > T_n \frac{n}{m+1}\frac{a-m}{b-n+1}$$

$$T_n > T_n \frac{m}{n+1}\cdot\frac{b-n}{a-m+1}$$

ou bien

$$1 > \frac{n}{m+1}\frac{a-m}{b-n+1}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$1 > \frac{m}{n+1}\frac{b-n}{a-m+1}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Éliminons d'abord m et a en remplaçant m par $\mu - n$ et a par $c - b$, nous aurons

$$n > \frac{(\mu+1)(b+1)}{c+2} - 1$$

$$n < \frac{(\mu+1)(b+1)}{c+2}.$$

Donc

$$n = \frac{(\mu+1)(b+1)}{c+2} - \delta, \quad \delta \text{ étant} < 1,$$

et par suite la plus grande valeur entière de $\frac{(\mu+1)(b+1)}{c+2}$ sera la quantité cherchée h.

Éliminons ensuite n et b des équations (1) et (2) nous trouverons

$$m > \frac{(\mu+1)(a+1)}{c+2} - 1$$

$$m < \frac{(\mu+1)(a+1)}{c+2}.$$

Donc

$$m = \frac{(\mu+1)(a+1)}{c+2} - \delta', \quad \delta' \text{ étant} < 1,$$

et par suite la plus grande valeur entière de $\frac{(\mu+1)(a+1)}{c+2}$ sera la quantité cherchée k.

Les relations précédentes fournissent, pour les valeurs particulières k et h de m et n :

$$\frac{b}{c+2} = \frac{n}{\mu+1} - \frac{1}{c+2} + \frac{\delta}{\mu+1}$$

$$\frac{a}{c+2} = \frac{m}{\mu+1} - \frac{1}{c+2} + \frac{\delta'}{\mu+1};$$

ou bien

$$\frac{b}{c} - \frac{2b}{c\,(c+2)} = \frac{n}{\mu} - \frac{n}{\mu\,(\mu+1)} - \frac{1}{c+2} + \frac{\delta}{\mu+1}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{2a}{c\,(c+2)} = \frac{m}{\mu} - \frac{m}{\mu\,(\mu+1)} - \frac{1}{c+2} + \frac{\delta'}{\mu+1},$$

Comme a, b, m, n, c, μ et l^2 sont des quantités du même ordre que μ, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{\mu}$, on pourra écrire :

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{\mu}, \quad \frac{a}{c} = \frac{m}{\mu},$$

d'où aussi

$$\frac{b-n}{c-\mu}=\frac{n}{\mu},\qquad \frac{a-m}{c-\mu}=\frac{m}{\mu};$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{c-\mu}{b-n}=1, & \dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{c-\mu}{a-m}=1, \\[2ex] \dfrac{mn}{\mu^2}=\dfrac{ab}{c^2}, & (a-m)(b-n)=\dfrac{ab}{c^2}(1-\mu)^2, \\[2ex] \dfrac{\mu}{m}\cdot\dfrac{a-m}{c-\mu}=1, & \dfrac{\mu}{n}\cdot\dfrac{b-n}{c-\mu}=1. \end{array}\right\}\ \ldots\ (a)$$

Déterminons maintenant $\mathbf{M}_n$. Nous avons :

$$\mathrm{T}_n=\frac{\mu\,!}{m\,!\,n\,!}\,\frac{a^{m-1}b^{n-1}}{c^{\mu-1}}=\frac{\mu\,!}{m\,!\,n\,!}\,\frac{a\,!}{a-m\,!}\,\frac{b\,!}{b-n\,!}\,\frac{c-\mu\,!}{c\,!}$$

et comme

$$x\,!=x^xe^{-x}\sqrt{2\pi x}\ (^*),$$

il vient

$$\mathrm{T}_n=\left(\frac{\mu}{m}\cdot\frac{a-m}{c-\mu}\right)^m\left(\frac{\mu}{n}\cdot\frac{b-n}{c-\mu}\right)^n\left(\frac{a}{c}\cdot\frac{c-\mu}{a-m}\right)^a\left(\frac{b}{c}\cdot\frac{c-\mu}{b-n}\right)^b$$
$$\times\sqrt{\frac{\mu ab\,(c-\mu)}{2\pi cmn\,(a-m)\,(b-n)}}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(7)$$

Pour $m=k$, $n=h$, T_n devient $\mathbf{M}_n$, et, par suite des équations (a), qui sont relatives à ces valeurs, on aura :

$$\mathbf{M}_n=\sqrt{\frac{\mu ab\,(c-\mu)}{2\pi cmn\,(a-m)\,(b-n)}}=\sqrt{\frac{c^3}{2\pi\mu ab\,(c-\mu)}}\quad\ldots\quad(8)$$

Donc la formule (7) pourra s'écrire sous la forme suivante, dans laquelle m et n reprennent leurs valeurs générales :

$$\mathrm{T}_n=\left(\frac{\mu}{m}\frac{a-m}{c-\mu}\right)^n\left(\frac{\mu}{n}\frac{b-n}{c-\mu}\right)^n\left(\frac{a}{c}\cdot\frac{c-\mu}{a-m}\right)^a\left(\frac{b}{c}\cdot\frac{c-\mu}{b-n}\right)^b\mathbf{M}_n$$

(*) Voir la note I à la fin de l'ouvrage.

d'où

$$\mathrm{T}_{n-l}=\left[\frac{\mu}{m+l}\frac{a-m-l}{c-\mu}\right]^{m+l}\left[\frac{\mu}{n-l}\frac{b-n+l}{c-\mu}\right]^{n-l}\left[\frac{a}{c}\frac{c-\mu}{a-m-l}\right]^a\left[\frac{b}{c}\frac{c-\mu}{b-n+l}\right]^b\mathbf{M}_n$$

$$=\left[\frac{\mu}{m}\frac{a-\mu}{c-m}\,\frac{1}{1+\dfrac{l}{m}}\cdot\frac{1-\dfrac{l}{a-m}}{1}\right]^{m+l}\left[\frac{\mu}{n}\cdot\frac{b-n}{c-\mu}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{l}{n}}\cdot\frac{1+\dfrac{l}{b-n}}{1}\right]^{n-l}$$

$$\times\left[\frac{a}{c}\frac{c-\mu}{a-m}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{l}{a-m}}\right]^a\left[\frac{b}{c}\frac{c-\mu}{b-n}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{l}{b-n}}\right]^b\mathbf{M}_n.$$

$$\mathrm{T}_{n+l}=\left[\frac{m}{\mu}\cdot\frac{a-m}{c-\mu}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{l}{m}}\cdot\frac{1-\dfrac{l}{a-m}}{1}\right]^{m-l}\left[\frac{\mu}{n}\cdot\frac{b-n}{c-\mu}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{l}{n}}\cdot\frac{1-\dfrac{l}{b-n}}{1}\right]^{n+l}$$

$$\times\left[\frac{a}{c}\cdot\frac{c-\mu}{a-m}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{l}{a-m}}\right]^a\left[\frac{b}{c}\cdot\frac{c-\mu}{b-n}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{l}{b-n}}\right]^b\mathbf{M}_n.$$

Donc pour

$$m=k,\quad n=h,$$

et en ayant égard aux relations (a), T_{n-l} et T_{n+l} deviennent

$$\mathbf{M}_{n-l}=\left[\frac{1-\dfrac{l}{a-m}}{1+\dfrac{l}{m}}\right]^{m+l}\left[\frac{1+\dfrac{l}{b-n}}{1+\dfrac{l}{n}}\right]^{n-l}\left[\frac{1}{1-\dfrac{l}{a-m}}\right]^a\left[\frac{1}{1+\dfrac{l}{b-n}}\right]^b\mathbf{M}_n.$$

$$\mathbf{M}_{n+l}=\left[\frac{1+\dfrac{l}{a-m}}{1+\dfrac{l}{n}}\right]^{m+l}\left[\frac{1-\dfrac{l}{b-n}}{1+\dfrac{l}{n}}\right]^{n+l}\left[\frac{1}{1+\dfrac{l}{a-m}}\right]^a\left[\frac{1}{1-\dfrac{l}{b-n}}\right]^b\mathbf{M}_n.$$

Prenant les logarithmes, nous aurons :

$$\mathrm{l.\,M}_{n-l} = (m+l)\left\{\mathrm{l.}\left(1-\frac{l}{a-m}\right)-\mathrm{l.}\left(1+\frac{l}{n}\right)\right\}$$

$$+(n-l)\left\{\mathrm{l.}\left(1+\frac{l}{b-n}\right)-\mathrm{l.}\left(1-\frac{l}{n}\right)\right\}$$

$$-a\,\mathrm{l.}\left(1-\frac{l}{a-m}\right)-b\,\mathrm{l.}\left(1+\frac{l}{b+n}\right)+\mathrm{l.\,M}_n$$

$$=\frac{al-ml-l^2}{a-m}+\frac{al^2-ml^2-l^3}{2(a-m)^2}+\text{etc.}+\frac{nl-l^2-bl}{b-n}$$

$$-\frac{nl^2-l^3-bl^2}{2(b-n)^2}+\text{etc.}+\frac{nl-l^2}{n}-\frac{ml+l^2}{m}+\frac{nl^2-l^3}{2n^2}$$

$$+\frac{ml^2+l^3}{2m^2}+\text{etc.}+\mathrm{l.\,M}_n.$$

De même :

$$\mathrm{l.\,M}_{n+l}=\frac{-al+ml-l^2}{a-m}+\frac{al^2-ml^2+l^3}{2(a-m)^2}+\text{etc.}+\frac{-nl-l^2+bl}{b-n}$$

$$-\frac{nl^2+l^3-bl^2}{2(b-n)^2}+\text{etc.}+\frac{-nl-l^2}{n}-\frac{-ml+l^2}{m^2}+\frac{nl^2+l^3}{2n^2}$$

$$+\frac{2nl^2-l^3}{2m^2}+\text{etc.}+\mathrm{l.\,M}_n.$$

Donc en ajoutant

$$\mathrm{l.\,M}_{n-l}+\mathrm{l.\,M}_{n+l}=2\,\mathrm{l.\,M}_n-\frac{l^2}{a-m}-\frac{l^2}{b-n}-\frac{l^2}{n}-\frac{l^2}{m}$$

$$=2\,\mathrm{l.\,M}_n-2l^2\left\{\frac{c-\mu}{2(a-m)(b-n)}+\frac{\mu}{2mn}\right\}$$

$$=2\,\mathrm{l.\,M}_n-2l^2\frac{c^3}{2ab\mu(c-\mu)}\quad\ldots\ldots\quad(10)$$

Mais on a

$$\mathrm{M}_{n-l}=\mathrm{M}_n e^{\mathrm{l.M}_{n-l}-\mathrm{l.M}_n}=\mathrm{M}_n\left[1+\mathrm{l.\,M}_{n-l}-\mathrm{l.\,M}_n\right],$$
$$\mathrm{M}_{n+l}=\mathrm{M}_n e^{\mathrm{l.M}_{n+l}-\mathrm{l.M}_n}=\mathrm{M}_n\left[1+\mathrm{l.\,M}_{n+l}-\mathrm{l.\,M}_n\right];$$

donc en ajoutant :

$$\mathrm{M}_{n-l}+\mathrm{M}_{n+l}=\mathrm{M}_n\left[2+\mathrm{l.\,M}_{n-l}+\mathrm{l.\,M}_{n+l}-2\,\mathrm{l.\,M}_n\right],$$

et en tenant compte de la relation (10) :

$$\mathrm{M}_{n-l}+\mathrm{M}_{n+l}=2\mathrm{M}_n\left[1-\frac{l^2c^3}{2ab\mu(c-\mu)}\right]=2\mathrm{M}_n e^{-\frac{l^2c^3}{2ab\mu(c-\mu)}}\ (^*).\quad(11)$$

II. *Détermination de* Q.

L'équation (I) donne la somme

$$\mathrm{Q}=\mathrm{M}_{n-l}+\mathrm{M}_{n+l}+\mathrm{S}_0^{l-1}\left[\mathrm{M}_{n-l}+\mathrm{M}_{n+l}\right]-\mathrm{M}_n\quad..\quad(\mathrm{II})$$

ou, par suite de $\mathrm{S}_0^p y=\Sigma_0^{p+1}y$,

$$\mathrm{Q}=\mathrm{M}_{n-l}+\mathrm{M}_{n+l}+\Sigma_0^l\left[\mathrm{M}_{n-l}+\mathrm{M}_{n+l}\right]-\mathrm{M}_n\quad..\quad(\mathrm{III})$$

Posons :

$$\sqrt{g}=\sqrt{\frac{c^3}{2ab\mu(c-\mu)}},$$

d'où

$$\mathrm{M}_n=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{g},\quad \mathrm{M}_{n-l}+\mathrm{M}_{n+l}=\frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}}e^{-l^2g}=\varphi(l);$$

nous aurons :

$$\varphi(0)=\frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}},$$

et

$$\mathrm{Q}=\varphi(l)+\Sigma_0^l\varphi(l)-\frac{1}{2}\varphi(0).$$

En développant par la formule sommatoire d'Euler (voir n° 51)

$$\Sigma_0^l\varphi(l)=\int_0^l\varphi l\,.\,dl-\frac{1}{2}\left[\varphi l-\varphi 0\right],$$

(*) Voir, pour un développement plus complet de cette formule, la note qui termine cette Addition, p. 417.

nous obtiendrons :

$$Q = \varphi l + \int_0^l \varphi l \, . \, dl - \frac{1}{2}\varphi l + \frac{1}{2}\varphi 0 - \frac{1}{2}\varphi 0 = \frac{1}{2}\varphi l + \int_0^l \varphi l \, . \, dl. \quad \text{(IV)}$$

Soit

$$u^2 = l^2 g, \quad l = \frac{u}{\sqrt{g}}, \quad dl = \frac{du}{\sqrt{g}},$$

on aura

$$\varphi l = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-l^2 g} = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$$

$$\varphi l \, . \, dl = \frac{2}{\sqrt{\pi}} du \, . \, e^{-u^2};$$

d'où

$$Q = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u du \, . \, e^{-u^2} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u du e^{-u^2} + \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{2\pi \frac{ab(c-\mu)}{c^3}}} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(A)}$$

Telle est la probabilité qu'en μ épreuves le nombre m des boules blanches qui sortiront de l'urne, sans remettre la boule extraite, est compris entre $k \pm l$, ou entre

$$k \pm u \sqrt{\frac{2\mu ab(c-\mu)}{c^3}},$$

k étant la plus grande valeur entière de $\frac{(\mu+1)(a+1)}{c+2}$.

NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA FORMULE (11) A $\frac{1}{\mu}$ PRÈS.

Développons les facteurs de l'expression M_{n-l} (page 415):

$$\left[1 - \frac{l}{a-m}\right]^{m+l} = e^{(m+l)\,l.\left(1 - \frac{l}{a-m}\right)} = e^{(m+l)\left[-\frac{l}{a-m} - \frac{l^2}{2(a-m)^2} - \frac{l^3}{3(a-m)^3}\right]}$$

$$= e^{-\frac{ml}{a-m} - \frac{l^2}{a-m} - \frac{ml^2}{2(a-m)^2} - \frac{l^3}{2(a-m)^2} - \frac{ml^3}{3(a-m)^3} - \frac{l^4}{3(a-m)^3}}$$

$$\left[1 + \frac{l}{m}\right]^{-m-l} = e^{(-m-l)\,l.\left(1+\frac{l}{m}\right)} = e^{(-m-l)\left[\frac{l}{m} - \frac{l^2}{2m^2} + \frac{l^3}{3m^3}\right]}$$

$$= e^{-l - \frac{l^2}{m} - \frac{l^2}{2m} + \frac{l^3}{3m^2} - \frac{l^4}{3m^3}}$$

$$\left[1 + \frac{l}{b-n}\right]^{n-l} = e^{(n-l)\,l.\left(1+\frac{l}{b-n}\right)} = e^{(n-l)\left[\frac{l}{b-n} - \frac{l^2}{2(b-n)^2} + \frac{l^3}{3(b-n)^3}\right]}$$

$$\left[1 - \frac{l}{n}\right]^{-a} = e^{-a\,l.\left(1 - \frac{l}{a-m}\right)} = e^{-a\left[-\frac{l}{a-m} - \frac{l^2}{2(a-m)^2} - \frac{l^3}{3(a-m)^3}\right]}$$

$$= e^{\frac{al}{a-m} + \frac{al^2}{2(a-m)^2} + \frac{al^3}{3(a-m)^3}}$$

$$\left[1 + \frac{l}{b-n}\right]^{-b} = e^{-b\,l.\left(1+\frac{l}{b-n}\right)} = e^{-b\left[\frac{l}{b-n} - \frac{l^2}{2(b-n)^2} + \frac{l^3}{3(b-n)^3}\right]}$$

$$= e^{-\frac{bl}{b-n} + \frac{bl^2}{2(b-n)^2} - \frac{bl^3}{3(b-n)^3}}.$$

Substituant ces développements dans l'expression M_{n-l}, nous trouverons :

$$M_{n-l} = M_n e^{\frac{al-ml-l^2}{a-m} + \frac{al^2-ml^2-l^3}{2(a-m)^2} + \frac{al^3-ml^3-l^4}{3(a-m)^3} + \frac{nl-bl-l^2}{b-n} + \frac{bl^2-nl^2+l^3}{2(b-n)^2} + \frac{nl^3-bl^3-l^4}{3(b-n)^3}}$$
$$^{-\frac{l^2}{m} - \frac{l^2}{n} + \frac{l^2}{2m} + \frac{l^2}{2n} + \frac{l^3}{2m^2} - \frac{l^3}{2n^2} - \frac{l^3}{3m^2} + \frac{l^3}{3n^2} - \frac{l^4}{3m^3} - \frac{l^4}{3n^3}}$$

$$= M_n\Big[1 + \frac{al - ml - l^2}{a - m} + \frac{al^2 - ml^2 - l^3}{2(a-m)^2} + \frac{al^3 - ml^3 - l^4}{3(a-m)^3}$$

$$+ \frac{nl - bl - l^2}{b - n} + \frac{bl^2 - nl^2 - l^3}{2(b-n)^2} + \frac{nl^3 - bl^3 - l^4}{3(b-n)^3}$$

$$- \frac{l^2}{m} - \frac{l^2}{n} + \frac{l^2}{2m} + \frac{l^2}{2n} + \frac{l^3}{2m^2} - \frac{l^3}{2n^2} - \frac{l^3}{3m^2} + \frac{l^3}{3n^2}$$

$$- \frac{l^4}{3m^3} - \frac{l^4}{3n^3}\Big].$$

On trouvera de même :

$$M_{n+l} = M_n\Big[1 + \frac{-al + ml - l^2}{a - m} + \frac{al^2 - ml^2 + l^3}{2(a-m)^2} + \frac{-al^3 + ml^3 - l^4}{3(a-m)^3}$$

$$+ \frac{-nl + bl - l^2}{b - n} + \frac{bl^2 + nl^2 - l^3}{2(b-n)^2} + \frac{-nl^3 + bl^3 - l^4}{3(b-n)^3}$$

$$- \frac{l^2}{m} - \frac{l^2}{n} + \frac{l^2}{2m} + \frac{l^2}{2n} - \frac{l^3}{2m^2} + \frac{l^3}{2n^2} + \frac{l^3}{3m^2} - \frac{l^3}{3n^3}$$

$$- \frac{l^4}{2m^3} - \frac{l^4}{2n^3}\Big].$$

D'où, faisant la somme, on obtient :

$$M_{n+l} + M_{n-l} = M_n\Big\{2 - \frac{2l^2}{a - m} + \frac{2al^2 - 2ml^2}{2(a-m)^2} - \frac{2l^4}{3(a-m)^3}$$

$$- \frac{2l^2}{b - n} + \frac{2bl^2 - 2nl^2}{2(b-n)^2} - \frac{l^4}{3(b-n)^3}$$

$$- \frac{2l^2}{m} - \frac{3l^2}{n} + \frac{2l^2}{2m} + \frac{2l^2}{2n} - \frac{2l^4}{2m^3} - \frac{2l^4}{2n^3}\Big\}$$

$$= 2M_n\Big\{1 - \frac{l^2}{a - m} + \frac{l^2}{2(a-m)} - \frac{l^2}{b - n} + \frac{l^2}{2(b-n)}$$

$$- \frac{l^2}{m} - \frac{l^2}{n} + \frac{l^2}{2m} + \frac{l^2}{2n}\Big\}$$

$$= 2M_n\Big\{1 - \frac{l^2}{2(a-m)} - \frac{l^2}{2(b-n)} - \frac{l^2}{2m} - \frac{l^2}{2n}\Big\}$$

$$= 2M_n\Big\{1 - l^2\Big[\frac{1}{2(a-m)} + \frac{1}{2(b-n)} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2n}\Big]\Big\}$$

$$= 2M_n\Big\{1 - l^2\Big[\frac{c - \mu}{2(a-m)(b-n)} + \frac{\mu}{2mn}\Big]\Big\}$$

$$= 2M_n\left\{1 - l^2\left[\frac{c - \mu}{\frac{2ab(1-\mu)^2}{c^2}} + \frac{c^2}{2\mu ab}\right]\right\}$$

$$= 2M_n\Big\{1 - l^2\Big[\frac{c^2}{2ab(c-\mu)} + \frac{c^2}{2\mu ab}\Big]\Big\}$$

$$= 2M_n\Big\{1 - l^2\frac{c^2\mu + c^2(c-\mu)}{2ab\mu(c-\mu)}\Big\}$$

$$= 2M_n\Big\{1 - \frac{l^2c^3}{2ab\mu(c-\mu)}\Big\}.$$

NOTES.

I

(Pages 53, 85, 168 et 412.)

Démonstration de la formule

$$1 \,.\, 2 \ldots m = m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m},$$

lorsque m est un nombre très-grand.

Cette démonstration se trouve dans la note suivante, deuxième cas, troisième exemple.

II

SUR LA DÉTERMINATION APPROCHÉE DES INTÉGRALES DE LA FORME $\int_a^b y dx$, D'APRÈS LAPLACE, y ÉTANT UNE FONCTION DE x DE LA FORME $(fx)^s$, ET s UN NOMBRE TRÈS-GRAND.

A. Intégrales simples.

Premier cas. $\frac{dy}{dx}$ *n'est pas très-petit pour les valeurs* a *ou* b *de* x.

Problème. Étant donné $y = (fx)^s$, où s est un nombre très-grand, développer en série convergente

$$u = \int_{x_1}^{x_2} y dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

lorsque aucune des quantités $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_2}$ n'est très-petite.

Solution. Soit $x_1 < \alpha < x_2$, on pourra écrire

$$\int_{x_1}^{x_2} ydx = \int_{x_1}^{\alpha} ydx - \int_{x_2}^{\alpha} ydx.$$

Posons dans la première des intégrales du second membre

$$y = (fx_1)^s\, e^{-t} = y_1 e^{-t},$$

et dans la seconde

$$y = (fx_2)^s\, e^{-t} = y_2 e^{-t}.$$

Si α est la valeur de x qui répond à $t = \infty$, aux limites respectives x_1 et α, x_2 et α de x dans ces deux intégrales répondront celles 0 et ∞ de t; et par suite

$$\int_{x_1}^{x_2} ydx = y_1 \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dx}{dt}\, dt - y_2 \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dx}{dt}\, dt.$$

Comme x est une fonction de t, nous aurons par la formule de Mac-Laurin :

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0} . t + \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{t=0} . \frac{t^2}{1.2} + \ldots$$

En nous rappelant qu'à $t = 0$ répondent $x = x_1$ dans la première intégrale, et $x = x_2$ dans la seconde, nous pourrons écrire :

$$\int_{x_1}^{x_2} ydx = y_1 \int_0^{\infty} e^{-t} dt \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_1} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_1} t + \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{x_1} \frac{t^2}{1.2} + \ldots \right\}$$
$$- y_2 \int_0^{\infty} e^{-t} dt \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_2} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_2} t + \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{x_2} \frac{t^2}{1.2} + \ldots \right\}.$$

En vertu de la formule

$$\int_0^{\infty} t^{\mu-1} e^{-t} dt = \Gamma(\mu) = 1 . 2 \ldots \mu - 1$$

pour μ entier et positif, le second membre prendra la forme ci-dessous :

$$\int_{x_1}^{x_2} ydx = y_1 \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_1} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_1} + \ldots \right\} - y_2 \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_2} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_2} + \ldots \right\}. \quad (a)$$

Or, de $y = y_1 e^{-t}$ ou de $y = y_2 e^{-t}$, on tire en différentiant ogarithmiquement

$$\frac{dy}{y} = -dt; \text{ d'où } \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{\frac{dy}{dx}}.$$

Désignons par v cette valeur; nous en déduirons

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx};$$

de même

$$\frac{d^3x}{dt^3} = v\frac{d . v\frac{dv}{dx}}{dx}, \text{ etc.}$$

Si nous substituons ces valeurs dans l'expression (a), nous aurons, en observant que v devient facteur commun à tous les termes :

$$\int_{x_1}^{x_2} ydx = y_1 v_{x_1} \left\{ 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x_1} + \left(\frac{d . v\frac{dv}{dx}}{dx}\right)_{x_1} + \ldots \right\}$$
$$- y_2 v_{x_2} \left\{ 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x_2} + \left(\frac{d . v\frac{dv}{dx}}{dx}\right)_{x_2} + \ldots \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I})$$

En remplaçant dans cette formule v par sa valeur en fonction de y, et ensuite v et y par leurs valeurs en fonction de x, on trouvera aisément qu'elle peut s'écrire

$$\int_{x_1}^{x_2} ydx = y_2 \left(y : \frac{dy}{dx}\right)_{x_2} \left\{ 1 + \left[\frac{y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}\right]_{x_2} + \ldots \right\}$$
$$- y_1 \left(y : \frac{dy}{dx}\right)_{x_1} \left\{ 1 + \left[\frac{y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}\right]_{x_1} + \ldots \right\} \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}')$$

ou bien

$$\int_{x_1}^{x_2} (fx)^s dx = (fx_2)^s \frac{fx_2}{sf'x_2} \left\{ 1 + \frac{s^2(f'x_2)^2 fx_2 - s(s-1)(f'x_2)^2 - sf''x_2 (fx_2)^2 + \ldots}{s^3(f'x_2)^3} \right\}$$
$$- (fx_1)^s \frac{fx_1}{sf'x_1} \left\{ 1 + \frac{s^2(f'x_1)^2 fx_1 - s(s-1)(f'x_1)^2 - sf''x_1 (fx_1)^2 + \ldots}{s^3(f'x_1)^3} \right\} \quad (\mathrm{I}'')$$

28

On voit que si s est très-grand, et si $f'x$ n'est pas très-petit pour $x = x_1$ ou $x = x_2$, ces formules sont rapidement convergentes.

Exemple I. Soit à évaluer l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r+s}{r}x}\left[pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right]^{r-1}dx.$$

Posons

$$y = e^{-\frac{r+s}{r}x}\left[pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right]^{r-1},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-\frac{r+s}{r}x}\left[pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right]^{r-2}\left[p(1+s)e^{-\frac{sx}{r}}+(1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)\right].$$

Les limites sont ici $x_1 = 0$, $x_2 = \infty$; par suite $y_1 = 1$, $y_2 = 0$; et la formule (a) se réduira par conséquent à

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = y_1\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_1}+\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_1}+\cdots\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a')$$

On voit aisément que $\frac{dy}{dx}$ n'est pas très-petit pour la valeur x_1 de x. Nous pourrons donc appliquer la méthode et poser

$$y = y_1 e^{-t} = e^{-t};$$

ou

$$e^{-t} = e^{-\frac{r+s}{r}x}\left[pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right]^{r-1};$$

d'où l'on tire, en prenant les logarithmes népériens :

$$t = \left(1+\frac{s}{r}\right)x-(r-1)\,\mathrm{l.}\left[pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right].$$

Différentiant on obtient :

$$\frac{dt}{dx} = 1+\frac{s}{r}+(r-1)\frac{pe^{-\frac{sx}{r}}\frac{s}{r}}{pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p}$$

$$= \frac{p(1+s)e^{-\frac{sx}{r}}+(1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)}{pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p};$$

par suite

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p}{p(1+s)e^{-\frac{sx}{r}}+(1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)},$$

et, comme $x_1 = 0$:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_1} = \frac{1}{1+ps+(1-p)\frac{s}{r}};$$

puis

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{p(1-p)(r-1)\frac{s^2}{r^2}e^{-\frac{sx}{r}}}{\left[p(1+s)e^{-\frac{sx}{r}}+(1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)\right]^2};$$

et

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_1} = \frac{1}{1+ps+(1-p)\frac{s}{r}}\cdot\frac{p(1-p)(r-1)\frac{s^2}{r^2}}{\left[1+ps+(1-p)\frac{s}{r}\right]^2}.$$

Substituant ces valeurs dans la formule (a'), on aura :

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r+s}{r}x}\left[pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right]^{r-1}dx$$

$$= \frac{1}{1+ps+(1-p)\frac{s}{r}}\left\{1+\frac{p(1-p)s^2\left(1-\frac{1}{r}\right)}{r\left[1+ps+(1-p)\frac{s}{r}\right]^2}+\cdots\right\}.$$

Exemple II. Développer en série convergente l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p(1-x)^q\,dx,$$

p et q étant de très-grands nombres.

Posons

$$y = x^p(1-x)^q,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left\{p-(p+q)x\right\}.$$

Les limites sont ici

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2};$$

d'où

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{2^{p+q}};$$

et

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1} = \frac{p(p-q)}{2^{p+q}},$$

quantité qui n'est pas très-petite.

En faisant donc

$$y = y_2 e^{-t} = \frac{1}{2^{p+q}} e^{-t} = x^p (1-x)^q,$$

la formule (I) deviendra

$$\int_0^{\frac{1}{2}} y dx = -y_2 v_2 \left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x_2} + \cdots\right\}.$$

L'équation précédente donne, par la différentiation,

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{x(1-x)}{p-(p+q)x},$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(2x-1)[p-(p+q)x]+(p+q)x(x-1)}{[p-(p+q)x]^2};$$

d'où l'on tire, en se rappelant que $x_2 = \frac{1}{2}$:

$$v_{x_2} = -\frac{1}{2(p-q)}; \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x_2} = -\frac{p+q}{(p-q)^2};$$

et enfin

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p (1-x)^q dx = \frac{1}{2^{p+q+1}} \left\{1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} + \cdots\right\}.$$

Deuxième cas. $\frac{dy}{dx}$ *est très-petit pour les valeurs* x_1 *ou* x_2 *de* x.

Supposons que x_2 soit la valeur de x déduite de l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$, c'est-à-dire celle qui répond au maximum de y; et faisons

$$x = x_2 + (x - x_2);$$

la valeur de y développée suivant les puissances de $x - x_2$ sera

$$y = y_2 + (x-x_2)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_2} + \frac{(x-x_2)^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_2} + \cdots,$$

ou, comme $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_2} = 0$:

$$y = y_2 + \frac{(x-x_2)^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_2} + \cdots$$

$$= y_2 \left\{1 + \frac{(x-x_2)^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_2} \frac{1}{y_2} + \cdots\right\};$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{l}.\, y - \mathrm{l}.\, y_2 = \mathrm{l}.\left\{1 + \frac{(x-x_2)^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx_2}\right)_{x_2} \frac{1}{y_2} + \cdots\right\}$$

$$= (x-x_2)^2 \left[\left(\frac{d^2y}{dx_2}\right)_{x_2} \frac{1}{y_2} + \cdots\right].$$

En faisant ce dernier membre égal à $-t^2$, on aura

$$y = y_2 e^{-t^2},$$

d'où

$$t = \sqrt{\mathrm{l}.\, y_2 - \mathrm{l}.\, y}.$$

Comme t^2 a $(x-x_2)^2$ pour facteur, on peut poser

$$t = \frac{x-x_2}{u},$$

d'où

$$u = \frac{x-x_2}{t} = \frac{x-x_2}{\sqrt{\mathrm{l}.\, y_2 - \mathrm{l}.\, y}}.$$

En développant $x = x_2 + ut$ par la formule de Lagrange, on trouvera :

$$x = x_2 + u_{x_2} t + \left[\frac{d(u^2)}{dx}\right]_{x_2} \cdot \frac{t^2}{1.2} + \cdots;$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = u_{x_2} + \left(\frac{d(u^2)}{dx}\right)_{x_2} \cdot t + \cdots$$

Soient α et β des limites de x qui diffèrent peu de x_2, et T, T′ les limites correspondantes de t; on pourra écrire :

$$\int_\alpha^\beta y dx = y_2 \int_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}'} e^{-t^2} \frac{dx}{dt} dt$$

$$= y_2 \int_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}'} e^{-t^2} dt \left\{u_{x_2} + \left(\frac{d.u^2}{dx}\right)_{x_2} t + \cdots\right\} \quad \ldots\ldots \text{(A)}$$

Si a et b sont les valeurs de x qui rendent y nul, les valeurs correspondantes de t seront $\pm\infty$, et par suite

$$\int_a^b ydx = y_2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt\left\{u_{x_2} + \left(\frac{d.u^2}{dx}\right)_{x_2}.t + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2.u^3}{dx^2}\right)_{x_2}.t^2 + \cdots\right\}$$

$$= y_2\left\{u_{x_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt + \left(\frac{d.u^2}{dx}\right)_{x_2}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}dt + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2.u^3}{dx^2}\right)_{x_2}\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-t^2}dt + \cdots\right\}$$

$$= y_2\left\{u_{x_2}\sqrt{\pi} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2.u^3}{dx^2}\right)_{x_2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \cdots\right\}$$

$$= y_2\sqrt{\pi}\left\{u_{x_2} + \frac{1}{4}\left(\frac{d^2.u^3}{dx^2}\right)_{x_2} + \cdots\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(B)}$$

Remarque I. Voici un moyen commode de calculer les termes u_{x_2}, $\left(\frac{d^2.u^3}{dx^2}\right)_{x_2}$, etc.

Comme $x - x_2$ est facteur de t, on peut poser :

$$t^2 = \mathrm{l}.\,y_2 - \mathrm{l}.\,y = (x-x_2)^2\left[\mathrm{A} + \mathrm{B}(x-x_2) + \mathrm{C}(x-x_2)^2 + \cdots\right].$$

En différentiant cette égalité plusieurs fois de suite, et posant $x = x_2$, on trouve :

$$-\left(\frac{d\,\mathrm{l}.\,y}{dx}\right)_{x_2} = 0;\quad -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\mathrm{l}.\,y}{dx^2}\right)_{x_2} = \mathrm{A};\quad -\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3\,\mathrm{l}.\,y}{dx^3}\right)_{x_2} = \mathrm{B};$$

$$-\frac{1}{2.3.4}\left(\frac{d^4\,\mathrm{l}.\,y}{dx^4}\right)_{x_2} = \mathrm{C},\ \text{etc.}$$

Or de

$$u = \frac{x - x_2}{(\mathrm{l}.\,y_2 - \mathrm{l}.\,y)^{\frac{1}{2}}} = \left[\mathrm{A} + \mathrm{B}(x-x_2) + \mathrm{C}(x-x_2)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

on tire

$$u_{x_2} = \mathrm{A}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\mathrm{l}.\,y}{dx^2}\right)_{x_2}}}.$$

$$u^3 = \mathrm{A}^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\mathrm{A}^{-\frac{5}{2}}\mathrm{B}(x-x_2) + \left(-\frac{3}{2}\mathrm{A}^{-\frac{5}{2}}\mathrm{C} + \frac{3.5}{2.4}\mathrm{A}^{-\frac{7}{2}}\mathrm{B}^2\right)(x-x_2)^2 + \cdots$$

d'où, en différentiant deux fois de suite,

$$\frac{d^2\mathrm{U}^3}{dx^2} = 1.2\left(-\frac{3}{2}\mathrm{A}^{-\frac{5}{2}}\mathrm{C} + \frac{3.5}{2.4}\mathrm{A}^{-\frac{7}{2}}\mathrm{B}^2\right) + (x-x_2)[\ldots],$$

et par suite

$$\left(\frac{d^2\mathrm{U}^3}{dx^2}\right)_{x_2} = 1.2\left(-\frac{3}{2}\mathrm{A}^{-\frac{5}{2}}\mathrm{C} + \frac{3.5}{2.4}\mathrm{A}^{-\frac{7}{2}}\mathrm{B}^2\right).$$

Remarque II. De $\frac{d^2\,\mathrm{l}.\,y}{dx^2} = \frac{d^2y}{ydx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.\frac{1}{y^2}$, et de ce que $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $x = x_2$, on déduit

$$\left(\frac{d^2\,\mathrm{l}.\,y}{dx^2}\right)_{x_2} = \left(\frac{d^2y}{ydx^2}\right)_{x_2};$$

la formule (B) s'écrira donc, en désignant par Y la valeur de y pour $x = x_2$:

$$\int_a^b ydx = \frac{\sqrt{2\pi}\,\mathrm{Y}^{3/2}}{\sqrt{-\left(\frac{d^2y}{dx_2}\right)_{x_2}}} + \cdots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(C)}$$

Exemple I. Chercher en série convergente la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx,$$

p et q étant des nombres très-grands.

Posons

$$y = x^p(1-x)^q,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left\{p - (p+q)x\right\}.$$

Si nous égalons le second membre à zéro, nous trouvons

$$x_2 = \frac{p}{p+q};$$

d'où

$$y_2 = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p\left(\frac{q}{p+q}\right)^q.$$

Comme $\frac{dy}{dx}$ est nul pour les limites $x = 0$, $x = 1$, on ne peut pas employer la méthode donnée dans le premier cas.

C'est de celle du second que nous devrons faire usage en posant

$$y = y_2e^{-t^2}.$$

Et puisque pour $x = 0$ et $x = 1$ on a $y = 0$, d'où $t = \pm\infty$, on devra employer l'une des formules (B) ou (C).

Calculons donc

$$u_{x_2}\quad \text{et}\quad \left(\frac{d^2u^3}{dx^2}\right)_{x_2}.$$

De $\mathrm{l}.\,y = p\,\mathrm{l}.\,x + q\,\mathrm{l}.\,(1-x)$ on déduit

$$\frac{d\,\mathrm{l}.\,y}{dx} = \frac{p}{x} - \frac{q}{1-x}$$

$$-\frac{d^2\,\mathrm{l}.\,y}{dx^2} = -\left(\frac{p}{x^2} + \frac{q}{(1-x)^2}\right); \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

d'où

$$A = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\mathrm{l}.\,y}{dx^2}\right)_{x_2} = \frac{(p+q)^3}{2pq}.$$

Donc

$$u_{x_2} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\mathrm{l}.\,y}{dx^2}\right)_{x_2}}} = \sqrt{\frac{2pq}{(p+q)^3}}.$$

D'autre part, de

$$u = \frac{x - x_2}{t} = \left[A + B(x-x_2) + C(x-x_2)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

on tire

$$\left(\frac{d^2u^3}{dx^2}\right)_{x_2} = 1.2\left(\frac{3.5}{2.4}\frac{B^2}{A^{7/2}} - \frac{3C}{2A^{5/2}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Nous connaissons A; il nous reste à calculer B et C. Pour cela, différentions deux fois de suite l'équation (1):

$$-\frac{d^3\,\mathrm{l}.\,y}{1.2.3\,dx^3} = \frac{p}{3x^3} - \frac{q}{3(1-x)^3}$$

$$-\frac{d^4\,\mathrm{l}.\,y}{1\,..\,4\,dx^4} = \frac{p}{4x^4} - \frac{q}{4(1-x)^4};$$

d'où

$$B = -\frac{1}{2\,.\,3}\left(\frac{d^3\,\mathrm{l}.\,y}{dx^3}\right)_{x_2} = \frac{(p+q)^4}{3p^2q^2}(p-q);$$

$$C = -\frac{1}{1\,..\,4}\left(\frac{d^4\,\mathrm{l}.\,y}{dx^4}\right)_{x_2} = \frac{(p+q)^5}{4p^3q^3}(p^2 - pq + q^2);$$

Substituant ces valeurs dans l'expression (2):

$$\left(\frac{d^2u^3}{dx^2}\right)_{x_2} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{pq\,(p+q)^3}}(p^2 - 11pq + q^2).$$

Cela posé, la formule (B) donne

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx = \frac{p^{p+\frac{1}{2}}\,q^{q+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}\left\{1 + \frac{(p+q)^2 - 13pq}{12pq\,(p+q)}\right\}.$$

Exemple II. Évaluer l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{rn-n}(x-r)^n e^{-x}\,dx,$$

rn étant un nombre très-grand.

Posons

$$y = x^{rn-n}(x-r)^n e^{-x},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = x^{rn-n}(x-r)^n e^{-x}\left\{\frac{rn-n}{x} + \frac{n}{x-r} - 1\right\}.$$

Aux limites $x = 0$ et $x = \infty$ on a $\frac{dy}{dx} = 0$; on doit donc employer la méthode du second cas en posant

$$y = y_2\,e^{-t^2}.$$

En égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, on trouve

$$\frac{rn-n}{x} + \frac{n}{x-r} - 1 = 0;$$

d'où

$$x_2 = \frac{rn+r}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(rn-r)^2 + 4r^n}$$

$$= \frac{rn+r}{2} + \frac{rn}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}\frac{6}{rn}\right\}$$

$$= rn + \frac{n}{n-1},$$

en s'arrêtant aux termes de l'ordre de $\frac{1}{rn}$.

Aux limites 0 et ∞ de x répondent celles $\pm$ de ∞ de t; on aura donc par la formule (C):

$$\int_0^\infty x^{n-n}(x-r)^n e^{-x}\,dx = \frac{Y^{3/2}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\left(\frac{d^2y}{dx_2^2}\right)_{x_2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}\,(rn)^{rn+\frac{1}{2}}e^{-n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\sqrt{r}}{\sqrt{(r-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 + 1}}.$$

EXEMPLE III. Évaluer l'intégrale

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \Gamma(n+1) = 1.2\ldots n,$$

n étant un nombre très-grand.

Posons

$$y = x^n e^{-x},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = x^n e^{-x}\left(\frac{n}{x} - 1\right).$$

Ces deux valeurs deviennent nulles aux limites $x = 0$ et $x = \infty$.

En posant

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

on trouve

$$x_2 = n,$$

d'où

$$Y = n^n e^{-n}.$$

De plus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^n e^{-x}\left\{\frac{n(n-1)}{x^2} - \frac{2n}{x} + 1\right\}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_2} = n^n e^{-n}\left\{\frac{n(n-1)}{n^2} - 1\right\} = -n^{n-1}e^{-n};$$

d'où enfin par la formule (C) :

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}\,(n^n e^{-n})^{3/2}}{\sqrt{n^{n-1}e^{-n}}} = \sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}.$$

B. Intégrales doubles.

Proposons-nous d'évaluer en série convergente l'intégrale

$$\int_a^b\int_\alpha^\beta U\,dx\,dy, \quad U = [f(x,y)]^s,$$

s étant un nombre très-grand, et U devenant nul aux limites a, b de x, et α, β de y.

Soient $x = x_2$ et $y = y_2$ les valeurs de x et y tirées de $\frac{dU}{dx} = 0$, $\frac{dU}{dy} = 0$; et écrivons pour abréger

$$U_2 = [f(x_2, y_2)]^s; \quad \left(\frac{dU}{dx}\right)_2 = \frac{d\,[f(x_2,y_2)]^s}{dx}, \text{ etc.}$$

Si nous posons

$$U = U_2 e^{-t^2-v^2}, \quad x = x_2 + \theta, \quad y = y_2 + \eta,$$

la formule de Mac-Laurin nous donnera

$$U = U_2 + \left(\frac{dU}{dx}\right)_2\theta + \left(\frac{dU}{dy}\right)_2\eta + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_2\theta^2 + 2\left(\frac{d^2U}{dxdy}\right)_2\theta\eta + \left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_2\eta^2\right] + \text{etc.}$$

$$= U_2 + \frac{1}{2}[\cdots] + \text{etc.}$$

$$= U_2\left\{1 + \frac{1}{2U_2}[\cdots]\right\}$$

$$= U_2(1+z),$$

en faisant

$$z = \frac{1}{2U_2}\left[\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_2\theta^2 + 2\left(\frac{d^2U}{dxdy}\right)_2\theta\eta + \left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_2\eta^2\right].$$

On aura par suite :

$$\text{l.}\,U = \text{l.}\,U_2 + \text{l.}\,(1+z) = \text{l.}\,U_2 + \frac{z}{2};$$

et de là :

$$\text{l.}\,\frac{U_2}{U} = t^2 + v^2 = -\frac{z}{2} = -\frac{1}{2U_2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_2\theta^2 - \frac{1}{U_2}\left(\frac{d^2U}{dxdy}\right)_2\theta\eta - \frac{1}{2U_2}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_2\eta^2,$$

ou bien, en posant :

$$A = -\frac{1}{2U^2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_2;$$

$$B = -\frac{1}{U_2}\left(\frac{d^2U}{dxdy}\right)_2\theta\eta;$$

$$C = -\frac{1}{2U_2}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_2,$$

il viendra

$$t^2 + v^2 = A\theta^2 + 2B\theta\eta + C\eta^2$$

$$= A\left(\theta + \frac{B}{A}\eta\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)\eta^2.$$

Cette relation sera vérifiée si nous faisons

$$t = \sqrt{A}\left(\theta + \frac{B}{A}\eta\right) \quad \text{et} \quad v = \sqrt{C - \frac{B^2}{A}}\,\eta. \quad \ldots\ldots (1)$$

Comme nous avons posé

$$U = U_2 e^{-t^2 - v^2},$$

et que U est nul aux limites a, b de x et α, β de y, il s'ensuit que les limites correspondantes de t et v sont $\pm \infty$; l'intégrale proposée deviendra donc

$$\int_a^b \int_\alpha^\beta U dx dy = \int_{a'}^{b'} \int_{\alpha'}^{\beta'} U' d\theta d\eta = U_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 - v^2} K dt dv;$$

il s'agit de déterminer ces trois derniers facteurs.

Or on a

$$dv = \frac{dv}{d\theta} d\theta + \frac{dv}{d\eta} d\eta;$$

$$dt = \frac{d\theta}{dt} d\theta + \frac{d\eta}{dt} d\eta;$$

et puisque, dans la seconde intégrale double, η est considéré comme constant quand on intègre relativement à θ, et dans la troisième, t quand on intègre relativement à v, ces équations deviendront :

$$dt = \frac{dt}{d\theta} d\theta$$

$$dv = \frac{dv}{d\theta} d\theta + \frac{dv}{d\eta} d\eta$$

$$0 = \frac{dt}{d\theta} d\theta + \frac{dt}{d\eta} d\eta.$$

De ces deux dernières on tire

$$dv = \frac{\frac{dv}{d\eta}\frac{dt}{d\theta} - \frac{dv}{d\theta}\frac{dt}{d\eta}}{\frac{dt}{d\theta}} d\eta;$$

et par suite

$$dt dv = \left(\frac{dv}{d\eta}\frac{dt}{d\theta} - \frac{dv}{d\theta}\frac{dt}{d\eta}\right) d\theta d\eta;$$

d'où

$$d\theta d\eta = \frac{dt dv}{\frac{dv}{d\eta}\frac{dt}{d\theta} - \frac{dv}{d\theta}\frac{dt}{d\eta}} = K dt dv.$$

Le dénominateur est une fonction de θ et η qu'on réduit à une fonction de t et v au moyen des équations (1).

L'intégrale proposée est ainsi ramenée à une série de termes de la forme

$$h \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t^n v^m e^{-t^2 - v^2} dt dv;$$

ces termes sont nuls si n ou m est impair.

S'ils sont tous deux pairs, on calculera ces termes par la formule :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2i} v^{2k} e^{-t^2 - v^2} dt dv = \frac{1.3 \ldots 2i-1}{2^i} \frac{1.3 \ldots 2k-1}{2^k} \pi.$$

III

(Page 155.)

Nous avons cru que les formules (A) et (B) de la page 155 exigeaient quelques développements, quoique nous n'en ayons trouvé aucun dans le texte.

Il s'agit d'abord d'exprimer $\int_\alpha^\beta y dx$ en prenant pour variable la quantité t déterminée par la relation :

$$y = y_m e^{-t^2},$$

d'où l'on tire

$$t = \sqrt{\text{l}.\, y_m - \text{l}.\, y};$$

de sorte que les limites de t correspondantes à celles β et α de n seront

$$\gamma = \sqrt{\text{l}.\, y_m - \text{l}.\, y_\beta},$$

$$\gamma' = \sqrt{\text{l}.\, y_m - \text{l}.\, y_\alpha}.$$

On voit à la fin du n° 71 que ces deux valeurs sont égales en grandeur absolue; d'où il résulte que, les deux limites étant différentes, le premier radical doit être pris avec le signe +, le second avec le signe —, ce que nous indiquerons en dénotant la limite inférieure par $-\gamma'$.

On a supposé que x diffère peu de m, et par suite y de y_m, entre les limites α et β, de sorte qu'entre ces limites $x-m$ et t ont des valeurs très-petites.

Si donc on pose

$$x-m=ut,$$

d'où

$$dx=udt+tdu,$$

la valeur de u différera également très-peu de u_m entre les limites assignées, et t étant très-petit, on pourra écrire

$$dx=u_m dt;$$

d'où

$$\int_{\alpha}^{\beta} ydx=\int_{-\gamma'}^{\gamma} y_m u_m e^{-t^2}\,dt=y_m u_m\int_{-\gamma'}^{\gamma} e^{-t^2}\,dt \;\ldots\ldots\; \text{(A)}$$

Si a et b sont les valeurs de x qui rendent y nul, comme les valeurs correspondantes de t seront $\pm\infty$, on aura :

$$\int_{a}^{b} ydx=y_m u_m\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt=y_m u_m\sqrt{\pi} \;\ldots\ldots\; \text{(B)}$$

ERRATA.

Nota. — La lettre b placée en indice à la suite du numéro de la ligne indique qu'on doit compter les lignes à partir du bas de la page.

Pages	lignes.				
3,	8_b,	*au lieu de :*	simultanés,	*lisez :*	simultanés, indépendants l'un de l'autre.
4,	16,	»	P_1P',	»	PP'.
41,	2,	»	$\mathrm{l}.(n-1)-\mathrm{l}.(n)$,	»	$\mathrm{l}.\left(1-\frac{1}{n}\right)$.
56,	15,	»	α,	»	a.
56,	5_b,	»	$u_{y,x}=\ldots\ldots$	»	$u_{y,x}=\ldots\ldots$ (1)
71,	15 et 16	»	$\left\{\begin{array}{l} n=1,2\ldots\ldots \\ r=1,2\ldots\ldots \end{array}\right.$	»	$n=1,2.\ldots\ldots$ $\ldots\ldots$ $r=1,2.\ldots\ldots$
82,	5,	»	$\sqrt{-\frac{d^2y}{dx^2}}$,	»	$\sqrt{-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_2}}$.
83,	7,	»	ϖ,	»	π.
85,	10,	»	$\mu-1$,	»	$\mu+1$.
85,	10,	»	$+\delta'$,	»	$-\delta'$.
85,	11,	»	le terme,	»	les termes.
114,	4_b,	»	$\frac{s}{\mu}$,	»	$\frac{S}{\mu}$.
121,	10,	»	ou certain,	»	et certain.
141,	5,	»	$ds\ (b)$,	»	$ds,\ \ (b)$.
141,	5_b,	»	S,	»	s.
145,	6_b,	»	pourvu que,	»	pour que.
153,	10,	»	$n-1$,	»	$\overline{n-1}$.
155,	3_b,	»	x,	»	N.
155,	1_b,	»	note II,	»	note III.
161,	2_b,	»	pour,	»	par.
175,	2,	»	$d^2.y$,	»	$d^2\,\mathrm{l}.\,y$.
182,	10_b,	*ajoutez :*	en négligeant les puissances de θ supérieures à la troisième.		
190,	6_b,	*au lieu de :*	$P'\Pi'$,	*lisez :*	$P\Pi'$.
244,	6_b et 7_b	»	plusieurs observations,	»	un grand nombre d'observations.
265,	6_b,	»	A décès,	»	A de décès.
288,	4,	»	N° 112,	»	N° 110.
290,	3_b, 5_b et 6_b	»	$\int_{-r}^{r}$,	»	$\int_{-\infty}^{\infty}$.

Pages.	Lignes.				
343,	11_b,	*au lieu de :*	$r+1$,	*lisez :*	y_{r+1}.
343,	6_b,	»	De la probabilité,	»	De la probabilité Q.
361,	11_b,	»	$l^{\theta\sqrt{-1}}$,	»	$e^{\theta\sqrt{-1}}$.
367,	5_b,	»	Fonctions,	»	Fonction.
369,	2 et 16,	»	h_i,	»	h_1.
369,	5,	»	$h_5 x$,	»	$h_s x$.
381,	8,	»	$\beta^2 = Sk_h^2(\quad)$,	»	$\beta^2 = Sk_h^2(\quad)^2$.
384,	9.	»	a'_h,	»	a_h^2.
388,	6_b,	»	ε_h,	»	ε.
389,	6,	»	$\nu_h = l(\quad)$,	»	$\nu_h = \mathrm{l}.(\quad)$.
391,	2,	»	z_2, z_3,	»	Z_2, Z_3.
395,	4,	»	$\frac{1}{6}\,{}_3B$,	»	$\frac{1}{6}B_3$.
397,	9_b,	»	at,	»	dt.
402,	5_b,	»	$a^2(h_{i,i}^2+\cdots)$	»	$a^2(h_{1,i}^2+\cdots)$.
403,	4,	»	$b_{i,i}\sqrt{\frac{\nu}{b_{i,i}}}\sqrt{\nu b_{i,i}}$	»	$b_{i,i}\sqrt{\frac{\nu}{b_{i,i}}} = \sqrt{b_{i\,i}}$.
403,	6,	»	ce que,	»	ce qui.
415,	7,	»	S_0^{l-i},	»	S_0^{l-1}.

Il existe en outre un certain nombre d'omissions que nous n'avons aperçues qu'en relisant les feuilles tirées : elles consistent dans la suppression, par abréviation, des facteurs *dl* ou *dt*. Nous les avons signalées en plusieurs endroits, soit dans le texte, soit en note. Le lecteur s'en apercevra sans difficulté dans les autres passages, tandis que les mentionner dans l'*errata* eût été excessivement long et en eût rendu la lecture fort pénible.

Enfin le lecteur est prié de refaire la figure de la page 43, dont les proportions sont inexactes.

F. F.

TABLE DES MATIÈRES.

TABLES MODERNES DE MORTALITÉ (*)

(HOMMES ET FEMMES).

AGE.	Norwége.	Suède.	Angleterre.	France.	Belgique.	Pays-Bas.	Bavière.	Suisse.
0	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
1	895	848	851	813	850	804	697	784
2	852	816	797	765	788	747	651	756
3	840	794	769	739	758	719	629	742
4	823	779	750	722	739	701	611	733
5	811	768	737	710	725	789	596	726
6	802	760	727	702	716	680	587	720
7	794	752	719	695	707	672	580	716
8	789	746	713	690	700	666	575	712
9	784	741	707	685	694	661	571	709
10	780	737	703	681	689	656	568	706
11	776	734	698	677	683	653	565	703
12	772	730	695	674	678	649	563	701
13	768	727	691	671	673	645	559	698
14	764	724	688	667	668	642	557	695
15	761	721	685	664	663	639	554	692
16	758	717	681	660	657	635	550	690
17	755	714	677	656	652	632	547	686
18	751	710	673	652	647	627	543	683
19	746	707	668	647	641	623	540	680
20	742	703	663	642	635	618	536	676
21	737	700	657	636	629	613	532	672
22	732	695	651	630	623	608	527	667
23	726	690	646	623	616	602	522	663
24	722	686	640	617	610	596	517	658

(*) Voir *Tables de mortalité et leur développement;* par Ad. Quetelet, p. 18.

AGE.	Norwége.	Suède.	Angleterre.	France.	Belgique.	Pays-Bas.	Bavière.	Suisse.
25	747	681	634	611	604	591	512	653
26	712	676	628	605	597	585	507	649
27	707	671	622	600	591	580	502	643
28	702	666	616	594	585	573	496	639
29	697	661	610	589	579	567	491	634
30	691	656	604	584	573	561	485	629
31	686	651	597	579	567	555	480	624
32	681	645	591	573	561	549	475	619
33	675	640	585	569	555	542	469	614
34	669	633	578	564	549	535	464	609
35	663	627	572	559	543	528	458	603
36	657	620	565	554	537	522	453	597
37	654	614	559	549	530	516	448	592
38	647	607	552	543	524	509	442	585
39	641	600	545	538	518	502	437	580
40	635	593	539	533	511	494	431	573
41	629	585	532	527	504	487	426	567
42	623	578	525	522	497	480	420	561
43	616	570	517	516	490	472	414	553
44	609	562	510	510	483	466	408	545
45	603	554	503	504	476	459	402	538
46	595	545	495	498	469	451	396	532
47	590	537	488	492	462	444	389	525
48	584	529	480	486	455	437	383	517
49	577	520	472	480	448	430	376	509
50	570	511	464	473	440	423	368	501
51	563	502	456	467	432	415	361	492
52	556	492	448	460	424	406	353	483
53	549	482	439	452	415	397	345	474
54	539	471	430	445	406	388	337	465

AGE.	Norwége.	Suède.	Angleterre.	France.	Belgique.	Pays-Bas.	Bavière.	Suisse.
55	532	460	421	436	397	378	328	455
56	524	449	412	428	387	368	319	445
57	514	438	402	419	377	358	310	434
58	505	426	391	410	367	348	300	422
59	496	414	381	400	356	337	290	411
60	486	401	370	389	345	327	280	399
61	476	388	358	378	334	317	270	386
62	465	375	347	366	322	305	260	372
63	454	361	335	354	310	294	247	358
64	441	347	322	340	297	281	235	341
65	428	332	309	326	284	269	223	323
66	413	316	296	312	271	254	210	302
67	400	299	282	297	258	240	197	282
68	384	281	268	281	244	226	184	261
69	366	264	253	265	230	211	172	242
70	349	246	238	249	216	197	159	225
71	329	228	223	232	201	182	146	206
72	308	210	207	216	186	168	133	188
73	289	192	192	199	170	154	120	170
74	269	174	176	182	154	139	107	152
75	250	157	161	165	139	126	95	134
76	231	140	146	149	125	112	83	120
77	211	124	131	133	112	99	72	104
78	193	108	117	118	99	86	62	85
79	175	92	103	103	87	74	53	72
80	157	78	90	89	75	64	45	57
81	139	66	78	77	65	54	38	49
82	122	54	67	65	55	43	31	40
83	105	44	56	55	46	35	26	33
84	89	35	47	45	38	28	21	27

AGE.	Norwége.	Suède.	Angleterre.	France.	Belgique.	Pays-Bas.	Bavière.	Suisse.
85	75	26	39	37	31	22	18	20
86	62	19	31	30	25	17	15	15
87	55	14	25	24	20	13	12	12
88	42	10	20	18	16	10	10	8
89	35	7	15	14	12	7	9	6
90	26	4	12	11	9	5	7	3
91	20	3	9	8	7	3	6	2
92	16	2	6	6	5	2	5	1
93	12	1	4	4	4	2	4	1
94	9	1	3	3	3	1	3	1
95	7	1	2	2	3	1	2	»
96	5	1	2	1	2	1	2	»
97	4	»	1	1	1	»	1	»
98	3	»	1	1	1	»	1	»
99	2	»	»	»	»	»	»	»
100	1	»	»	»	»	»	»	»
101	1	»	»	»	»	»	»	»