PRÉCIS DU COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE

PRÉCIS DU COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE

PAR

J.-B. BRASSEUR

Professeur ordinaire à l'Université de Liége, membre de l'Académie royale de Belgique, membre fondateur de la Société royale des sciences de Liége, membre de la Société des sciences naturelles de Luxembourg, Chevalier de l'Ordre Léopold, Officier de la Couronne de Chêne

TERMINÉ D'APRÈS LES MANUSCRITS DE L'AUTEUR

PAR F. FOLIE

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES, RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE DES MINES. PROFESSEUR A L'ÉCOLE INDUSTRIELLE DE LIÉGE.

LIÉGE

IMPRIMERIE DE J.-G. CARMANNE, RUE St-ADALBERT, 8.

1868

AVANT PROPOS.

Lorsque Brasseur ressentit les premières atteintes de la maladie qui l'a enlevé, plein encore de force et d'activité intellectuelle, la publication de son Précis de mécanique appliquée en était arrivée à la théorie des machines soufflantes ; il nous chargea de veiller à l'impression de cet ouvrage, qu'il avait hâte de terminer.

A sa mort, survenue bientôt après, nous recueillîmes avec soin tout ce qu'il avait laissé de manuscrits, et nous trouvâmes au complet :

Une théorie détaillée, une autre plus abrégée des machines à vapeur d'après Pambour;
La théorie des roues à palettes planes mûes par dessous, et des roues de côté ;
La théorie de la turbine Fourneyron ;
En outre, des notes incomplètes sur l'écoulement et le travail de l'eau en général, sur les roues à augets, et sur la roue Poncelet.

La tâche que la reconnaissance nous imposait consistait à achever, au moyen de ces notes, le Précis de notre maître, en lui conservant, autant que possible, la forme qu'il lui avait donnée lui-même.

Nous avions d'abord à choisir entre les deux théories de la machine à vapeur d'après Pambour.

La théorie mécanique de la chaleur avait fortement ébranlé la confiance de Brasseur dans l'exactitude des hypothèses de Pambour, et nous croyons que c'est pour cette raison, qu'après avoir rédigé d'abord la théorie complète de ce savant, il s'était résolu ensuite à ne l'exposer qu'en abrégé ; nous avons donc cru devoir choisir la théorie succincte de préférence à la théorie détaillée.

nous bornerons à y renvoyer le lecteur que les objections de M. Steichen auraient frappé. Ce dernier n'a pas répondu jusqu'à présent, que nous sachions, à notre critique.

Nous ne voulons pas analyser ici l'œuvre de notre maître ; on comprendra les sentiments qui nous dictent cette réserve.

Nous ne pouvons toutefois nous empêcher de faire remarquer comme lui appartenant en propre :

La démonstration du principe des vitesses virtuelles.

La détermination de la *véritable* pression exercée sur l'axe d'une poulie *pendant le mouvement de celle-ci* (p. 7).

La théorie de la machine d'épuisement à traction directe, et le moyen ingénieux qu'il propose pour régulariser le mouvement de la maîtresse-tige (p. 181).

L'observation que la roue Poncelet ne produit son maximum d'effet que si l'eau a quitté les aubes avant que celles-ci aient dépassé le point le plus bas. Il est à regretter qu'il n'ait pas soumis cette idée au calcul, et nous ne nous sommes par cru autorisé à le faire dans son Précis ; nous comptons publier prochement un travail sur ce sujet.

Enfin la théorie de la turbine Fourneyron.

Notre vénération profonde pour la mémoire de Brasseur la reconnaissance que nous lui avons vouée, nous ont rendu léger l'achèvement de cette œuvre ; et nous ne formons qu'un vœu, c'est qu'elle contribue à répandre parmi les élèves des écoles spéciales de Liége, pour lesquels elle a été entreprise, des notions scientifiques saines et précises sur la mécanique appliquée.

F. Folie.

ERRATA.

PAGE.	LIGNE.	AU LIEU DE :	LIRE :
7	1	$p - p' + q'$	$p - p'$
»	7	$p - p' + q' + q''$	$p - p' + q''$
»	12 et 13	μ' dont le poids est q'	$\frac{1}{2}\mu'$ dont le poids est $\frac{1}{2}q'$, et de même p' comme appliquée à m' et à $\frac{1}{2}\mu'$
»	14	$m + \mu'$	$m + \frac{1}{2}\mu'$
»	16 et 18	$p + q'$	$p + \frac{1}{2}q'$
»	19	m'	$m' + \frac{1}{2}\mu'$
»	21 et 22	$\frac{p'}{g}$	$\frac{p' + \frac{1}{2}q'}{g}$
»	22	i	t
»	26 (2 fois)	$p - p' + q'$	$p - p'$
8	1	$p - p' - F\frac{\rho}{r}$	$p - p' - R - F\frac{\rho}{r}$
18	11	50	51
56	2 (bas)	l'axe	l'axe de figure
60	4	afflaire	affleure
»	16	V^{me}	V
61	6	$m -$	$m - 1$
87	2	dire	conclure
»	8	moteur	moteur pendant le même temps
100	10	charge utile	charge utile Q
104	10 (bas)	s'écoule	s'enroule
»	6 »	z	r
105	8	$[r + (n - 1)e$	$[r + (n - 1)e]$
107	8 (bas)	$2p\pi\rho^2 m^2$	$2p\pi e^2 m^2$
127	7	extérieurs	extérieurs dans les voies d'évitement.
132	5 (bas)	poids du mètre cube, $d =$	volume d'un kilog $v =$
»	4	volume d'un kil. $v =$	poids d'un mètre cube, $d =$
134	15	d'admission admise	d'admission
139	8 et 9	0k,050, Par cent carré	0k,050 par cent carré ;
»	19, 1°	0,70	0,45
153	2 (bas)	pression	pression P'
168	1 »	P'	P

PRÉCIS

DU COURS

DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

DIVISION DU COURS.

1. Dans toute machine le point d'application de la puissance est mis en communication avec celui de la résistance par une série de pièces ou organes matériels qui doivent satisfaire à certaines conditions géométriques et mécaniques ; d'où

1° *La théorie de la transformation de mouvement.*

Chacun de ces organes subissant à chaque instant un effort constant ou variable, ses dimensions doivent être calculées de manière à pouvoir résister au plus grand de ces efforts ; d'où

2° *La théorie de la résistance des matériaux.*

Chaque organe exerçant une pression contre l'articulation qui le lie à l'organe qui suit immédiatement, il naît de ces pressions de nouvelles résistances passives, d'où

3° *La théorie du frottement et de la raideur des cordes*, etc., et l'équilibre des machines simples eu égard à ces résistances passives.

Pour comparer les valeurs industrielles de deux machines employées à des fabrications différentes, il faut

4° *Le calcul du travail des forces.*

Le mouvement régulier dans les machines étant une condition de leur durée ainsi que de la qualité de leurs produits ; d'où

5° *La théorie des volants et des régulateurs.*

2. Les machines se divisent en deux espèces bien distinctes : les métiers où la géométrie plus que la mécanique intervient par les nombreuses et ingénieuses transformations de mouvement qu'elle apprend à réaliser ; et les machines motrices dont l'économie de force motrice est le but principal et où les lois de la mécanique rationnelle sont indispensables. Il ne sera question que de ces dernières machines et principalement de celles qui ont rapport à l'exploitation des mines et aux arts métallurgiques.

RAPPEL DE QUELQUES PRINCIPES SUR LA FORCE D'INERTIE.

3. Nous supposerons que les masses n'ont pas de poids, en d'autres termes, que les masses ne sont pas attirées vers le centre de la terre, ni vers aucun point de l'espace.

4. Lorsque nous voudrons avoir égard à l'attraction que la terre exerce sur une masse, nous considérerons celle-ci comme sollicitée par une force verticale égale au poids de la masse.

5. Réciproquement, lorsque nous considérerons le poids d'une masse comme force, nous regarderons la masse comme soustraite à l'action de la pesanteur et par suite comme n'ayant pas de poids. Cela posé,

6. Une masse sans poids placée en un lieu quelconque de l'espace, y demeurera sans pouvoir *par elle-même* changer sa position, et si on lui imprime une vitesse suivant une direction quelconque elle ne pourra changer *par elle-même* ni cette vitesse ni la direction de cette vitesse. Cette propriété négative des corps est appelée *inertie*.

7. L'intensité de la résistance qu'une masse sans poids oppose à se laisser imprimer une vitesse ou à laisser augmenter ou diminuer la vitesse dont elle est animée, est égale à chaque instant à l'intensité de la force qui agit sur elle. Cette résistance est appelée *force d'inertie* ou mieux *réaction de l'inertie*.

8. D'après cela une masse aussi petite que l'on veut, opposera une résistance égale à la force, quelque grande qu'elle soit, qui agit sur elle. Ce qui distingue la résistance de l'inertie des autres résistances que nous connaissons, c'est d'être toujours vaincue par une force quelque petite qu'elle soit. Ainsi la plus grande masse que l'on veut supposer sera toujours mise en mouvement par une force aussi petite que l'on veut, en tant que la force n'a à vaincre que l'inertie de la masse. (Les masses sont supposées d'une solidité absolue.)

9. L'accroissement de vitesse qu'une force imprime à une masse pendant un certain temps est le même, que la masse soit en repos ou qu'elle possède déjà une vitesse. D'où l'on déduit :

10. Une force constante ayant imprimé une vitesse à une masse au bout d'un certain temps, si l'on fait agir sur cette masse la même force en sens contraire pendant le même temps, cette force détruira la vitesse de cette masse, et les chemins décrits dan les deux cas seront égaux.

11. Lorsqu'une masse soumise à l'action de plusieurs forces actives et passives est à l'état de repos, il suffit pour vérifier s'il y a équilibre dynamique entre les forces,

d'imprimer une vitesse à cette masse : si cette vitesse reste constante, c'est-à-dire si le corps conserve un mouvement uniforme, l'équilibre existe ; mais si la vitesse augmente ou diminue, l'équilibre n'existe pas.

12. La statique offre divers moyens pour trouver le rapport de deux forces constantes. En dynamique ce rapport est fourni par l'un des trois principes suivants :

1° Deux forces constantes sont entre elles comme les vitesses qu'elles sont capables d'imprimer à une même masse dans le même temps. Elles sont encore entre elles comme les chemins qu'elles font décrire à une même masse pendant le même temps.

2° Deux forces constantes capables d'imprimer dans le même temps la même vitesse à deux masses différentes sont entre elles comme ces masses. Comme conséquence de ces deux principes on déduit que :

3° Deux forces constantes qui impriment dans un même temps à deux masses différentes des vitesses différentes sont entre elles comme les quantités de mouvement imprimées à ces masses.

Quoique la considération des masses entre nécessairement dans le raisonnement qui conduit à la mise en équation d'un problème sur le mouvement de ces masses, on peut toujours faire en sorte que celles-ci n'entrent pas dans l'équation.

13. Pour trouver la vitesse v que possède au bout d'un temps t une masse sollicitée par une force constante F, ainsi que le chemin e parcouru par cette masse, on sait que si la masse était sollicitée par une force constante égale au poids de la masse, la vitesse imprimée au bout du temps t serait gt et l'espace parcouru $\frac{gt^2}{2}$. Donc d'après (§ 12, 1°) on a :

$$F : P = v : gt \quad \text{d'où} \quad F = \frac{P}{g} \cdot \frac{v}{t} \quad \ldots \quad (a)$$

$$F : P = e : \frac{gt^2}{2} \quad \text{d'où} \quad F = \frac{P}{g} \cdot \frac{2e}{t^2} \quad \ldots \quad (b)$$

Comme ces proportions existent quel que soit t, il en résulte que pour une force constante le rapport $\frac{v}{t}$ ou son égal $\frac{2e}{t^2}$ a la même valeur à un instant quelconque du mouvement.

14. Réciproquement si pour une masse sollicitée par une certaine force le rapport $\frac{v}{t}$ ou celui $\frac{2e}{t^2}$ a la même valeur à un instant quelconque du mouvement, cela prouve que la force est constante.

Comme la force d'inertie d'une masse est à chaque instant égale et contraire à la force qui agit sur elle, il est visible que les équations (a) et (b) qui donnent la mesure d'une force constante qui agit sur une masse m de poids P donnent en même temps la mesure de la résistance que la masse oppose par son inertie.

15. L'intensité d'une force variable est, à un instant quelconque donné du mouvement, égale à celle de la force constante capable d'imprimer pendant la durée de cet instant supposé très-petit, le même accroissement de vitesse, que la force proposée imprime pendant ce même instant.

16. p étant le poids absolu d'une masse m ou l'effort exercé par la pesanteur sur cette masse dans un certain lieu; g, la vitesse que la pesanteur lui imprime dans le même lieu au bout de la première seconde; l'expérience a appris que le rapport $\frac{p}{g}$ ne variait pas d'un lieu à un autre.

17. p p' étant les poids absolus des deux masses m, m', situées dans deux lieux différents; g, g' les vitesses qu'en ces lieux la pesanteur imprime à ces masses au bout de la première seconde, on a d'après (12, 3°)

$$p : p' = mg : m'g'$$

$$\frac{p}{g} : \frac{p'}{g'} = m : m'$$

Cette proportion permet d'écrire à la place du rapport $\frac{p}{g}$ la quantité m qui lui est proportionnelle; mais lorsqu'il s'agira de réduire une formule en nombre il faudra restituer à m sa valeur primitive $\frac{p}{g}$.

THÉORIE DU FROTTEMENT.

18. Lorsque deux corps dont les surfaces se touchent sont pressés normalement à la surface en contact, il nait de cette pression une résistance passive appelée *frottement*.

Si l'on met en mouvement, ou si l'on tend à mettre en mouvement l'un des corps sur l'autre sans qu'ils cessent d'être pressés l'un contre l'autre, le frottement qui s'oppose toujours au mouvement qui se produit ou tend à se produire agit 1° au contact des surfaces des deux corps, 2° suivant la tangente au chemin que le point de contact décrit ou tend à décrire, 3° en sens contraire du mouvement de ce point.

19. Il y a *frottement de glissement* lorsque dans le mouvement l'un des corps touche constamment l'autre par un même de ses points ou par une même partie de sa surface.

20. Il y a *frottement de roulement* lorsque les points ou les parties de surface en contact varient à chaque instant pour l'un et l'autre corps. Ce frottement est beaucoup moindre que le frottement de glissement.

L'expérience prouve que :

1° Le frottement est proportionnel à la pression normale que les surfaces exercent l'une sur l'autre. Seulement la pression ne doit pas être portée jusqu'à faire gripper les surfaces. Dans ce cas le poli des surfaces est altéré et l'intensité du frottement ne suit aucune loi.

Le rapport du frottement à la pression normale est appelé coëfficient de frottement et désigné par f.

2° Le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces en contact.

3° Il est indépendant de la vitesse.

4° Il varie avec la nature et l'état des surfaces en contact.

5° Il est diminué en enduisant les surfaces frottantes de corps onctueux tels que : huile, vieux oing, suif, savon, etc., parce que ces corps interposés entre les surfaces frottantes font que celles-ci ne sont plus immédiatement en contact. Le frottement est d'autant moindre que l'enduit est renouvelé avec plus de continuité.

6° Le frottement est moindre pour des corps durs que pour des corps mous.

7° Le frottement est moindre pour des substances hétérogènes que pour des substances de même nature.

8° Le frottement pour des corps qui ont été quelque temps en contact, est sensiblement plus grand au premier instant du mouvement que quand le mouvement est établi.

21. Règle. *Pour trouver l'intensité du frottement d'un corps sur un autre*, il faut décomposer normalement et tangentiellement à la surface en contact chacune des forces qui agissent sur le premier; la somme *algébrique* des composantes normales multipliée par le coëfficient de frottement exprimera l'intensité du frottement.

22. *Signification géométrique du coëfficient de frottement.*

Le coëfficient du frottement d'un corps d'une nature donnée, contre un plan d'une nature aussi donnée, est égal à la tangente trigonométrique de l'angle que ce plan doit faire avec l'horizon, pour que le corps soit en équilibre avec le frottement. θ étant cet angle et f le coëfficient du frottement on démontrera que $f = tg\theta$.

COMMENT ON DÉTERMINE PAR L'EXPÉRIENCE ET LE CALCUL LES LOIS DU FROTTEMENT.

Dans l'appareil qui a servi à Mr Morin pour exécuter de nouvelles expériences sur le frottement, les corps étaient mis en mouvement sur un plan horizontal au moyen d'une corde qui passait sur une poulie fixe. Il fallait au préalable déterminer le frottement des tourillons de la poulie sur les coussinets, ainsi que la raideur de la corde. La solution des problèmes suivants donne l'idée de cette recherche :

23. Problème. — A un ruban sans fin passant sur une poulie fixe de rayon r et de poids q, sont attachés deux poids inégaux p, p' dont l'un monte quand l'autre descend; on demande le chemin parcouru par chacun de ces poids au bout du temps t, dans l'hypothèse que le frottement F, qui agit tangentiellement au tourillon de la poulie, est une force retardatrice constante et indépendante de la vitesse. Le ruban est sans raideur et l'on néglige la masse très-petite du ruban.

Solution. — ϱ étant le rayon du tourillon, le frottement F pourra être remplacé par la force $F \frac{\varrho}{r}$ tangente à la surface de la poulie. Soient m, m', μ, les masses des poids p, p', q. Le moment d'inertie de la poulie et de son tourillon étant I, on fera voir que la résistance opposée par l'inertie de la poulie peut être remplacée par la résistance qu'oppose l'inertie d'une masse fictive $\mu' = \frac{\mathrm{I}}{r^2}$ concentrée sur une circonférence de la surface de la poulie. Nommons q' le poids de la masse μ', et remarquons que par suite de la liaison qui existe entre les masses m, m', μ', celles-ci ont à chaque instant du mouvement une vitesse commune et peuvent être considérées comme réunies ensemble. Cela posé,

Sur les masses $(m + m' + \mu')$ agit la force constante $(p - p' - F \frac{\rho}{r}$, qui fera parcourir le chemin e au bout du temps t :

Si sur les masses $(m + m' + \mu')$ agissait la force constante $(p + p' + q')$, le chemin parcouru au bout du temps t serait $\frac{g t^2}{2}$;

D'après (§ 13, b) on a la proportion : en posant $\frac{2e}{t^2} = k$.

$$\frac{p - p' - F \frac{\varrho}{r}}{p + p' + q'} = \frac{k}{g}$$

Or l'expérience a vérifié que le rapport $\frac{2e}{t^2}$ avait la même valeur à un instant quelconque du mouvement ; donc l'hypothèse de F constant est exacte ; et, comme les diverses parties du chemin e ont été parcourues avec des vitesses différentes, l'hypothèse de F indépendant de la vitesse est également exacte. On a trouvé dans toutes les expériences que le rapport de F à la pression $(p + p' + q)$ des tourillons contre leurs coussinets était également constant. Nous représenterons ce rapport par f.

Nous ferons remarquer que la véritable pression sur l'axe de la poulie n'est pas

$p + p' + q$, mais bien $p + p' + q - \frac{k}{g} (p - p' + q')$, ce que l'on démontre au moyen du principe de d'Alembert. (1)

24. Problème. — Même problème que ci-dessus, le ruban étant remplacé par une corde sans fin à la raideur R de laquelle il faut avoir égard dans l'hypothèse que cette raideur est constante et indépendante de la vitesse.

Solution. — q'' étant le poids de la corde, on a pour la pression N sur le tourillon $N = p + p' + q + q'' - \frac{k}{g} (p - p' + q' + q'')$, et pour le frottement F du tourillon $F = Nf$. Les poids p, p' ainsi que la raideur R agissent suivant l'axe de la corde et le frottement F peut être remplacé par la force $F \frac{\varrho}{r}$ agissant suivant le même axe, (r étant le rayon de la poulie augmenté du rayon de la corde). La résultante des forces qui agissent suivant l'axe de la corde sur toutes les masses à mettre en mouvement

(1) Considérons la force constante p comme appliquée à la masse m et à la masse fictive μ' dont le poids est q'.

La composante de p capable d'imprimer à l'ensemble des deux masses $(m + \mu')$ la vitesse v au bout du temps t, est d'après (§ 13, a,)

$$\frac{p + q'}{g} \frac{v}{t}$$

Donc la seconde composante de p est

$$p - \frac{p + q'}{g} \frac{v}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

En considérant la force constante p' appliquée à la masse m', on a pour la composante de p' capable d'imprimer à la masse m' au bout du temps t, la vitesse v en sens contraire de p', $- \frac{p'}{g} \frac{v}{t}$; par suite la seconde composante de p' est

$$p' + \frac{p'}{g} \frac{v}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Les secondes composantes (1) et (2), qui doivent se faire équilibre au moyen de l'axe de la poulie, exercent seules une action sur cet axe, laquelle, vu que ces composantes sont parallèles, est égale à leur somme, c'est-à-dire à

$$p + p' - \frac{v}{t} \left(\frac{p - p' + q'}{g} \right) = p + p' - \frac{k}{g} (p - p' + q')$$

en ajoutant à cette expression le poids q de la poulie on aura la pression sur les tourillons, pendant le mouvement de la poulie.

est $\left(p - p' - F \frac{\rho}{r} \right)$ et on aura d'après (§ 15, b) en raisonnant comme ci-dessus :

$$\frac{p - p' - R - F \frac{\rho}{r}}{p + p' + q' + q''} = \frac{e}{\frac{1}{2} g t^2} = \frac{k}{g}$$

L'expérience ayant prouvé que la valeur du rapport $\frac{2e}{t^2}$ était la même à un instant quelconque du mouvement, il en résulte que la raideur R est constante et indépendante de la vitesse. On a vérifié dans chaque expérience que le rapport de R à la tension p' était une quantité constante que nous représenterons par δ.

25. Problème. — Des deux brins d'une corde qui passe sur une poulie de renvoi, l'un horizontal est fixé par son extrémité à un corps de poids Q placé sur un plan horizontal ; l'autre brin qui est vertical porte à son extrémité un poids p. On demande le chemin parcouru par chacun des poids au bout du temps t dans l'hypothèse que le frottement F du corps Q contre le plan horizontal est constant et indépendant de la vitesse. On a égard au frottement des tourillons et à la raideur de la corde, résistances déterminées par les deux problèmes précédents.

Solution. — T étant la tension du brin horizontal de la corde, T δ exprimera la raideur de la corde. N étant la pression sur les tourillons, N f représentera le frottement du tourillon, et la force $N f \frac{\rho}{r}$ tangente à la poulie pourra remplacer le frottement du tourillon.

A cause de la liaison des deux corps, le chemin décrit par chacun d'eux est à chaque instant le même. Il est facile de voir que si l'on supprime la liaison en coupant le brin horizontal, le corps Q se mouvra sous l'influence de la force horizontale (T—F) exactement de la même manière que lorsqu'il était lié au corps p. De même la masse de p et celle de la poulie se mouvront sous l'influence de la force verticale $\left(p - N f \frac{\rho}{r} - T - T\delta\right)$ de la même manière que lorsqu'il y avait liaison. Cela posé, e étant le chemin décrit par chacun des corps p et Q au bout du temps t,

pour la masse de Q sollicitée par la force (T — F), on a : $\frac{T - F}{Q} = \frac{k}{g}$ . . . (1)

pour la masse de p et celle de la poulie sollicitée par la force $\left\{p - T(1+\delta) - N f \frac{\rho}{r}\right\}$, on a :

$$\frac{p - T(1+\delta) - N f \frac{\rho}{r}}{p + q'} = \frac{k}{g} \quad . . . . (2)$$

Sur l'axe de la poulie agit la force horizontale T, et l'on démontrera que la force verticale qui agit pendant le mouvement sur le même axe est égale à $p + q - \frac{k}{g}(p + q')$

Donc $N = \sqrt{\left\{(p+q) - \frac{k}{g}(p+q')\right\}^2 + T^2}$ et, d'après le théorème connu de M. Poncelet, en posant $\alpha = 0{,}96$ et $\beta = 0{,}4$

$$N = \alpha \left\{ (p+q) - \frac{k}{g}(p+q') \right\} + \beta T \quad . . . (3)$$

Éliminant T et N entre les équations (1), (2) et (3), et posant $r(1+\delta) + \beta f \rho = m$ et $r - \alpha f = n$, il vient pour la valeur de F :

$$F = p\frac{n}{m} - k\left\{\frac{q'}{g}\frac{n}{m} + \frac{p}{g}\frac{n}{m} + \frac{Q}{g}\right\} - \frac{\alpha f \rho}{m} q$$

L'expérience ayant montré que le rapport k avait la même valeur à un instant quelconque du mouvement, il en résulte que le frottement F de glissement est constant et indépendant de la vitesse.

Pour la poulie qui a servi dans les expériences de Mr Morin, on avait : $f = 0{,}164$; $\delta = 0{,}032$; $\rho = 0{,}0093$; $r = 0{,}111$; $q = 6{,}854$; $q' = 5{,}061341$; $\frac{q'}{g} = 0{,}516$.

La substitution de ces valeurs dans l'équation précédente donne :

$$F = 0{,}95\, p - \left[\left(0{,}516 + \frac{p}{g}\right) 0{,}95 + \frac{Q}{g} \right] k - 0{,}086.$$

Telle est la formule qui a servi à Mr Morin, dans les nouvelles expériences, qu'il a faites sur le frottement. Il a trouvé dans chaque cas que le rapport du frottement F à la pression Q, pour deux mêmes corps, était une quantité constante. Les résultats auxquels il est arrivé sont consignés dans le tableau suivant :

TABLEAU des valeurs du coefficient de frottement des surfaces planes, d'après les expériences de M. Morin.

INDICATION DES SURFACES FROTTANTES.	DISPOSITION des fibres.	ÉTAT des surfaces.	RAPPORT du frottement à la pression. au départ, après quelque temps de contact.	pendant le mouvement.
Chêne sur chêne.	Parallèles.	Sans enduit.	0.62	0.48
Id. *id.*	*Id.*	Frottées de savon sec.	0.44	0.16
Id. *id.*	Perpendiculaires.	Sans enduit.	0.54	0.34
Id. *id.*	*Id.*	Mouillées d'eau.	0.71	0.25
Id. *id.*	Bout sur plat.	Sans enduit.	0.43	0.19
Chêne sur orme	Parallèles.	*Id.*	0.38	»
Orme sur chêne.	*Id.*	*Id.*	0.69	0.43
Id. *id.*	*Id.*	Frottées de savon sec.	0.41	0.25
Id. *id.*	Perpendiculaires.	Sans enduit.	0.57	0.45
Frêne, sapin, hêtre, sorbier sur chêne.	Parallèles.	*Id.*	0.53	0.36 à 0.40
Fer sur chêne.	*Id.*	*Id.*	0.62	0.62
Id. *id.*	*Id.*	Mouillées d'eau.	0.65	0.26
Id. *id.*	*Id.*	Frottées de savon sec.	»	0.21
Fonte sur chêne.	*Id.*	Sans enduit.	»	0.49
Id. *id.*	*Id.*	Mouillées d'eau.	0,65	0.22
Id. *id.*	*Id.*	Frottées de savon sec.	»	0.19
Cuivre jaune sur chêne.	*Id.*	Sans enduit.	0.62	0.62
Fer sur orme.	*Id.*	*Id.*	»	0.25
Fonte sur orme.	*Id.*	*Id.*	»	0.20
Cuir tanné sur chêne.	Cuir à plat	Sans enduit.	0.61	0.30 à 0.35
Id. *id.*	Cuir de champ.	*Id.*	0.43	0.30 à 0.35
Id. *id.*	*Id.*	Mouillées d'eau.	0.79	0.29
Id. *id.*	Cuir à plat	*Id.*	»	0.29
Cuir noir corroyé ou courroie sur une surface plane en chêne.	Parallèles.	Sans enduit.	0.74	0.27
Id. *id.* sur tambour en chêne	Perpendiculaires.	*Id.*	0.47	»
Cuir tanné sur fonte et sur bronze.	A plat ou de champ.	*Id.*	»	0.56
Id. *id.* *id.*	*Id.*	Mouillées d'eau.	»	0.36
Id. *id.* *id.*	*Id.*	Onctueuses et eau.	»	0.23
Id. *id.* *id.*	*Id.*	Huilées.	»	0.15
Cuir de bœuf pour garniture de piston, sur fonte.	*Id.*	Mouillées d'eau.	0.62	»
Id.	*Id.*	Huile, suif, saindoux.	0.12	»
Cuir noir corroyé sur poulie en fonte.	Cuir à plat	Sans enduit.	0.28	»
Id. *id.*	*Id.*	Mouillées d'eau.	0.38	»
Chanvre en brin ou en corde sur chêne.	Parallèles.	Sans enduit.	»	0.52
Id.	Perpendiculaires.	Mouillées d'eau.	»	0.33
Natte de chanvre sur chêne.	Parallèles.	Sans enduit.	0.50	»
Id. *id.*	*Id.*	Mouillées d'eau.	0.87	»
Chêne et orme sur fonte.	*Id.*	Sans enduit.	»	0.35
Poirier sauvage sur fonte.	*Id.*	*Id.*	»	0.44

INDICATION DES SURFACES FROTTANTES.	DISPOSITION des fibres.	ÉTAT des surfaces.	RAPPORT du frottement à la pression. au départ, après quelque temps de contact.	pendant le mouvement
Fer sur fer.	»	Sans enduit.	»	» (1)
Fer sur fonte.	»	*Id.*	0.19	0,18 (2)
Fer sur bronze.	»	*Id.*	»	0.18 (2)
Fonte sur fonte.	»	*Id.*	16 (*a*)	0.15 (2)
Fonte sur bronze.	»	*Id.*	»	0,15 (2)
Bronze sur bronze.	»	*Id.*	»	0.20
Id. sur fonte.	»	*Id.*	»	0.22
Id. sur fer.	»	*Id.*	»	0.16 (3)
Chêne, orme, poirier sauvage, fonte, fer, acier et bronze, glissant l'un sur l'autre ou sur eux-mêmes.	»	Lubrifiées à la manière ordinaire, de suif, d'huile, de saindoux ou de cambouis mou.	»	0.07 a 0.08 (4)
Les mêmes. *Id.*	»	Légèrement onctueuses au toucher.	»	0.15
Chêne, orme, charme, fer, fonte et bronze, glissant deux à deux l'un sur l'autre.	»	Enduites de suif.	0,10 (*b*)	»
Les mêmes. *id.*	»	*Id.* d'huile ou de saindoux.	0.15 (*c*)	»
Calcaire tendre, dit calcaire oolithique bien dressé sur lui-même.	»	Sans enduit.	0.74	0.64
Calcaire dur, dit muschelkalk, bien dressé sur calcaire oolithique.	»	*Id.*	0.75	0.67
Brique ordinaire sur calcaire oolithique.	»	*Id.*	0.67	0.65
Chêne sur calcaire oolithique.	Bois de bout.	*Id.*	0.63	0.38
Fer forgé. *Id.*	Parallèles.	*Id.*	0.49	0.69
Muschelkalk sur muschelkalk.	»	*Id.*	0.70	0.38
Calcaire oolithique sur muschelkalk.	»	*Id.*	0.75	0.65
Brique ordinaire sur muschelkalk.	»	*Id.*	0.67	0.60
Chêne sur muschelkalk.	Bois de bout.	*Id.*	0.64	0.38
Fer forgé sur muschelkalk.	Parallèles.	*Id.*	0.42	0.24
Id. *id.*	*Id.*	Mouillées d'eau.	»	0-30
Calcaire oolithique sur calcaire oolithique.	»	Mortier de trois parties de sable fin et une partie de chaux hydraulique	0.74 (*d*)	»

(*a*) Les surfaces conservant quelque onctuosité ;
(*b*) Lorsque le contact n'a pas duré assez longtemps peur exprimer l'enduit ;
(*c*) Lorsque le contact a duré assez longtemps pour exprimer l'enduit, et ramener les surfaces à l'état onctueux ;
(*d*) Après un contact de 10 à 15 minutes ;
(1) Les surfaces se rodant dès qu'il n'y a pas d'enduit ;
(2) Les surfaces conservant encore un peu d'onctuosité ;
(3) Les surfaces étant un peu onctueuses ;
(4) Lorsque l'enduit est sans cesse renouvelé et uniformément réparti, ce rapport peut s'abaisser jusqu'à 0.05.

ÉQUILIBRE DE MACHINES OÙ INTERVIENT SEULEMENT LE FROTTEMENT DE GLISSEMENT.

26. Les machines ne sont autre chose que des corps ou systèmes sollicités par des forces et gênés dans leurs mouvements par des obstacles quelconques.

27. Chaque pression normale contre un obstacle donne naissance à un frottement dont l'intensité, le point d'application et la direction ont été indiqués (§ 18); quant au sens, il suffit d'ajouter que, dans l'équilibre statique, le frottement est favorable à la puissance et que, dans l'équilibre dynamique, il lui est défavorable.

28. On peut chercher les conditions de l'équilibre des machines de deux manières :

1° *En remplaçant les obstacles* par des forces pouvant tenir lieu de ces obstacles; ce qui s'obtient en faisant agir en sens contraire la pression normale contre chaque obstacle. De cette manière les conditions de l'équilibre entre la puissance, la résistance, les frottements et les pressions prises chacune en sens contraire, deviennent les mêmes que celles de l'équilibre des corps parfaitement libres.

REMARQUE. D'après cette considération, on peut, dans beaucoup de cas, se dispenser de calculer les pressions normales. Il suffit, en effet, de supposer connues ces pressions et de les éliminer entre les trois ou les six équations connues qui expriment l'équilibre d'un système entièrement libre.

2° *En laissant subsister les obstacles.* Dans ce cas les conditions d'équilibre d'une machine, en ayant égard au frottement, restent les mêmes que celles enseignées en statique rationnelle : il suffit seulement de comprendre les frottements parmi les forces appliquées à la machine, ce qui exige, dans tous les cas, qu'on calcule au préalable les pressions normales pour pouvoir en déduire l'intensité des frottements.

REMARQUE. — Quand les frottements sont calculés, on peut toujours exprimer l'équilibre d'une machine au moyen du principe des vitesses virtuelles.

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

29. *Définition du moment virtuel d'une force.* — Si, sans changer la position d'une force, on fait décrire à son point d'application un chemin infiniment petit et par suite rectiligne, le produit de la force par la projection de ce chemin sur la direction primitive de cette force s'appelle moment virtuel de la force proposée.

Quand le chemin décrit est tangent à la force, alors il est lui-même sa projection sur la force. Cette remarque est toujours applicable aux moments virtuels des frottements.

Le moment virtuel est considéré comme positif ou négatif, selon que la projection

tombe sur la force ou sur son prolongement. Cela posé, le principe des vitesses virtuelles peut s'énoncer comme suit :

ÉNONCÉ DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES. — *Si des forces appliquées à un système de points matériels invariablement reliés entre eux sont en équilibre, et que, laissant les forces dans leurs positions, on imprime au système un mouvement infiniment petit qui ne détruise pas la liaison de ces points, la somme des moments virtuels de toutes ces forces sera toujours nulle.*

DÉMONSTRATION. — Nous allons démontrer, pour des forces situées dans un même plan, que ce principe n'est qu'une transformation de celui des moments statiques, et nous indiquerons la démonstration pour des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace.

Supposons d'abord que le mouvement imprimé au système des points matériels soit un mouvement de rotation autour d'un centre quelconque 0 et que le mouvement soit assez petit pour que les arcs décrits par les points d'application des forces puissent être considérés comme de petites lignes droites; représentons par

P, P', P'', etc. les forces données;
m, m', m'', etc. les points d'application des forces;
r, r', r'', etc. les rayons vecteurs des points d'application par rapport au centre 0;
b, b', b'', etc. les bras de leviers des forces par rapport au centre 0;
α, α', α'', etc. les angles que font les bras de levier avec les rayons vecteurs.

Puisque les forces sont en équilibre, la somme de leurs moments par rapport au centre 0 est nulle et l'on aura

$$Pb + P'b' + P''b'' + \text{etc.} = 0 \,, \quad . \;.\; . \; (1)$$

or $\quad b = r\cos\alpha\,,\; b' = r'\cos\alpha'\,,\; b'' = r''\cos\alpha''\,,$ etc.

Avec ces valeurs l'équation (1) devient

$$Pr\cos\alpha + P'r'\cos\alpha' + P''r''\cos\alpha'' + \text{etc.} = 0 \,, \quad . \;.\; . \; (2)$$

Faisons tourner maintenant le système des points m, m', m'', etc. d'une quantité infiniment petite autour du centre 0; dans ce mouvement ces divers points décriront des arcs semblables, qu'on pourra considérer comme de petites lignes droites, et les rayons vecteurs de ces points décriront des angles au centre égaux.

En désignant par

e, e', e'', etc. les arcs semblables ou chemins décrits par les points d'application m, m' m'', etc.;
ω l'angle au centre décrit par chaque rayon vecteur, on aura

$$e = r\omega\,,\; e' = r'\omega\,,\; e'' = r''\omega\,, \text{ etc}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), après l'avoir au préalable multipliée par ω, on aura

$$Pe \cos\alpha + P'e' \cos\alpha' + P''e'' \cos\alpha'' + \text{etc.} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Dans cette équation, α, α' α'', etc. sont les angles que les bras de levier des diverses forces font respectivement avec les rayons vecteurs des points d'application des mêmes forces. Or ces angles sont respectivement égaux à ceux que font les forces avec les arcs décrits par leurs points d'application ; en effet, la force P est perpendiculaire au bras de levier b, et l'arc e est perpendiculaire au rayon vecteur r ; donc l'angle $\widehat{Pe} = \widehat{br}$, comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires. D'après cela, $e\cos\alpha$ est la projection de l'arc e sur la direction primitive de la force P ; $e'\cos\alpha'$ la projection de l'arc e' sur la force P', et ainsi de suite.

Si donc nous représentons par

ε, ε', ε'', etc. les projections respectives des arcs e, e', e'', etc., sur P, P', P'', etc. ; l'équation (3) deviendra

$$P\varepsilon + P'\varepsilon' + P''\varepsilon'' + \text{etc.} = 0 \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

ce qui est précisément l'équation à laquelle conduit l'énoncé du principe des vitesses virtuelles.

Dans cette équation, les signes des moments virtuels des forces sont les mêmes que ceux des moments ordinaires. Or il est facile de s'assurer que, pour deux forces dont les moments ordinaires sont de signes contraires, si la projection de l'arc décrit par le point d'application de l'une tombe sur cette force, la projection de l'arc décrit par le point d'application de l'autre tombera sur le prolongement de cette autre force ; et c'est ce qui confirme la règle énoncée pour les signes à donner aux moments virtuels des diverses forces.

Pour que la démonstration du principe des vitesses virtuelles soit générale, il reste à prouver qu'en faisant mouvoir, d'une quantité infiniment petite, un polygone invariable de forme et de grandeur dans son plan, les chemins décrits par les divers sommets sont respectivement les mêmes que ceux que l'on peut faire décrire aux mêmes sommets par la rotation du polygone autour d'un certain point. Ce qui ressort comme corollaire du théorème suivant :

30. Théorème. — *Deux polygones égaux non symétriques, situés dans un même plan, étant donnés, il existe toujours dans ce plan un point autour duquel faisant tourner le premier polygone supposé invariablement lié à ce point, on parvient à le faire coïncider avec le second.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que, pour faire coïncider deux polygones égaux non symétriques, il suffit qu'un côté quelconque du premier vienne se placer

sur son égal du second, de manière que les extrémités homologues coïncident. D'après cela pour démontrer le théorème énoncé, il suffit de prouver qu'étant données deux droites égales ab, $a'b'$, situées d'une manière quelconque dans un même plan, on peut toujours par un mouvement de rotation de la première autour d'un certain point, supposé invariablement lié à cette première, parvenir à la faire coïncider avec la seconde, de manière que a tombe en a' et b en b'.

Pour cela tirons les droites auxiliaires aa', bb' et, par leurs milieux, élevons les perpendiculaires p et p' ; je dis que le point c, intersection de ces deux perpendiculaires, sera le centre de rotation demandé.

En effet, les deux triangles, abc, $a'b'c$, qui ont un sommet commun c, sont égaux ; car ab est donné égal à $a'b'$, et il résulte des constructions, que $ca = ca'$ et que $cb = cb'$. Or, deux triangles égaux qui ont un sommet homologue commun (ici le point c), peuvent être superposés par une rotation de l'un d'eux autour du sommet commun ; mais les deux triangles abc, $a'b'c$ coïncidant les deux côtés égaux ab, $a'b'$ coïncideront. Donc le point c est le centre de rotation cherché, et le théorème se trouve démontré.

Corol. Si l'on imprime un mouvement infiniment petit à un polygone invariable, chaque sommet décrit un petit arc qui coïncide avec sa corde ; et si l'on ramène le polygone dans sa position primitive, par une rotation autour du centre que nous venons de déterminer, l'arc décrit par le même sommet se confondra encore avec la même corde, et par suite les chemins décrits dans les deux cas, par les divers sommets, sont identiquement les mêmes.

31. Il est ainsi démontré que le principe des vitesses virtuelles n'est qu'une nouvelle forme du principe des moments, et qu'il ne dit pas plus que ce dernier. Or, si la somme des moments des forces par rapport à un point est nulle, cela signifie que les forces ne peuvent pas faire naître la rotation du système autour de ce point. Donc de même, si la somme des moments virtuels est nulle pour un mouvement infiniment petit imprimé au système, cela signifie que les forces appliquées au système ne peuvent pas faire naître ce mouvement.

32. La question est donc de savoir combien de mouvements doivent être impossibles pour que tout mouvement le soit, autrement dit, pour qu'il y ait équilibre.

A cet égard, nous avons démontré (Société royale des Sciences, Tome 2, pag, 349) qu'il y a équilibre entre des forces situées dans un même plan et appliquées à un système de points invariablement reliés entre eux, lorsque la somme de leurs moments est nulle par rapport à chacun de trois points quelconques, non situés en ligne droite.

Donc nous pouvons dire aussi qu'il y a équilibre pour le même système de forces, lorsque la somme de leurs moments virtuels est nulle pour chacun de trois mouvements quelconques infiniment petits, imprimés au système des points d'application de ces forces; et encore les centres de rotations des trois mouvements infiniment petits ne devront-ils pas être en ligne droite.

Eu égard à cette dernière circonstance, s'il s'agit, pour un système entièrement libre, d'exprimer qu'il y a équilibre, on ne devra jamais imprimer au système trois mouvements infiniment petits de translation pure; car les centres de rotation de ces trois mouvements étant à l'infini, appartiennent à une circonférence d'un rayon infiniment grand et par suite doivent être considérés comme étant en ligne droite.

Le principe des vitesses virtuelles sert donc principalement dans les machines où le nombre des mouvements, qu'on peut imprimer au système, est limité à un seul.

33. Nous allons indiquer comment on peut déduire du principe des moments statiques celui des vitesses virtuelles pour des forces non situées dans un même plan. On démontrera : 1° que le principe des vitesses virtuelles existe pour une rotation infiniment petite autour d'un axe quelconque; 2° qu'il existe pour une translation infiniment petite le long du même axe, car une translation n'est qu'une rotation autour d'un axe situé à l'infini; 3° qu'il a lieu pour le mouvement diagonal composé des deux mouvements précédents; 4° que, lorsqu'on imprime un mouvement quelconque infiniment petit à un solide, le chemin rectiligne décrit par chaque point du solide est la diagonale de deux chemins rectilignes que l'on ferait décrire au même point : l'un par rotation du solide autour de certain axe, l'autre par translation du solide le long du même axe. Cette dernière propriété résulte du théorème suivant :

34. Théorème. — *Deux polyèdres égaux non symétriques étant placés d'une manière quelconque dans l'espace, il existe toujours un axe tel qu'en imprimant au premier polyèdre deux mouvements, l'un de rotation autour de cet axe, l'autre de translation le long du même axe, on parvient à le faire coïncider avec son égal.*

Démonstration. — Supposons connu un plan, sur lequel les projections des deux polyèdres égaux sont égales. Le centre, autour duquel il faudra faire tourner sur ce plan l'une de ces projections pour la faire coïncider avec son égale, sera sur ce même plan la projection de l'axe autour duquel devra s'effectuer la rotation et le long duquel devra ensuite s'effectuer la translation de l'un des polyèdres pour le faire coïncider avec l'autre polyèdre son égal.

Pour déterminer le plan de projection ci-dessus, remarquons que les projections de deux polyèdres égaux sont égales sur un plan, du moment que deux triangles homologues, égaux, appartenant respectivement à deux faces homologues égales, ont leurs projections sur ce plan égales. Remarquons encore que la projection d'un triangle sur un plan quelconque donné, ne change ni de forme ni de grandeur, quand le triangle se meut dans l'espace parallèlement à lui-même, de manière que ses sommets décrivent des droites égales et parallèles. Cela posé,

Désignons par abc, $a'b'c'$ deux triangles homologues égaux appartenant respectivement à deux faces homologues égales.

Transportons le triangle $a'b'c'$ parallèlement à lui-même, de manière que le sommet a' décrive la droite aa' et que les sommets b', c' décrivent des droites égales et parallèles à aa'. Le triangle transporté aura actuellement le sommet a de commun avec le triangle abc, et nous le désignerons dans cette nouvelle position par $ab'c'$.

Si, dans cette position des deux triangles, nous tirons la droite bb', elle sera la base d'un triangle isocèle bab', De même en tirant la droite cc', elle sera la base d'un triangle isocèle cac'; et un plan quelconque parallèle aux bases de ces deux triangles isocèles (1) sera un plan sur lequel les projections des deux triangles abc, $ab'c'$ sont égales, et partant sur lequel les projections des deux triangles abc, $a'b'c'$ sont pareillement égales.

35. Principe. — Puisque tout mouvement infiniment petit imprimé à un système plan est un mouvement de rotation autour de certain centre, on peut, *quand ce centre est facile à déterminer dans une machine*, exprimer l'équilibre du système en égalant à zéro la somme des moments statiques de toutes les forces par rapport à ce centre, au lieu d'égaler à zéro la somme des moments virtuels.

Équilibre de l'échelle.

36. Une échelle étant appuyée par son extrémité inférieure contre un plan horizontal et par son extrémité supérieure contre un plan vertical, on demande l'angle que doit faire l'échelle avec le plan horizontal pour que son poids soit en équilibre avec le frottement; c'est-à-dire pour que l'échelle soit sur le point de glisser.

Solution. — Soient Q le poids de l'échelle, l sa longueur, n la distance de son centre de gravité à son extrémité supérieure et α l'angle inconnu qu'il s'agit de déterminer, soient λ et μ les pressions normales inconnues que l'échelle exerce respectivement contre le plan horizontal et contre le plan vertical, soient enfin f, f' les coëfficients des frottements que font naître ces pressions.

En rendant libre le système comme il est indiqué (28), on trouve que toutes les forces sont les unes horizontales, les autres verticales. En prenant pour centre des moments le pied de la verticale abaissée du sommet de l'échelle, les bras de levier des deux frottements seront nuls et les trois équations qui expriment l'équilibre sont :

Forces horizontales $\mu - \lambda f = 0.$ *Forces verticales* $Q - \lambda - \mu f' = 0.$

Somme des moments $Q\, n \cos\alpha - \lambda\, l \cos\alpha + \mu\, l \sin\alpha = 0.$

(1) Les deux côtés d'un triangle isocèle sont également inclinés sur un plan quelconque mené par la base, ou parallèlement à la base du triangle isocèle.

L'élimination de λ et de μ donne pour valeur de l'angle α

$$tg\alpha = \frac{l - n(1 + ff')}{lf}.$$

Si l'on déplace le centre de gravité de l'échelle en suspendant un poids en un point autre que le centre de gravité, on aura une seconde équation dans laquelle n et $tg\alpha$ varieront seuls. En déterminant par expérience les valeurs de n et de $tg\alpha$, pour chacune de ces équations, celles-ci fourniront le moyen de trouver les valeurs de f et de f'.

Remarque. — Mr Steichen, savant professeur de l'Ecole militaire de Bruxelles, a fait de sérieuses objections contre la méthode de rendre libre le système gêné, comme il est indiqué au n° (28). La solution ci-dessus de l'équilibre de l'échelle lui a servi entre autres à fonder sa critique. (Voir: Journal de Crelle, vol. 50). Nous espérons pouvoir revenir sur ce sujet dans les notes à la fin de ce précis.

ÉQUILIBRE DU PILON EN AYANT ÉGARD AU FROTTEMENT CONTRE SES PRISONS.

37. Soient Q le poids du pilon; P la puissance verticale agissant à l'extrémité du mentonnet du pilon; m la longueur du mentonnet comptée jusqu'à l'axe du pilon; e la demi épaisseur du pilon dans le sens de la longueur du mentonnet; O le point d'intersection de la surface inférieure du mentonnet avec l'axe du pilon.

A cause que la puissance P ne passe pas par le centre du pilon, celui-ci tend à tourner et de cette tendance naît une pression λ contre l'arête supérieure d'une prison supérieure et une pression μ en sens contraire contre l'arête inférieure d'une prison inférieure. Nous appellerons ces deux arêtes, arêtes de contact.

En représentant par l la distance verticale entre ces deux arêtes et par y la distance verticale entre le mentonnet et l'arête supérieure de contact; $l - y$ sera la distance verticale entre le mentonnet et l'arête inférieure de contact. Des pressions inconnues λ et μ naissent les frottements λf et μf qui agissent suivant la verticale pour empêcher le pilon de monter. En faisant agir les pressions λ, μ en sens contraires le système est rendu libre, et les conditions de son équilibre sont exprimées par les trois équations qui suivent, en remarquant que toutes les forces sont, les unes verticales, les autres horizontales, et que l'on a choisi le point O pour centre des moments :

Forces horizontales : $\lambda - \mu = 0$:

Forces verticales : $P - Q - f(\lambda + \mu) = 0$

Somme des moments $Pm - \lambda y - \mu(l - y) + \lambda fe - \mu fe = 0$

L'élimination de λ et μ donne :

$$P = Q\frac{l}{l - 2fm} = Q + Q\frac{2fm}{l - 2fm} \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Remarque. P = Q, si $m = 0$, c'est-à-dire si la puissance agit suivant la verticale passant par le centre de gravité du pilon.

38. *Équilibre du pilon en ayant de plus égard au frottement de la came contre le mentonnet.*

Nous chercherons ici les conditions de cet équilibre en déterminant directement les pressions contre les arêtes de contact.

A cet effet, nous rappellerons un principe qui a de nombreuses applications dans la théorie des couples, à savoir que : si dans le plan d'un couple il y a deux points fixes, les pressions de sens contraires, exercées par le couple sur les deux points fixes et perpendiculairement à la droite qui les unit, sont égales chacune au moment du couple divisé par la distance qui sépare les deux points. Cela posé :

En conservant les dénominations de l'article précédent, P sera la pression normale exercée par la came contre le mentonnet. Cette force transportée parallèlement à elle-même au point O, donne lieu à un couple dont le moment est Pm et qui exerce contre l'arête supérieure de contact une pression $\frac{Pm}{l}$ et contre l'arête inférieure de contact une pression de sens contraire aussi égale à $\frac{Pm}{l}$.

Le frottement provenant de la pression P est Pf'; f' désignant le coëfficient de frottement de la came contre le mentonnet. Ce frottement agit horizontalement et comme il tend à entrainer le mentonnet dans le sens du mouvement de la came, il a pour effet de diminuer la pression que le couple mentionné exerce contre l'arête supérieure de contact et d'augmenter la pression du même couple contre l'arête inférieure de contact. En décomposant la force Pf' en deux autres qui lui sont parallèles et qui agissent respectivement sur les deux arêtes de contact, on aura pour ces deux composantes :

$Pf'\frac{(l - y)}{l}$, composante agissant contre l'arête supérieure.

$Pf'\frac{y}{l}$ composante agissant contre l'arête inférieure.

La pression totale contre l'arête supérieure sera $\frac{Pm}{l} - Pf'\frac{(l - y)}{l}$;

La pression totale contre l'arête inférieure sera $\frac{P\,m}{l} + Pf'\frac{y}{l}$.

Les frottements provenant de ces pressions étant parallèles aux forces P et Q, l'équation qui exprime l'équilibre sera :

$$P - Q = f\left(\frac{2\,P\,m}{l} + \frac{2\,P\,f'\,y}{l} - P f'\right),\ \text{d'où l'on déduit :}$$

$$P = \frac{Q\,l}{l - 2\,f\,m + ff'\,(l - 2\,y)} = Q + Q\,f\,\frac{2\,m - f'\,(l - 2\,y)}{l - 2\,f\,m + ff'\,(l - 2\,y)} \quad . . . \quad (b)$$

Cette expression montre qu'il y a de l'avantage pour la puissance à diminuer m et à augmenter l; elle montre aussi que P varie avec y.

L'équation (b) a été obtenue dans l'hypothèse tacite de $\frac{P\,m}{l} > P\,f'\frac{(l-y)}{l}$ c'est-à-dire de $m > f'\,(l - y)$. Dans l'hypothèse de $\frac{P\,m}{l} < \frac{P\,f'\,(l-y)}{l}$ c'est-à-dire de $m < (l - y)\,f'$. On trouverait :

$$P = \frac{Q}{l - ff'}.$$

FROTTEMENT D'UNE CORDE QUI GLISSE SUR UN CYLINDRE FIXE A BASE CIRCULAIRE.

39. Une corde embrasse un cylindre fixe de rayon r suivant un arc s. P et Q étant les tensions des deux extrémités de la corde et P étant considéré comme puissance, on aura pour condition de l'équilibre dynamique :

$$P = Q\,e^{\frac{fs}{r}} = Q + Q\left(e^{\frac{fs}{r}} - 1\right) \quad . . . \quad (a)$$

où e base des logarithmes népériens $= 2{,}7182818$ et $f =$ le rapport du frottement à la pression.

Démonstration. — Divisons l'arc s en n parties égales à u de sorte que $n\,u = s$. Par chaque point de division menant une tangente, on aura une portion de polygone régulier circonscrit à l'arc s. Deux côtés consécutifs de ce polygone faisant entre eux un angle indéfiniment petit ω, nous pourrons poser plus loin $\cos\omega = 1$ et $\sin\omega = \omega$. Nous supposerons que la corde doive glisser sur ce polygone, qui peut indéfiniment s'approcher de l'arc s.

Désignons les tensions des côtés successifs du polygone qu'affecte la corde

par t_1, t_2, t_3, ... , t_{n+1}, où $t_1 = Q$ et $t_{n+1} = P$ et où chaque tension est puissance par rapport à la tension immédiatement précédente, et résistance par rapport à la tension immédiatement suivante.

Pour trouver la relation entre t_1 et t_2, je remarque que la tension t_2 du second côté doit faire équilibre à la tension t_1 et au frottement résultant de la pression que t_1 exerce sur le second côté. Or t_1 décomposé suivant la tension t_2 donne $t_1\cos\omega$ ou t_1 et t_1 décomposé suivant une perpendiculaire à la même tension t_2 donne $t_1\sin\omega$ ou $t_1\omega$; d'où la relation d'équilibre :

$$t_2 = t_1 + f\,t_1\omega = t_1\,(1 + \omega\,f)$$

Il existe évidemment la même relation entre les tensions t_3 et t_2, c'est-à-dire que l'on a :

$$t_3 = t_2\,(1 + \omega\,f)$$
$$t_4 = t_3\,(1 + \omega\,f)$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$t_{n+1} = t_n\,(1 + \omega\,f)$$

En multipliant toutes ces équations au nombre de n membre à membre, il vient :

$$t_{n+1} = t_1\,(1 + \omega\,f)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Or $\omega\,r = u$, d'où $\omega = \frac{u}{r} = \frac{n\,u}{n\,r} = \frac{s}{n\,r}$ et l'équation (1) devient

$$t_{n+1} = t_1\left(1 + \frac{f\,s}{n\,r}\right)^n;$$

et en faisant $\frac{f\,s}{n\,r} = \frac{1}{m}$, ($m$ étant indéfiniment grand, parceque n l'est), on aura :

$$t_{n+1} = t_1\left\{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right\}^{\frac{fs}{r}}$$

Or le terme entre parenthèses dans l'hypothèse de m très-grand est égal à e base des logarithmes népériens; et, en remplaçant dans l'équation t_{n+1} par P et t_1 par Q, on aura l'équation (a) ci-dessus.

40. $f = 0{,}47$ pour des *courroies* à l'état ordinaire d'onctuosité sur des tambours ou des poulies en *bois ;*

$f = 0{,}50$ pour des *courroies neuves* sur des tambours en *bois.*

$f = 0{,}28$ pour des *courroies* à l'état ordinaire d'onctuosité sur des poulies en *fonte.*

$f = 0{,}38$ pour des *courroies humides* sur des poulies en *fonte.*

$f = 0{,}40$ pour des *cordes de chanvre* sur des poulies en *bois.*

Exemple. $r = 0{,}35$; $s = n\,r$; $Q = 30^k$; la courroie est en cuir et doit glisser sur un tambour en bois ; d'où $f = 0{,}47$. La formule (a) donne $P = 218^k{,}50$.

41. Tensions des deux brins d'une courroie ou corde sans fin qui passe sur deux tambours ou sur deux poulies.

En nommant T la tension du brin conducteur et t la tension du brin conduit et Q une résistance connue tangente à l'une des poulies et qui doit être vaincue, les équations qui donnent les deux tensions pour que la corde ne glisse pas, sont : en posant $\frac{f\,s}{r} = m$.

$$T = Q\,\frac{e^m}{e^m - 1}\,,\quad \text{et}\quad t = Q\,\frac{1}{e^m - 1}\quad .\ .\ .\quad (a)$$

Démonstration. — Considérons la poulie à laquelle est appliquée la résistance Q. La corde ou courroie glissera sur cette poulie, tant que la résistance Q ne sera pas vaincue. La courroie étant supposée élastique, on la tendra de plus en plus jusqu'à ce que la résistance Q soit sur le point d'être mise en mouvement. A cet instant la poulie fait encore office de cylindre fixe, et la relation qui existe alors entre T et t est donnée par la formule $T = t\,e^{\frac{f\,s}{r}}$. D'un autre côté les deux tensions et la résistance Q devront au même instant être en équilibre autour de l'axe de la poulie, ce qui donne $T = Q + t$. De ces deux valeurs de T on déduit (a).

Remarque. — Le rapport $\frac{s}{r}$ est le même pour les deux poulies. La tension t devra être augmentée au moins d'un dixième de sa valeur pour compenser les variations accidentelles de la résistance Q, dont il faut prendre dans tous les cas la plus grande valeur si elle est variable ; et pour compenser d'un autre côté l'influence des tensions de la courroie sur le frottement des tourillons.

Exemple. — La résistance à vaincre à la circonférence d'une poulie en fonte de $0^m{,}60$ de diamètre est de 70^k. L'arc s embrassé par une courroie en cuir est d'une demi circonférence ; $f = 0{,}28$. On trouve $t = 49^k{,}68$; augmenté d'un dixième de sa valeur $t = 54^k{,}64$ et $T = 124^k{,}64$.

Largeur des courroies. — Pour calculer la largeur d'une courroie connaissant l'épaisseur du cuir, il suffit de savoir que chaque millimètre carré de section peut supporter une tension de $0^k{,}25$.

La poulie sur laquelle passe une courroie en cuir doit avoir une convexité égale à environ $\frac{1}{10}$ de sa largeur.

PLAN INCLINÉ.

42. Si un corps de poids Q, placé sur un plan incliné qui fait avec le plan horizontal un angle β, est soumis à une force tirante qui fait avec le plan incliné un angle α, l'équation d'équilibre dynamique sera

$$P = Q\,\frac{\sin\beta + f\cos\beta}{\cos\alpha + f\sin\alpha}\quad .\ .\ .\quad (1)$$

43. Si P est parallèle au plan incliné l'on a $\alpha = 0$ et

$$P = Q\,(\sin\beta + f\cos\beta)\ .\quad .\ (2)$$

44. Si P est horizontal, α est négatif et égal à β d'où

$$P = Q\,\frac{\sin\beta + f\cos\beta}{\cos\beta - f\sin\beta}\quad .\ .\ .\quad (3)$$

45. En exprimant f en fonction de l'angle θ du frottement, l'équation (1) devient :

$$P = Q\,\frac{\sin(\beta + \theta)}{\cos(\alpha - \theta)}\quad .\ .\ .\quad (4)$$

46. Le rapport qui multiplie Q sera le plus petit lorsque $\alpha = \theta$; donc *une force aura le moindre effort à faire pour remonter un corps sur un plan incliné lorsqu'elle fera avec ce dernier un angle égal à l'angle de frottement.* D'où l'on déduit les conditions relatives au meilleur tirage des chevaux sur une voiture à quatre roues.

47. *Conditions pour que le corps ne puisse pas tourner.*

Si le poids Q touche le plan incliné suivant deux arêtes horizontales, il suffit, pour que le corps ne puisse tourner autour d'une de ces arêtes, *que le moment de celle des deux forces* P *et* Q *qui pourrait produire une rotation autour de cette arête si elle agissait seule soit égal ou plus petit que le moment de la force qui ne peut pas produire de rotation autour de la même arête, si elle agissait seule.*

Dans le cas où le corps touche le plan suivant deux arêtes, on peut toujours choisir le point d'application de la puissance P de manière à rendre impossible la rotation autour d'aucune de ces deux arêtes.

48. Principe. — *Une force qui pousse un point matériel non pesant contre un plan incliné sera en équilibre avec le frottement lorsqu'elle fera avec le plan incliné un angle complémentaire de l'angle du frottement. Dans ce cas, l'intensité du frottement est égale à celle de la force multipliée par* $\frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}$.

49. Application I. — On peut en partant de cette propriété facile à établir, trouver l'équation (1). Il suffit d'exprimer que la résultante R de P et de Q doit faire avec le plan incliné un angle ($90° - \theta$) et d'éliminer R entré les deux équations qui expriment ces relations, à savoir :

$$R \cos(90° - \theta) = P \cos \alpha - Q \sin \beta$$
$$R \sin(90° - \theta) = Q \cos \beta - P \sin \alpha.$$

Application II. — La propriété (48) permet de trouver par un tracé graphique la puissance P qui fait équilibre au poids Q placé sur un plan incliné. En effet, les directions des deux forces P et Q sont données ; celle de leur résultante, pour qu'il y ait équilibre, est connue, l'intensité de l'une des deux forces, c'est-à-dire le poids Q est connu. On peut donc au moyen du parallélogramme des forces déterminer la puissance P.

Application III. — Un point matériel non pesant se trouve au point le plus bas d'un cercle vertical de rayon r ; le point matériel est sollicité par une force quelconque située dans le plan du cercle et faisant constamment un angle α avec le plan horizontal. On demande à quelle distance δ le point matériel se trouvera du diamètre vertical du cercle au moment où la force sera en équilibre avec le frottement. — Réponse : $\delta = r \cos(\alpha + \theta)$, où θ est l'angle de frottement.

50. *Direction d'une force qui sollicite un point matériel pesant pour que celui-ci décrive librement une courbe tracée sur une surface courbe ; et conditions d'équilibre eu égard au frottement.*

1° Pour qu'une force fasse décrire à un point matériel pesant une droite quelconque tracée sur un plan, il faut que la résultante de la force et du poids du point matériel soit située dans le plan mené suivant la droite perpendiculairement au plan proposé ;

Et pour l'équilibre, en ayant égard au frottement, il faut que la résultante fasse avec cette droite un angle complémentaire de celui du frottement.

2° Pour que le même point décrive une courbe quelconque tracée sur une surface courbe, il faut que la résultante soit à chaque instant dans le plan normal élevé suivant la tangente à la courbe ; et pour l'équilibre, il faut de plus que la résultante fasse avec la tangente un angle complémentaire de l'angle du frottement.

Condition d'équilibre, en ayant égard au frottement, d'un point matériel pesant qui, par suite d'une liaison ou d'un obstacle fixe est forcé de suivre une courbe tracée sur une surface.

1° Si le point matériel est obligé de suivre par exemple une rainure curviligne à section rectangulaire pratiquée dans un plan ; dans ce cas la direction de la résultante

des forces qui sollicitent le point est arbitraire. Cette résultante doit être décomposée suivant la tangente à la courbe décrite par le point, suivant la normale au fond de la rainure et suivant la normale à l'une des faces latérales de la rainure ;

Et pour l'équilibre la composante tangente doit être égale à la somme des frottements provenant des deux pressions normales.

2° En général, lorsque par suite de la liaison un point matériel m est forcé de suivre une courbe tracée sur une surface, alors la décomposition de la résultante des forces qui sollicitent le point m doit se faire suivant la normale à la surface, suivant la tangente à la courbe, et suivant une troisième direction normale à l'obstacle qui est cause que le point est forcé de suivre la courbe proposée.

Et pour l'équilibre, la composante tangente doit faire équilibre suivant les lois de la statique aux frottements provenant des deux pressions normales.

POUSSÉE DES TERRES ET DES EAUX.

51. Un massif de terre terminé à un plan horizontal est maintenu latéralement par une paroi inclinée AB. (fig. 1) au moyen d'une force Q perpendiculaire à cette paroi. En supposant qu'on détache de ce massif un prisme tel que ABC, on demande pour lequel de tous les prismes que l'on peut ainsi détacher, la force Q doit faire le plus grand effort afin d'empêcher le glissement de ce prisme appelé : *prisme de plus grande poussée.*

Solution. — Soient h la hauteur verticale du massif ; ε l'angle de la paroi avec la verticale ; β l'angle de la paroi avec le plan de rupture, (plan qui détache le prisme et sur lequel le prisme peut glisser) ; θ le complément de l'angle de frottement ou l'angle de la verticale avec le plan sur lequel les terres se tiendraient en équilibre par l'effet seul du frottement lorsque la cohésion est rompue, plan appelé talus naturel des terres ; de sorte que le coëfficient de frottement $f = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$; Δ le poids de l'unité de volume des terres ; γ la force rapportée à l'unité de surface, necessaire pour séparer deux portions du massif en les faisant glisser l'une sur l'autre :

Dans le triangle ABC, on a $AB = \dfrac{h}{\cos(\beta - \varepsilon)}$; $AC = \dfrac{h}{\cos \varepsilon}$

l'air du triangle $ABC = \frac{1}{2} h^2 \dfrac{\sin \beta}{\cos \varepsilon \cos(\beta - \varepsilon)} = T.$

La force qui tend à faire glisser le prisme ABC sur AC est :

$$\Delta T \left\{ \cos(\beta - \varepsilon) - \sin(\beta - \varepsilon) \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right\}.$$

La force qui s'oppose à ce glissement est :

$$Q\left(\sin\beta + \cos\beta \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right) + \gamma \frac{h}{\cos(\beta - \varepsilon)}.$$

En égalant ces deux forces on aura pour équation d'équilibre, après avoir mis à la place de T sa valeur :

$$Q = \left\{ \sin\beta + \cos\beta \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right\} = \frac{\Delta h^2}{2} \times \frac{\sin\beta}{\cos\varepsilon \cdot \cos(\beta - \varepsilon)} \left(\cos(\beta - \varepsilon) - \sin(\beta - \varepsilon) \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right) - \frac{\gamma h}{\cos(\beta - \varepsilon)}.$$

Multipliant par $\sin\theta$, ses deux membres on a

$$Q \cos(\beta - \theta) = \frac{\Delta h^2}{2\cos\varepsilon} \times \frac{\sin\beta \sin(\theta + \varepsilon - \beta)}{\cos(\beta - \varepsilon)} - \frac{\gamma h \sin\theta}{\cos(\beta - \varepsilon)}.$$

Divisant par $\cos(\beta - \theta)$ les deux membres et observant que

$$2 \sin a \cdot \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

$$2 \cos a \cdot \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b) \text{ ; il vient :}$$

$$Q = \frac{\Delta h^2}{2\cos\varepsilon} \times \frac{\cos(2\beta - \varepsilon - \theta) - \cos(\varepsilon + \theta)}{\cos(2\beta - \varepsilon - \theta) + \cos(\varepsilon - \theta)} - 2\gamma h \sin\theta \times \frac{1}{\cos(2\beta - \varepsilon - \theta) + \cos(\varepsilon - \theta)} \quad (1)$$

Dans cette expression β est seule variable et l'on voit de suite que la plus grande valeur de Q correspond à la plus grande valeur de $\cos(2\beta - \varepsilon - \theta)$, c'est-à-dire à $\cos(2\beta - \varepsilon - \theta) = 1$ ce qui donne :

$$2\beta - \varepsilon - \theta = 0 \text{ ; d'où } \beta = \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \theta).$$

Donc le plan, qui détache le prisme de plus grande poussée, partage en deux parties égales l'angle compris entre la paroi et le talus naturel des terres.

Cette valeur de β substituée dans (1) donne pour le maximum de Q :

$$Q = \frac{\Delta h^2}{2\cos\varepsilon} \cdot \frac{1 - \cos(\varepsilon + \theta)}{1 + \cos(\varepsilon - \theta)} - \frac{2\gamma h \sin\theta}{1 + \cos(\varepsilon - \theta)} \quad \ldots (a)$$

telle est la valeur de la force qui empêche le prisme de plus grande poussée de glisser.

Remarque. — Cette théorie de la poussée des terres ne convient qu'au cas où la paroi qui termine le massif est verticale ou bien inclinée en dedans ; mais lorsque cette paroi est inclinée en dehors, comme nous l'avons supposé dans la solution qui précède, il faut résoudre cette autre question.

Problème. — Dans le cas où la paroi en question est inclinée en dehors, quel est de tous les prismes qu'on peut détacher du massif, celui pour lequel la force Q, perpendiculaire à la paroi et passant par le centre de gravité du prisme, doit faire le plus grand effort pour empêcher ce prisme de tourner autour de l'arête A. (à résoudre). Ce prisme sera nommé prisme de plus grande poussée par rotation, tandis que le prisme déterminé plus haut sera le prisme de plus grande poussée par glissement.

RAIDEUR DES CORDES BLANCHES ET GOUDRONNÉES D'APRÈS COULOMB.

32. La résistance qu'oppose une corde à se laisser plier est appelée sa raideur.

L'effet de la raideur d'une corde qui passe sur une poulie est d'augmenter le bras de levier du brin de la corde auquel est attachée la résistance, qui produit la tension de la corde.

Au lieu de chercher par expérience la quantité dont le bras de levier de la résistance doit être augmenté par suite de la raideur, on suppose que ce bras de levier reste le même et l'on cherche la quantité dont la résistance doit être augmentée pour tenir lieu de l'augmentation de son bras de levier. Cette quantité est la mesure de la raideur. Mais il ne faut pas oublier que l'effet réel de la raideur n'est pas d'augmenter la résistance mais seulement son bras de levier. Sans cela on pourrait commettre une erreur dans le calcul des pressions sur les tourillons de la poulie.

33. *Lois de la raideur des cordes.*

Coulomb a trouvé par un petit nombre d'expériences que :

1° Pour une même corde s'enroulant sur une même poulie la raideur est proportionnelle à la tension.

2° Pour une même corde s'enroulant sur des poulies de diamètres différents, la raideur, à tension égale, est en raison inverse du diamètre de la poulie.

3° Pour des cordes de diamètres différents s'enroulant sur une même poulie, la raideur, à tension égale, est proportionnelle au diamètre de la corde élevé à une certaine puissance μ. Coulomb a trouvé que le nombre μ, qui est à peu près 2 pour des cordes blanches et neuves, diminue à mesure que la corde s'use, sans jamais devenir inférieur à 1,40.

Des lois précédentes Coulomb conclut que :

54. *La raideur* R *des cordes blanches peut être représentée par la formule*

$$R = \frac{d^{\mu}}{2r}(a + bQ) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

où d est le diamètre de la corde ; $2r$ le diamètre de la poulie ; Q le poids que soutient la corde ; a et b deux constantes que l'expérience détermine pour des cordes d'une même nature. $\mu = 2$ pour les cordes blanches neuves ; $\mu = 1,5$ pour les cordes à demi usées et $\mu = 1$ pour les ficelles très-petites et très-flexibles.

55. Navier a calculé d'après les résultats des expériences de Coulomb les valeurs des constantes ad^{μ}, bd^{μ} pour les cordes soumises à l'expérience par ce dernier. Voici le tableau de ces valeurs :

DÉSIGNATION des cordes.	NOMBRES de fils de caret.	DIAMÈTRES des cordes.	POIDS des cordes par mètre de longueur.	RAIDEUR constante ad^{μ}	RAIDEUR variable bd^{μ} par kilogr. de la charge Q.
		m	kilogr.	kilogfi	kilogr.
Corde blanche neuve.	30	0.0200	0.2834	0.22246	0.0097382
Id.	15	0.0144	0.1448	0.063514	0.0055182
Id.	6	0.0088	0.0522	0.0106038	0.0023804
Corde goudronnée. .	30	0.0236	0.3326	0.3496	0.0125514
Id.	15	0.0168	0.1632	0.105928	0.0060592
Id.	6	0.0096	0.0693	0.021208	0.0025962

55. *Application.* Quelle est la raideur d'une corde blanche de 30 fils de caret de $0^m,02$ de diamètre s'enroulant sur une poulie de $0^m,20$ de diamètre et élevant un poids de 500^k. Cette raideur est :

$$R = \frac{1}{0,40}(0,22246 + 0,009738 \times 500) = 12^k,73.$$

56. *La raideur* R' *d'une corde dont le diamètre* d' *n'est pas indiqué au tableau précédent, est donnée par la formule*

$$R' = R\left(\frac{d'}{d}\right)^{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

où R est la raideur de la corde, dont le diamètre d se trouve dans le tableau et s'approche le plus du diamètre d' de la corde proposée.

57. *Application.* Quelle est la raideur R' d'une corde blanche neuve (donc $\mu = 2$) de $0^m,0254$ de diamètre s'enroulant sur une poulie de $0^m,40$ de diamètre et élevant un poids de 500^k ?

Dans le tableau, la corde dont le diamètre s'approche le plus du diamètre $0^m,0254$ a pour diamètre $0^m,02$ et pour raideur $R = 12^k,73$ et la formule (2) donne :

$$R' = 12^k,73\left(\frac{0,0254}{0,02}\right)^2 = 20^k,53.$$

58. *La raideur des cordes goudronnées est donnée par la formule*

$$R = \frac{n}{2r}(a + bQ) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

où n est le nombre de fils de caret indiqué au tableau précédent.

59. *La raideur* R' *d'une corde goudronnée dont le nombre de fils de caret ne se trouve pas au tableau est donnée par la formule*

$$R' = R\frac{n'}{n} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

où R est la raideur de la corde dont le nombre n de fils de caret se trouve au tableau et s'approche le plus du nombre n'.

RAIDEUR DES CORDES BLANCHES ET GOUDRONNÉES D'APRÈS MORIN.

60. Morin en reprenant la discussion des résultats de Coulomb représente la raideur des cordes blanches et goudronnées par la formule

$$R = \frac{A + BQ}{2r} \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

n représentant le nombre de fils de caret, les valeurs de A et de B sont :

Pour les cordes blanches :

$$A = (0,000\,297 + 0,000\,245\,n)\,n \quad \text{et} \quad B = 0,000\,363\,n \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Pour les cordes goudronnées,

$$A = (0,0014575 + 0,000346\,n)\,n \quad \text{et} \quad B = 0,0004181\,n \quad . \quad . \quad . \quad (c).$$

En partant du principe que les nombres de fils de caret de deux cordes sont comme les carrés de leurs diamètres, M. Morin a calculé, en faisant usage des formules précédentes, les résultats du tableau suivant pour une poulie de 1 mètre de diamètre.

NOMBRE DE FILS.	CORDES BLANCHES. Diamètre.	Raideur constante A.	Raideur variable B par kilogramme de la charge Q.	CORDES GOUDRONNÉES. Diamètre.	Raideur constante A.	Raideur variable B par kilogramme de la charge Q.
	mètres.	kilogr.	kilogr.	mètres.	kilogr.	kilogr.
6	0.008 9	0.010 603 8	0.002 178	0.010 5	0,021 201	0.002 512 992
9	0.011 0	0.022 520 7	0.003 267	0.012 9	0.041 143	0.003 769 488
12	0.012 7	0.038 847 6	0.004 356	0.014 9	0.067 314	0.005 025 984
15	0.014 1	0.059 584 5	0.005 445	0.016 7	0.097 712	0.006 282 480
18	0.015 5	0.084 731 4	0.006 534	0.018 3	0.138 339	0.007 538 976
21	0.016 8	0.114 288 3	0.007 623	0.019 8	0.183 193	0.008 795 472
24	0.017 9	0.148 255 2	0.008 712	0.021 1	0.234 276	0.010 051 968
27	0.019 0	0.186 632 1	0.009 801	0.022 4	0.291 586	0.011 308 464
30	0.020 0	0.229 419 0	0.010 890	0.023 6	0.353 125	0.012 564 965
33	0.021 0	0.276 615 9	0.011 979	0.024 7	0.424 891	0.013 821 456
36	0.022 0	0.328 222 8	0.013 068	0.025 8	0.500 886	0.015 077 952
39	0.022 8	0.384 239 7	0.014 157	0.026 8	0.583 108	0.016 334 448
42	0.023 7	0.444 666 6	0.015 246	0.027 9	0 671 559	0.017 590 944
45	0.024 6	0,509 503 5	0.016 335	0.028 9	0.766 237	0.018 847 440
48	0.025 4	0.578 750 4	0.017 424	0.029 8	0.867 144	0.020 105 936
51	0.026 1	0.652 407 3	0.018 513	0.030 8	0.974 278	0.021 360 432
54	0.026 8	0.730 474 2	0.019 602	0.031 6	1.087 641	0.022 616 928
57	0.027 6	0.812 951 1	0.020 691	0.032 6	1.207 231	0.023 873 424
60	0.028 3	0.899 838 0	0.021 780	0.033 4	1.333 050	0.025 129 920

Application. Même question qu'à l'article (57). Le diamètre de la corde étant $0^{m},0254$, le tableau montre que le nombre de fils de caret $n = 48$, $A = 0.5787$, $B = 0.0174$ et la formule (a) donne $R = 25^{k},25$ au lieu de $20^{k},53$ qu'on trouve en faisant usage de la table de Navier.

Remarque. Il convient, quand cela est possible, de remplacer les cordes rondes par des cordes plates qui ont plus de flexibilité et de durée à section égale.

On diminue de beaucoup la raideur des cordes en les imprégnant d'un corps gras ou en les frottant avec du savon, mais par là on diminue également leur force.

61. Résistance *des cordes blanches.* D'après Coulomb les cordes portent de 50 à 60^{k} par fil de caret; mais on ne doit pas les charger de plus de 40^{k}.

D'après Noirfontaine les cordes portent de 5 à 6^{k}, par millimètre carré de la section, mais on ne doit les charger que de $2\ {}^{1}/_{2}$ à 3^{k}.

D'après Coulomb, d étant le diamètre d'une corde et n le nombre de fils de caret on a : $d^{cent.} = \sqrt{0.1338\,n}$ pour les cordes blanches et sèches et $d^{cent.} = \sqrt{0.186\ n}$ pour les cordes goudronnées.

RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES SUR LE FROTTEMENT DES AXES DE ROTATION.

62. M. Morin a trouvé que le frottement qui agit tangentiellement à un tourillon est proportionnel à la pression et indépendant de la vitesse. Ce qui est dit à l'art. 23 donne suffisamment l'idée de la manière dont il a procédé dans ses nouvelles expériences. Les résultats auxquels il est arrivé sont consignés dans le tableau suivant :

Valeurs du coéfficient de frottement des axes en mouvement sur leurs coussinets.

1° D'APRÈS M. MORIN.				
INDICATIONS DES axes.	INDICATIONS DES coussinets.	NATURE DES ENDUITS.	RAPPORT du frottement à la pression. Graissage ordinaire.	RAPPORT du frottement à la pression. Graissage continu.
Fonte.	Fonte.	Huile d'olive, saindoux, suif ou cambouis mou	0.07 à 0.08	0,054
Id.	*Id.*	Les mêmes enduits, et les surfaces mouillées d'eau	0.08	»
Id.	*Id.*	Asphalte	0.054	»
Id.	*Id.*	Surfaces onctueuses.	0.14	»
Id.	*Id*,	Surfaces onctueuses et mouillées d'eau.	0.14	»
Id.	Bronze.	Huile d'olive, saindoux, suif ou cambouis mou . . . , ...	0.07 a 0.08	0.054
Id.	*Id.*	Surfaces onctueuses.	0.16	»
Id.	*Id.*	Surfaces onctueuses et mouillées d'eau.	0.16	»
Id.	*Id.*	Surfaces très-peu onctueuses. . . .	0.19	» (*a*)
Id	Gaïac.	Sans enduit	0.18	» (*b*)
Id.	*Id.*	Huile ou saindoux	»	0.090
Id.	*Id.*	Surfaces onctueuses d'huile ou de saindoux.	0.10	»
Id.	*Id.*	Surfaces onctueuses d'un mélange de saindoux ou de plombagine . . .	0.14	«
Fer.	Fonte.	Huile d'olive, suif, saindoux ou cambouis mou	0.07 à 0.08	0.054
Id.	Bronze.	Huile d'olive, saindoux ou suif . . .	0.07 à 0.08	0.054
Id.	*Id.*	Cambouis ferme	0.09	»
Id.	*Id.*	Surfaces onctueuses et mouillées d'eau.	0.19	»
Id.	*Id.*	Surfaces très peu onctueuses . . .	0.25	» (*a*)
Id.	Gaïac.	Huile ou saindoux	0.11	»
Id.	*Id.*	Surfaces onctueuses	0.19	»
Bronze.	Bronze.	Huile	0.10	»
Id.	*Id.*	Saindoux	0.09	»
Id.	Fonte.	Huile ou suif	»	0.045 à 0.052
Gaïac.	*Id.*	Saindoux	0.12	»
Id.	*Id.*	Surfaces onctueuses	0.15	»
Id.	Gaïac.	Saindoux	»	0.07

(*a*) Les surfaces commençant à se roder. (*b*) Les bois étant un peu onctueux.

2° D'APRÈS COULOMB.			
INDICATION DES axes.	coussinets.	NATURE DES ENDUITS.	RAPPORT du frottement à la pression.
Fer.	Cuivre.	Sans enduit	0.155
Id.	*Id*,	Suif.	0.083
Id.	*Id.*	Saindoux.	0.120
Id.	*Id.*	Surfaces onctueuses de suif essuyé. . . .	0.127
Id.	*Id.*	Huile d'olive	0.130
Id.	*Id.*	Surfaces anciennement enduites de suif. .	0.135
Chêne vert.	Gaïac.	Suif.	0.038
Id.	*Id.*	Surfaces onctueuses de suif essuyé. . . .	0.060
Id.	*Id.*	Surfaces anciennement enduites de suif . .	0.070
Id.	Orme.	Suif.	0.030
Id.	*Id.*	Surfaces onctueuses de suif essuyé. . . .	0.050
Buis.	Gaïac.	Suif.	0.043
Id.	*Id.*	Surfaces onctueuses de suif essuyé. . . .	0.070
Id.	Orme.	Suif.	0.035
Id.	*Id.*	Surfaces onctueuses de suif essuyé. . . .	0.050
Fer.	Bois.	On ne désigne pas la nature des enduits. .	0.050

INTENSITÉ DU FROTTEMENT D'UN TOURILLON.

63. La résultante R de toutes les forces qui agissent sur un tourillon, fait d'abord rouler le tourillon sur le coussinet jusqu'à ce que l'arête de contact du tourillon avec le coussinet ait pris une position telle que le plan tangent, mené suivant cette arête au coussinet, fasse avec la résultante R un angle complément de l'angle de frottement (48). A partir de là, et dans un mouvement continu, le frottement du tourillon a constamment lieu contre cette même arête. f étant le coëfficient de ce frottement, on conclut d'après (48) que

64. *L'intensité du frottement que la résultante* R *fait naître au contact du tourillon avec le coussinet est égal à* R *multiplié par le rapport* $\dfrac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ *que nous représenterons désormais par* f' *et dans lequel on peut négliger* f^2 *c'est-à-dire prendre* $f' = f$ *lorsque* f *est moindre que* $\frac{1}{5}$. *Le bras de levier de ce frottement par rapport à l'axe du tourillon est égal au rayon du tourillon.*

65. *Quand l'œil d'une poulie tourne autour d'un axe fixe, l'intensité du frottement s'estime comme ci-dessus ; mais le bras de levier de ce frottement est égal au rayon de l'œil, parce que l'axe de l'œil est la seule droite du système mobile qui reste fixe.*

Remarque. — Le frottement d'un coussinet à œil prismatique est plus grand que celui d'un coussinet cylindrique. A démontrer.

FROTTEMENT DES CHAÎNES.

66. Lorsque la résultante de toutes les forces qui agissent sur un tourillon est verticale, l'arête de contact du tourillon avec le coussinet s'éloigne de la verticale menée par le centre du coussinet d'une quantité $\rho f'$ qui augmente avec ρ rayon du coussinet (à démontrer). D'où l'on déduit que

Le frottement des chaînons contre leurs axes a pour effet d'augmenter le bras de levier de la résistance d'une quantité $\rho f'$ *et de diminuer celui de la puissance de la même quantité.* ρ *représente ici le rayon du trou circulaire du chaînon.*

FROTTEMENT D'UN PIVOT CONTRE LE FOND D'UNE CRAPAUDINE.

67. Le tourillon qui termine un arbre vertical s'appelle pivot, et la boîte dans laquelle il se meut, crapaudine. N étant le poids de l'arbre et des roues qu'il supporte ; r le rayon du pivot et f le coëfficient de frottement ; on a la règle :

L'intensité du frottement que la base du pivot exerce contre le fond de la crapaudine, est Nf *et le bras de levier de ce frottement par rapport au centre de la base du pivot est* $\frac{2}{3}r$.

68. *Si la base du pivot est une couronne circulaire comprise entre deux circonférences de rayons* r, r', *le bras de levier moyen du même frottement sera*

$\frac{2}{3}\,\dfrac{r'^3 - r^3}{r'^2 - r^2} = \frac{2}{3}\,\dfrac{r'^2 + rr' + r^2}{r' + r} = \rho + \dfrac{e^2}{3\rho}$, *où* ρ *est la demi somme des rayons de la couronne et* e *la demi différence de ces mêmes rayons.*

Démonstration. — La pression N étant supposée passer par le centre de la base du pivot, chaque élément de cette base subit la même pression et par suite le frottement de chaque élément est le même.

La pression sur l'unité de surface de la base est $\dfrac{N}{\pi r^2}$. En nommant s la surface d'un élément très-petit dont la distance au centre de la base est x, on aura : pour la pression sur cet élément $\dfrac{N}{\pi r^2}s$; pour le frottement du même élément $\dfrac{N}{\pi r^2}f$; et pour le moment de ce frottement par rapport au centre de la base $\dfrac{N}{\pi r^2}fsx$.. (1).

Le rayon r étant divisé en n parties égales à u de sorte que $nu = r$, la surface élémentaire comprise entre les deux circonférences de rayons x et $(x+u)$ est égale à $2\pi xu$. Le nombre d'éléments égaux à s renfermés dans cette surface élémentaire est $\dfrac{2\pi x u}{\ }$. En multipliant ce nombre par (1), on aura pour la somme des moments des frottements de tous les éléments dont la distance au centre de la base est x, l'expression $\dfrac{Nf}{r^2}\,2x^2u$.

En faisant dans cette dernière expression successivement $x = u,\ 2u,\ 3u,\ \ldots\ nu$, et sommant, on aura pour la somme des moments des frottements de tous les éléments de la base du pivot $\dfrac{Nf}{r^2}\,\frac{2}{3}\,r^3 = Nf\,\frac{2}{3}\,r$.

Lorsque la base du pivot est une couronne circulaire, terminée à deux circonférences de rayons r, r' alors la pression sur l'unité de surface de la base frottante est $\dfrac{N}{\pi(r'^2 - r^2)}$. Le reste comme ci-dessus.

INTENSITÉ DU FROTTEMENT D'UN PISTON.

69. r étant le rayon d'un piston ; p, p' les pressions par unité de surface sur les deux bases ; e l'épaisseur du piston ; f coëfficient du frottement donné par le tableau (pag. 10) on démontrera que l'intensité du frottement de glissement du piston est donnée par la formule $2\pi ref\,(p - p')$.

Conditions d'équilibre dynamique dans les machines a axes de rotation.

EU ÉGARD AU FROTTEMENT DES TOURILLONS ET A LA RAIDEUR DES CORDES.

70. Règle Générale. — *Lorsque toutes les forces, à part le poids de l'arbre et des roues qu'il supporte sont situées dans des plans perpendiculaires à l'axe, il faut pour l'équilibre dynamique que le moment de la puissance par rapport à l'axe soit égal au moment de la résistance, plus aux moments des frottements des tourillons, plus au moment de la raideur de la corde, et plus au moment du frottement du pivot si l'axe est vertical ou incliné.*

71. *Comment il faut décomposer les forces pour déterminer les pressions sur les tourillons supposés inégaux et sur les pivots.*

L'axe peut être horizontal, incliné ou vertical. Dans ces trois cas, nous supposerons toutes les forces situées dans des plans perpendiculaires à l'axe. Cette hypothèse convient à la résultante des poids supportés par l'axe lorsque celui-ci est horizontal. Si l'axe est incliné, la base du tourillon inférieur devra porter contre un appui ; dans ce cas on décomposera la résultante des poids, supposée appliquée en un point de l'axe,

suivant l'axe et suivant une perpendiculaire à l'axe ; la composante qui agit suivant l'axe donnera lieu à un frottement de pivot ; l'autre composante sera, comme toutes les autres forces, située dans un plan perpendiculaire à l'axe.

Cela posé, on transportera toutes les autres forces parallèlement à elles-mêmes et dans leurs plans jusqu'à l'axe, ce qui donnera lieu à autant de couples qu'il y a de forces transportées.

Chaque force actuellement appliquée en un point de l'axe devra être décomposée suivant deux directions x, y, perpendiculaires à l'axe et perpendiculaires entre elles.

Chacune de ces composantes devra à son tour être décomposée en deux autres parallèles, appliquées respectivement sur les deux tourillons.

De cette manière chaque tourillon est sollicité par deux systèmes de forces, les unes parallèles à x, les autres à y. La résultante des deux systèmes de forces qui agissent sur chaque tourillon multipliée par f' donnera l'intensité du frottement du tourillon.

Si les tourillons sont égaux, il suffit de chercher la résultante de toutes les forces, transportées comme il est dit en des points de l'axe, et de multiplier cette résultante par f' et par le rayon des tourillons pour avoir la somme des moments des frottements des deux tourillons.

ÉQUILIBRE DE LA POULIE FIXE.

72. Soient : r le rayon de la poulie augmenté de celui de la corde ; d le diamètre de la corde ; ρ le rayon du tourillon ; K le poids de la poulie ; a, b, μ constantes qui ont rapport à la raideur de la corde.

1° En supposant la puissance P et la résistance Q verticales, la résultante de toutes les forces sera $(P + Q + K)$ et on aura pour condition d'équilibre, d'après la règle (70) :

$$Pr = Qr + (P + Q + K)f'\rho + \frac{d^\mu}{2r}\,(a + bQ)r$$

$$\text{d'où } P = Q\,\frac{r + f'\rho + \dfrac{bd^\mu}{2}}{r - f'\rho} + \frac{Kf'\rho + \dfrac{ad^\mu}{2}}{r - f'\rho}\quad .\ .\ .\quad (1)$$

On remarquera que P n'est pas nul quand $Q = 0$.

Exemple. $r = 0^m,09$; $d = 0^m,04$; $\rho = 0^m,018$; $f' = 0,19$ pour un essieu en fer qui frotte sur une boite en bronze ; $Q = 660^k$; $K = 10^k$; la corde est neuve, donc $\mu = 2$. La formule (1) donne, en remarquant que le rayon de la poulie doit être augmenté du rayon de la corde, $P = 825^k,5$.

2° Si la puissance P est horizontale et la résistance Q verticale, la résultante de toutes les forces est $\sqrt{P^2 + (Q + K)^2}$ et l'équation d'équilibre sera :

$$Pr = Qr + f'\rho\left(\sqrt{P^2 + (Q+K)^2} + \frac{d^2}{2r}(a + bQ)\right)r. \quad . \quad . \quad (2)$$

Remarque. Au lieu de résoudre cette équation par rapport à P, on cherchera une première valeur approchée de P, en négligeant le frottement du tourillon ; puis on remplacera P dans le second membre par cette première valeur trouvée, ce qui donnera une seconde valeur de P plus exacte que la première, et ainsi de suite :

On peut aussi avoir recours au théorème de Mr Poncelet, pour faire disparaitre le radical :

73. Théorème *de Mr Poncelet.* Un radical de la forme $\sqrt{X^2 + Y^2}$ peut être remplacé par $X\alpha + Y\beta$; où α et β sont des constantes données par le tableau ci-après, avec l'indication du maximum de l'erreur commise :

RELATION entre X et Y	VALEURS DE α.	VALEURS DE β.	MAXIMUM de l'erreur.
$X \gtrless Y$	0,8284	0,8284	$\frac{1}{6}$
$X > Y$	0,96046	0,39783	$\frac{1}{25}$
$X > 2Y$	0,98592	0,2327	$\frac{1}{74}$

74. Problème. — On demande de trouver les conditions d'équilibre de la poulie fixe, lorsque les deux cordons ont des directions quelconques.

Équilibre de la poulie fixe mise en mouvement par une chaîne.

75. Supposons les deux branches de la chaîne verticales. Soient R le rayon de la poulie compté depuis son centre jusqu'au centre de l'œil d'un chainon tangent à la poulie ; r le rayon du tourillon de la poulie ; f' coëfficient de frottement relatif à ce tourillon ; ρ rayon de l'œil d'un chainon et f'' coëfficient du frottement du chainon contre son axe. On a d'après (66) pour équation d'équilibre, en conservant à P, Q, a, b et K les significations du n° 72.

$$P(R - f''\rho) = Q(R + f''\rho) + (P + Q + K)f'r$$

d'où nous laissons à déduire la valeur de P.

Équilibre du treuil.

76. Considérons un treuil dont l'axe est horizontal ; la résistance Q est suspendue à l'extrémité d'une corde de diamètre d qui s'enroule sur le cylindre ; et la puissance P agit tangentiellement à une roue concentrique au cylindre du treuil.

Soient : R le rayon de la roue augmenté du rayon de la corde suivant laquelle agit la puissance P ;
r le rayon du cylindre augmenté du rayon de la corde à laquelle est suspendu le poids Q ;
ρ, ρ' les rayons des tourillons ;
l la longueur du cylindre ;
p la distance du point d'application de P au tourillon ρ ;
q la distance du point d'application de Q au tourillon ρ ;
G le poids du cylindre et de la roue ;
g la distance du point d'application de G au tourillon ρ ;
λ l'angle que P fait avec la verticale ;
f', a, b, ayant les mêmes significations qu'au n° 72.

Ayant décomposé P en deux forces, l'une verticale $P\cos\lambda$, l'autre horizontale $P\sin\lambda$, les forces verticales qui agissent sur le treuil sont Q, G, $P\cos\lambda$ et la force horizontale, $P\sin\lambda$. Toutes ces forces étant décomposées chacune en deux parallèles et appliquées respectivement aux tourillons ρ et ρ', on aura :

pour la somme des forces verticales appliquées au tourillon ρ :

$$Q\frac{l-q}{l} + G\frac{l-g}{l} + P\frac{l-p}{l}\cos\lambda \quad . \quad . \quad (1)$$

pour la force horizontale appliquée au même tourillon :

$$P\frac{l-p}{l}\sin\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

pour la somme des forces verticales appliquées au tourillon ρ' :

$$Q\frac{q}{l} + G\frac{g}{l} + P\frac{p}{l}\cos\lambda \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

pour la force horizontale appliquée au même tourillon :

$$P\frac{p}{l}\sin\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

pour la résultante N des forces appliquées au tourillon ρ :

$$N = \frac{1}{l}\sqrt{\left(Q(l-q) + G(l-g) + P(l-p)\cos\lambda\right)^2 + P^2(l-p)^2\sin^2\lambda} \quad . \; . \; . \; (5)$$

pour la résultante N' des forces appliquées au tourillon ρ' :

$$N' = \frac{1}{l}\sqrt{\left(Qq + Gg + Pp\cos\lambda\right)^2 + P^2p^2\sin^2\lambda} \quad . \; . \; . \; . \; (6)$$

et pour l'équation d'équilibre du treuil :

$$PR = Qr + Nf'\rho + N'f'\rho' + \frac{d^\mu}{2r}(a + bQ)r \quad . \; . \; . \; . \; (a)$$

même observation qu'au n° 72, 2° pour déduire la valeur de P. Nous ferons seulement remarquer, si l'on emploie le théorème de Mr Poncelet, que la résultante des forces verticales qui entre dans les deux radicaux ci-dessus est plus grande que celle des forces horizontales.

77. Si les tourillons sont égaux l'équation (a) devient

$$PR = Qr + \rho f'\sqrt{\left(Q + G + P\cos\lambda\right)^2 + P^2\sin^2\lambda} + \frac{d^\mu}{2}\left(a + bQ\right) \quad . \; (b)$$

78. Problème. — Trouver les conditions d'équilibre dans le treuil mis en mouvement par une corde ou une courroie sans fin ?

CABESTAN, MANÉGE OU TREUIL A AXE VERTICAL.

79. L'équation d'équilibre (a) relative au treuil à axe horizontal convient également au cabestan ou treuil à axe vertical ; il suffit seulement de faire $G = 0$ dans cette équation et d'ajouter à son second membre le moment du frottement du pivot. Si le cabestan est manœuvré par des hommes qui agissent deux à deux en deux points symétriques par rapport à l'axe vertical du cabestan, alors l'action exercée par ces hommes n'a aucune influence sur le frottement des tourillons et l'on devra faire $P = 0$ dans les équations 5 et 6 du n° 76.

ÉQUILIBRE DE LA POULIE MOBILE.

80. Dans le cas général où les deux cordons ont des directions quelconques, on décomposera les tensions T_1, T_2 des deux cordons suivant l'horizontale et suivant la verticale. On égalera entre elles les deux composantes horizontales. On égalera la somme

des composantes verticales à la charge Q augmentée du poids K de la poulie et de celui K' de la chape. Enfin on égalera le moment de T_2, par rapport au centre de l'œil de la poulie, au moment de T_1 plus au moment du frottement du tourillon, en remarquant que la résultante des forces qui agissent sur le tourillon est égale à $(Q + K')$, etc., etc.

Dans le cas particulier où les deux cordons de la poulie mobile sont parallèles à la verticale, on trouve pour équation d'équilibre :

$$T_2 \text{ ou la puissance } P = \frac{(Q + K')\left(r + f'\rho + \frac{bd^\mu}{2}\right) + K\left(r + \frac{bd^\mu}{2}\right) + \frac{ad^\mu}{2}}{2r + \frac{bd_\mu}{2}}$$

81. Problème. Calculer l'effort nécessaire pour élever un fardeau avec le système d'une poulie mobile et d'une poulie fixe, les trois cordons étant parallèles ?

ÉQUILIBRE DU PALAN.

82. Examinons le cas où les poulies assemblées sur le même axe dans chaque chape sont égales, et supposons le parallélisme entre les cordons qui relient les deux systèmes de poulies.

Soient : $t_1, t_2, t_3 \; . \; . \; t_{n+1}$ les tensions des cordons successifs ; t_1 étant la tension du premier cordon attaché à la chape fixe, et t_{n+1} la puissance P, ou la tension du dernier cordon passant sur la dernière poulie de la chape fixe ; Q le poids à soulever appliqué à la chape mobile, et égal à la somme des tensions des cordons qui aboutissent à la chape mobile ; r rayon des poulies ; ρ rayon de l'œil de chaque poulie ; f' coëfficient de frottement ; d diamètre de la corde ; a, b, μ quantités ayant rapport à la raideur de la corde.

En négligeant le poids des poulies, on aura pour l'équilibre entre t_1 et t_2

$$t_2 = t_1\frac{r + f'\rho + \frac{bd^\mu}{2}}{r - f'\rho} + \frac{ad^\mu}{2(r - f'\rho)}$$

Et en faisant pour abréger $\frac{ad^\mu}{2(r - f'\rho)} = \alpha$, $\frac{r + f'\rho + \frac{bd^\mu}{2}}{r - f'\rho} = \beta$, il vient

$t_1 = t_1$ que nous pouvons mettre sous la forme $= \alpha\,\frac{1 - 1}{\beta - 1} + t_1$

$$t_2 = \alpha + \beta t_1 \ldots \ldots = \alpha \frac{\beta - 1}{\beta - 1} + \beta\, t_1$$

$$t_3 = \alpha + \beta t_2 = \alpha(1 + \beta) + \beta^2 t_1 \ldots \ldots = \alpha \frac{\beta^2 - 1}{\beta - 1} + \beta^2 t_1$$

$$t_4 = \alpha + \beta t_3 = \alpha(1 + \beta + \beta^2) + \beta^3 t_1 \ldots \ldots = \alpha \frac{\beta^3 - 1}{\beta - 1} + \beta^3 t_1$$

. . . .

$$t_n = \alpha + \beta t_{n-1} = \alpha(1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{n-2}) + \beta^{n-1} t_1 = \alpha \frac{\beta^{n-1} - 1}{\beta - 1} + \beta^{n-1} t_1$$

$$t_{n+1} = \alpha + \beta t_n = \alpha(1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{n-1}) + \beta^n t_1 = \alpha \frac{\beta^n - 1}{\beta - 1} + \beta^n t_1$$

D'où l'on déduit pour la puissance P qui est égale à t_{n+1}

$$P = \alpha \frac{\beta^n - 1}{\beta - 1} + \beta^n t_1 \ldots \ldots \quad (1)$$

D'un autre côté Q étant égal à $(t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n)$ on a

$$Q = t_1 \frac{\beta^n - 1}{\beta - 1} + \frac{\alpha}{\beta - 1}\left(\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1} - n\right) \ldots \quad (2)$$

Eliminant t_1, entre (1) et (2) il vient :

$$P = Q\, \beta^n \frac{\beta - 1}{\beta^n - 1} + \alpha\left(n \frac{\beta^n}{\beta^n - 1} - \frac{1}{\beta - 1}\right) \ldots \quad (a)$$

Exemple. — Pour le palan de la chèvre d'artillerie équipée à quatre brins on a : $r = 0^m,09$; $d = 0^m,04$; $\rho = 0^m,018$; $f' = 0,19$ comme à l'exemple du n° 72; $\mu = 1,75$ pour une bonne corde, mais ayant déjà servi; $n = 4$. La formule (a) donne $P = 9^k,617 + 0,3988\,Q$. Si $Q = 2800^k$, on trouve $P = 1126,237$. Sans résistances passives, P serait seulement le quart de 2800^k ou 700^k.

ÉQUILIBRE DE LA VIS A FILET CARRÉ.

83. *Il s'agit d'élever un poids Q attaché à une vis verticale dont l'écrou est fixe au moyen d'une force horizontale P agissant à une distance R de cet axe.*

Données. Soit α l'angle de l'hélice moyenne du filet avec le plan horizontal ; r le rayon de la surface cylindrique sur laquelle est tracée cette hélice ; f coefficient de frottement ; $h = 2\pi r tg\alpha$ le pas de la vis.

Supposons d'abord que la vis, au lieu d'être sollicitée par une puissance unique, le soit par deux forces égales et parallèles agissant en sens contraires en deux points symétriques par rapport à l'axe de la vis. En considérant l'hélice symétrique de l'hélice moyenne par rapport à l'axe de la vis, nous supposerons la résistance Q décomposée en deux autres égales et parallèles et concentrées en deux points symétriques situés respectivement sur ces deux hélices.

Il est visible qu'à raison de cette distribution symétrique des forces, l'axe de la vis ne pourra éprouver aucune déviation latérale et par suite tout frottement latéral sera ainsi évité.

Mais si l'on fait abstraction du frottement latéral, l'équation d'équilibre sera la même si l'on suppose une puissance P unique et la résistance Q concentrée en un seul point n de l'hélice moyenne.

Cela posé, par suite de la liaison établie dans cette machine, le point n est forcé de parcourir successivement les différents éléments de l'hélice moyenne, c'est-à-dire de se mouvoir successivement sur des plans inclinés différents mais ayant tous la même inclinaison α sur le plan horizontal. Cherchons d'abord la force horizontale X qui, appliquée au point n et dans le plan tangent au cylindre vertical sur lequel se trouve l'hélice moyenne, est capable de tenir en équilibre dynamique la résistance Q sur cette hélice moyenne (sur la tangente à l'hélice). Or ici les forces X et Q peuvent, chacune, être décomposées suivant la tangente à l'hélice et suivant la normale à la surface hélicoïde du filet, comme étant dans un même plan avec cette tangente et cette normale. Cela posé, si l'on égale les composantes qui agissent suivant la tangente, au frottement provenant des composantes qui agissent suivant la normale, on trouvera pour la valeur de X

$$X = Q \frac{f + tg\,\alpha}{1 - f\, tg\,\alpha} \ldots \quad (1)$$

Pour que la puissance P fasse équilibre à la résistance X opposée par le point n, par l'intermédiaire de l'axe de la vis, il faut que le moment de P par rapport à cet axe soit égal à celui de X, ce qui donne :

$$PR = Xr \quad \ldots (2); \quad PR = Qr \frac{f + tg\alpha}{1 - ftg\alpha} \quad \ldots (3) \text{ ou bien } PR = Qr \frac{2\pi r f + h}{2\pi r - fh}$$

Exemple. — Pour une vis en fer et un écrou en bronze on a : $R = 0^m,16$; $r = 0^m,024$; $h = 0^m012$; $f = 0,168$;) la dernière formule donne $P = Q \times 0,038$; et sans le frottement $P = Q \times 0,012$.

84. *Frottement latéral de la vis dans le cas où l'écrou est toujours fixe et où la vis n'est pas sollicitée par deux forces égales et parallèles agissant en sens contraires en deux points symétriques par rapport à l'axe de la vis.*

Dans ce cas, la surface cylindrique extérieure du filet de la vis subit deux pressions de sens contraires contre la surface cylindrique intérieure de l'écrou en deux points A et B situés dans les deux plans horizontaux qui terminent haut et bas l'épaisseur l de l'écrou. Transportons parallèlement à elle-même la force P au point où l'axe de la vis est rencontré par le plan horizontal qui renferme la force P. Désignons par a et b les distances de ce plan horizontal aux plans horizontaux qui passent par A et B.

En décomposant la puissance P en deux autres parallèles agissant respectivement aux points A et B on aura :

pour la composante agissant au point A dans le sens de P . . . $P\frac{b}{l}$

pour la composante agissant au point B en sens contraire de P . . . $P\frac{a}{l}$

Ces pressions donnent lieu aux deux frottements $Pf\frac{b}{l}$, $Pf\frac{a}{l}$

qui agissant tangentiellement à la surface cylindrique intérieure de l'écrou, auront pour bras de levier, par rapport à l'axe de la vis, le rayon r' de cette surface. Cela posé, en égalant le moment de P au moment de X et au moment de ces deux frottements, on aura pour équation d'équilibre :

$$PR = Qr\frac{f + tg\,\alpha}{1 - ftg\,\alpha} + f\left(P\frac{b}{l} + P\frac{a}{l}\right)r' \quad . \ . \ . \quad (4)$$

Cette équation convient aussi au cas où la vis est guidée par des collets particuliers.

85. *Quand le poids Q ne peut tourner librement avec la vis et qu'il est forcé de se mouvoir parallèlement à lui-même au moyen de guides,* alors il se trouve lié à la vis par un collier ou anneau de rayons ρ, ρ'. Cet anneau donne lieu à un frottement dont le moment μ est d'après (68)

$$\mu = f'Q\frac{2}{3}\,\frac{\rho^2 + \rho\rho' + \rho'^2}{\rho + \rho'} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5)$$

et qui doit être ajouté au second membre de l'équation d'équilibre (3) n° 83.

D'un autre côté, la pression N contre les guides qui résulte de ce frottement est donnée par l'équation : $NL = \mu$ . . . (6)

où L est la distance des guides à l'axe de la vis.

De cette pression N contre les guides naît le frottement Nf'' qui, agissant suivant

la verticale, a pour effet d'augmenter la résistance Q et doit être ajouté à Q dans l'équation d'équilibre (3) qui devient ainsi

$$PR = (Q + Nf'')\,r\,\frac{f + tg\alpha}{1 - tg\alpha} + \mu \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (7)$$

où il reste à remplacer N et μ, par leurs valeurs (5) et (6).

86. *Frottement du pivot des vis de compression.* L'écrou restant fixe, si l'objet de la vis est de comprimer un corps par son extrémité inférieure, celle-ci formant alors pivot donne lieu à un frottement dont le moment (68) devra être ajouté au second membre de l'équation d'équilibre 3, n° 83.

87. *Quand l'écrou est mobile et qu'il se meut parallèlement à lui-même au moyen de guides à oreilles, de coulisses, etc,* dans ce cas il est à remarquer que, sans les guides, l'écrou tournerait avec la vis sans monter suivant la verticale. La résistance opposée par les guides, pour empêcher l'écrou de tourner avec la vis, est égale à $\frac{Xr}{L}$. Cela posé, le poids Q qui représente ici le poids de l'écrou et de son équipage devra dans l'équation 3, n° 83 être augmenté du frottement $f''X\frac{r}{L}$ résultant de la pression $X\frac{r}{L}$ de l'écrou contre les guides. On aura ainsi pour l'équilibre de la force horizontale X et du poids Q

$$X = \left(Q + f''X\frac{r}{L}\right)\frac{f + tg\,\alpha}{1 - ftg\,\alpha}$$

d'où

$$X = Q\,\frac{f + tg\,\alpha}{1 - ftg\,\alpha - f''\frac{r}{L}(f + tg\,\alpha)} \quad . \ . \ . \quad (8)$$

et l'équation d'équilibre entre P et Q sera $PR = Xr$

Mais dans le cas actuel la vis frotte sur un pivot inférieur ou sur un épaulement placé près de sa tête. La pression sur ce pivot ou sur cet épaulement est égale au poids q de la vis, plus au poids Q de l'écrou augmenté du frottement $f''X\frac{r}{L}$ contre les guides ; ce qui donne pour la pression λ sur le pivot ou sur l'épaulement

$$\lambda = q + Q + f''X\frac{r}{L} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (9)$$

f_0 étant le coéfficient du frottement du pivot et ρ le rayon de ce dernier, on aura pour l'équilibre entre P et Q :

$$PR = X r + \lambda f_o \frac{2}{3} \rho \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

où il reste à mettre à la place de X et λ leurs valeurs tirées des équations (8 et 9).

ÉQUILIBRE DE LA VIS A FILET TRIANGULAIRE.

87. Conservant l'énoncé et les données du n° (83) et appelant β l'angle que fait la génératrice de la surface hélicoïde du filet avec le plan horizontal, on trouvera pour la force horizontale X qui, appliqué au point n et dans le plan tangent au cylindre sur lequel est tracée l'hélice moyenne, est capable de tenir en équilibre

la résistance Q sur la tangente à l'hélice $X = Q\,\dfrac{tg\,\alpha + mf\cos\alpha}{1 - mf\cos\alpha} \quad . \quad . \qquad (1),$

où $m = \sqrt{1 + tg^2\alpha + tg^2\beta}$ et pour que la puissance P, fasse équilibre au moyen de l'axe de la vis, à la résistance X opposée par le point n, il faut que

$$\text{l'on ait } PR = Xr;\ \text{d'où } PR = Qr\,\frac{tg\,\alpha + mf\cos\alpha}{1 - mf\cos\alpha} \quad . \quad . \qquad (a)$$

Pour arriver à l'équation (a), on décomposera au point n chacune des deux forces X et Q en trois autres : l'une suivant la normale à la surface, l'autre suivant la tangente à l'hélice moyenne et la troisième suivant une perpendiculaire à l'axe de la vis. Or pour décomposer une force suivant trois axes, on peut d'abord décomposer cette force suivant l'un des axes et suivant une certaine droite située dans le plan des deux autres axes; puis décomposer suivant ces deux derniers la composante située dans leur plan.

Dans le cas actuel, les deux forces X et Q sont situées dans un plan vertical qui passe par la tangente à l'hélice; et si dans ce plan on décompose chacune d'elles suivant la tangente à l'hélice et suivant une perpendiculaire à cette tangente, la résultante des composantes perpendiculaires à la tangente sera dans le plan de la normale et de la perpendiculaire abaissée du point n sur l'axe de la vis; (car ces trois droites sont chacune perpendiculaires au point n à la tangente à l'hélice); cette résultante pourra donc être décomposée suivant la perpendiculaire à l'axe de la vis.

Pour faire cette dernière décomposition on a besoin de connaître l'angle que la normale au point n à la surface fait avec la perpendiculaire abaissée de n sur l'axe de la vis. A cet effet on prend l'axe de la vis pour axe des Z, la perpendiculaire abaissée de n sur l'axe de la vis pour axe des X ; enfin la perpendiculaire aux axes Z et X pour axe des Y.

Ces axes étant écrits dans l'ordre X , Y, Z
la tangente à l'hélice moyenne au point n fait avec ces axes les angles $90°, \alpha, 90° - \alpha$
la génératrice qui passe par le point n fait avec ces axes les angles $\beta, 90°, 90° - \beta$
la normale fait avec ces axes les angles inconnus a, b, c.

En exprimant que la normale est perpendiculaire à la tangente à l'hélice et à la génératrice on obtient deux équations desquelles on déduit $\cos a = tg\,\beta : m$

Remarque. Dans cette solution on a supposé la puissance P et la résistance Q distribuées chacune symétriquement autour de l'axe de la vis. De sorte que la composante perpendiculaire à l'axe, mentionnée plus haut, est détruite par une autre composante égale et directement opposée à la première. Sans cette distribution symétrique des forces, l'arète saillante de la surface des filets ira frotter contre l'arète rentrante de la surface de l'écrou.

THÉORIE DES ENGRENAGES.

Les transformations de mouvement très-nombreuses dans les métiers sont fort restreintes dans les grandes machines, à cause que dans celles-ci on exige, outre la solidité, que le travail du frottement auquel donne lieu toute transformation de mouvement, soit le moindre possible. Parmi les transformations de mouvement les engrenages occupent le premier rang.

COURBES QUI SERVENT DANS LE TRACÉ DES ENGRENAGES.

88. Epicycloïde plane. *L'épicycloïde plane est engendrée par un point d'une circonférence de cercle qui roule sans glisser sur une autre circonférence fixe.*

Nous nommerons le cercle mobile *cercle générateur*; le point qui décrit la courbe, *point générateur*; et le cercle fixe, *cercle directeur*; le point où le cercle générateur touche le cercle directeur, *point de contact*; le point où l'épicycloïde rencontre le cercle directeur, *origine de l'épicycloïde*.

Propriétés. *Pour chaque position du cercle générateur, 1° le point générateur et le point de contact sont sur une même normale à l'épicycloïde; 2° l'arc du cercle générateur, depuis le point générateur jusqu'au point de contact est égal à l'arc du cercle directeur depuis le même point de contact jusqu'à l'origine de l'épicycloïde.*

Descriptions par points de l'épicycloïde. Je divise le cercle générateur de rayon r en un nombre quelconque n de parties égales à u. Je marque par $0, 1, 2, 3 \ldots n$, les points de division successifs à partir du point de contact 0 pris pour point générateur. Je prends sur le cercle directeur un arc égal à $2\pi r$ que je divise de même en un nombre n de parties égales à u. Je marque les points de division successifs par $0, 1', 2', 3' \ldots n'$. Lorsque le cercle générateur se mouvra, les points de division 1, 2, 3 . . . . n du cercle générateur viendront respectivement coïncider avec les points de division 1', 2', 3' . . . . n' du cercle directeur.

Pour construire la position du point générateur, lorsqu'un point de division quelconque du cercle générateur, le point 3, par exemple, viendra coïncider avec le point de division correspondant 3' du cercle directeur, je remarque que le point 3 dans sa position primitive est à une distance d du point générateur 0 et à une distance δ du centre du cercle directeur. Il est facile de voir que quand le point 3 coïncidera avec le point 3', le point générateur sera à une distance d du point 3' et à une distance δ du centre du cercle directeur. Sa position est donc entièrement déterminée.

De cette construction et de la propriété de la normale énoncée plus haut il résulte que l'épicycloïde est l'enveloppe des arcs de cercle décrits des points 1', 2', 3', etc., comme centres avec des rayons respectivement égaux aux cordes 01, 02, 03, etc., du cercle générateur.

Description *de l'épicycloïde par un mouvement continu.* Il suffit de faire rouler le cercle générateur sur le cercle directeur sans qu'il puisse glisser; à quoi l'on arrive en fixant une extrémité d'un fil flexible mais inextensible au cercle générateur et l'autre extrémité du fil au cercle directeur, etc. etc.

CAS PARTICULIER DE L'ÉPICYCLOÏDE PLANE.

89. *Si une circonférence de cercle roule sans glisser dans l'intérieur d'une autre circonférence d'un rayon double, un point quelconque de la première décrira un diamètre de la seconde.*

Pour démontrer cette propriété, il suffit de faire voir que, si l'on trace un rayon du cercle directeur et une position quelconque du cercle générateur qui coupe le rayon en un point n, l'arc du cercle générateur depuis le point n jusqu'au point de contact est égal à l'arc du cercle directeur depuis le même point de contact jusqu'à l'extrémité du rayon.

90. *En faisant rouler sans glisser un cercle de rayon r dans l'intérieur d'un autre cercle de même rayon, l'épicycloïde se réduit à un point du cercle directeur.*

91. La cycloïde *est engendrée par un point d'une circonférence de cercle qui roule sans glisser sur une droite directrice.* C'est une épicycloïde plane dont le cercle directeur est une droite, c'est-à-dire un cercle dont le rayon est infini. Aussi tout ce qui précède s'applique mot pour mot à la cycloïde; il suffit seulement de remplacer les mots cercle directeur par droite directrice.

92. La développante de cercle *est engendrée par un point d'une droite qui roule sans glisser sur une circonférence de cercle. C'est une épicycloïde plane dont le cercle générateur est une droite, c'est-à-dire un cercle de rayon infini.*

Propriétés. 1° *La droite mobile est normale dans toutes ses positions à la développante.* 2° *La longueur de la normale, depuis le point générateur jusqu'au point de contact, est égale à l'arc du cercle directeur depuis le point de contact jusqu'à l'origine de la courbe.* Propriétés que l'on pouvait déduire de celles de l'épicycloïde plane.

PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES SUR LESQUELS REPOSE LE TRACÉ DES ENGRENAGES.

93. Problème. *Étant données deux circonférences de cercle de rayons* R, R' *se touchant au point* m *et pouvant tourner autour de leurs centres respectifs, on demande d'établir entre elles une liaison telle, que le mouvement de la première soit transmis à la seconde de manière que les arcs décrits simultanément par un point quelconque de la première et par un point quelconque de la seconde circonférence, soient égaux à chaque instant, c'est-à-dire que les vitesses des deux circonférences soient égales à chaque instant.*

1° Première solution *par épicycloïde.* Nommons G la circonférence de rayon $\frac{1}{2}$ R' touchant intérieurement la circonférence de rayon R' au point m. Cela posé, on fixera à la première circonférence de cercle une épicycloïde dont l'origine est au point m et qui est engendrée par G roulant sur la première circonférence. A la seconde circonférence on fixera le rayon qui passe par le point m; (lequel rayon est engendré par G roulant dans l'intérieur de la seconde circonférence n° 89).

Si l'on met en mouvement le premier cercle avec son épicycloïde, celle-ci en agissant tangentiellement contre le rayon fixé au second cercle mettra ce dernier en mouvement de manière à satisfaire à la condition du problème.

Remarque. L'épicycloïde ne saurait être tangent au rayon qu'à partir de la ligne des centres des deux circonférences.

Comme le premier cercle conduit le second, en ce que si le premier s'arrête, le second s'arrête aussi, le premier est nommé *cercle conducteur* et le second *cercle conduit.*

Propriété. *Dans ce mouvement,* 1° *le point de contact de l'épicycloïde avec le rayon se trouve toujours sur le cercle générateur* G. 2° *la droite qui unit le point de contact avec le point* m *est une normale commune à l'épicycloïde et au rayon.* (On prouve en effet que, si l'on mène un rayon partant du centre du second cercle et passant par le point de rencontre de l'épicycloïde avec le cercle générateur G, ce rayon est toujours tangent à l'épicycloïde.)

Remarque. On remarquera que c'est le cercle conduit qui donne le rayon du cercle générateur, tant de l'épicycloïde à fixer au cercle conducteur, que de l'épicycloïde rectiligne (rayon) à fixer au cercle conduit. La même remarque est applicable dans tout ce qui suit.

Remarque II. Il y aurait inconvénient à opérer le mouvement en sens contraire en faisant pousser le rayon contre l'épicycloïde. — Pourquoi?

2° Deuxième solution *par épicycloïde*. — On fixera au cercle conducteur une épicycloïde dont l'origine est au point m et qui a pour cercle générateur, le cercle conduit. A ce dernier on fixera le point m (épicycloïde définie n° 90). L'épicycloïde en poussant le point m fera naitre le mouvement voulu.

3° Troisième solution, *par développante de cercle*. On mènera par le point de contact m des deux cercles proposés une oblique à la ligne des centres. Les perpendiculaires abaissées des deux centres sur cette oblique seront les rayons de deux cercles auxiliaires pour lesquels l'oblique sera une tangente commune. Faisant rouler sans glisser l'oblique alternativement sur ces deux cercles auxiliaires, le point m engendrera deux développantes, lesquelles étant fixées aux deux cercles auxiliaires satisferont à la condition que les vitesses de leurs circonférences sont égales. On en conclut sans difficulté que les vitesses des circonférences des deux cercles proposés sont aussi égales.

Propriété. *Dans cette transmission, le point de contact des deux développantes se trouve toujours sur l'oblique, tangente commune aux deux cercles auxiliaires.* Car si par le point de contact des deux développantes on leur mène une normale commune, celle-ci devra être tangente à la fois aux deux cercles auxiliaires.

Ici la développante qui conduit l'autre est tangente à celle-ci avant et après la ligne des centres.

CAS PARTICULIERS.

94. *Cercle conduisant une droite qui lui est tangente en* m. — Les deux premières solutions n° 93 conduisent chacune à fixer au cercle une développante de sa circonférence, ayant son origine en m, et à fixer à la droite le point m.

95. *Droite conduisant un cercle auquel elle est tangente.* — Pour appliquer ici les deux premières solutions du n° 93, il suffit de remarquer que le cercle conducteur est actuellement une droite.

96. Les courbes définies précédemment ne sont pas les seules propres à résoudre la question posée au n° 93. Il en existe une foule d'autres, comme l'indique la solution du problème qui suit :

Problème. — *Ayant fixé au second cercle une courbe quelconque, construire une autre courbe qui, fixée au premier cercle et agissant contre la courbe fixée au second, satisfasse à la condition énoncée au* n° 93.

Solution. A partir du point de contact m des deux cercles proposés, et d'un même côté de la ligne des centres, je prends sur les deux cercles deux arcs d'égale longueur. Soient a, a' les extrémités de ces deux arcs, de sorte que arc ma = arc ma'.

Soit c' la courbe tracée par a' et fixée au second cercle. Je divise les deux arcs égaux ma, ma' en un même nombre de parties égales ; je désigne par m, 1, 2, 3 ... a les points de division de l'arc ma et par m, 1', 2', 3', ... a' les points de division de l'arc ma'. Je cherche les longueurs des normales abaissées des points m, 1', 2', ... a' sur la courbe c'. De chaque point de division de l'arc ma comme centre, je décris un arc de cercle avec un rayon égal à la normale abaissée du point de division correspondant sur la courbe c'. La courbe c qui enveloppe tous ces arcs de cercle étant fixée au premier cercle satisfera à la question proposée.

Il résulte en effet de cette construction que si l'on met en mouvement le premier cercle, après avoir mis en contact les deux courbes c, c', la normale commune aux deux courbes passera constamment par le point de contact des deux cercles proposés. Or on verra plus loin que de cette propriété on peut conclure à l'égalité des vitesses des circonférences des deux cercles proposés.

CONDITIONS POUR QU'IL Y AIT CONTINUITÉ DE MOUVEMENT.

97. Dans la solution n° 93, 1° l'épicycloïde fixée au premier cercle ne peut conduire le rayon fixé au second cercle que pendant un certain temps. Pour que le mouvement des deux cercles puisse se continuer indéfiniment, il faudra fixer plusieurs épicycloïdes au premier cercle et plusieurs rayons au second cercle, de façon que lorsqu'une épicycloïde a cessé de conduire un rayon, l'épicycloïde suivante commence à conduire le rayon suivant et ainsi de suite. A cet égard, il est nécessaire que deux épicycloïdes destinées à conduire deux rayons comprennent sur le premier cercle un arc égal à celui compris par les deux rayons sur le second cercle. Mais comme dans la suite du mouvement, la même épicycloïde ne conduit pas toujours le même rayon, (ce qui aurait lieu si les cercles étaient égaux), il en résulte 1° que les épicycloïdes doivent être également espacées et 2° qu'elles doivent avoir la même longueur. Il est donc nécessaire que les circonférences primitives proposées soient divisées à partir de leur point de contact m, la première en n parties égales à p et la seconde en n' parties aussi égales à p. A chaque point de division du premier cercle, on fixera une épicycloïde définie au n° 93 et à chaque point de division du second cercle on fixera un rayon.

98. La longueur de ces épicycloïdes est déterminée par la considération que, lorsqu'une épicycloïde commence à conduire un rayon dans la ligne des centres, l'épicycloïde précédente doit cesser de conduire le rayon précédent. Or pour faire qu'un rayon dans une position donnée cesse d'être conduit, il faut que l'épicycloïde soit terminée au point où ce rayon rencontre la circonférence G.

99. Si n est le nombre d'épicycloïdes fixées au premier cercle et n' le nombre de rayons fixés au second, on a : $np = 2\pi r$ et $n'p = 2\pi r'$, d'où l'on déduit que

Les nombres d'épicycloïdes et de rayons à fixer respectivement aux deux cercles sont comme les rayons de ces cercles.

Si N et N′ désignent les nombres de tours que font les deux cercles dans un même temps, on aura : $N 2\pi r = N' 2\pi r'$, d'où l'on déduit que

Les nombres de tours que les deux cercles proposés font dans un même temps sont en raison inverse des rayons de ces cercles.

Pour que la même épicycloïde conduise le moins souvent le même rayon, il faut que les nombres d'épicycloïdes et de rayons soient premiers entre eux (à démontrer.) Dans ce cas on demande *après combien de tours une même épicycloïde viendra en contact avec le même rayon.*

100. Des propriétés du n° précédent déduit la solution des problèmes suivants :

Problème. *Etant donnés les nombres de tours que deux cercles tangents doivent faire dans le même temps, ainsi que la distance de leurs centres, trouver les rayons de ces cercles.*

Problème. *Etant donnés les nombres de tours et le rayon de l'un des cercles, trouver la distance des centres de ces derniers.*

APPLICATION DES CONSIDÉRATIONS QUI PRÉCÈDENT AU TRACÉ DES ENGRENAGES.

101. *Roue, pignon.* De deux roues qui engrènent l'une avec l'autre, la plus grande se nomme *roue* ou *rouet* et la plus petite *pignon.*

102. *Dents.* Les saillies au moyen desquelles elles se conduisent s'appellent dents.

103. Le pignon est souvent remplacé par une lanterne qui consiste en deux plateaux ou tourteaux circulaires égaux et parallèles et reliés entre eux par des fuseaux cylindriques perpendiculaires aux mêmes plateaux. Ces fuseaux font l'office de dents.

104. *Engrenage plan.* Quand les axes des deux roues sont parallèles et que ces roues sont comprises entre deux plans perpendiculaires aux axes, on dit que l'engrenage est plan.

105. *Engrenage d'angle* ou *engrenage conique.* Quand les deux axes se coupent, on dit que l'engrenage est conique ou que c'est un engrenage d'angle.

106. *Cercles primitifs des deux roues.* Ce sont deux cercles tangents ayant mêmes centres que les roues et dont les rayons sont en raison inverse des nombres de tours que les roues doivent effectuer dans le même temps.

107. La forme des dents par lesquelles le mouvement d'une roue est transmis à l'autre doit satisfaire à la condition que les vitesses des circonférences primitives des deux roues soient égales à chaque instant. D'après (93 1° et 3°) on satisfera à cette condition.

1° En terminant d'un côté les dents de la roue conductrice par des surfaces cylindriques projetées suivant des épicycloïdes définies n° 93, et les dents de la roue conduite par des plans projetés suivant des rayons de cette dernière.

2° En terminant les dents des deux roues par des développantes de cercle.

108. Comme les roues sont exposées à être contremenées, soit accidentellement, soit périodiquement, il faut que les dents soient symétriques par rapport au rayon qui passe par le milieu de leur épaisseur.

109. Comme dans la plupart des machines les roues doivent pouvoir tourner dans les deux sens, il en résulte qu'il faut faire le tracé des dents en considérant tour à tour chaque roue comme devant conduire l'autre.

110. La *face* d'une dent est la partie curviligne d'une dent extérieure au cercle primitif.

111. Le *flanc* d'une dent est la partie intérieure au cercle primitif. D'après n° 107 on peut dire que la face d'une dent conduit le flanc de l'autre et réciproquement.

112. L'*épaisseur* d'une dent est sa dimension mesurée sur la circonférence du cercle primitif de la roue dont la dent fait partie.

113. Le *creux* c'est l'intervalle entre deux dents consécutives d'une roue. Il est égal à l'épaisseur de la dent de l'autre roue augmentée du *jeu* qui peut varier de 1/10 à 1/15 de cette même épaisseur.

114. La *longueur* d'une dent est sa dimension mesurée à partir de l'anneau qui la porte sur le rayon qui passe par le milieu de son épaisseur.

115. La *largeur* d'une dent est sa dimension mesurée dans le sens de l'axe de la roue.

116. Le *pas* d'un engrenage est égal à l'épaisseur d'une dent plus le creux. Ce pas doit être le même non seulement d'une dent à l'autre de la même roue mais encore sur les deux roues.

117. Le pas p d'une roue dont r est le rayon du cercle primitif et m le nombre des dents est égal à $\dfrac{2\pi r}{m}$ et la corde du pas est égal à $p\left(1 - \dfrac{1}{24}\dfrac{p^2}{r^2}\right)$

118. Pour calculer le pas, on a besoin de connaître l'épaisseur à donner aux dents. e étant l'épaisseur d'une dent en centimètres, P l'effort en kilogrammes exercé par l'une des roues sur l'autre, on a :

Pour les dents *en fonte*	$e = 0.105\sqrt{P}$	(a)
pour les dents *en bronze*	$e = 0{,}131\sqrt{P}$	(b)
pour les dents *en charme, poirier* ou *sorbier*	$e = 0{,}185\sqrt{P}$	(c)

Ces épaisseurs de dents supposent que l'on adopte les mesures suivantes pour les autres dimensions des dents : l étant la largeur des dents en centimètres, on a : 1°, $l=4$ quand la vitesse de la circonférence primitive n'excède pas $1^m{,}50$. 2°, $l=5$ pour une plus grande vitesse ; 3°. $l=6$ quand les dents sont exposées à être mouillées ; 4° la saillie des dents sur l'anneau qui les porte ne doit pas dépasser 1,5 fois l'épaisseur.

L'anneau et les dents qu'il porte étant coulés d'une seule pièce, l'anneau aura même largeur que les dents ; sa dimension dans le sens du rayon sera égale à l'épaisseur des dents.

Si les dents sont en bois et enchâssées dans des mortaises pratiquées dans un anneau en fonte, la largeur de l'anneau sera égale à la largeur des dents augmentée d'une fois leur épaisseur de part et d'autre de la mortaise. La dimension de l'anneau dans le sens du rayon sera égale à l'épaisseur des dents.

119. *Connaissant le pas* p, *chercher le nombre des dents.*

r, r' étant les rayons des cercles primitifs des deux roues et m, m' les nombres de leurs dents, on a :

$$m = \frac{2\pi r}{p}, \qquad m' = \frac{2\pi r'}{p}, \text{ d'où } m : m' = r : r'$$

m et m' devant être des nombres entiers, divisibles, pour la facilité des assemblages, par les nombres de bras, on prendra pour le nombre m le premier nombre entier inférieur à celui que l'on a trouvé, divisible par le nombre de bras et par le rapport de r à r'. En opérant ainsi on est conduit à augmenter tant soit peu le pas, ou à rendre les dents un peu plus fortes. Soit M ce nombre entier et p' le nouveau pas, on aura : $Mp' = 2\pi r$ d'où $p' = \frac{2\pi r}{M}$ et pour le nombre M' de dents de la seconde roue, on aura $M' = M\frac{r'}{r} = M : \frac{r}{r'}$ = nombre entier.

120. *Construction des engrenages à épicycloïdes.*

Soient C, C' les centres et r, r' les rayons des cercles primitifs des deux roues. Ayant déterminé le pas de l'engrenage, on portera, à partir du point de contact m des cercles primitifs, le pas sur l'une et l'autre circonférence autant de fois qu'il peut y être contenu. On marquera également les épaisseurs des dents.

Tracé d'une dent de la roue. Sur le cercle primitif du pignon on tracera le rayon qui passe par le premier point de division qui suit la ligne des centres. Ce rayon rencontre en un point d le cercle auxiliaire de diamètre r' (touchant intérieurement au point m le cercle du pignon). Par le milieu de la droite qui joint le point d au premier point de division du cercle de la roue, on élève une perpendiculaire jusqu'à la rencontre g de la circonférence de la roue. L'arc de cercle qui a ce point de rencontre g pour centre et qui a pour rayon gd formera la *face* de la dent. Cet arc de cercle diffère très peu de la portion d'épicycloïde qui devrait à la rigueur terminer la dent. Le *flanc* de la dent sera une portion du rayon qui aboutit au premier point de division de la roue après la ligne des centres.

Longueur des dents. Du point C comme centre, avec le rayon C d on décrira une circonférence qui limitera la longueur des dents de la roue, de manière que l'une cesse de pousser quand la suivante arrive à la ligne des centres.

Tracé d'une dent du pignon. Sur le cercle primitif de la roue on tracera le rayon qui passe par le premier point de division qui *précède* la ligne des centres. Ce rayon rencontre en un point δ le cercle auxiliaire de diamètre r touchant intérieurement en m le cercle de la roue. Par le milieu de la droite qui joint le point δ au premier point de division du cercle du pignon, (point qui précède la ligne des centres), on élèvera une perpendiculaire jusqu'à la rencontre γ du cercle du pignon. L'arc de cercle qui a ce point de rencontre pour centre et pour rayon $\gamma\delta$ formera la face de la dent du pignon. Du centre C', avec le rayon C'γ, on décrira une circonférence qui limitera les dents du pignon, de manière que la face d'une de ses dents commencera à être poussée par le flanc d'une dent de la roue quand la dent précédente du pignon arrivera à la ligne des centres.

121. *Dimensions du creux.* Les deux circonférences qui terminent les longueurs des dents rencontrent la ligne des centres en deux points a, a'. Du centre C de la première roue et avec un rayon égal à Ca' diminué de quatre à cinq millimètres on décrira une circonférence qui limitera le fond du creux des dents de la première roue. De même, du centre C' du pignon et avec un rayon égal à C'a diminué de quatre à cinq millimètres, on décrira une circonférence qui limitera le fond des creux du pignon. On adoucira par un petit raccordement curviligne le flanc et le fond du creux pour ne pas avoir d'angle rentrant à vive arête.

Lorsque le pignon est très petit et les efforts qu'il transmet très grands, les dents de la roue pourraient être trop minces vers le bout, ce qui sera indiqué par le tracé. Dès lors on devra renoncer à avoir deux dents en prise à la fois, et il faudra faire un nouveau tracé pour lequel on portera, sur les cercles primitifs à partir de leur point de contact m, seulement les 3/4 du pas, et on opérera pour le reste comme au n° (120). Si les dents devenaient encore trop minces vers le bout, on ne porterait à partir du point m que la moitié du pas.

Lorsque les rayons des roues sont grands et les efforts à transmettre assez faibles, alors il peut arriver que les dents soient un peu courtes ; dans ce cas on portera une fois et demi ou deux fois le pas, sur les cercles primitifs, et on opérera pour le reste comme au n° (120).

122. Les inconvénients des engrenages à épicycloïdes sont, d'après M Poncelet :

1° La pression d'une dent contre l'autre augmente, comme on verra plus loin, à mesure que le point de contact s'éloigne de la ligne des centres ; ce qui tend à les faire user inégalement. L'usure est surtout sensible près de la racine des dents conduites et à la pointe des dents conductrices.

2° Comme les dents de l'une des roues se tracent au moyen du cercle primitif de l'autre roue, une même roue ne pourra pas conduire des pignons de diamètres différents.

3° Si les axes des roues éprouvent le moindre déplacement tout en restant parallèles, l'engrenage n'est plus exact.

123. La construction de l'engrenage d'une roue conduisant une lanterne revient à remplacer dans le n° (93), 2° l'extrémité du rayon par un cercle égal à la base du fuseau et ayant cette extrémité pour centre, et à remplacer l'épicycloïde par une courbe intérieurement parallèle à l'épicycloïde et distante de celle-ci d'une quantité égale au rayon du fuseau. Le diamètre

des fuseaux doit être des $\frac{4}{3}$ aux $\frac{5}{3}$ de l'épaisseur des dents de la roue. L'inconvénient de cet engrenage c'est que le point de contact de la dent avec le fuseau ne varie presque pas sur le fuseau ; de là, prompte usure des fuseaux s'ils n'étaient construits en fonte. Les fuseaux mobiles autour de leur axe acquièrent du jeu à la longue, ce qui occasionne des chocs.

ENGRENAGE A DÉVELOPPANTES DE CERCLE.

124. A partir du point de contact m des cercles primitifs prenez sur celui du pignon un arc ma égal au pas. Par le point de contact m menez une perpendiculaire sur le rayon $C'a$: cette perpendiculaire sera la tangente commune à deux cercles auxiliaires concentriques aux cercles primitifs et servant à décrire les développantes, mentionnées au n° (93), 3° qui doivent terminer les dents. Les dents prendront en général avant la ligne des centres et d'autant plus en avant que la tangente commune aux deux cercles auxiliaires est plus inclinée sur la ligne des centres.

Si l'on veut que les dents de la roue ne commencent à conduire celles du pignon qu'à partir de la ligne des centres, il faudra que la longueur des dents du pignon soit terminée à la circonférence primitive du pignon.

Quant à la longueur des dents, on la déterminera en les traçant dans la position extrême où elles doivent agir avant et après la ligne des centres. Quoique les dents n'aient pas de flanc rectiligne, il est nécessaire de leur mener deux rayons tangents à leur naissance qui limiteront latéralement le creux. Le fond de ce dernier se détermine comme au n° (121).

L'avantage de l'engrenage à développante est que l'on peut faire engrener avec la même roue d'autres roues de divers diamètres; ce qui permet de changer à volonté la distance des deux axes de rotation. Les inconvénients du même engrenage sont : 1° l'usure des dents est plus grande à la racine qu'à la pointe, quoique la pression d'une dent contre l'autre reste constante ; cela vient de ce que les chemins décrits sur les deux développantes par leur point de contact sont plus petits à la racine que vers la pointe, comme cela ressort implicitement de la rectification de la développante qui sera donnée plus loin. 2° On peut s'assurer par un tracé que quand les rayons des roues sont très-petits, les dents sont très-affaiblies à leur pointe, inconvénient que présente beaucoup moins l'engrenage à épicycloïde.

Remarque. Dans tout ce qui précède sont implicitement contenues les règles pour tracer l'engrenage d'une roue conduisant une crémaillière et d'une crémaillière conduisant une roue.

TRACÉ DE L'ENGRENAGE DE DEUX ROUES CONIQUES.

125. Soient A, A' les axes et N, N' les nombres de tours que les deux roues doivent faire dans un même temps. Soit S le point de rencontre des deux axes supposés situés dans un plan horizontal. Soit pris dans le plan des axes un point m dont les distances r, r' à ces derniers soient en raison inverse des nombres de tours N, N'. La droite Sm étant prise pour génératrice de deux cônes de révolution ayant respectivement pour axes A, A', ces deux cônes se toucheront suivant la génératrice commune Sm et le plan vertical élevé suivant Sm sera un plan tangent commun à ces deux cônes ; r, r' seront les rayons des bases de ces deux cônes et $2\pi r$, $2\pi r'$, les circonférences de ces mêmes bases.

Menons par le point m et dans le plan des axes A, A' une perpendiculaire à la génératrice commune Sm ; cette perpendiculaire rencontrera l'axe A en un point a et l'axe A' en un point a'. En considérant les deux nouveaux cônes de révolution qui ont respectivement pour axes A, A' et pour génératrice la droite ama', ces deux cônes qui ont respectivement pour sommets a et a' se touchent suivant la génératrice commune ama' et le plan vertical élevé suivant cette génératrice commune sera un plan tangent commun à ces deux nouveaux cônes.

Si l'on développe les deux nouveaux cônes sur le plan vertical ama', on aura deux arcs de cercle qui se touchent au point m et qui ont respectivement pour centres a, a' ; pour rayons am, $a'm$; et pour longueurs, $2\pi r$, $2\pi r'$.

On prend ces deux arcs pour les cercles primitifs d'un engrenage droit et l'on fait le tracé des dents comme s'il s'agissait d'un engrenage de cette espèce. Puis on replie les patrons des dents ainsi obtenues sur les deux nouveaux cônes. On aura ainsi les directrices des surfaces coniques à sommet S qui doivent terminer les dents.

126. ***Tracé des cames pour pilon.*** Les cames à fixer sur un arbre de rotation et destinées à soulever un pilon en agissant contre son mentonnet doivent être terminées par des développantes de cercle. (C'est le cas d'un cercle conduisant une droite n° 94.)

Soient h la hauteur à laquelle le pilon doit être élevé ; n le nombre de tours effectués en 1' par l'arbre qui porte les cames ; m le nombre des cames ; r le rayon du cercle qui a servi à décrire la développante qui termine chaque came.

La relation nécessaire entre ces quantités pour que le pilon ait le temps de retomber de la hauteur h avant d'être repris par une nouvelle came est donnée par la formule :

$$r = \frac{60\,h}{2\pi n\left(\frac{50}{mn} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)}$$

à laquelle on arrive en divisant le temps d'une révolution de l'arbre par le nombre de cames et en égalant le quotient à la somme des temps qu'il faut au pilon pour monter à la hauteur h et pour descendre de la même hauteur, le temps de la descente étant préalablement augmenté du $\frac{1}{6}$ de ce même quotient.

Remarque. On peut éviter le choc de la came contre le mentonnet, mais au dépens de la régularité du mouvement, en terminant la came par une courbe tangente à la fois à la circonférence de l'arbre tournant et au mentonnet. Mais alors la came acquiert un développement plus grand que si elle est terminée par une développante de cercle. (Quel en est l'inconvénient ?

127. *Les cames de marteaux* animées d'un mouvement de rotation continu devant communiquer un mouvement de rotation alternatif intermittent à un levier, se tracent d'après les principes du n° 93, 1°

128. *Longueur d'une portion de développante de cercle.* Par l'extrémité de la développante menons une tangente au cercle de rayon r qui a servi à décrire la développante. Divisons l'arc de cercle S, compris entre le point de contact de cette tangente et l'origine de la développante, en n parties égales à u, de sorte que $nu = S'$. Par chaque point de division, menons une tangente au cercle jusqu'à la développante. Ces tangentes au cercle sont normales à la développante, et ont respectivement pour longueurs : u, $2u$, $3u$, . . nu

En désignant par ω l'angle au centre opposé à chaque arc u, on aura $u = r\omega$ et les longueurs des mêmes tangentes seront respectivement : $r\omega$, $2r\omega$, $3r\omega$, . . $nr\omega$.

Comme ces tangentes sont normales à la développante, et que deux consécutives font entre elles un angle égal à ω, (ce qui est facile à démontrer), il en résulte que les n arcs inégaux en lesquels ces normales divisent la développante, étant assimilés à des arcs de cercle, ceux-ci auront respectivement pour longueurs : $r\omega^2$, $2r\omega^2$, $3r\omega^2$, . . $nr\omega^2$.

La somme de tous ces arcs de cercle est $r\omega^2\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right) = \frac{S^2}{2r} + \frac{S\omega}{2}$.

Dans cette somme, le terme constant $\frac{S^2}{2r}$ indépendant de l'indéfiniment petit ω donne rigoureusement la longueur de la développante. On déduit de là que, *pour élever un pilon à une même hauteur* h, *la longueur de la développante qui termine la came est en raison inverse du rayon du cercle qui a servi à décrire la développante.*

129. *Excentrique et manivelle.* — Quant à l'excentrique et à la manivelle nous nous contentons de dire ici qu'elles servent à convertir par l'intermédiaire de bielles, un mouvement circulaire continu, soit en mouvement rectiligne alternatif soit en mouvement circulaire alternatif.

130. *Parallélogramme de Watt.* Le parallélogramme de Watt sert à transformer le mouvement rectiligne alternatif d'un piston, en mouvement circulaire alternatif d'un balancier.

Nous supposons que l'arc décrit par l'extrémité du balancier est divisé en deux parties égales par l'axe du balancier dans sa position horizontale. Cela posé, le parallélogramme dont il s'agit est articulé à ses sommets. Deux premiers sommets adjacents à un même côté se trouvent sur l'axe du balancier et l'un d'eux coïncide avec l'extrémité de ce dernier. Ces deux sommets décrivent dans le mouvement alternatif du balancier deux arcs de cercle

centriques. Des deux autres sommets, celui qui est le plus rapproché du centre du balancier et que nous nommerons le troisième sommet, étant assujetti à décrire un certain arc de cercle, le quatrième sommet décrit une ligne qui diffère très peu de la verticale abaissée du milieu de la flèche de l'arc décrit par l'extrémité du balancier. Pour trouver le centre et le rayon de l'arc que doit décrire le troisième sommet, il faut considérer la position horizontale et les deux positions extrêmes du balancier, et construire pour chacune de ces positions le parallélogramme de manière que le quatrième sommet se trouve sur la verticale mentionnée. On aura ainsi trois positions du troisième sommet et le centre de l'arc passant par ces trois positions sera le centre des brides du parallélogramme.

Pour que le quatrième sommet du parallélogramme dévie le moins possible de la verticale, il faut que

1° La longueur du balancier soit égale à une fois et demie au moins la corde de l'arc décrit par l'extrémité du balancier, laquelle corde diffère très peu du chemin ou course que décrit le quatrième sommet sur la verticale.

2° La longueur des côtés non parallèles à l'axe du balancier doit être telle que le quatrième sommet se trouve sur l'horizontale passant par le centre du balancier quand celui-ci se trouve dans la position extrême supérieure.

3° La longueur du côté qui se trouve sur l'axe du balancier dépend de la distance à laquelle on veut placer le centre des brides. Plus ce côté est grand, plus le centre des brides se rapproche du centre du balancier. Si le côté en question est égal à la moitié du balancier, dans ce cas le centre des brides se trouve sur la verticale décrite par le quatrième sommet.

Le quatrième sommet n'est pas le seul point qui décrit une verticale. La droite d qui va du quatrième sommet au centre du balancier rencontre le côté b non parallèle à l'axe en un point qui décrit également une verticale. Ce que l'on démontre en remarquant que la droite d variable de longueur est dans chaque position divisée par le côté b en deux segments dont le rapport est constant, et que réciproquement ce côté est divisé par la droite dans le même rapport.

CALCUL DU TRAVAIL DES FORCES

CONSTANTES OU VARIABLES EN INTENSITÉ ET DIRECTION.

(Abstraction faite du temps et de la réaction de l'inertie.)

131. Définition. *Le travail mécanique ou simplement travail d'une force constante dont le point d'application parcourt sa propre direction, est le produit de cette force par le chemin décrit par son point d'application.*

132. Le travail mécanique d'une force est appelé *puissance mécanique* par Smeaton ; *moment d'activité* par Carnot ; *effet dynamique* par Monge et Hachette ; *quantité d'action* par Navier.

133. *Valeur industrielle d'une force.*

En faisant abstraction de la résistance de l'inertie nous pouvons énoncer comme évident que :

1° Les valeurs industrielles de deux forces qui élèvent dans le même temps et suivant la verticale *deux poids égaux à deux hauteurs différentes*, sont entre elles comme ces hauteurs.

2° Les valeurs industrielles de deux forces qui élèvent dans le même temps et suivant la verticale *deux poids différents à la même hauteur*, sont entre elles comme ces poids. De ces deux principes on déduit ce troisième.

3° Les valeurs industrielles de deux forces constantes qui élèvent dans le même temps et suivant la verticale *deux poids différents à deux hauteurs différentes*, sont entre elles comme les produits de ces poids par les hauteurs respectives auxquelles ces poids ont été élevés. En d'autres termes : les valeurs industrielles de deux forces constantes sont entre elles comme les travaux effectués par ces forces dans le même temps.

Remarque. Ce résultat est indépendant de la direction verticale suivant laquelle les forces ont agi. En effet si le point d'application d'une force constante dont la direction est oblique parcourt un chemin h sur cette direction, cette force pourra au moyen d'une poulie de renvoi élever à la hauteur h un poids égal à l'intensité de la force.

134. Unité de Travail. L'unité de travail c'est l'unité de longueur *un mètre* multipliée par l'unité de force *un kilogramme* ; et on l'appelle *kilogrammètre*. C'est le travail qu'il faut faire pour élever un kil. à la hauteur d'un mètre. a Kilogrammètres s'écrivent a^{km}. Désormais il faudra toujours estimer les forces en kilogrammes et les chemins décrits par leurs points d'application en mètres.

TRAVAIL D'UNE FORCE CONSTANTE OU VARIABLE DONT LE POINT D'APPLICATION PARCOURT SA PROPRE DIRECTION.

La force étant constante.

135. Règle. *D'après la définition, le travail d'une force constante dont le point d'application parcourt sa propre direction, est égal au produit de la force multipliée par le chemin décrit par son point d'application.*

136. Application. Le travail en kilogrammètres effectué par une force qui agit suivant

l'axe de la tige d'un piston, dont la base oppose par *mètre carré* une résistance constante de p kil., est égal à pv ; v étant le volume en mètres cubes décrit par le piston.

Si p est la résistance par centimètre carré de la base du piston, alors il faut multiplier le produit pv par 10000. (A démontrer.)

137. Par travail élémentaire d'une force variable on entend le travail effectué par cette force pendant que son point d'application parcourt un chemin très petit, la force étant considérée comme constante en intensité et direction pendant tout le parcours de ce chemin. Cela posé.

La force étant variable.

Règle. *Le travail d'une force variable dont le point d'application parcourt sa propre direction est égal à la somme des travaux élémentaires effectués par cette force.*

Pour trouver la somme des travaux élémentaires effectués par une force variable, il faut diviser le chemin x parcouru par le point d'application de la force en un nombre n de parties égales à u, de sorte que $nu=x$; calculer l'intensité de la force, d'après la définition de cette dernière, au commencement de chaque division ; considérer comme constante l'intensité de la force d'un point de division au suivant ; de la somme de toutes ces intensités multipliée par u, éliminer l'indéfiniment grand n au moyen de la relation $nu=x$; le terme indépendant de u dans le résultat de l'élimination exprimera rigoureusement le travail demandé.

Remarque. Lorsque pour faciliter la sommation des travaux élémentaires d'une force variable, on divise le chemin décrit par son point d'application, en parties inégales, (voir n° 140) alors il faut que la plus grande de toutes ces parties puisse devenir aussi petite que l'on veut.

138. *Applications de la règle précédente.*

Soit la force variable P donnée par l'équation $P=ax$ dans laquelle x représente le chemin décrit à chaque instant par le point d'application de la force à partir de l'origine du mouvement. En faisant successivement x égal à $x=o,\quad u,\quad 2u, \ldots (n-1)u$ on aura pour intensité de la force au commencement de chaque division

$$o,\quad au,\quad 2au, \ldots (n-1)au.$$

La somme de ces intensités multipliée par u donne . . . $au^2\left(\frac{n^2-n}{2}\right)=\frac{ax^2}{2}-\frac{axu}{2}$

Le terme indépendant de u est $\frac{ax^2}{2}$. Donc $P=ax$ étant la formule de l'intensité de la force, celle de son travail est $TP=\frac{ax^2}{2}$: où la lettre T placée devant la lettre qui représente la force signifie le travail de cette force. De la même manière on démontrera que

$P=a+bx$ étant l'expression de la force, celle de son travail est $TP=ax+\frac{bx^2}{2}$

$$P=a+bx+cx^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad TP=ax+\frac{bx^2}{2}+\frac{cx^3}{3}$$

La règle pour passer de l'expression de la force à celle de son travail est évidente : elle consiste à multiplier par x chaque terme de l'expression de la force et à diviser chaque terme du produit par l'exposant de x dans ce terme.

139. Application. La base d'un piston en bois de base a et de poids q affleure le niveau de l'eau dont un cylindre de base A est en partie rempli. Quel travail faut-il effectuer pour faire plonger le piston à une profondeur quelconque x.

Solution. Lorsque le piston descend d'une longueur x, l'eau s'élève dans le cylindre au dessus du niveau primitif d'une quantité x', et la résistance de l'eau contre la base du piston est $a\,(x+x')$, d'où la puissance $P=a\,(x+x')-q$. Pour éliminer x', on a l'expression $Ax'-a\,(x+x')=o$, qui exprime que la quantité d'eau n'a pas varié. L'élimination de x' donne :

$$P=\frac{Aa}{A-a}x-q,\ \text{d'où l'on déduit pour le travail de la force P :}\quad TP=\frac{Aax^2}{2(A-a)}-qx$$

Q étant exprimé en kil. A, a en mètres carrés et x en mètres, il faudra multiplier par 1000 le 1er terme de l'expression du travail, pour avoir des kilogrammètres.

140. Application. Calculer le travail à effectuer par une force pour comprimer, au moyen d'un piston, un volume V^{me} d'air dont la pression sur un mètre carré est P, de manière à réduire ce volume à V'.

Solution. Divisons la course que le piston doit faire en n parties et marquons les points de division successifs par $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n$; ces parties nous les prenons telles que les volumes occupés par l'air quand le piston arrive successivement à ces divers points de division, suivent une progression géométrique décroissante dont la raison est r ; r étant une fraction qui puisse différer de l'unité d'autant qu'on le veut. Ainsi

aux points de divisions successifs marqués par	0,	1,	2, . . .	n
les volumes occupés par l'air seront	V,	Vr,	Vr^2, . .	Vr^n
les pressions de l'air correspondantes sont	P	$\frac{P}{r}$	$\frac{P}{r^2}$	$\frac{P}{r^n}$
les volumes décrits par le piston d'un point de division au suivant	$V\,(1-r)$,	$Vr\,(1-r)$,	$Vr^2\,(1-r)$,	$Vr^n\,(1-r)$.

r pouvant différer de l'unité autant qu'on le veut, il est clair que chacun de ces derniers volumes peut devenir aussi petit qu'on le veut. Cela étant, on peut considérer la pression de l'air contre la base du piston au commencement de chaque divison comme constante jusqu'à la fin de cette même division. Par suite le travail effectué pour faire parcourir au piston une division quelconque s'obtient en multipliant la pression de l'air au commencement de cette division par le volume que décrit le piston en parcourant cette même division. Or il se trouve, par la manière dont la course du piston a été divisée, que tous ces produits sont égaux chacun à $PV\,(1-r)$. Donc le travail pour faire parcourir au piston les n divisions est égal à $nPV\,(1-r)$ . . . (1)

La valeur de n tirée de l'équation $Vr^n=V'$ est $n=\log\frac{V'}{V}\times\frac{1}{\log r}$ Cette valeur substituée

dans (1) donne : $PV\,\frac{1-r}{\log r}\,\log\frac{V'}{V}$ . . . . (2)

r étant une fraction qui doit différer de l'unité d'autant qu'on le veut, nous poserons $r=1-\frac{1}{m}$ où m doit être indéfiniment grand. Cette valeur de r substituée dans (2) donne pour le travail demandé

$$PV\,\frac{1}{m\log\frac{m}{m-1}}\cdot\log\frac{V}{V'}.$$

Plus m est grand, plus la fraction $\frac{1}{m\log\frac{m}{m-1}}$ approche de la constante 2,30258 etc. par laquelle il faut multiplier les logarithmes ordinaires pour passer aux logarithmes népériens. L'expression précédente du travail à effectuer pour comprimer un volume d'air V et le réduire à un volume V' devient en dernier lieu si l'on pose $2{,}30258=K$,

$$PVK\log\frac{V}{V'}=PVK\log\frac{P'}{P}\quad\ldots\quad(\alpha)$$

P' étant la pression de l'air comprimé.

Remarque. Le travail fourni par l'expression précédente est trop petit à cause que l'on n'a pas eu égard à la circonstance que la température de l'air augmente au fur et à mesure qu'on le comprime.

141. Problème. Calculez le travail dû à la détente d'un volume d'air renfermé dans un cylindre et agissant contre la base de son piston.

Solution. P étant la pression de l'air sur un mètre carré avant la détente ; V, V' les volumes de l'air exprimés en mètres cubes avant et après la détente, on démontre comme au n° précédent que le travail demandé est exprimé en kilogrammètres par

$$P\,V\,K\log.\frac{V'}{V}=P\,V\,K\log.\frac{P}{P'}.\quad\ldots\quad(\beta)$$

P' étant la pression de l'air à la fin de la détente.

142. Problème. Quel est après n pulsations simples le travail effectué pour faire le vide dans un réservoir au moyen d'une pompe aspirante et foulante à double effet.

Solution. Soient V le volume du réservoir ; v le volume du corps de pompe ou volume décrit par le piston à chaque pulsation simple ; P la pression de l'air dans le réservoir et dans le corps de pompe au commencement de la première pulsation. Il faut calculer :

1° Le travail A pour comprimer et amener à la pression P de l'air extérieur les n volumes v d'air qui entrent successivement dans le corps de pompe.

2° Le travail B pour faire sortir du corps de pompe cet air ramené à la pression P de l'air extérieur ;

3° Le travail C dû à la détente de l'air du réservoir entrant à chaque pulsation dans le corps de pompe.

Ces travaux partiels calculés, le travail demandé sera A + B — C

En faisant $\frac{V}{V+v} = r$, on trouvera d'après la loi de Mariotte que,

Au commencement des n coups de piston	$1, 2, 3, \ldots n$
La pression de l'air dans les réservoir et corps de pompe est successivement	$P, Pr, Pr^2 \ldots Pr^{n-1}$. . (1).
Le volume v ramené à la pression P est successivement :	$v, vr, vr^2 \ldots vr^{n-1}$. . (2).

Le travail A pour amener à la pression P les n volumes v soumis respectivement aux pressions (1) est d'après (140, α)

$$A = PvK\left(r \log.\frac{1}{r} + r^2 \log.\frac{1}{r^2} + \ldots + r^{n-1} \log.\frac{1}{r^{n-1}}\right)$$

$$= -\left\{\frac{(n-1)r^n}{r-1} + \frac{r^n - r}{(r-1)^2}\right\} PvK \log r.$$

Le travail B pour expulser les n volumes (2) qui sont tous à la pression P est d'après (136)

$$B = Pv(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}) = Pv \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Quant au travail C dû à la détente de l'air du réservoir, on remarquera que cet air prend successivement les pressions (1) et que son volume est toujours V avant la détente et V + v à la fin. Cela posé, on trouve d'après (141, β) que

$$C = PV(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1})\ K \log.\frac{1}{r} = PV\frac{r^n - 1}{r - 1} K \log.\frac{1}{r}.$$

143. Problème. De quelle quantité un piston chargé d'un certain poids descendra-t-il dans un cylindre fermé à son extrémité inférieure pour comprimer l'air contenu dans le cylindre ? à résoudre.

TRAVAIL D'UNE FORCE CONSTANTE EN INTENSITÉ ET DIRECTION, MAIS DONT LE POINT D'APPLICATION NE PARCOURT PAS LA DIRECTION DE LA FORCE.

144. Règle. *Le travail d'une force constante qui se meut parallèlement à elle-même et dont le point d'application décrit un chemin rectiligne est égal au produit de la force par la projection du chemin sur la direction de la force.*

En décomposant la force suivant le chemin décrit et suivant une perpendiculaire au même chemin, la composante perpendiculaire ne saurait effectuer aucun travail, et en cherchant d'après (135) le travail effectué par la composante qui agit suivant le chemin, on arrive à l'énoncé de la règle ci-dessus.

145. Et puisqu'une courbe peut être considérée comme composée d'éléments rectilignes très-petits, on a comme corollaire.

Règle. *Le travail d'une force constante qui se meut parallèlement à elle-même et dont le point d'application décrit un chemin curviligne est égal au produit de la force par la projection du chemin sur la direction de la force.*

Application de cette règle au travail d'un poids dont le centre de gravité décrit une courbe quelconque.

TRAVAIL D'UNE FORCE QUI VARIE A CHAQUE INSTANT D'INTENSITÉ ET DE DIRECTION.

146. *Le travail d'une force qui varie à chaque instant d'intensité et de direction et dont le point d'application décrit un chemin quelconque, est égal à la somme des travaux élémentaires effectués par cette force.*

Pour l'estimation de ces travaux élémentaires, il faut 1° diviser le chemin total décrit par le point d'application de la force en éléments très-petits; 2° déterminer l'intensité et la direction de la force en chaque point de division ; 3° considérer la force comme constante en intensité et direction d'un point de division au suivant. Dès lors le travail élémentaire de la force, pendant que son point d'application décrit un de ses éléments, est égal au produit de l'intensité de la force au commencement de cet élément par la projection de l'élément sur la direction de la force au commencement du même élément.

147. Problème. Un point matériel m est forcé de suivre un canal curviligne C, animé d'une vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical auquel il est invariablement fixé. Quel est le travail effectué par la force centrifuge qui agit d'une manière continue sur le point matériel m.

Solution. r et R étant les rayons des circonférences que décrivent les extrémités de la courbe C, divisons la différence $R - r$ de ces deux rayons en n parties égales à u, de sorte que $nu = R - r$. Par les divers points de division, traçons des circonférences concentriques aux deux premières. Ces circonférences divisent la courbe C en n éléments inégaux jouissant de la propriété que la projection de chaque élément sur le rayon qui passe par une extrémité de cet élément est égale à u. Soient $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots r_n$, les rayons des circonférences concentriques qui aboutissent aux points de division successifs $1, 2, 3 \ldots n$ de la courbe C et où $r_1 = r$ et $r_n = R$.

L'intensité de la force centrifuge aux points de division successifs 1, 2, 3, . . . n sera respectivement :

$$m\,\omega^2\,r_1,\ m\,\omega^2\,r_2,\ m\,\omega^2\,r_3,\ .\ .\ .\ .\ m\,\omega^2\,r_n\ .\ .\ .\ (\alpha)$$

A chaque point de division, la force centrifuge agit suivant le rayon qui aboutit à ce point; et le travail qu'elle effectue d'un point de division au suivant est égal à l'intensité qu'elle possède en ce point multipliée par u. Cela étant, on aura la somme de tous les travaux élémentaires de la force centrifuge pour le parcours entier de la courbe en multipliant la somme des termes (α) par u; ce qui donne, en remarquant que les rayons $r_1, r_2, \ldots\ r_n$ procèdent suivant une progression arithmétique dont la raison est u et dont le nombre de termes est n :

$$\text{Travail total} = m\,\omega^2\,(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)\,u = m\,\omega^2\,(r_1 + r_n)\,\frac{nu}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,(r_n^2 - r_1^2) = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,(\mathrm{R}^2 - r^2)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\beta).$$

148. Théorème *de Simpson. Pour évaluer l'aire comprise entre une courbe, l'axe des abscisses et les deux ordonnées extrêmes de la courbe, on divisera la portion de l'abscisse comprise entre les deux ordonnées extrêmes en un nombre pair de divisions égales, ce qui donnera un nombre impair de points de division; par chacun des quels on élèvera une ordonnée. L'aire dont il s'agit sera égale à la somme des deux ordonnées extrêmes, plus deux fois la somme des autres ordonnées de rang impair, plus quatre fois la somme des ordonnées de rang pair, le tout multiplié par le tiers de la distance qui sépare deux ordonnées consécutives.*

Application de ce Théorème à l'indicateur de Macnought pour déterminer le travail effectué par un gaz contre la surface d'un piston et pour déterminer le travail nécessaire à la compression d'un ressort.

TRAVAIL D'UN SYSTÈME DE FORCES.

149. *La somme des travaux d'un système de forces pendant un temps quelconque est égale au travail de la résultante de ces forces pendant le même temps.*

Démonstration. En faisant agir la résultante en sens contraire il y aura équilibre; et, en appliquant à ces forces et à leur résultante prise en sens contraire le principe des vitesses virtuelles, l'équation qu'on obtient signifie que pour des chemins très-petits parcourus par les points d'application des forces et de leur résultante, le moment virtuel de la résultante est égale à la somme des moments virtuels des composantes, c'est-à-dire que le travail élémentaire de la résultante est égal à la somme des travaux élémentaires des forces proposées; et, comme cette égalité existe à chaque instant, il résulte qu'elle a lieu pour un temps quelconque. Donc etc.

150. Application. Le travail pour amener un ensemble de poids d'une position à une autre est égal à la somme des poids multipliée par la hauteur verticale dont le centre de gravité de ce système de poids a été élevé. (A démontrer.)

151. Application. Quel est le travail nécessaire pour dresser verticalement une barre uniformément pesante, située dans un plan horizontal, en la faisant tourner autour d'une de ses extrémités comme charnière et dans le plan vertical qui la renferme.

Solution. Soit Q le poids de la barre. Partageons sa longueur l en n éléments égaux à u de sorte que $nu = l$. Si ω est le poids de l'unité de longueur, le poids de chaque élément sera ωu, et de plus $n\,\omega\,u = \mathrm{Q}$. En remarquant que le poids de chaque élément doit être élevé à une hauteur marquée par la distance de cet élément à l'extrémité qui sert de pivot, on trouvera que le travail demandé est égal au terme indépendant de u dans la somme:

$$\omega\,u\,(u + 2u + 3u + \ldots + nu) = \omega\,u^2\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) = \mathrm{Q}\,\frac{l}{2} + \mathrm{Q}\,\frac{u}{2}.$$

152. Application. Même problème, les poids des éléments de la barre décroissant suivant une progression arithmétique, ou suivant une progression géométrique, (à résoudre.)

TRAVAIL DES FROTTEMENTS.

153. Le frottement agissant tangentiellement à la courbe décrite par son point d'application, il en résulte que le travail d'un frottement constant est égal au produit du frottement par le chemin décrit par son point d'application. Et si le frottement est variable, son travail est égal à chaque instant au produit de l'intensité du frottement considéré comme constant pendant cet instant par le chemin décrit pendant ce même instant.

154. N étant la résultante, supposée constante, des forces qui agissent sur l'arbre d'un tourillon de rayon ρ, le travail du frottement de ce tourillon sera, pour un tour, $\mathrm{N}f 2\pi\rho$.

155. N étant la pression d'un pivot de rayon ρ contre la crapaudine, le travail du frottement pour un tour du pivot sera : $\mathrm{N}f \times 2\pi\,\frac{2}{3}\,\rho$.

Si la base du pivot est une couronne circulaire de rayons ρ, ρ', le travail du frottement pour un tour sera $\mathrm{N}f \times 2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\rho^3 - \rho'^3}{\rho^2 - \rho'^2}$

156. Le travail de la puissance dans la vis à filet carré pour un tour est :

$$P \cdot 2\pi R = Qh + Qf \frac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh}$$

où le premier terme Qh représente le travail utile et le second terme, le travail du frottement.

Nous laissons à trouver le travail du frottement d'une excentrique, d'un piston, d'une tige dans une boite à étoupe, etc.

TRAVAIL DU FROTTEMENT DES ENGRENAGES.

157. Dans les engrenages décrits jusqu'ici, la normale menée par le point de contact de deux dents en prise passe sans cesse par le point de contact des deux cercles primitifs.

On déduit de cette propriété, si l'on fait abstraction du frottement des dents que pour qu'une puissance P tangente au premier cercle fasse équilibre à une résistance Q tangente au second cercle, il faut que P soit égal à Q.

Pour le démontrer il suffit de supposer que la puissance et la résistance agissent au point de contact m des deux cercles primitifs, et de décomposer chacune d'elles suivant la ligne des centres et suivant la normale aux deux dents; en égalant les deux composantes normales on exprime qu'il y a équilibre et l'on trouve que $P = Q$.

De l'égalité de la puissance et de la résistance on déduit au moyen du principe des vitesses virtuelles que les vitesses des circonférences primitives sont égales. Il résulte de ce qui précède que :

Principe. *Si la résistance augmente d'une certaine quantité, la puissance doit augmenter de la même quantité pour que l'équilibre ne soit pas détruit.*

Problème. *c, c' étant les centres et r, r' les rayons des cercles primitifs de deux roues, on demande l'effort moyen, que la roue doit exercer à sa circonférence primitive pour vaincre le frottement qui naît de la pression d'une dent contre l'autre.*

Solution. N étant la pression normale et φ, l'angle que la normale commune aux deux dents fait avec la ligne des centres, on trouve par la décomposition indiquée plus haut que $N = P : \sin\varphi$ et par suite, que l'intensité du frottement F qui agit suivant la tangente commune aux deux dents est $F = Nf$. En nommant p, p' les perpendiculaires abaissées des centres c, c' sur la tangente commune aux deux dents, la force tangente au premier cercle, capable de faire équilibre au frottement F considéré comme contrariant le mouvement de ce cercle, est égale à

$$F \times \frac{p}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

La puissance P devra donc être augmentée de la quantité (1). Le même frottement F considéré comme appliqué à la dent de la seconde roue tend à tirer la dent de cette roue dans le sens du mouvement de la dent de la première roue ; ce qui a pour effet d'augmenter ou de diminuer la résistance P selon que la tangente commune aux deux dents laisse d'un même côté les deux centres c, c' ou passe entre eux deux; on fera voir que ces deux cas conduisent au même résultat. Dans le premier cas, la quantité dont la résistance doit être augmentée pour tenir lieu de l'effet du frottement est égal à . . $F\frac{p}{r'}$ . . . (2).

Et, d'après le principe cité plus haut, la puissance P devra être augmentée de cette dernière quantité.

La puissance P, pour équilibrer l'effet du frottement sur l'une et l'autre roue, devra donc être augmentée des quantités (1) et (2), c'est-à-dire de

$$F\left(\frac{p}{r}+\frac{p'}{r'}\right)=\frac{P\,f}{\sin\varphi}\left(\frac{p}{r}+\frac{p'}{r'}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

En exprimant les bras de levier p, p' en fonctions de r, r' et de la longueur n de la normale qui va du point de contact des dents au point de contact des cercles primitifs, on trouve :

$$p = n + r\cos\varphi \qquad\qquad p' = n - r'\cos\varphi$$

et l'expression (3) devient :

$$\frac{P\,f}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Cette quantité est nulle quand les dents se touchent sur la ligne des centres; car alors $n = 0$. Elle atteint sa plus grande valeur quand les dents se quittent, puisqu'alors la valeur de n est la plus grande.

Cherchons d'abord ce que devient l'expression (4) pour le cas de l'engrenage à développante de cercle. Nommons R, R′ les rayons des cercles auxiliaires qui ont servi à décrire les développantes. Pour cet engrenage, l'angle φ est constant et la longueur n de la normale est égale à l'arc décrit par un point de l'une ou de l'autre de ces circonférences auxiliaires depuis l'instant où le point de contact des dents était dans la ligne des centres jusqu'à l'instant où ce point est parvenu dans la position actuelle. Cela posé,

En appelant ω l'angle au centre de cet arc décrit par la roue conduite, on a

$$n = \omega R' \quad \text{et} \quad R' = r'\sin\varphi\,, \quad \text{d'où} \quad n = \omega\, r'\sin\varphi.$$

$\omega r'$ est la longueur de l'arc décrit par un point de la circonférence primitive de la roue conduite depuis l'instant où le point de contact des dents était dans la ligne des centres. En faisant $\omega r' = x$, l'expression (4) du frottement devient

$$Pf\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)x$$

Le travail de ce frottement pour un chemin x décrit par un point de la circonférence de la roue, chemin compté à partir de la ligne des centres, est d'après (138)

$$Pf\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{x^2}{2}$$

Si les dents se conduisent d'une quantité x' avant la ligne des centres et d'une quantité x'' après cette ligne, le travail pour le chemin $x' + x''$ sera

$$Pf\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\frac{x'^2+x''^2}{2} = Pf\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\left[\frac{(x'+x'')^2}{2} - x'x''\right] \; . \; . \; . \; (5)$$

Cette expression, si l'on y fait $x' + x'' =$ une constante, prend la plus petite valeur pour $x' = x''$ et la plus grande valeur pour $x' = 0$. Il y a donc avantage à ce que les dents se conduisent autant avant qu'après la ligne des centres ; et désavantage à ce qu'elles se conduisent exclusivement après la ligne des centres.

Si, comme dans la plupart des cas, les dents se conduisent d'une quantité égale au pas a, tant avant qu'après la ligne des centres, on a : $x' = x'' = a$; $x' + x'' = 2a$, et il vient pour le travail (5) du frottement :

$P f\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)a^2$ et pour la valeur moyenne du frottement: $Pf\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\frac{a}{2}$ . . . (α)

si m et m' représentent les nombres de dents des deux roues, on a : $ma = 2\pi r$; $m'a = 2\pi r'$ et l'expression (α) prend la forme très-commode pour les applications :

$$Pf\pi\left(\frac{m + m'}{m\,m'}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta)$$

Telle est l'expression de l'effort moyen que la roue doit exercer à sa circonférence primitive afin de vaincre le frottement des dents. Cet effort moyen diminue lorsque r, r' ou m, m' augmentent.

158. *Le cas de l'engrenage d'une roue avec une crémaillère ou celui d'une came avec le mentonnet d'un pilon* s'obtient en supposant r' infini dans l'expression (α) ce qui donne pour l'effort moyen,

$$Pf\frac{a}{2r} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\gamma).$$

159. Dans le cas du pilon, a représente la hauteur dont le pilon est soulevé.

On peut arriver au même résultat par la connaissance de la longueur de la développante (à démontrer.)

L'expression (α) entièrement exacte pour les engrenages à développantes devient pour les autres engrenages une formule empirique suffisamment exacte.

PRINCIPE DES FORCES VIVES.

Ou relation entre les vitesses imprimées à des masses et le travail des forces qui ont imprimé ces vitesses.

PRINCIPE DES FORCES VIVES POUR UNE SEULE FORCE APPLIQUÉE A UNE SEULE MASSE.

Premier Cas.

Travail d'une force constante pour imprimer une vitesse de translation à une masse.

160. Remarque préalable : en comprenant parmi les forces qui sollicitent une masse, le poids de cette dernière, on peut dire que :

La résultante de toutes les forces appliquées à une masse a uniquement à vaincre l'inertie de cette dernière.

C'est d'après ce principe que dans le calcul du travail des forces, on a supposé implicitement, que l'intensité de la résistance à vaincre par une force était à chaque instant égale à celle de la force.

Dans tout ce qui suit la force est supposée n'avoir à vaincre que l'inertie de la matière. Cela posé,

Supposons d'abord une masse sollicitée par une force égale à son propre poids P. Dans ce cas, chaque point de la masse décrira au bout du temps t un chemin $e = {}^1/_2\, gt^2$ et possédera une vitesse $v = gt$. Le point d'application de la force P a parcouru le chemin e; mais en vertu de l'inertie, la masse a réagi tout le long du chemin e avec une intensité égale à P. La force P a donc effectué un travail

$$Pe = P\,{}^1/_2\, gt^2 = {}^1/_2\left(\frac{P}{g}\right)g^2\,t^2 = {}^1/_2\left(\frac{P}{g}\right)v^2$$

Supposons maintenant qu'une autre force constante quelconque F imprime à la même masse la même vitesse v au bout du temps t' et lui fasse parcourir dans ce même temps le chemin e'. En nommant g' l'accélération de la force F on a : $e' = {}^1/_2\, g't'^2$,

$v = g't'$. En vertu de l'inertie de la masse, la force F, ayant rencontré tout le long du chemin e', une résistance égale à F, a effectué un travail :

$$Fe' = F\,{}^1/_2\, g'\, t'^2 = {}^1/_2 \left(\frac{F}{g'}\right) g'^2\, t'^2 = {}^1/_2 \left(\frac{F}{g'}\right) v^2.$$

Or, les deux forces constantes P et F qui agissent sur la même masse sont entre elles comme leurs accélérations (§ 12, 1°) d'où le rapport $P : g = F : g'$. Donc le travail de la force P est égal à celui de la force F et à celui de toute autre force constante qui imprimerait à la même masse la même vitesse v. D'où le principe :

161. Principe. *Le travail effectué par une force constante pour vaincre l'inertie d'une masse de poids P est égal au produit du rapport de P à g par la moitié du carré de la vitesse imprimée à la masse.*

En nommant *force vive* d'une masse de poids P, le rapport de P à g multiplié par le carré de la vitesse dont la masse est animée, on peut énoncer le principe précédent en disant que :

Principe. *Le travail effectué par une force constante pour imprimer une vitesse à une masse est égal à la moitié de la force vive communiquée à la masse.*

Remarque. Le résultat précédent est remarquable en ce qu'il ne conserve aucune trace ni de l'intensité de la force, ni du chemin décrit par son point d'application, ni du temps employé à parcourir ce chemin ou à imprimer cette vitesse.

162. Principe réciproque. *Le travail effectué par une force constante pour détruire la vitesse dont est animée une masse est égal à la moitié de la force vive possédée par la masse.*

Car d'après la remarque (§ 161) on peut toujours supposer que la force constante qui détruit la vitesse est la même que celle qui, agissant en sens contraire, a imprimé la vitesse. Donc, etc.

163. Remarque. L'intensité d'une force qui détruit une force vive est d'autant plus grande que le chemin que décrit le point d'application de la force pour anéantir la force vive est plus petit et réciproquement.

164. Des principes précédents (161, 162) on conclut facilement que :

Principe général. *Le travail effectué par une force constante qui agit pendant un certain temps sur une masse déjà animée d'une vitesse est égal à la moitié de la différence des forces vives possédées par la masse au commencement et à la fin du même temps.*

Remarque. On démontrera que les trois principes ci-dessus ainsi que ceux qui vont suivre existent également pour une force variable.

Remarque. Pour abréger on écrira désormais, à la place du rapport de P à g, la masse m dont le poids est P, laquelle n'est que proportionnelle à ce rapport.

Par suite de cette convention la force vive d'une masse sera représentée par le produit de cette masse par le carré de sa vitesse; mais lorsqu'il s'agira de réduire en nombre il faudra remplacer chaque masse par le rapport de son poids à g.

Deuxième Cas.

Travail d'une force constante pour imprimer une vitesse de rotation à une masse.

La force étant supposée agir dans un plan perpendiculaire à l'axe.

165. Principe. *Il est évident qu'une force constante, agissant tangentiellement à une circonférence matérielle de masse* M, *imprime à tous les points de celle-ci la même vitesse et par suite effectue un travail qui est égal à la moitié de la force vive due à la vitesse imprimée.*

166. Pour ramener à ce cas particulier le cas général d'une masse quelconque tournant autour d'un axe donné, il suffit de résoudre le problème suivant :

Problème. *Une masse* M *tournant autour d'un axe sous l'influence d'une force, le point d'application prend à chaque instant une vitesse différente : on demande la masse fictive* X *qui, concentrée en ce point et substituée à la masse proposée, prendrait à chaque instant, sous l'influence de la même force, la même vitesse que dans le premier cas.*

Solution. *Principe :* Lorsqu'une force fait tourner une masse autour d'un axe, il y a à chaque instant égalité entre le moment de la force et la somme des moments des réactions de tous les éléments de la masse proposée, réactions dues à un accroissement très-petit que prend la vitesse angulaire pendant la durée de cet instant.

D'où l'on peut conclure que, pour satisfaire à l'énoncé, il faut que, pour un même accroissement très-petit de vitesse angulaire, le moment de la réaction de la masse fictive soit égal à la somme des moments des réactions de tous les éléments de la masse proposée.

u étant cet accroissement très-petit de vitesse angulaire (*) que prennent les deux masses dans le temps très-petit t, on aura, en désignant par R la distance du point d'application de la force à l'axe de rotation;

pour la mesure de la réaction de la masse fictive, . . . $X\dfrac{uR}{t}$

(*) *La vitesse angulaire* d'une masse qui tourne autour d'un axe, c'est la vitesse des points situés à l'unité de distance de l'axe. (?) Si un corps effectue d'un mouvement uniforme n tours par minute autour d'un axe, la vitesse angulaire sera $n2\pi : 60$.

Lorsque la vitesse angulaire d'un corps qui tourne autour d'un axe est ω, la vitesse d'un point quelconque a une istance r de l'axe est $r\,\omega$.

et pour le moment de cette réaction. . . . . $X \frac{uR}{t} . R$ . . (1)

m, étant un élément de la masse M, et x sa distance à l'axe de rotation, on aura :

pour la mesure de la réaction de l'élément m, ... $m \frac{ux}{t}$

et pour le moment de cette réaction . . . . $m \frac{ux}{t} x$

et pour la somme des moments des réactions de tous les éléments de la masse M,

$$\Sigma m \frac{ux^2}{t} = \frac{u}{t} (mx^2 + m'x'^2 + m''x''^2 + \ldots) = \frac{u}{t} I \quad . \; . \; . \; (2)$$

I désignant le moment d'inertie de la masse M (*).

Les expressions (1) et (2) devant être égales, on a :

$$\frac{u}{t} XR^2 = \frac{u}{t} I, \text{ d'où } X = \frac{I}{R^2}$$

formule facile à traduire en langage ordinaire.

ω, étant la vitesse angulaire imprimée à la masse fictive par la force au bout d'un temps quelconque, le travail effectué par celle-ci pour imprimer cette vitesse sera d'après (165) égal à $\frac{1}{2} X (\omega R)^2$, et, mettant à la place de X sa valeur, on aura pour le travail de la force :

$$\tfrac{1}{2} \omega^2 I.$$

Comme la force effectue identiquement le même travail lorsqu'elle est appliquée à la masse proposée M, on en conclut que :

167. Principe. *Le travail effectué par une force pour faire tourner une masse autour d'un axe et lui imprimer une certaine vitesse angulaire est égal à la moitié de la force vive communiquée à la masse.*

168. Principe réciproque. *Le travail effectué par une force pour détruire la vitesse angulaire que possède une masse tournant autour d'un axe, est égal à la moitié de la force vive possédée par la masse.*

169. Principe général. *Le travail effectué par une force qui agit pendant un certain*

(*) *Le moment d'inertie* d'une masse qui tourne autour d'un axe, c'est la somme de tous les éléments de la masse multipliés chacun par le carré de sa distance à l'axe. (L'expression de moment d'inertie est impropre.)

La force vive d'une masse qui tourne autour d'un axe, c'est la somme de tous les éléments de la masse multipliés chacun par le carré de sa vitesse. Elle est égale au moment d'inertie multiplié par le carré de la vitesse angulaire.

temps sur une masse déjà animée d'une vitesse angulaire est égal à la moitié de la différence des forces vives possédées par la masse au commencement et à la fin de ce temps.

170. *Moments d'inertie de quelques corps par rapport à leurs volumes v.*

1° Le moment d'inertie d'un cylindre de révolution par rapport à son axe est $\frac{1}{2} vr^2$; r étant le rayon du cylindre.

2° Le moment d'inertie d'une sphère par rapport à un diamètre est $\frac{2}{5} vr^2$; r étant le rayon de la sphère.

3° Le moment d'inertie d'une jante circulaire est $v(\rho^2 + e^2)$; ρ étant le rayon moyen de la jante et e la demi différence des rayons extrêmes.

4° Le moment d'inertie d'un parallélipipède rectangle, par rapport à un axe passant par le centre de gravité et parallèle à une arête, est $\frac{1}{12} vd^2$; d étant la distance entre l'axe et l'arête.

5° Le moment d'inertie d'un cône de révolution, par rapport à son axe, est $\frac{1}{10} \pi r^4 h$; r étant le rayon de la base et h la hauteur.

6° Celui d'un tronc de cône droit est $\frac{1}{10} \pi a \frac{r^5 - r'^5}{r - r'}$; a étant la hauteur du tronc, et r, r' les rayons des deux bases.

Remarque. Le mètre et le mètre cube étant les unités de mesure dans les expressions précédentes, pour passer du moment d'inertie du volume d'un corps, à celui de sa masse, il faut multiplier les moments d'inertie ci-dessus, par le poids d'un mètre cube de ce corps et diviser par g.

A l'occasion des moments d'inertie, rappelons le théorème suivant :

Théorème. *Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque est égal à son moment d'inertie par rapport à un axe parallèle mené par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse par le carré de la distance des axes parallèles* (1).

(1) *Démonstration.* Soient D, d, deux droites parallèles dont la première passe par le centre de gravité. Soient O et o les pieds de ces droites sur un plan qui leur est perpendiculaire. Dans ce plan et par le point O, menons deux axes rectangulaires et nommons a et b les coordonnées du point o. Considérons une tranche très-mince comprise entre deux plans perpendiculaires aux deux droites.

Soient x, y les coordonnées d'un élément matériel m de la tranche ; le moment d'inertie de cet élément par rapport à la droite d sera

$$m \left\{ (x-a)^2 + (y-b)^2 \right\}, \text{ ou bien, } m \left\{ (x^2+y^2) + (a^2+b^2) - 2ax - 2by \right\}$$

et la somme des moments d'inertie de tous les éléments de la tranche sera :

$$\Sigma m (x^2+y^2) + \Sigma m (a^2+b^2) - 2a \Sigma mx - 2b \Sigma my.$$

Troisième Cas.

Travail pour imprimer à la fois une vitesse de translation et une vitesse de rotation.

171. Principe. *Le travail pour imprimer à la fois une vitesse de translation v et une vitesse angulaire ω à une masse* m *est égal à* $\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \omega^2 I$; *I étant le moment d'inertie de la masse par rapport à l'axe autour duquel tourne la masse.*

PRINCIPE DES FORCES VIVES ÉTENDU A UN NOMBRE QUELCONQUE DE FORCES APPLIQUÉES A UN SYSTÈME DE MASSES.

172. Principe. *La somme des travaux d'un nombre quelconque de forces appliquées à un système de masses est égale, pendant un temps quelconque, à la demi différence des forces vives possédées par les masses au commencement et à la fin de ce temps.*

Démonstration. Remarquons d'abord que le principe est évident dans le cas particulier où les masses sont entièrement libres, c'est-à-dire dans le cas où il n'existe entre elles aucune liaison. Dans le cas où il y a liaison, représentons au bout d'un temps quelconque

les forces en intensité et en direction par . . . . $P, P', P'', \ldots$
lesquelles sont appliquées respectivement aux masses. . . $m, m', m'', \ldots$
animées respectivement des vitesses . . . . $v, v', v'', \ldots$
Et soient . . . . $u, u', u'', \ldots$

les accroissements de vitesse que prennent ces masses pendant un temps très-petit, accroissements qui sont les mêmes que si toutes les vitesses $v, v', v'' \ldots$ étaient nulles. On considère ce qui se passe dans un instant très-petit pour pouvoir regarder pendant cet instant chaque force comme constante en intensité et en direction. Cela posé, il suffira de faire voir que le principe existe pendant la durée de chaque instant très-petit.

A cause de la liaison des masses, l'accroissement u que prendra la vitesse v n'est ni en intensité ni en direction celui que la force P imprimerait à la masse m, si celle-ci était libre; on peut dire la même chose de toutes les autres forces, vitesses et masses. Cela posé,

Or, d'après la théorie du centre de gravité, $\Sigma mx = 0$, $\Sigma my = 0$, et l'expression du moment d'inertie de la tranche que l'on considère devient :

$$\Sigma m\,(x^2 + y^2) + (a^2 + b^2)\,\Sigma m.$$

Cette expression convenant à une tranche quelconque, il est facile de conclure de là le théorème.

Décomposons au moyen du parallélogramme la force P en deux : l'une P_1, dirigée suivant la direction de u et capable d'imprimer à la masse m l'accroissement de vitesse u; l'autre P_2, dont la direction et l'intensité sont nécessairement déterminées. Semblable décomposition étant faite pour chaque force,

le système des forces proposées . . . . . . $P, P', P'', \ldots$ (1)
se trouve remplacé par les deux systèmes $\{$ $P_1, P_1', P_1'', \ldots$ (2)
de composantes . . . . $P_2, P_2', P_2'', \ldots$ (3)

Remarquons que les masses se meuvent sous l'influence des composantes (2) de la même manière que sous l'influence des forces proposées (1); d'où il résulte que les composantes (3) doivent se faire équilibre suivant les lois de la statique au moyen des liaisons; par suite que la résultante des composantes (2) est la même que celle des forces proposées (1).

D'un autre côté, les masses se meuvent sous l'influence des composantes (2) comme si elles étaient libres, d'où il suit, d'après la remarque faite au commencement (1) que le principe des forces vives est applicable au travail des composantes (2) et par suite au travail des forces proposées (1). Donc, etc.

Remarque. Dans les machines en mouvement, les pressions sur les points d'appui et par suite les frottements sont dus aux composantes (3) qui se font équilibre suivant les lois de la statique par l'intermédiaire des liaisons.

173. *Exemples de conversions de force vive en travail et réciproquement.*

1° Un corps de poids Q animé de la vitesse v est placé sur un plan horizontal; quel chemin e parcourra le corps pour que sa vitesse soit anéantie par le frottement F et quel temps mettra-t-il pour parcourir ce chemin ?

Si l'on a égard de plus à la résistance de l'air, on trouve par calcul différentiel en nommant n le coefficient de la résistance de l'air :

$$e = \frac{1}{2n}\ 2{,}303 \log. \left(1 + \frac{n}{F} v^2\right).$$

2° Même problème, le corps étant placé sur un plan incliné et devant remonter le plan.

3° Deux corps de poids Q, Q', placés respectivement sur deux plans inclinés adossés, sont reliés par une corde qui passe sur une poulie de renvoi placée au sommet des deux plans. On demande la relation entre le chemin décrit par ces corps au bout d'un temps quelconque et la vitesse acquise. On a égard au frottement des deux corps et à celui de la corde, que l'on suppose glisser sur les deux plans.

4° Un volant est animé d'une vitesse angulaire ω. A quelle hauteur pourra-t-il remonter un poids Q suspendu à l'extrémité d'une corde dont l'autre extrémité est fixée à la circonférence moyenne du volant. On a égard au frottement des tourillons du volant.

5° Un poids P est supendu à une corde enroulée autour d'un volant qui a pour rayon extérieur r et pour moment d'inertie I. On demande la vitesse angulaire que prendra le volant lorsqu'à partir du repos, le poids sera descendu de la hauteur h.

Réponse $\frac{1}{2}\omega^2 I + \frac{1}{2}\frac{P}{g}\omega^2 r^2 = Ph$.

6° Un volant est animé d'une vitesse angulaire ω. Après combien de tours, le frottement des tourillons aura-t-il anéanti la vitesse du volant?

7° Réciproquement, connaissant par expérience le nombre de tour que fait le volant, on demande de déterminer le coefficient du frottement des tourillons.

8° On exige ordinairement pour un pilot de $0^m,25$ de diamètre et de 3 à 4 mètres de longueur, que l'enfoncement produit par chacune des dernières volées de 30 coups d'un mouton de 300^k tombant de $1^m,30$ soit au plus de 5 millimètres. Quel est le poids qui, placé sur la tête du pilot, serait capable de produire le même enfoncement?

PERTE DE FORCE VIVE DUE AU CHOC DE CORPS NON ÉLASTIQUES.

174. *Perte de force vive dans le choc de deux masses dont les centres de gravité se meuvent sur une même ligne droite normale aux surfaces de ces masses.*

Soient m, m' les deux masses animées respectivement des vitesses v, v', de mêmes sens; v étant plus grande que v' et u (*) étant la vitesse commune à l'instant de la plus grande compression des deux masses. On a pour la différence de la somme des forces vives avant et après le choc, autrement dit, pour la perte de force vive :

$$mv^2 + m'v'^2 - (m + m')\,u^2 = \frac{m\,m'}{m + m'}(v - v')^2 \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha).$$

Si la masse m' est très-grande par rapport à l'autre, de manière que le rapport de m à m' puisse être négligé vis-à-vis de l'unité, la perte de force vive est égale à

$$m\,(v - v')^2 \quad . \quad . \quad . \quad (\beta).$$

(*) L'action de m sur m' a pour effet d'augmenter la vitesse de m', de la quantité $(u - v')$. La force constante capable de produire cet effet, pendant le temps très-petit t que dure le choc, a pour mesure : . . . $m'\left(\frac{u - v'}{t}\right)$ . . . . . (1).

La réaction de m' sur m a pour effet de diminuer la vitesse de m' de la quantité $(v - u)$. La force constante capable de produire cet effet, dans le même temps très-petit t, a pour mesure . . . $m\left(\frac{v - u}{t}\right)$ . . (2).

La réaction étant égale à l'action, les expressions (1 et 2) sont égales et cette égalité fera connaître

Puisque la force vive d'une masse peut être convertie en travail, il est essentiel dans les machines d'éviter que deux pièces consécutives viennent à se choquer.

Remarque. La force vive perdue dans le choc a été employée à déplacer et à comprimer les molécules qui se trouvent aux environs du point de contact des deux corps.

175. *Perte de force vive due au choc d'une masse animée d'une vitesse de translation contre une masse animée d'une vitesse de rotation autour d'un axe fixe.*

En remplaçant la masse animée d'une vitesse de rotation par une masse fictive concentrée au point choqué et calculée au § (166), la perte de force vive sera donnée par la formule du § (174).

Application au choc d'un came contre le mentonnet d'un pilon.

176. *La perte de force vive dans le choc de plusieurs masses est donnée par le principe suivant dû à Carnot :*

Principe. *La somme des forces vives perdues par l'effet du choc entre plusieurs masses est égale à la somme des forces vives, dues aux vitesses perdues ou gagnées par l'effet des chocs* (*).

Ce principe appliqué au choc de deux masses donne, pour la force vive perdue, la même valeur qu'au § (174), car on a :

$$m\,(v - u)^2 + m'\,(u - v')^2, \text{ qui se réduit à } \frac{mm'\,(v - v')^2}{m + m'}$$

177. Lorsqu'il y a choc entre des masses sur lesquelles agissent des forces, le principe des forces vives doit être modifié comme suit :

Le travail, pendant un certain temps, d'un nombre quelconque de forces qui agissent sur un ensemble de masses, entre lesquelles il survient des chocs, est égal à la demi différence des forces vives au commencement et à la fin de ce temps, plus à la moitié de la force vive perdue par les chocs.

(*) Soient les masses . . . . m, m', m'', ...

animées avant le choc, des vitesses, . . . v, v', v'', ... (1)

animées, après le choc, des vitesses, . . . v_1, v'_1, v''_1, ...

En décomposant au moyen du parallélogramme la vitesse v en deux, l'une dirigée suivant la direction de v_1 et égale à v_1; l'autre, que nous désignerons par v_2, sera déterminée en intensité et direction.

Semblable décomposition étant faite pour chacune des autres vitesses v', v'', . . . Celles-ci se trouvent remplacées par les deux systèmes de vitesses :

v_1, v'_1, v''_1, ... (2)

v_2, v'_2, v''_2, ... (3)

Puisque, après le choc, les masses se meuvent respectivement avec les vitesses (2) il s'ensuit que si l'on introduit des forces qui, agissant respectivement suivant les directions des vitesses (2), soient capables de détruire ces dernières, dans le temps très-petit que durera le choc, ces forces devront se faire équilibre.

Les forces capables de détruire les vitesses (2) dans le temps très-petit t que dure le choc, ont d'après (13, a) respectivement pour mesure

$$\frac{mv_2}{t}, \quad \frac{m'v'_2}{t}, \quad \frac{m''v''_2}{t}, \quad \ldots \ldots \qquad (4)$$

Soient α, α', α'', . . . les angles que les composantes (2) font respectivement avec les composantes (3). On aura :

$$v = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha \quad \ldots \ldots \qquad (5)$$

On a une équation semblable pour chacune des autres vitesses v', v'', etc. En ajoutant toutes ces équations membre à membre, il vient : après avoir multiplié et divisé par t le dernier terme de chacune,

$$\Sigma mv^2 = \Sigma mv_1^2 + \Sigma mv_2^2 - 2\Sigma m \frac{v_2}{t} v_1 t \cos \alpha . \quad . \quad . \qquad (6)$$

Les forces qui ont pour mesure (4) devant se faire équilibre, et leurs points d'applications étant les points de contact des masses qui se choquent, si on exprime la condition d'équilibre au moyen du principe des vitesses virtuelles, on sera sûr d'imprimer un mouvement qui ne détruit pas les liaisons, en appliquant le principe pour le mouvement très-petit qui a réellement lieu après le choc. Or, je remarque que $v_1 t$ est le chemin décrit par le point d'application de la force qui a pour mesure $\frac{mv_2}{t}$, que $v_1 t \cos \alpha$ est la projection de ce chemin sur la direction de la même force. Par suite $\frac{mv_2}{t} . v_1 t \cos \alpha$ est le moment virtuel de la même force, et $\Sigma \frac{mv_2}{t} v_1 t \cos \alpha$ est la somme des moments virtuels des forces qui doivent se faire équilibre. On a donc $\Sigma \frac{mv_2}{t} v_1 t \cos \alpha = 0$, et par suite l'équation (b) devient : $\Sigma mv^2 = \Sigma mv_1^2 + \Sigma mv_2^2$, ou bien : $\Sigma mv^2 - \Sigma mv_1^2 = \Sigma mv_2^2$.

PRINCIPE DES FORCES VIVES

APPLIQUÉ

AU MOUVEMENT DES MACHINES.

178. Un premier but des machines est de mettre en équilibre deux forces de grandeurs et de directions quelconques.

Un second but des machines est de transformer le travail des moteurs qui y sont appliqués en travail industriel. C'est ainsi que le travail d'une chûte d'eau, d'un combustible, de chevaux, de manœuvres, etc., est transformée en travail pour moudre le blé, filer la laine, scier le bois, tourner le bois, lever des fardeaux, etc.

Comment le travail d'une force peut être transformé en celui d'une autre force ressort de la propriété suivante dont la démonstration est en grande partie l'objet de ce chapitre.

Etant données arbitrairement trois des quatre quantités à savoir : les chemins que doivent décrire continuellement les points d'applications de deux forces, ainsi que les intensités de ces forces, où la loi suivant laquelle ces intensités varient, on peut toujours déterminer la quatrième de manière que la machine, ou les organes matériels par lesquels sont reliés les points d'application de ces forces, soient mis en mouvement sous l'influence de ces forces et que leur mouvement se continue aussi longtemps que dure l'action de ces mêmes forces.

Nomenclature générale des pièces d'une Machine.

179. *Récepteur ;* la première pièce qui reçoit l'action directe de la force motrice.
Opérateur ou *outil :* la dernière pièce qui exécute le travail utile.
Communicateurs : toutes les pièces intermédiaires depuis le récepteur jusqu'à l'outil.

Dans un moulin à farine mu par une roue hydraulique, cette dernière est le récepteur, les rouages sont les communicateurs, la meule est l'outil ou opérateur.

Solidarité de toutes les pièces mobiles d'une Machine.

180. Toutes les pièces d'une machine sont solidaires les unes des autres, de manière que si l'on donne la vitesse ou le chemin décrit par l'une d'elles, on peut trouver

la vitesse ou le chemin décrit simultanément par toutes les autres pièces en examinant sur le dessin leur disposition géométrique et mutuelle.

Définitions.

181. *Trajectoire.* Dans toute machine, chaque point mobile d'une pièce quelconque décrit continuellement la même courbe fermée, d'un mouvement continu, ou bien la même portion de droite ou de courbe d'un mouvement alternatif de va et vient. Nous nommerons cette courbe ou cette droite la trajectoire de ce point. La trajectoire décrite par le point d'application d'une force, nous la nommerons simplement la trajectoire de la force.

182. *Tour ou révolution d'une machine.* Lorsque deux fois de suite les pièces d'une machine repassent *toutes ensemble* par les mêmes positions, on dit que la machine a fait un tour ou une révolution. C'est-à-dire que, si dans une position quelconque de la machine on marque un trait sur chaque pièce, tous ces traits au bout d'un certain temps devront reprendre à la fois leurs positions primitives ; dès lors chaque pièce aura parcouru sa trajectoire un nombre *entier* de fois, donc

Principe *pour chaque tour ou révolution d'une machine, chaque force parcourt un nombre entier de fois sa trajectoire.*

Généralement un tour d'une machine correspond à un tour du récepteur, si l'on fait abstraction des pièces secondaires (de celles dont la force vive est petite relativement à celle des pièces principales.

183. *Période.* Le temps que met une machine à faire une révolution s'appelle période.

184. *Machine à mouvement périodique.* Une machine est à mouvement périodique quand toutes les périodes sont d'égale durée.

185. *Par force vive d'une machine*, on entend la somme des forces vives de toutes les pièces mobiles.

Les poids des pièces mobiles ne changeant pas, *la force vive d'une machine ne peut augmenter ou diminuer que par suite d'une augmentation ou diminution des vitesses de ces mêmes pièces.*

La force vive d'une pièce à mouvement alternatif devient nulle dans les positions extrêmes de cette pièce.

186. Dans une machine à mouvement périodique, *la vitesse de régime* d'un point d'une pièce mobile, c'est le chemin décrit par ce point pour un tour de la machine divisé par le temps employé à faire ce tour. La vitesse de régime d'un point ne doit pas être confondue avec la vitesse propre à ce point, laquelle varie généralement d'un instant à l'autre.

Pour déterminer la vitesse de régime d'un point d'une machine à mouvement périodique, il faut connaître le nombre de tours que la machine effectue par minute.

187. Par *vitesse d'une machine à mouvement périodique*, on entend le nombre de tours qu'elle effectue dans l'unité de temps.

188. *Les positions d'équilibre d'une machine* sont pour nous les positions des pièces mobiles pour lesquelles les forces de toute espèce appliquées à la machine se font équilibre.

Énumération de toutes les forces qui interviennent dans le mouvement d'une Machine.

189. 1° *La force motrice* appliquée au récepteur ;

Les forces motrices primitives, que l'on rencontre dans la nature sont : la gravité, la chaleur, l'électricité, la force des hommes et des animaux. Le poids de l'eau, le vent, la vapeur sont des forces motrices secondaires, qu'on peut sans inconvénient nommer simplement forces motrices.

Souvent aussi le moteur est nommé récepteur (moteurs hydrauliques), mais ce moteur ne doit pas être confondu avec les moteurs énumérés ci-dessus.

2° *La résistance utile* opposée par l'outil ;

3° *Les poids de* toutes les pièces mobiles ;

4° *Les résistances nuisibles*, telles que frottement, raideur des cordes, résistance des milieux, adhérence etc. ;

5° *Les actions moléculaires des corps*, qui proviennent de leur compression, de leur extension, de leur flexion ou de leur torsion pendant le mouvement, et dont l'effet, attendu l'élasticité imparfaite de ces corps, est d'y laisser subsister une certaine déformation qui exige, pour être produite, une portion quelconque de la force motrice.

6° *L'inertie des pièces mobiles*, véritable résistance quand le mouvement s'accélère, et véritable puissance quand le mouvement se ralentit.

190. *Force périodiquement constante.* Nous dirons qu'une force est périodiquement constante lorsque la force reprend la même intensité et la même direction chaque fois que son point d'application revient, *dans le même sens*, au même point de sa trajectoire. Il est évident que *le travail d'une force périodiquement constante est le même pour chaque parcours entier de sa trajectoire* ; et, comme conséquence, que *le travail d'une résistance périodiquement constante dans un temps donné, augmente proportionnellement au nombre de fois que cette résistance décrit sa trajectoire pendant ce même temps.*

En d'autres termes : *le travail, pendant un temps donné d'une résistance périodiquement constante augmente proportionnellement à la vitesse du point d'application de cette force.*

Hypothèses sur les forces qui interviennent dans le mouvement d'une Machine.

191. Nous supposerons constantes ou périodiquement constantes :

1° La résistance utile ou charge utile; et par suite : 2° le frottement F_1, provenant de la résistance utile; 3° les poids des pièces mobiles; et par suite : 4° le frottement F_2 provenant de ces poids.

D'après (187) le travail de l'une quelconque de ces forces reste le même pour chaque parcours entier de sa trajectoire; en quoi il faut remarquer que le travail du poids de chaque pièce mobile, pour un parcours entier de la trajectoire de son centre de gravité, est nul; car le travail dépensé pour élever le poids à une certaine hauteur est restitué lorsque le poids descend de la même hauteur.

Puisque pour chaque tour d'une machine chaque force décrit un même nombre entier de fois sa trajectoire, il s'ensuit que le travail de chaque résistance est constant pour chaque tour, d'où le principe.

Principe. *La somme de travail de toutes les forces, autres que la force motrice, est une quantité constante pour chaque tour ou révolution de la machine, quel que soit le temps que la machine met à faire chaque tour.*

Dans cette somme le travail des poids des pièces est nul de même que le travail de tout ressort parfaitement élastique.

192. *Hypothèse sur la force motrice.* Quant à la force motrice, nous supposerons qu'elle effectue toujours le même travail pendant le même temps. De sorte que si son point d'application décrit pendant un même temps une fois ou n fois sa trajectoire, le travail restant le même dans les deux cas, l'intensité de la force motrice devra être devenue n fois moindre dans le second cas. Et il en résulte que le travail du frottement F_3 provenant de la force motrice est également le même dans les deux cas.

Remarque. Quoique cette hypothèse ne soit pas exacte et qu'en général il existe une vitesse du point d'application de la force motrice pour laquelle le travail de cette force est un maximum, les conséquences que nous aurons occasion de tirer de cette hypothèse seront vraies, à plus forte raison, pour une vitesse dépassant celle du maximum du travail moteur.

Résultante de toutes les forces appliquées à une Machine.

193. Quand la force motrice l'emporte sur la résistance, on peut, en diminuant d'une certaine quantité la force motrice, faire en sorte qu'il y ait équilibre.

Quand les résistances l'emportent sur la force motrice, on peut, en diminuant d'une certaine quantité la résistance utile, faire en sorte qu'il y ait équilibre.

La quantité dont la force motrice ou la résistance utile doit être diminuée, pour qu'il y ait équilibre, est la résultante de toutes les forces appliquées à la machine.

Dans le premier cas, la résultante est positive, dans le second cas, elle est négative.

Rôle que joue la résultante de toutes les forces dans une Machine.

194. La résultante de la force motrice, de la résistance utile, des poids des pièces, et des frottements F_1, F_2, F_3 définis plus haut, n'a à vaincre que l'inertie des pièces mobiles considérées comme soustraites à l'action de la pesanteur. Tant que la résultante sera positive, la force vive de la machine ira en augmentant; tant que la résultante sera négative, la force vive ira en diminuant. Si la résultante est nulle pendant un certain temps, la force vive pendant ce temps ne pourra ni augmenter ni diminuer.

D'après le principe des forces vives, on peut énoncer que :

α). *Le travail de la résultante pendant un temps donné est égal à la moitié de l'accroissement que prend la force vive pendant ce temps.*

β). *Pour que la force vive d'une machine reprenne au bout d'un certain temps la même valeur qu'elle avait au commencement de ce temps, il faut que le travail de la résultante pendant ce temps soit nul.*

Ces deux principes peuvent être énoncés de cette autre manière :

α'). *Le travail effectué par la résultante d'une position à une autre d'une machine est égal à la moitié de l'accroissement que prend la force vive d'une position à l'autre.*

β') *Pour qu'une machine reprenne dans une position la même force vive qu'elle avait dans une position précédente, il faut que le travail de la résultante depuis la première jusqu'à la seconde position soit nul.*

Rappelons ici une fois pour toutes qu'à la place du travail de la résultante on peut mettre : travail moteur diminué de la somme des travaux de toutes les autres forces.

La vitesse d'une Machine ne peut pas croître indéfiniment.

Dans toute machine dont le moteur fournit toujours le même travail dans le même temps la vitesse ne peut pas croître indéfiniment.

Tant que pour chaque tour le travail de la force motrice est plus grand que la somme de travail de toutes les autres forces, la vitesse ira en augmentant.

Or, le travail moteur pour chaque tour étant en raison inverse de la vitesse avec laquelle s'achève ce tour, il arrivera nécessairement un tour pour lequel le moteur dépensera un travail égal à la somme de travail de toutes les autres forces.

A partir de ce tour, la vitesse ne pourra plus augmenter; car si le tour suivant se faisait avec une vitesse plus grande, le travail fourni par le moteur pour ce tour deviendrait moindre que la somme de travail de toutes les autres forces, et, contrairement à l'hypothèse, la vitesse devrait diminuer.

La vitesse diminue en effet; mais c'est, comme il sera dit plus loin, parceque la résultante de toutes les forces devient négative.

Condition d'un mouvement uniforme.

195. Pour que, un certain temps après la mise en mouvement, la force vive acquise reste constamment la même, il faut qu'à partir de ce temps, toutes les forces appliquées à la machine se fassent constamment équilibre; sans quoi il y aurait une résultante positive ou négative et la force vive devrait augmenter ou diminuer.

Dans une machine à mouvement uniforme le travail de la résultante est nul à chaque instant, c'est-à-dire que le travail moteur est à chaque instant égal à la somme des travaux de toutes les résistances.

Il est difficile d'imaginer une machine dont la force vive puisse conserver indéfiniment la même valeur. Il faut dans tous les cas que chaque pièce d'une telle machine se meuve d'un mouvement continu et qu'ainsi il n'y ait aucune pièce à mouvement alternatif. Un moulin à farine mû par une roue hydraulique se trouve à peu près dans ce cas.

Conditions d'un mouvement périodique.

196. D'après le principe cité plus haut on peut dire que : pour qu'une machine reprenne à la fin d'un tour la même force vive qu'elle possédait au commencement du même tour, il faut que le travail, fourni par le moteur pour effectuer ce tour, soit rigoureusement égal à la somme des travaux effectués par toutes les autres forces, depuis le commencement jusqu'à la fin du même tour.

Et puisque, pour chaque tour d'une machine, la somme de travail de toutes les forces, autres que la force motrice, est une quantité constante, on a le principe suivant :

Principe. *Une machine sera à mouvement périodique si la force motrice est capable de fournir périodiquement un travail égal à la somme de travail qu'effectuent, pour chaque tour, toutes les autres forces appliquées à la machine.*

Cette somme de travail doit être augmentée de la moitié des forces vives perdues par l'effet des chocs s'il y a lieu. (Exemple dans le pilon).

La même somme de travail doit être augmentée de la moitié de la force vive due à la vitesse avec laquelle des masses peuvent quitter la machine. (Exemple dans les pompes.)

La machine fera n tours par minute si la force motrice peut fournir, par minute, n fois un travail égal à la somme de travail que toutes les autres forces effectuent pour chaque tour.

Équation de périodicité. L'équation qui exprime l'égalité de travail mentionnée au principe précédent, nous la nommerons équation de périodicité.

Dans une machine le mouvement commence parce que, pendant le temps du premier tour qui s'exécute plus lentement que les suivants, le moteur fournit un travail plus grand que celui de toutes les autres forces.

Le mouvement périodique ne s'établit qu'à partir du tour pour lequel la relation exprimée au principe précédent (196) est satisfaite.

Si, pendant le temps du premier tour, le travail fourni par la force motrice est juste égal à la somme de travail de toutes les autres forces, alors la machine, à la fin de ce tour, se trouvera de nouveau au repos.

Force vive maximum et minimum dans une machine à mouvement périodique.

197. *Dans une machine dont la force vive redevient périodiquement la même, il existe, au moins pour chaque période, deux positions des organes, pour lesquelles les forces se font équilibre. Dans l'une de ces positions la force vive est un maximum et dans l'autre un minimum.*

Considérons la force vive de la machine à un instant où la résultante est positive. Cette résultante, ne pouvant pas rester indéfiniment positive, parce que la force vive irait toujours en augmentant et ne pourrait plus reprendre sa première valeur, devra devenir négative et par conséquent devra passer par zéro. En cet instant toutes les forces se font équilibre et la force vive est maximum. La résultante actuellement négative ne pouvant indéfiniment rester négative, parce que la force vive ne pourrait plus reprendre sa valeur maximum, devra redevenir positive et pour cela passer de nouveau par zéro. En cet instant les forces se font de nouveau équilibre, et il est visible que la force vive est alors un minimum.

Il résulte de là que, dans une machine à mouvement périodique, l'intensité de la résultante de toutes les forces croît et décroît positivement jusqu'à devenir égale à zéro, puis croît et décroît négativement jusqu'à devenir de nouveau égale à zéro et ainsi de suite.

Influence de la vitesse d'une machine sur le travail utile.

198. Il s'agit d'apprécier si, pour produire dans un temps donné le même travail utile, il faut plus de travail moteur en allant vite qu'en allant lentement. Pour faciliter le raisonnement, nous supposerons que la machine fasse, dans un cas, une révolution et, dans l'autre, deux révolutions. Dans le second cas, l'intensité de la résistance utile devant être deux fois moindre, il est facile de conclure que le travail du frottement de cette résistance est le même dans les deux cas; mais le travail des frottements provenant du poids des pièces mobiles est à l'évidence dans le second cas le double de ce qu'il est dans le premier cas. De ce dernier point on peut déjà conclure que le travail moteur doit être plus grand dans le second cas; mais ce travail moteur plus grand exige une force motrice d'une intensité plus grande, et partant, le frottement inhérent à la force motrice est plus grand dans le second cas. Il y a donc deux raisons pour conclure que :

Dans une même machine pour effectuer le même travail utile dans un temps donné, il faut plus de travail moteur en allant vite qu'en allant lentement.

Remarque. Cette conclusion est à plus forte raison vraie si la vitesse de la machine dépasse celle pour laquelle le travail moteur est un maximum.

Force vive d'une machine marchant à vide, ou sans charge utile.

199. *Dans une machine dont le moteur fournit continuellement le même travail dans le même temps, si l'on supprime la résistance utile, la force vive de la machine ne pourra pas augmenter indéfiniment.*

Comme le travail des frottements provenant des poids des pièces mobiles reste le même pour chaque révolution de la machine, quelle que soit la vitesse avec laquelle s'effectue la révolution, tandis que le travail moteur par révolution diminue en raison de cette vitesse, il en résulte qu'il arrivera nécessairement un tour de la machine pour lequel le travail moteur sera rigoureusement égal au travail des frottements provenant des poids des pièces, plus le travail du frottement provenant de la force motrice. La vitesse, avec laquelle s'effectue ce tour de la machine, sera la plus grande que la machine puisse atteindre.

Valeur industrielle des machines.

200. Principe. *Il est évident que les valeurs industrielles de deux machines de même espèce et dont les travaux moteurs dans un même temps sont égaux, sont entre elles comme leurs travaux utiles.*

Si les travaux moteurs dans un même temps sont inégaux, alors, en comparant

les travaux utiles qui correspondent respectivement dans les deux machines à un travail moteur représenté par l'unité, le principe précédent conduit à dire que :

Principe. *Les valeurs industrielles de deux machines de même espèce dont les travaux moteurs dans un même temps sont inégaux, sont entre elles comme les rapports de leurs travaux utiles à leurs travaux moteurs.*

201. *Coëfficient du travail utile ou de l'effet utile d'une machine.* On appelle ainsi le rapport du travail utile ou travail moteur. D'après cela, le travail utile pendant un temps quelconque est égal au travail moteur multiplié par le coëfficient du travail utile.

Le rapport du travail utile au travail moteur est aussi appelé le *rendement* de la machine.

202. *Le rapport du travail utile au travail moteur doit être déterminé pour une révolution entière de la machine* pour la raison que ces deux travaux et par suite leur rapport ne changent pas d'une révolution à l'autre, tandis qu'ils varient en général d'un instant à l'autre dans chaque révolution et que leur détermination pour une fraction de révolution exigerait la considération de la force vive ainsi que le travail des poids des pièces, ce qui conduirait à des calculs inextricables.

Sachant que le travail utile d'une machine est toujours plus petit que son travail moteur, il résulte des principes précédents que, sous le rapport de l'économie de la force motrice, la meilleure machine est celle dont le travail utile approche le plus du travail moteur.

203. Par travail utile d'une machine, on entend le travail moyen qu'elle effectue en une seconde.

Le travail utile d'une machine est égal au travail utile d'une révolution multiplié par le nombre de révolutions que la machine exécute dans une minute et divisé par 60.

204. Pour les machines, l'unité de travail est le cheval vapeur, c'est-à-dire 75 kilogrammes élevés à la hauteur d'un mètre par seconde. Pour réduire en chevaux vapeur un travail exprimé en kilogrammètres, il suffit de diviser ce dernier par 75.

Moyens pratiques pour déterminer dans certains cas le travail utile, le travail moteur, ainsi que le travail des frottements.

205. L'impossibilité de calculer directement le travail utile dans une machine, quand la loi suivant laquelle la résistance utile varie pendant le parcours de sa trajectoire est inconnue, a fait imaginer un moyen pratique pour la détermination du travail utile transmis par un arbre de rotation.

En supposant connue la description du frein de Prony, nous dirons que le principe sur lequel il est basé est implicitement contenu dans l'équation de périodicité, et peut être énoncé comme suit :

Dans toute machine la résistance utile peut être remplacée par toute autre résistance constante ou variable suivant une loi quelconque, pourvu que le travail par période de cette dernière soit égal à celui de la résistance utile.

En quoi il est à remarquer cependant que la substitution d'une force à une autre capable du même travail que la première peut influer sur les positions d'équilibre de la machine et par suite sur la régularité de son mouvement.

On vérifie par expérience que, pour une révolution de la machine, le travail d'une résistance quelconque est égal à celui de la résistance utile quand, sous l'influence de la même force motrice, la machine met respectivement, sous l'influence des deux résistances, le même temps pour faire une révolution ou un même nombre de révolutions.

Quel que soit le poids Q suspendu à l'extrémité du levier du frein, on peut toujours, en serrant convenablement le frein contre la surface de la poulie (calée sur l'arbre de révolution), faire en sorte que le levier soit horizontal. Dans ce cas, le poids Q est en équilibre, par rapport à l'axe de l'arbre, avec l'ensemble des frottements qui ont lieu à la surface de la poulie et l'on a :

$$Q\,l = F\,r + F'\,r' + F''\,r + \text{etc.}$$

où l désigne la distance horizontale du poids Q à l'axe de l'arbre ; F, F', F''. . . . les frottements qui ont lieu à la surface de la poulie; et r, r', r'', . . . les bras de levier de ces mêmes frottements.

Le poids Q étant déterminé par tâtonnement, de manière que l'arbre de rotation fasse par minute le même nombre n de tours qu'il faisait lorsque la résistance utile y était appliquée, il vient pour l'expression du travail utile :

$$Tu = \frac{n}{60}\,2\pi\,(Fr + F'r' + F''r'' + \ldots\ldots) = \frac{n}{60}\,2\pi\,Ql.$$

Nous laissons à trouver comment on détermine par expérience la quantité dont le poids Q doit être augmenté dans cette formule pour tenir lieu du poids du levier du frein.

Remarque. Pour que le levier garde facilement sa position horizontale, il faut laisser marcher la machine sous l'influence du frein jusqu'à ce que les surfaces frottantes soient rendues parfaitement lisses. Il est inutile d'essayer avant cette époque de maintenir le levier dans la position horizontale.

206. On fera voir comment, au moyen de l'indicateur de Mac-Naught, on peut déterminer le travail moteur dans le cas où la force motrice est un gaz. Comment, au moyen du frein et de la force vive du volant, on peut déterminer le travail de tous les frottements pour une révolution.

Comment, au moyen de la même force vive, on peut déterminer pour un tour le travail des frottements inhérents à la machine marchant à vide (sans résistance utile).

Réduction du travail des résistances passives.

207. Pour que le travail utile approche le plus possible du travail moteur, il faut éviter les chocs et réduire autant que possible les résistances passives, frottements, etc.

En traçant les pièces qui se conduisent de façon à ce qu'elles ne se quittent pas, et en donnant à leurs articulations le moins de jeu possible, on évitera ou du moins on atténuera les chocs qui ont lieu dans les articulations des pièces à mouvement alternatif, chaque fois qu'elles changent de direction, et dans les pièces à mouvement continu chaque fois que le récepteur passe par son maximum ou son minimum de vitesse.

Outre la perte de force vive occasionnée par les chocs, ceux-ci donnent lieu à des pressions énormes, d'où résultent des frottements qui excèdent de beaucoup ceux des tables. Enfin ces pressions déforment plus ou moins les pièces, et la portion de travail moteur pour opérer cette déformation est perdue.

Il est encore indispensable que chaque pièce à mouvement alternatif arrive à la fin de sa course avec une vitesse nulle, pour qu'il n'y ait pas de perte de force vive. Sous ce rapport, on doit préférer les communicateurs à mouvement continu à ceux à mouvement alternatif.

Pour réduire les frottements et leur travail.

208. Pour réduire les frottements, il faut avant tout réduire autant que possible le nombre de communicateurs. Après cela, faire en sorte que les surfaces frottantes subissent les moindres pressions et que les chemins décrits par les surfaces soient les plus petits possibles.

C'est ainsi qu'il faut disposer les roues et pignons de façon à ce que la résultante de la puissance et de la résistance appliquée à chaque roue ou pignon soit la plus petite, et que les diamètres des tourillons soient réduits autant que possible sans nuire à leur solidité.

C'est ainsi que dans le pilon les pressions contre les prisons sont nulles, si la came choque le pilon à son centre de gravité.

En réduisant les poids des pièces, sans nuire à leur solidité, on diminue les frottements provenant de ces poids.

Dans le calcul du travail du frottement provenant des poids des pièces, il est à remarquer que le poids d'une pièce dont l'axe se meut suivant la verticale, agit sur l'une ou sur l'autre des deux articulations de la pièce, selon que le centre de gravité de celle-ci monte ou descend. (Exemple dans les tiges de piston des pompes, bielles, etc.)

On diminuera les poids des pièces d'une machine, en évitant les causes du mouvement varié; car il est facile de prouver qu'à travail égal, dans le même temps, la machine dont le mouvement est varié, sera soumise à des efforts plus considérables que celle qui serait douée d'un mouvement uniforme. Par suite, les dimensions et les poids des pièces dans la première seront plus considérables que dans la seconde.

DES MOYENS DE RÉGULARISER LE MOUVEMENT DANS LES MACHINES.

(VOLANTS ET RÉGULATEURS.)

Théorie des volants

209. La vitesse d'une machine à mouvement périodique serait uniforme si, à chaque instant, les forces appliquées à la machine se faisaient équilibre, ou, ce qui revient au même, si, pendant chaque instant, le travail moteur était égal à celui de toutes les résistances. Cette vitesse s'éloignera d'autant plus de la vitesse de régime que les relations qui existent à chaque instant entre les forces s'éloignent davantage des conditions d'équilibre. En d'autres termes, elle s'éloignera d'autant plus de la vitesse de régime que le travail moteur, pendant une fraction de la période, s'éloignera davantage du travail de toutes les résistances; ce qui arrivera principalement quand la force motrice sera nulle pendant une fraction de la période (Exemple : une manivelle simple à simple effet); ou quand la résistance utile sera nulle pendant une fraction de la période, sans que la puissance le soit. (Exemple : laminoir, marteau de forge).

Les chocs sont encore à citer comme cause de l'irrégularité du mouvement, surtout dans les machines dont le travail utile s'effectue par choc. (Exemple : machine à pilon.)

210. Le moyen de régulariser la vitesse d'une machine repose sur ce principe que : *dans une machine à mouvement périodique où existe un axe de rotation à mouvement continu, la vitesse est d'autant plus régulière, c'est-à-dire que la différence des vitesses extrêmes y est d'autant plus petite que la masse d'un volant placé sur cet axe est plus grande.*

En effet, la résultante de toutes les forces n'ayant à vaincre que l'inertie des pièces mobiles, plus la masse du volant sera grande, et moins sera grand l'accroissement de vitesse que prendra le volant sous l'influence de cette résultante pendant tout le temps que celle-ci est positive, c'est-à-dire depuis la position d'équilibre où la vitesse est un minimum jusqu'à la position d'équilibre où la vitesse est un maximum. Or cet accroissement de vitesse est précisément la différence entre les vitesses extrêmes de la machine.

PRINCIPE : *De deux machines à mouvement périodique qui ne diffèrent qu'en ce que le volant dans l'une a une plus grande masse que dans l'autre, la différence des vitesses extrêmes sera plus petite dans la première machine.*

Ici se présente la question de savoir si le plus ou moins de masse d'un volant peut avoir de l'influence sur la vitesse de régime de la machine, en d'autres termes, sur le temps que la machine met à faire une révolution. A cet égard, on peut dire :

PRINCIPE : *Dans deux machines à mouvement périodique qui ne diffèrent que par les masses de leur volant, les vitesses de régime sont égales, si l'on fait abstraction du surplus de frottement qui résulte du surplus de poids de l'un des volants.*

En effet, la vitesse de régime sera acquise dans les deux machines quand, pour chaque tour de chaque machine, le travail moteur sera égal au travail de toutes les résistances. Or, le travail de toute les résistances par tour étant le même dans les deux machines, il en résulte que, quand les machines marcheront à leur vitesse de régime, le travail moteur par tour sera le même dans les deux. De ce dernier point on conclut que le temps employé par chaque machine à faire un tour est également le même; car si ces temps n'étaient pas les mêmes, il en résulterait que le moteur fournirait des travaux égaux dans des temps inégaux, ce qui est contraire à l'énoncé. Donc, etc.

REMARQUE. — Le temps, pour acquérir la vitesse de régime, n'est pas le même pour les deux machines.

La fonction du volant consiste à absorber ou à emmagasiner le travail de la résultante de toutes les forces appliquées à la machine pendant tout le temps que la résultante est positive, et à restituer le même travail pendant tout le temps que la résultante est négative.

Si tangentiellement à une poulie actuellement animée d'une vitesse angulaire donnée, on fait agir une force constante, dans un sens pendant un tour entier de la poulie et dans le sens contraire pendant le tour suivant, et ainsi de suite, on aura un exemple du rôle que joue le volant dans une machine à mouvement périodique.

REMARQUE. — Un inconvénient du volant, c'est que pour chaque tour de la machine, la force motrice doit fournir en pure perte un travail égal à celui du frottement des tourillons du volant. Il s'ensuit qu'avant de recourir au volant, ou du moins pour en diminuer le plus possible le poids, il faut faire disparaître autant que possible les causes de l'irrégularité du mouvement; et, en premier lieu, faire en sorte que les poids des pièces mobiles se fassent équilibre.

Equations nécessaires pour calculer le poids des volants.

PROBLÈME : *Quel doit être le poids ou mieux la force vive du volant d'une machine à mouvement périodique pour que les vitesses extrêmes ne diffèrent chacune que de la $n^{ième}$. partie de la vitesse de régime?*

211. Les équations nécessaires à la solution de cette question sont au nombre de quatre :

PREMIÈRE ÉQUATION (A) :

La première équation doit exprimer que la machine est à mouvement périodique, c'est-à-dire que le travail moteur pour chaque révolution est égal à celui de toutes les résistances, ce qui donne une première équation entre la puissance et les résistances.

DEUXIÈME ÉQUATION (B) :

La seconde équation doit exprimer les positions d'équilibre de la machine parce que, à ces positions, ont lieu la plus grande et la plus petite vitesse.

De cette équation on déduit en fonction de la puissance et des résistances les valeurs de la variable qui fixe les positions d'équilibre. Cette équation pourra toujours être simplifiée au moyen de l'équation A.

TROISIÈME ÉQUATION (C) :

La troisième équation doit exprimer que le travail de toutes les forces, depuis une position d'équilibre jusqu'à la suivante, est égal au demi-accroissement que prend la force vive du volant depuis l'une jusqu'à l'autre de ces positions.

Cette équation établit une relation entre les forces appliquées à la machine et les vitesses extrêmes (maxima et minima) de la machine.

De cette équation, qui renferme nécessairement la variable qui fixe les positions d'équilibre, on élimine cette variable au moyen de l'équation B.

QUATRIÈME ÉQUATION (D) :

La quatrième équation doit exprimer la relation que l'on veut établir entre les vitesses extrêmes et la vitesse de régime. Or, d'après l'énoncé, en désignant par ω' et ω'' les vitesses angulaires extrêmes du volant, et par ω sa vitesse angulaire de régime on doit avoir :

$$\left.\begin{aligned}\omega' &= \omega - \frac{\omega}{n}\\ \omega'' &= \omega + \frac{\omega}{n}\end{aligned}\right\} \text{ d'où } \ldots \omega''^2 - \omega'^2 = \frac{4\omega^2}{n} \ldots\ldots (D)$$

Hypothèses pour simplifier le calcul des volants

212. On négligera 1° les frottements. Ce faisant, on sera certain d'obtenir pour le volant des dimensions plus que suffisantes; car les frottements faisant l'office de frein, tendent par eux-mêmes à resserrer les écarts des vitesses extrêmes (On a vu, en effet, n° 199, que le seul frottement des poids des pièces mobiles suffit pour empêcher la vitesse d'une machine de croître indéfiniment.)

2° On néglige le poids et l'inertie des pièces à mouvement alternatif, dont les masses sont relativement petites par rapport à celle du volant.

3° On suppose que l'arbre du volant est mis en mouvement au moyen d'une manivelle par l'intermédiaire d'une bielle qui se meut parallèlement à elle-même, ou, ce qui revient au même, par l'intermédiaire d'une bielle infinie.

4° On suppose que la force motrice est constante et agit suivant l'axe de la bielle.

5° On suppose que la résistance utile ou la charge utile est constante et appliquée à l'extrémité d'une corde qui s'enroule sur la circonférence moyenne du volant.

Volant pour une manivelle simple à simple effet.

213. La manivelle est à simple effet quand la puissance n'agit que pendant la moitié de la révolution de la manivelle.

Notations. — R rayon de la circonférence moyenne de la jante du volant —; r rayon de la manivelle — ; P puissance ou force motrice — ; Q résistance utile ou charge utile — ; q poids cherché du volant — ; K coëfficient d'effet utile de la machine (voir n° 201) — ; α angle que la manivelle fait avec sa position horizontale lors de la position d'équilibre — ; N nombre de chevaux utiles dont la machine est capable par seconde — ; m nombre de tours ou de révolutions que la machine effectue par minute — ; ω la vitesse angulaire moyenne du volant — ; $V = \omega R$ la vitesse moyenne de la circonférence moyenne du volant.

Les quatre équations mentionnées à l'article (211) deviennent successivement :

$$2\,Pr = 2\pi\,Q\,R \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

$$Pr\cos\alpha = Q\,R \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

$$\text{d'où} \ldots\ \cos\alpha = \frac{1}{\pi},\ \text{et}\ \alpha = 71^\circ\,26'\,17''$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{q}{g}\,(\omega''^2 - \omega'^2) = Pr\sin\alpha - 2\,Q\,R\,\alpha \ldots\ldots (C)$$

L'équation (C) devient au moyen de l'équation (D) et de l'équation. (B)

$$\frac{q}{g}\,\frac{R^2\omega^2}{n} = Pr\,(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) = 0{,}55182\ Pr$$

remplaçant $R\,\omega$ par V et mettant à la place de g sa valeur, on a :

$$q\,V^2 = 5{,}413\,n\,Pr.$$

Le travail moteur exprimé en fonction du nombre N de chevaux utiles, donne :

$$Pr = \frac{N \times 30 \times 75}{K\,m}.$$

Cette valeur de Pr étant substituée dans l'équation précédente, il vient pour le poids du volant :

$$q = 12179 \frac{N n}{K m V^2}.$$

REMARQUE. Si l'on stipulait que la différence des vitesses extrêmes fût égale à la $n^{\text{ième}}$ partie de la vitesse de régime, cette condition ferait doubler le coëfficient numérique de l'équation précédente, et par suite doubler le poids du volant.

La même remarque s'applique également aux poids des volants calculés ci-après.

Volant pour une manivelle simple à double effet.

214. La manivelle est à double effet lorsque la puissance ou la force motrice agit pendant la révolution entière de la manivelle.

Pour le cas actuel, les équations mentionnées à l'artcle (211) deviennent :

$$4 Pr = 2 \pi \, Q R. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

$$Pr \cos \alpha = Q R. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (B)$$

$$\text{d'où} \ldots \cos \alpha = \frac{2}{\pi}; \text{ et } \alpha = 50^\circ \, 27' \, 35''.$$

$$\frac{q}{g} \frac{R^2 \omega^2}{n} = Pr (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) = 0{,}211 \, Pr \ldots (C)$$

ou bien en remplaçant $R\omega$ par V et g par sa valeur

$$q \; V^2 = 2{,}0697 \, n \, Pr.$$

Le travail moteur exprimé en chevaux vapeur utiles, donne :

$$Pr = \frac{N. \, 15 \times 75}{K m},$$

Cette valeur de Pr étant substituée dans l'équation précédente, il vient pour le poids du volant :

$$q = 2229 \frac{N n}{K m V^2}.$$

Volant pour manivelle simple à double effet, la résistance utile étant supprimée pendant une ou plusieurs révolutions de la machine.

215. Dans une machine où la résistance utile est supprimée pendant un ou plusieurs tours, la vitesse du volant est la plus grande à l'instant où la résistance utile commence à agir; et elle est la plus petite à l'instant où la résistance cesse d'agir.

Supposant que sur μ tours la résistance utile ne soit appliquée que pendant un tour, on aura successivement pour les équations de l'art. 211 :

$$\mu \, 4 \, r \, P = 2 \pi \, Q R \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

$$\frac{1}{2} \frac{q}{g} R^2 (\omega''^2 - \omega'^2) = 2 \pi \, Q R - 4 \, r \, P. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (C)$$

Remplaçant $(\omega''^2 - \omega'^2)$ par $4 \frac{\omega^2}{n}$ et $2 \pi \, Q \, R$ par sa valeur tirée de (A), on a :

$$\frac{1}{2} \frac{q}{g} \frac{R^2 \omega^2}{n} = (\mu - 1) \, r \, P;$$

$$q = \frac{2 g \, (\mu - 1) \, r \, P \, n}{V^2}.$$

Le travail moteur exprimé en fonction du nombre de chevaux utiles, dont la machine est capable par seconde, donne :

$$\frac{K m \, 4 \, r \, P}{60. \; 75} = N.$$

La valeur de Pr tirée de cette équation étant substituée dans l'équation précédente, on a pour le poids du volant :

$$q = \frac{2g \, (\mu - 1)}{K m V^2} N. \; 75 \; n. \; 15 = 22072 \frac{(\mu - 1) \, N \, n}{K m V^2}.$$

Volant pour une manivelle double à double effet.

216. Les deux manivelles étant supposées coudées à angle droit, les angles que ces manivelles font avec l'horizontale sont complémentaires l'un de l'autre.

Les équations du n° (211) deviennent :

$$8 Pr = 2 \pi \, Q R. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

$$Pr \cos \alpha + Pr \sin \alpha = Q R. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (B)$$

$$\text{d'où} \ldots \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{\pi}; \text{ et } \sin \alpha = \frac{4 \pm \sqrt{2 \pi^2 - 16}}{2 \pi}.$$

En représentant par α', α'' les deux angles fournis par cette dernière équation, on trouve que :

$$\alpha' = 70^\circ \, 47' \, 54'', \text{ et } \alpha'' = 19^\circ \, 12' \, 6''.$$

Ces valeurs montrent que α' et α'' sont complémentaires. Ce que l'on peut démontrer directement :

En effet : $\sin\alpha' = \dfrac{4 + \sqrt{2\pi^2 - 16}}{2\pi}$, et $\sin\alpha'' = \dfrac{4 - \sqrt{2\pi^2 - 16}}{2\pi}$

$$\cos\alpha' = \sqrt{1 - \frac{16 + 2\pi^2 - 16 + 8\sqrt{2\pi^2 - 16}}{4\pi^2}} = \frac{4 - \sqrt{2\pi^2 - 16}}{2\pi} = \sin\alpha''.$$

Les valeurs de $\sin\alpha$ étant toutes deux positives, les deux équilibres ont lieu avant que la première manivelle ne prenne la position horizontale.

La troisième équation de l'art. 211 deviendra :

$$\frac{1}{2}\,\frac{q}{g}\,\frac{4\,V^2}{n} = Pr\,(\sin\alpha' - \sin\alpha'' + \cos\alpha'' - \cos\alpha') - Q\,R\,(\alpha' - \alpha'')\,.\ .\ (C)$$

ou bien, à cause que α', α'' sont complémentaires,

$$\frac{q}{g}\,\frac{V^2}{n} = Pr\left[\sin\alpha' - \sin\alpha'' - (\alpha' - \alpha'')\,\frac{2}{\pi}\right]$$

d'où . . . . $q\,V^2 = 0{,}08682\,g\,n\,Pr = 0{,}8515\,n\,Pr$. . . . . (1)

Le travail moteur exprimé en chevaux utiles donne :

$$K\,\frac{8\,Pr\,m}{60 \times 75} = N; \ldots\ \text{d'où}\ Pr = \frac{N\ 562{,}5}{K\,m}.$$

Cette valeur de Pr étant substituée dans l'équation (1), on a pour le poids du volant :

$$q = 479\,\frac{N\,n}{K\,m\,V^2}.$$

Détermination du nombre n duquel dépend le degré de régularité de la vitesse du volant.

217. La valeur du nombre n augmente avec le degré de régularité du mouvement qu'exige la fabrication de chaque espèce de produit.

S'il s'agit, par exemple, de déterminer le nombre n pour une machine qui fait marcher une filature, on choisira une machine dont le volant a le degré de régularité voulu pour cette espèce de fabrication.

Connaissant le coëfficient de l'effet utile, on calculera, d'après les données de la machine, les nombres m, N, q, V, que l'on introduira dans l'équation qui donne le poids du volant pour cette espèce de machine ; et, de cette équation où il ne reste d'inconnu que le nombre n, on déduira la valeur de ce dernier.

Sans indiquer comment le nombre n a été déterminé, les auteurs indiquent qu'il faut prendre n égale à 64 ou à 120, selon que la machine exige un degré ordinaire ou un grand degré de régularité.

Le volant doit être placé sur l'arbre, ou le plus près de l'arbre dont on veut régulariser le mouvement.

Volant pour machine à détente.

218. Soient : R le rayon moyen de la jante du volant ; r le rayon de la manivelle simple à double effet ; Q la charge utile agissant tangentiellement à la circonférence moyenne du volant ; P la force motrice, constante pendant la $n^{\text{ième}}$ partie de la course et variable pendant le restant de la course.

Nous supposons que la puissance agit sur la manivelle du volant par l'intermédiaire d'une bielle infinie, ce qui permet de supposer le paralélisme de la bielle.

La course $2\,r$ étant divisée en n parties égales, et la détente commençant à la $n^{\text{ième}}$ partie de la course, *l'angle α que fait la manivelle avec la position horizontale au moment où commence la détente est donné par la formule :*

$$\sin\alpha = 1 - \frac{2}{n}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (A)$$

En faisant $n = 2, 3, 4$, etc., on aura le tableau suivant :

$n = 2$	3	4	5	6	7
$\sin\alpha = 0$	0,333	0,500	0,600	0,666	0,714
$\alpha = 0°$	19°23′	30°	36°52′	41°48′	45°35′

Pour α positif, la détente commence avant la moitié de la course, et pour α négatif, la détente commence après la demi course.

Propriété. — *Le moment de la puissance est le plus grand à l'instant où commence la détente.*

Démonstration. — Le moment de la puissance à l'instant où commence la détente, c'est-à-dire pour la position de la manivelle indiquée par l'angle α est :

$$Pr\cos\alpha\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Le moment de la puissance pendant la détente et pour une position de la manivelle indiquée par l'angle α' est, en désignant par P′ l'intensité de la puissance pour cette position :

$$P'r\cos\alpha'\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2).$$

Pour déterminer P′, on remarquera que $r\,(1 - \sin\alpha)$ est le volume de la vapeur quand sa pression est P et que la manivelle occupe la position indiquée par l'angle α, tandis que $r\,(1 - \sin\alpha')$ est le volume de la vapeur quand sa pression est P′ et que la manivelle occupe la position indiquée par l'angle α'. Or, d'après la loi de Mariotte on a . . . . . . $P'r\,(1 - \sin\alpha') = Pr\,(1 - \sin\alpha)$, d'où. . . .

$$P' = P\,\frac{1 - \sin\alpha}{1 - \sin\alpha'}.$$

Substituant cette valeur dans (2), il vient pour le moment de P' :

$$Pr\cos\alpha'\,\frac{1 - \sin\alpha}{1 - \sin\alpha'}$$

Il s'agit, d'après l'énoncé, de prouver l'inégalité suivante :

$$Pr\cos\alpha > Pr\cos\alpha'\,\frac{1 - \sin\alpha}{1 - \sin\alpha'}$$

qui peut être mise sous la forme :

$$\sin(\alpha - \alpha') > \cos\alpha' - \cos\alpha.$$

Or, cette inégalité se vérifie facilement au moyen d'une construction géométrique.

De la propriété précédente, on conclut que le premier équilibre doit avoir lieu avant que la détente commence.

Position de la manivelle à l'instant du premier équilibre.

β étant l'angle de la manivelle à l'instant où la puissance fait équilibre à la résistance, il vient :

$$Pr\cos\beta = Q\,R. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(B)}$$

D'un autre côté, le travail de P étant égal à celui de Q pendant une période, on a :

$$2\,P\,\frac{2\,r}{n}\,(1 + \text{K}\log n) = 2\,\pi\,Q\,R.$$

Eliminant Q R entre ces deux équations, il vient :

$$\cos\beta = \frac{2\,(1 + \text{K}\log n)}{n\,\pi}.$$

Les deux valeurs $\pm\beta$ qui satisfont à cette équation ne peuvent être employées que dans le cas où les deux équilibres auraient lieu avant l'instant où commence la détente.

En faisant dans l'équation précédente $n = 1, 2, 3\ldots$, on aura le tableau suivant :

$n =$	2	3	4	5	6
$\cos\beta =$	0,538945	0,4453393	0,379759°5	0,332244	0,29621466
$\beta =$	57°23'20"	63°33'21"	67°40'33",5	70°35'41"	72°46'15"

Position de la manivelle à l'instant du second équilibre.

Soit γ l'angle de la manivelle au moment du second équilibre que nous supposons avoir lieu pendant la détente, on aura en désignant par P' la pression de la vapeur à l'instant de l'équilibre :

$$P'\,r\cos\gamma = Q\,R. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Pour exprimer P' en fonction de P, remarquons qu'à l'instant où commence la détente, la vapeur occupe le volume $\frac{2\,r}{n}$ à la pression P ; et que, lorsque la manivelle fait l'angle γ avec la position horizontale, la vapeur occupe le volume $r\,(1 - \sin\gamma)$ à la pression P'. Donc d'après la loi de Mariotte, on a :

$$\frac{2\,r}{n}P = P'\,(1 - \sin\gamma)\,r.$$

Substituant dans (1) la valeur de P' tirée de cette équation, on aura :

$$\frac{2\,Pr}{n} = \frac{1 - \sin\gamma}{\cos\gamma}\,Q\,R.$$

Eliminant Q R au moyen de l'équation suivante déjà employée,

$$\frac{2\,r}{n}\,P\,(1 + \text{K}\log n) = \pi\,Q\,R.$$

on aura :

$$\frac{1 - \sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\pi}{1 + \text{K}\log n},\ \text{d'où l'on déduit, en faisant}\ \frac{\pi}{1 + \text{K}\log n} = m,$$

$$\sin\gamma = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}. \; . \; . \; . \; . \quad \text{(C)}$$

Les valeurs positives de $\sin\gamma$ indiquent que le second équilibre a lieu avant la demi course de la manivelle ; et les valeurs négatives de $\sin\gamma$ indiquent que le second équilibre a lieu après la demi course de la manivelle. Pour $m = 1$ ou $\sin\gamma = 0$, l'équilibre a lieu lorsque la manivelle est dans la position horizontale. Pour cette valeur de γ, $n = 8{,}513$.

En faisant $n = 1, 2, 3, \ldots$ dans l'équation précédente, on a le tableau suivant :

$n =$	2	3	4	5	6
$-\sin\gamma =$	0,54983	0,382202	0,26825	0,18349	0,11751
$-\gamma =$	33°21'16"	22°28'13"	15°33'35"	10°34'23"	6°44'54"

Travail de la puissance et de la résistance entre les deux positions de la manivelle pour lesquelles il y a équilibre.

1° La puissance depuis la position de la manivelle indiquée par l'angle β jusqu'à celle indiquée par l'angle α est constante, et son travail est égal à :

$$Pr\ (\sin\beta - \sin\alpha) \ldots\ldots\ldots (2)$$

2° Depuis la position de la manivelle indiquée par l'angle α où le volume de la vapeur est $\frac{2\,r}{n}$, jusqu'à la position indiquée par l'angle γ où le volume de la vapeur est $r\ (1 - \sin\gamma)$ la puissance agit par détente et son travail est égal à :

$$P\,\frac{2\,r}{n}\,\text{K}\log\frac{(1-\sin\gamma)\,n}{2} \ldots\ldots\ldots (3)$$

3° Le travail de la charge utile depuis la position indiquée par β jusqu'à celle indiquée par γ est :

$$Q\,R\,(\beta - \gamma) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

En égalant la somme algébrique des trois travaux (2), (3), (4) au demi accroissement de la force vive du volant entre les deux positions d'équilibre, il vient :

$$\frac{1}{2}\,\frac{q}{g}\,R^2\,(\omega''^2 - \omega'^2) = Pr\,(\sin\beta - \sin\alpha) + \frac{P\,2r}{n}\,\text{K}\log\frac{(1-\sin\gamma)\,n}{2} - Q\,R\,(\beta-\gamma)$$

$$2\,\frac{q}{g}\,\frac{\omega^2 R^2}{n'} = Pr\left[\sin\beta - \sin\alpha + \frac{2}{n}\,\text{K}\log\frac{(1-\sin\gamma)n}{2} - (\beta-\gamma)\cos\beta\right]$$

où n' est le coëfficient de régularité et $\text{K} = 2{,}303$.

Pour $n = 2, 3, 4\ldots$ on trouve pour la quantité entre crochets, les valeurs suivantes :

$n =$	2	3	4	5	6
[ ] =	0,42728022	0,37983232	0,338752721	0,320316957	0,2806376727

C étant le coëfficient de l'effet utile, on a pour relation entre le travail moteur et le travail utile :

$$\frac{C\,m\,2\,P\,\frac{2\,r}{n}\,(1 + \text{K}\,\log n)}{60 \times 75} = N.$$

L'élimination de Pr entre cette équation et la précédente donne :

$$q = \frac{N\,n'}{C\,m\,V^2} \times \text{par une constante } \varphi \text{ fonction de } n.$$

la valeur de φ est donnée pour les différentes valeurs de n par le tableau suivant :

$n =$	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi =$	2784,1	2996,2	3141,2	3288	3319	3421	3476

On vérifiera facilement qu'une machine, pour laquelle l'équilibre aurait lieu à l'instant où commence la détente, ne pourrait pas se mouvoir parce que le travail moteur pendant la période ne pourrait pas être égal à celui de la résistance.

Effort de la force centrifuge pour rompre les bras d'un volant ou les brides qui unissent les bras à la jante.

219. Données. — Soient : q le poids du volant en kil. —; n le nombre de bras divisant la jante en n segments égaux —; $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ l'arc de cercle de rayon 1 opposé à l'angle formé par deux bras consécutifs — ; r, r' les rayons extérieur et intérieur de la jante du volant —; ρ le rayon moyen — ; ω la vitesse angulaire —; $V = \omega\,\rho$ la vitesse de la circonférence moyenne.

Principe. — *La force centrifuge d'un corps dont toutes les tranches perpendiculaires à l'axe de rotation ont leurs centres de gravité sur une même parallèle à cet axe, est la même que si toute la masse de ce corps était concentrée à son centre de gravité* (1).

(1) Pour le démontrer, par le pied de l'axe de rotation supposé vertical, traçons dans le plan horizontal deux axes rectangulaires X, Y. Désignons : par m_1, m_2, m_3, etc., les masses des différentes tranches ; par m, la masse totale du corps ; par x_1, y_1, les coordonnées du centre de gravité de chaque tranche, et par d la distance de chacun de ces centres à l'axe de rotation. Cela posé :

Soient μ un élément matériel de la première tranche ; x, y ses coordonnées et ρ sa distance à l'axe de rotation. La force centrifuge de cet élément étant décomposée suivant X et Y, ces composantes seront respectivement $\mu\,\omega^2 x$ et $\mu\,\omega^2 y$. Pour la résultante des forces centrifuges qui sollicitent tous les éléments de la première tranche, on a :

Pour la résultante des composantes parallèles à X. . $\omega^2\,\Sigma\,\mu\,x = \omega^2\,m_1\,x_1$. . (1)

Pour la résultante des composantes parallèles à Y. . $\omega^2\,\Sigma\,\mu\,y = \omega^2\,m_1\,y_1$. . (2)

La résultante des forces (1) et (2) qui agissent sur la première tranche est :

$$\omega^2\,m_1\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \omega^2\,m_1\,d. \ldots\ldots\ldots (3)$$

De même la résultante des forces centrifuges qui agissent sur la seconde tranche est :

$$\omega^2\,m_2\,d. \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Et ainsi de suite pour les autres tranches.

La résultante des forces parallèles (3), (4), etc., est :

$$\omega^2\,d\,(m_1 + m_2 + \ldots) = \omega^2\,m\,d.$$

Ce qui démontre le théorème.

La même propriété a lieu encore si les centres de gravité des tranches sont dans un même plan passant par l'axe de rotation.

La distance z du centre de gravité de chaque segment à l'axe du volant est donnée par la formule :

$$z = \frac{4}{3}\,\frac{\sin {}^1/_2\alpha}{\alpha} \times \frac{r^3 - r'^3}{r^2 - r'^2}. \;\ldots\ldots\; (1)$$

Remplaçant r et r' en fonction de ρ et de l'épaisseur $e = r - r'$, on trouve, en négligeant le carré de la demi-épaisseur, que l'expression $\frac{r^3 - r'^3}{r^2 - r'^2} = \frac{3}{2}$ et par suite,

$$z = \frac{2 \sin {}^1/_2\alpha}{\alpha}\rho \;\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

La résultante F des forces centrifuges de tous les éléments d'un segment est, d'après le principe ci-dessus :

$$F = \frac{q}{ng}\,\omega^2 z = \frac{q}{ng}\cdot\frac{2\sin {}^1/_2\alpha}{\alpha}\rho \;\ldots\; (3)$$

Pareille force agit au centre de gravité de chaque segment et suivant la bissectrice de l'angle formé par les deux bras qui comprennent le segment. En décomposant chaque force F suivant les deux bras qui la comprennent, la valeur de chaque composante sera $\frac{F}{2\cos {}^1/_2\alpha}$, et il est visible que chaque bras est tiré dans le sens de sa longueur par une force égale au double de cette composante, c'est-à-dire à :

$$\frac{F}{\cos {}^1/_2\alpha} = \frac{q}{ng}\,\frac{2\,tg\,{}^1/_2\alpha}{\alpha}\,\omega^2\rho = \frac{qV^2}{\pi g\rho}\,tg\,{}^1/_2\alpha \;\ldots\; (4)$$

En posant $\frac{tg\,{}^1/_2\alpha}{\pi g} = K$, la force qui agit suivant chaque bras sera :

$$K\frac{qV^2}{\rho}. \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (5)$$

Pour $n =$	3,	4,	5,	6,	8,
On trouve K $=$	0,05620	0,03245	0,02358	0,01874	0,01344

Pour tenir compte de l'action de la gravité, il faut ajouter le poids d'un segment

à la force (5), ce qui donne pour la force qui tend à rompre chaque bras ou la bride qui l'unit à la jante :

$$K\,\frac{qV^2}{\rho} + \frac{q}{n}.$$

Force nécessaire à la jante d'un volant supposée d'une seule pièce, pour résister à l'action de la force centrifuge.

220. Un plan passant par l'axe coupe le volant en deux portions égales et, suivant deux sections dont chacune sera représentée par S. Pour la force centrifuge F qui agit sur chaque moitié du volant on a : $F = \frac{q}{\pi g}\omega^2\rho$, où les mêmes lettres ont les mêmes significations que dans l'article précédent.

Cette force étant décomposée en deux autres égales et parallèles agissant respectivement aux centres des deux sections S, chacune de celles-ci sera sollicitée par une force 1/2 F.

En nommant T la limite de l'effort que l'on veut faire supporter à chaque section par mètre carré, TS sera la résistance que chaque section oppose à la force 1/2 F et pour l'équilibre on a :

$$\frac{1}{2}F = ST \text{ ou bien } \frac{q}{2\pi g}\,\omega^2\rho = ST. \;\ldots\ldots\; (1)$$

Δ étant le poids d'un mètre cube de la matière du volant, et l sa dimension dans le sens de l'axe, on a :

$$q = \pi\,(r^2 - r'^2)\,l\,\Delta, \quad S = (r - r')\,l$$

Avec ces valeurs l'équation (1) devient eu égard à ce que $r + r' = 2\rho$,

$$\frac{\Delta\,\omega^2\rho^2}{g} = T, \text{ d'où}\ldots\; \omega\rho = \sqrt{T\frac{g}{\Delta}}. \;\ldots\ldots\; (2)$$

Tel est la relation entre $\omega\rho$, Δ et T pour que dans chaque section S du volant, il y ait équilibre entre la force centrifuge et la résistance qu'offre la section.

Pour la fonte douce $\Delta = 7100^k$ et $T = 3{,}000{,}000^k$ et la formule donne $\omega\rho = 64^m{,}38$ par seconde, pour la limite de la vitesse de la circonférence moyenne du volant.

Force nécessaire aux bras des volants pour résister dans leur encastrement près du moyeu à une variation de la vitesse.

221. Supposons que le volant dont le nombre des bras est m passe par un mouvement uniformément varié de la position où sa vitesse angulaire est la plus grande et égale

à ω', à la position où sa vitesse angulaire est la plus petite et égale à ω''. Désignons par λ l'arc de la circonférence moyenne du volant compris entre ces deux positions. La force constante X qui, agissant tangentiellement à la circonférence moyenne et à l'extrémité de chaque bras, est capable de produire la diminution de vitesse $(\omega' - \omega'')$, sera donnée par la formule :

$$\text{Travail de X, ou } X\lambda = \tfrac{1}{2}\frac{q}{mg}(\omega'^2 - \omega''^2)\rho^2$$

Or, d'après (211) $(\omega'^2 - \omega''^2) = 4\dfrac{\omega^2}{n}$ d'où....$X\lambda = \dfrac{2q}{mg}\dfrac{\omega^2\rho^2)}{n}$. . . ( )

On voit que X est d'autant plus grand que λ est plus petit, ou que les deux positions d'équilibre de la machine sont plus rapprochées l'une de l'autre ; et d'autant plus petit que le nombre n, dont dépend le degré de régularité du volant, est plus grand.

Pour les volants dont nous avons calculé les poids, l'arc λ est connu. Ainsi, pour une manivelle simple à double effet, on a (n° 214) :

$$\lambda = 2\rho \text{ arc cos}\frac{2}{\pi}$$

Le moment de X par rapport à la section d'encastrement est $X\rho$. En égalant ce moment au moment de rupture de la section d'encastrement, on pourra déduire de cette égalité la valeur de cette dernière.

Remarque. — On a supposé que la vitesse du volant augmentait ou diminuait par degrés égaux ; par suite, la valeur de X trouvée plus haut est une limite inférieure. La vraie solution consiste à considérer ce qui se passe à l'instant où le volant prend le plus grand accroissement de vitesse.

Sur les moyens de régulariser le mouvement des bobines dans les machines d'extraction.

222. *Longueur de la spirale suivant laquelle s'écoule l'axe de la corde dans les machines d'extraction.*

e étant l'épaisseur de la corde et r la distance de l'axe de la corde au centre du noyau des bobines, la spirale suivant laquelle le noyau doit être découpé, est engendrée par un point qui, partant de l'extrémité de z, parcourt d'un mouvement uniforme, sur le prolongement de r, un chemin e dans le temps que r achève d'un mouvement uniforme une révolution entière autour du centre.

Divisons la circonférence de rayon 1 en n parties égales à α, de sorte que $n\alpha = 2\pi$. Divisons la quantité e aussi en n parties égales à u, de sorte que $nu = e$. Les longueurs des arcs élémentaires, successifs de la spirale, seront :

$$r\alpha,\ (r+u)\alpha,\ (r+2u)\alpha,\ (r+3u)\alpha,\ \ .\ .\ \ [r+(n\text{-}1)u]\alpha$$

dont la somme est égal à

$$nr\alpha + \alpha u\left(\frac{n^2-n}{2}\right) = 2\pi r + \pi e - \pi u.$$

Dans cette somme, le terme $(2\pi r + \pi e)$ indépendant de u donne la longueur de la spirale.

De là, on conclut sans difficulté que les longueurs de corde qui s'enroulent au 1er 2e 3e ne tours sont respectivement : $2\pi r + \pi e$, $2\pi(r+e) + \pi e$, $2\pi(r+2e) + \pi e$, $2\pi[r+(n-1)e + \pi e$

dont la somme est :

$$2\pi\left(nr + \frac{n^2 e}{2}\right)$$

expression qui représente la longueur de l'axe de la corde enroulée après n *tours ou révolutions de l'arbre des bobines.*

On démontrerait de la même manière que la longueur de l'axe d'une corde, qui se déroule, est après n révolutions de l'arbre, donnée par l'expression

$$2\pi\left(nr - \frac{n^2 e}{2}\right)$$

où r est la distance de l'axe de la corde à l'axe des bobines au commencement de la première révolution.

Remarque. — A cause de la signification de r, il est facile de voir que le noyau sur lequel commence à s'enrouler la corde, doit être terminé par une spirale engendrée par un point qui, partant de l'extrémité du rayon $\left(r - \dfrac{e}{2}\right)$ parcourt sur le rayon prolongé un chemin e, tandis que le rayon fait une révolution entière autour de son centre.

Rayon du noyau des bobines dans les machines d'extraction.

223. Comme dans les machines d'extraction, le volant ne sert qu'à faire passer les points morts à la manivelle, il ne reste, pour régulariser autant que possible le mouvement, qu'à chercher pour quel rayon du noyeau des bobines la plus grande différence entre les moments des deux tonnes prend la plus petite valeur possible.

La solution qui suit est, pour le fond, et en partie pour la forme celle de M. Combes. Soient Q le poids contenu dans la tonne pleine ; q le poids d'une tonne vide ; L longueur du cable depuis l'orifice jusqu'au fond du puits ; p le poids du cable par mètre courant ; e l'épaisseur du cable ; ρ le rayon ou bras de levier commun, à l'extrémité duquel agissent les poids des deux tonnes au moment où elles se rencontrent ; S la longueur du cable depuis l'orifice jusqu'au point de rencontre des tonnes; n le nombre de tours de l'arbre nécessaire pour amener la tonne pleine depuis le point de rencontre jusqu'à l'orifice, ou la tonne vide depuis le même point jusqu'au fond du puits.

Le bras de levier de la tonne vide arrivée au fond sera : $\rho - n\,e$ et le bras de levier de la tonne pleine arrivée à la surface sera : $\rho + n\,e$. Après un nombre quelconque m de révolutions de l'arbre des bobines à partir du point de rencontre (m étant plus petit que n), le bras de levier de la tonne descendante sera : $\rho - m\,e$ et celui de la tonne ascendante $\rho + m\,e$.

Au point de rencontre des tonnes, la différence des moments de leurs poids et de leurs cables sera : $Q\,\rho$.

Distance entre les deux tonnes après m *révolutions de l'arbre comptées à partir de leur point de rencontre.*

Après m révolutions, la tonne ascendante sera parvenue à une hauteur, au-dessus du point de rencontre, égale à :

$$2\pi\left(m\,\rho + \frac{m^2 e}{2}\right);$$

la tonne descendante se sera abaissée au-dessous du point de rencontre d'une longueur égale à :

$$2\pi\left(m\,\rho - \frac{m^2 e}{2}\right)$$

La distance entre les deux tonnes après m révolutions comptées à partir du point de rencontre, est égale à l'élévation de l'une plus l'abaissement de l'autre, c'est-à-dire :

$$4\,\pi\,m\,\rho.$$

Comme n désigne le nombre de révolutions au bout duquel les deux tonnes arrivent, l'une à l'orifice, l'autre au fond du puits, auquel cas leur écartement est L, on a la relation :

$$L = 4\,\pi\,n\,\rho \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

relation qui détermine le nombre n, lorsque L et ρ sont connus.

Comme S est la longueur du cable enroulé après n révolutions de l'arbre à partir du rayon ρ, on a :

$$S = 2\,\pi\left(n\,\rho + \frac{n^2 e}{2}\right)$$

En remplaçant n par sa valeur, tirée de l'équation (1), il vient :

$$S = \frac{L}{2} + \frac{L^2 e}{16\,\pi\,\rho^2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Expression qui fait voir que la rencontre des tonnes n'a pas lieu au milieu du puits.

Différence des moments des poids des deux tonnes et de leurs cables après m *révolutions comptées à partir du point de rencontre des tonnes.*

Après m révolutions le poids de la tonne pleine et de son cable sera :

$$(Q + q + p\,S) - p\,2\,\pi\left(m\,\rho + \frac{m^2 e}{2}\right).$$

Ce poids agit à l'extrémité d'un bras de levier $(\rho + me)$.

Le poids de la tonne vide et de son cable sera :

$$(q + p\,S) + p\,2\,\pi\left(m\,\rho - \frac{m^2 e}{2}\right).$$

Ce poids agit à l'extrémité d'un bras de levier $(\rho - me)$.

En appelant M la différence des moments des deux tonnes et de leurs cables, il vient toute réduction faite :

$$M = Q\,\rho + m\left[(Q + 2\,q + 2\,p\,S)\,e - 4\,p\,\pi\,\rho^2 - 2\,p\,\pi\,e^2\,m^2\right]$$

ou bien en remplaçant S par sa valeur (2), et posant $Q + 2\,q + p\,L = \kappa$

$$M = Q\,\rho + m\left(\kappa e + \frac{p\,L^2\,e^2}{8\,\pi\,\rho^2} - 4\,p\,\pi\,\rho^2 - 2\,p\,\pi\,e^2\,m^2\right) \ldots\ldots (3)$$

Cette équation fait connaître la différence des moments des deux tonnes et de leurs cables après m révolutions faites par l'arbre des bobines depuis la rencontre des tonnes.

Quant à la valeur de M pour des positions des tonnes entre les points de départ du fond et de la surface et le point où elles se rencontrent, il suffit pour la déterminer, de supposer que la tonne pleine redescend à partir du point de rencontre au lieu de monter, et que la tonne vide remonte. Désignant toujours par m le nombre de révolutions de l'arbre, compté à partir du point de rencontre des tonnes, on trouve sans difficulté :

$$M = Q\,\rho - m\left(\kappa e + \frac{p\,L^2\,e^2}{8\,\pi\,\rho^2} - 4\,p\,\pi\,\rho^2 - 2\,p\,\pi\,\rho^2\,m^2\right) \ldots (4).$$

Les termes qui suivent $Q\,\rho$, dans les deux équations (3 et 4), ne diffèrent que par le signe; et si l'on fait passer le terme $Q\rho$ dans le premier nombre, ces deux équations peuvent être fondues en une seule, savoir :

$$M - Q\,\rho = m\left(\kappa e + \frac{p\,L^2\,e^2}{8\,\pi\,\rho^2} - 4\,p\,\pi\,\rho^2 - 2\,p\,\pi\,e^2\,m^2\right) \ldots\ldots\ldots (5)$$

Dans laquelle on donnera à m le signe $+$, lorsque m désigne une nombre de tours *effectués* depuis la rencontre des tonnes, et le signe$-$, lorsque m désigne un nombre de tours *à effectuer* pour qu'il y ait rencontre.

Discussion de l'équation ci-dessus.

L'équation fait voir que la différence $(M - Q\rho)$ a deux valeurs égales et de signe contraire pour deux positions correspondantes à des nombres de tours égaux faits par l'arbre des bobines depuis la rencontre des tonnes, ou à faire par le même arbre pour amener les tonnes à ce point de rencontre.

Si d'après l'équation (5) on suppose construite la portion de courbe ayant pour abscisses toutes les valeurs de m comprises entre $m = 0$ et $m = n$, et pour ordonnées les valeurs correspondantes de $(M - Q\rho)$, on voit, en égalant successivement à zéro les deux facteurs du second membre, que l'ordonnée devient nulle : 1° pour $m = 0$, et 2° pour deux autres valeurs de m égales et de signe contraire, valeurs que nous représenterons par m_0, et qui sont fournies par l'équation :

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{Ke + \frac{pL^2e^2}{8\pi\rho^2} - 4p\pi\rho^2}{2p\pi e^2}} \quad . \; . \; . \; (6)$$

C'est-à-dire que la courbe coupe l'axe des abscisses à l'origine et en deux autres points également éloignés de l'origine.

Toutefois pour que les deux valeurs de m_0 ne soient pas imaginaires, il faut que le rayon ρ satisfasse à l'inégalité.

$$4p\pi\rho^2 < Ke + \frac{pL^2e^2}{8\pi\rho^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Si l'on introduit la valeur de m_0 dans l'équation (5), celle-ci prend la forme plus simple :

$$M - Q\rho = m(m_0^2 - m^2)\, 2p\pi e^2 . \; . \; . \; . \; (8)$$

Qui montre, comme cela doit être, que l'ordonnée devient nulle pour $m = 0$ et pour $m = \pm m_0$; et dans laquelle il faut donner à m le signe $-$ avant la rencontre des tonnes et le signe $+$ après leur rencontre.

m_0 étant exclusivement fonction de ρ, on voit que ρ est le seul paramètre variable de la courbe du troisième degré représentée par cette équation.

Remarquons aussi que le nombre n est uniquement fonction de ρ, de sorte que les trois quantités ρ, m_0 et n sont constantes ensemble et variables ensemble.

Il convient de disposer du paramètre ρ de manière que la courbe s'écarte le moins possible de l'axe des abscisses. Or, la courbe s'écartera le moins possible de l'axe des abscisses, lorsque les ordonnées extrêmes et les ordonnées maxima sont à la fois le plus petites possible, abstraction faite de leurs signes.

Pour chaque valeur de ρ ou de m_0, il y a des ordonnées extrêmes et des ordonnées

maxima. Nous allons chercher ces deux espèces d'ordonnées dans l'hypothèse de ρ et m_0 constants, ensuite nous ferons varier ρ et par suite m_0 de manière que ces deux espèces d'ordonnées deviennent à la fois les plus petites possibles.

Ordonnée extrême en fonction de m_0.

L'équation (8) donne l'ordonnée extrême en y faisant $m = n$ d'où :

Ordonnée extrême. . . . $(M - Q\rho) = n\,(m_0^2 - n^2)\, 2p\pi e^2$ . . . . (9),

puisque n peut prendre deux signes, il y a deux ordonnées extrêmes égales et de signes contraires. Dans l'hypothèse de $n > m_0$, l'ordonnée extrême est positive avant la rencontre des tonnes, (c'est-à-dire pour n négatif) et négitive après la rencontre des tonnes, (c'est-à-dire pour n positif).

Ordonnée maxima en fonction de m_0.

En différentiant par rapport à m l'équation (8) et égalant à zéro le coëfficient différentiel, il vient :

$$3m^2 - m_0^2 = 0.$$

Comme la valeur de m tirée de cette égalité correspond au maximum de l'ordonnée, nous la représenterons par m_μ et nous aurons :

$$m_\mu = \frac{1}{\sqrt{3}} m_0.$$

Cette valeur de m substituée dans (8) donne pour le maximum de l'ordonnée :

Ordonnée maxima . . . $(M - Q\rho) = \frac{2}{3\sqrt{3}} m_0^3\, 2p\pi e^2$ . . (10)

Puisque m_0 a deux valeurs égales et de signes contraires, il y a donc deux ordonnées maxima égales et de signes contraires. L'ordonnée maxima est négative avant la rencontre des tonnes et positive après cette rencontre.

Comparaison de l'ordonnée extrême à l'ordonnée maxima, abstraction faite de leurs signes.

Remarquons d'abord que l'hypothèse de $m_0 = 0$ ne rend ni nulle ni imaginaire la valeur de ρ dans l'équation (6), et par suite ne rend ni nulle ni imaginaire la valeur de n dans l'équation (1). Il en est de même de l'hypothèse de $m_0 = n$. Cela posé,

L'équation (9) fait voir que l'ordonnée extrême décroît depuis $m_0 = 0$ jusque $m_0 = n$.

L'équation (10) fait voir au contraire que l'ordonnée maxima croît depuis $m_0 = 0$ jusque $m_0 = n$.

Cette relation entre l'ordonnée extrême et l'ordonnée maxima conduit à conclure que la valeur de m_0, qui rend ces ordonnées égales, est aussi celle pour laquelle ces ordonnées deviennent à la fois les plus petites ; car toute autre valeur de m_0, qui ferait diminuer par exemple l'ordonnée extrême, ferait au contraire croître l'ordonnée maxima.

La valeur de m_0 pour laquelle il y a égalité entre l'ordonnée extrême et l'ordonnée maxima est évidemment comprise entre 0 et n, par suite m_0 est plus petit que n. Cela posé, en égalant l'ordonnée extrême à l'ordonnée maxima, on a :

$$n\,(n^2 - m_0^2) = \frac{2}{3\sqrt{3}}\,m_0^3 \; . \; . \; . \; (11)$$

Cette équation devant être satisfaite par une valeur de m_0 plus petite que n, nous ferons :

$$m_0 = \frac{n}{x} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

où nous considérerons x comme étant plus grand que l'unité. Restera à voir si une telle valeur de x existe réellement. Or, si dans l'équation (11) on remplace m_0 par $\frac{n}{x}$, il vient après réduction :

$$x^3 - x = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Cette équation n'a qu'une seule racine réelle supérieure à l'unité et égale à :

$$\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Cette valeur de x substituée dans l'équation (12), après y avoir remplacé n par sa valeur $\frac{L}{4\pi\rho}$, donne pour la valeur de m_0 ;

$$m_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{L}{4\pi\rho} \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Telle est donc la valeur de m_0 pour que la courbe en question s'écarte le moins possible de l'axe des abscisses.

En remplaçant, dans l'équation (6), m_0 par cette valeur, on aura, entre le rayon ρ et les constantes de la question, la relation :

$$\frac{3}{32}\cdot\frac{L^2 p\, e^2}{\pi\, \rho^3} = \kappa e + \frac{p\, L^2 e^2}{8\,\pi\,\rho^2} - 4 p \pi \rho^2$$

qui satisfait à l'inégalité (7) et de laquelle on tire pour la valeur de ρ : en remettant à la place de K sa valeur $Q + 2q + pL$,

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e}{2\pi}}\sqrt{\frac{Q + 2q + pL}{p} + \sqrt{\frac{(Q + 2q + pL)^2}{p^2}}} \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

On remarquera que $\frac{Q + 2q + pL}{p}$, représente la longueur d'une corde dont le poids serait $Q + 2q + pL$.

Connaissant ρ, l'équation (1) donne pour la valeur de n :

$$n = \frac{L}{4\pi\rho} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (B)$$

dont le double est le nombre de révolutions nécessaire pour amener une tonne depuis le fond jusqu'au jour.

En représentant par r le rayon du noyau des bobines ou le bras de levier de la tonne arrivée au fond, et par R le rayon ou bras de levier de la tonne arrivée à l'orifice du puits, on a :

$$r = \rho - n e \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (C)$$

$$R = \rho + n e \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (D)$$

Des nombre m_0, m_μ et M en fonction de n.

La valeur ci-dessus de n étant substituée dans (13), on a pour m_0 en fonction de n :

$$m_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (F)$$

Cette valeur de m_0 étant substituée dans l'équation qui donne la valeur de m_μ, il vient pour cette dernière :

$$m_\mu = \frac{1}{2}\,n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (G)$$

La même valeur de m_0 substituée dans l'équation (8) donne pour la différence M des moments :

$$M = Q\rho + m\left(\frac{3}{4}n^2 - m^3\right)2\,p\,\pi\,e^2 \ldots . \; (H)$$

où m pris avec le signe — exprime un nombre de tours à effectuer pour que les tonnes se rencontrent, et m pris avec le signe + exprime un nombre de tours effectués depuis la rencontre des tonnes.

Faisons remarquer qu'à m tours, à effectuer pour que les tonnes se rencontrent, correspondent $n - m$ tours effectués depuis le départ de la tonne pleine du fond du puits, et qu'à m tours effectués depuis la rencontre des tonnes correspondent $n + m$ tours effectués depuis le départ de la même tonne.

Cela posé, si dans l'équation (H) on fait m successivement égal à $-n$, $-m_0$, $-m_\mu$, 0 ; puis, à $+m_\mu$ $+m_0$, $+n$, ou aura le tableau suivant :

Nombre de tours à effectuer pour que les tonnes se rencontrent.	Nombre de tours effectués depuis le départ de la tonne pleine du fond du puits.	Différences des moments.
$m = -n$	$n - n$ ou, 0.	$M = Q\rho + \frac{1}{2} n^3 p \pi e^2$.
$m = -m_0$.	$n - m_0$ ou, $n\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$M = Q\rho$.
$m = -m_\mu$.	$n - m_\mu$ ou, $\frac{n}{2}$.	$M = Q\rho - \frac{1}{2} n^3 p \pi e^2$.
$m = 0$ (rencontre des tonnes).	$n - 0$ ou, n.	$M = Q\rho$.
Nombre de tours effectués depuis la rencontre des tonnes.		
$m = +m_\mu$.	$n + m_\mu$ ou, $\frac{3}{2} n$	$M = \rho + \frac{1}{2} n^3 p \pi e^2$.
$m = +m_0$.	$n + m_0$ ou, $n\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$M = Q\rho$.
$m = +n$.	$n + n$ ou, $2n$.	$M = L\rho - \frac{1}{2} n^3 p \pi e^2$.

Remarque. La différence des moments est plus grande au départ des tonnes qu'à leur arrivée ; ce qui est avantageux en ce qu'au départ on a fait provision de vapeur et qu'à l'arrivée des tonnes on peut être obligé, pour certaines manœuvres, de lever la tonne pleine à une certaine hauteur au-dessus de l'orifice du puits, tandis que la tonne vide aura atteint le fond.

Application. $L = 400^m$; $Q = 1000^k$; $q = 200^k$; $p = 6^k$; $e = 0^m,03$. On trouvera d'après (A) : $\rho = 1^m,26$ et ensuite $n = 25^t25$; $m_0 = 21^t,8663$ $m_\mu = 12^t,625$; $\frac{1}{2} n^3 \pi e^2 = 136,547$; $Q\rho = 1260$, d'où :

Au départ, ou après $(n-n)$ tours effectués depuis le départ de la tonne du fond. . . . . $M = 1396,547$

Après $(n - m_0)$ ou $n\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ou 3,3835 tours effectués id. $M = 1260,000$

Après $(n - m_\mu)$ ou $\frac{n}{2}$ ou 12,625 tours effectués, id. . . . . $M = 1123,453$

Après n ou 25,25 tours effectués, id. . . . . $M = 1260,000$

Après $(n + m_\mu)$ ou $n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ou 37,875 tours effectués, id. . $M = 1396,547$

Après $(n + m_0)$ ou $n\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ou 47,1165 tours effectués, id. $M = 1260,000$

Après $2n$ ou 50,50 tours effectués, id. . . . . $M = 1123,453$

Rayon du noyau des bobines, la corde étant composée de plusieurs portions d'épaisseurs différentes.

224. Dans le cas où un cable est composé de trois longueurs l_1, l_2, l_3 dont les épaisseurs sont respectivement e_1, e_2, e_3 et les poids par mètre courant p_1, p_2, p_3 ; pour calculer le rayon ρ, on supposera un cable de la longueur $L = l_1 + l_2 + l_3$ ayant une épaisseur moyenne uniforme e et un poids moyen uniforme p. Dès lors les valeurs de p et de e seront données par les équations :

$$p = \frac{l_1 p_1 + l_2 p_2 + l_3 p_3}{L} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$e = \frac{l_1 e_1 + l_2 e_2 + l_3 e_3}{L} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Valeurs que l'on substituera dans l'équation (A) (page 115) pour avoir la valeur de ρ.

Application. — *Corde neuve en aloës de la houillère La Haye.*

1° Corde blanche. . . . . $l_1 = 225^m$; $e_1 = 0^m,036$; $p_1 = 6^k$; largeur $= 0^m,175$
—Après 4 mois, e_1 n'est plus que $0^m,033$.

2° Corde goudronnée. . . $l_2 = 175^m$; $e_2 = 0^m,034$; $p_2 = 5^k,80$; largeur $= 0^m,160$
— Après 4 mois e_2 n'est plus que $0^m,0315$.

3° Corde goudronnée. . . $l_3 = 70^m$; $e_3 = 0^m,031$; $p_3 = 4^k,6$; largeur $= 0^m,145$
— Après 4 mois e_3 n'est plus que $0^m,0295$.

En mettant ces valeurs dans les deux équations ci-dessus, on trouve $p = 5^k,6053021$;

$e = 0^m,0345106$ avant l'aplatissement de la corde ; et $e = 0^m,0319$ après l'aplatissement.

Les autres données sont : $Q = 1300^k$; $2q = 3400^k$; $p\,L = 2634^k,50$

La formule A (page 115) donne :

$$\rho = 1^m,91102 \text{ avant l'aplatissement}$$

et

$$\rho = 1^m,836964 \text{ après} \quad \text{»}$$

Remarque. Les équations (1 et 2), qui ont servi à calculer les valeurs de p et de e, ne tiennent pas compte de l'alongement que la corde avait subi après 4 mois, ni de la diminution que le poids par mètre courant avait éprouvée pendant ce même temps.

Pour avoir égard à ces deux circonstances, il faut remarquer que la longueur de la 3me corde qui porte la charge utile doit être diminuée de la somme des alongements subis par les deux premières cordes, et que le poids total de chacune de celles-ci ne peut pas varier.

Cela posé, si l'on conserve les mêmes lettres, mais accentuées, pour représenter les valeurs des mêmes quantités après 4 mois, on aura pour le poids moyen par mètre courant et pour l'épaisseur moyenne après 4 mois.

$$p' = \frac{p'_1\,l'_1 + p'_2\,l'_2 + p'_3\,(L - l'_1 - l'_2)}{L} = \frac{p_1\,l_1 + p_2\,l_2 + p'_3\,(L - l'_1 - l'_2)}{L}$$

et

$$e' = \frac{l'_1\,e'_1 + l'_2\,e'_2 + (L - l'_1 - l'_2)\,e'_3}{L}.$$

Application. Calculer ρ pour les données suivantes : $l_1 = 192^m$; $p_1 = 5^k,65$; $l_2 = 250^m$; $p_2 = 4^k,40$; d'où $L = 442^m$; épaisseur uniforme $e = 0^m,03$; $q = 720^k$; $Q = 744^k$. L'équation (1) p. 113 donne $p = 5^k,18$ et l'équation (A) p. 115 donnera ρ.

Calcul du rayon du noyau des bobines en ayant égard aux résistances passives.

225. Après avoir calculé d'après la formule A (page 115) le rayon ρ, abstraction faite des résistances passives, on cherchera de quelle quantité, à la rencontre des tonnes, la différence des moments théoriques qui est $Q\rho$ doit être augmentée pour tenir compte du frottement des tourillons des molettes et des bobines ainsi que de la raideur de la corde, et l'on considérera cette quantité comme constante pendant tout le parcours des tonnes.

Pour calculer, à la rencontre des tonnes, la différence des moments, en ayant égard aux résistances passives mentionnées, il faut :

1° Chercher, en ayant égard au frottement des tourillons des molettes et à la raideur de la corde, quelles sont, entre les bobines et les molettes, les tensions T_1 et T_2 des deux cables.

Dans cette recherche, il faut faire attention que la tension T_1 considérée comme puissance, doit être en équilibre (autour de l'axe des molettes), avec la tonne pleine et son cable considérés comme résistances ; et, que la tonne vide et son cable considérés comme puissance, doivent faire équilibre à la tension T_2 considérée comme résistance.

2° Chercher la différence des moments des deux tensions T_1 et T_2 par rapport à l'axe des bobines en ayant égard au frottement des tourillons des bobines et à la raideur de la corde.

Faute à corriger. La formule (A) de la page 111 doit être écrite comme suit :

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e}{2\pi}}\sqrt{\frac{Q + 2q + p\,L}{p} + \sqrt{\frac{(Q + 2q + p\,L)^2}{p^2} + \frac{L^3}{2}}} \;.\;.\; (A)$$

Section d'égale résistance d'une corde.

226. Une corde est composée de trois portions ayant respectivement pour longueurs l_1, l_2, l_3, pour sections transversales s_1, s_2, s_3. Pour que la section supérieure de chaque portion supporte par unité de surface la même résistance, il faut que les trois sections soient calculées comme il suit :

Q étant le poids suspendu à l'extrémité de la corde ; R la résistance que l'on veut faire supporter à la corde par unité de section ; Δ le poids spécifique de la corde (poids du mètre cube, si les autres dimensions sont exprimées en mètres), on aura pour calculer la section S_1 de la première portion, à l'extrémité de laquelle le poids Q est suspendu :

$$S_1\,l_1\,\Delta + Q = R\,S_1, \text{ d'où. . . } S_1 = \frac{Q}{R - \Delta\,l_1}.$$

S_1 étant connu, on a, pour calculer la section S_2 :

$$S_2\,l_2\,\Delta + R\,S_1 = R\,S_2, \text{ d'où. . . } S_2 = \frac{R\,S_1}{R - \Delta\,l_2}$$

S_2 étant connu, on a, pour calculer S_3 :

$$S_3\,l_3\,\Delta + R\,S_2 = R\,S_3, \text{ d'où. . . } S_3 = \frac{R\,S_2}{R - \Delta l_3}$$

Aux cordes en aloës on fait supporter 80 kil. par centimètre carré.

Treuil régulateur à une seule corde.

227. On demande qu'après chaque révolution du treuil, le moment de la résistance soit égal au moment M de la puissance agissant à l'extrémité d'une manivelle.

Soient : q le poids de la tonne vide ; Q, charge utile ; l, longueur de la corde ; p, poids d'une longueur d'un mètre de la corde ; $r_1, r_2, \ldots r_n$, rayons ou bras de levier de la résistance au commencement du 1er, 2ième..... nième tour, on a :

Au commencement

du premier tour : $M = r_1 (Q + q + pl)$ . . . . d'où l'on tire r_1.

du 2ième tour : $M = r_2 (Q + q + pl - 2\pi p r_1)$ 〃 〃 r_2.

$M = r_3 [Q + q + pl - 2\pi p (r_1 + r_2)]$ 〃 〃 r_3.

. . . .

du nième tour : $M = r_n [Q + q + pl - 2\pi p (r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1})]$ 〃 r_n.

De ces équations, on déduira successivement les valeurs de $r_1, r_2, \ldots r_n$, en remarquant qu'on est à la dernière équation lorsque la somme $2\pi (r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}) = l$.

Sur une droite divisée en parties égales à l'épaisseur de la corde, on élèvera par les points de division successifs des perpendiculaires respectivement égales aux rayons de $r_1, r_2, \ldots r_n$, diminués de la demi-épaisseur de la corde. La ligne qui raccorde les extrémités de ces perpendiculaires est le méridien de la surface de révolution qui doit terminer le treuil.

Problème. On demande la solution de la même question en ayant égard au frottement des tourillons et à la raideur de la corde.

Régulateur à force centrifuge.

228. L'objet des régulateurs est d'augmenter ou de diminuer momentanément le travail de la force motrice dans les instants où la vitesse de la machine diminue ou augmente.

Le régulateur à force centrifuge se compose ordinairement d'un lozange à charnières. Un premier sommet A du lozange est fixé à un arbre vertical mis en mouvement par une pièce de rotation de la machine. Le sommet inférieur opposé au premier est armé d'un manchon à gorge qui embrasse l'arbre vertical et peut glisser à frottement doux le long de cet arbre. La gorge du manchon reçoit la fourche qui termine l'extrémité d'un levier dont l'autre extrémité commande une vanne, un robinet, etc., qui servent à régler l'emploi de la force motrice. Les deux côtés ou verges du lozange qui passent par le

sommet fixe A portent sur leur prolongement des boules en métal. L'effet de la force centrifuge des boules est de soulever plus ou moins le manchon, et par suite de faire varier l'ouverture de la vanne qui laisse affluer le fluide moteur.

H *Hauteur des boules*, h *hauteur du manchon, quand le régulateur marche à la vitesse angulaire de régime* ω *et que le manchon n'a aucune résistance à vaincre.*

Pour cette hauteur des boules, la vanne ou robinet qui laisse affluer le fluide moteur doit être moitié ouverte, moitié fermée.

Pour déterminer cette position, il faut exprimer qu'il y a équilibre entre le poids P de chaque boule et la force centrifuge F qui sollicitent cette boule. Cet équilibre exige que le moment de F par rapport au sommet A soit égal au moment de P par rapport au même sommet.

α, étant l'angle que le côté a du lozange fait avec la verticale, la distance du centre des boules à la diagonale verticale est $H\,tg\,\alpha$; c'est le rayon de la circonférence décrite par le centre de chaque boule.

m étant la masse de chaque boule, la force centrifuge F, qui agit sur m, est $F = m\,\omega^2 H\,tg\,\alpha$ et son bras de levier, par rapport au sommet A, est H. Le bras de levier du poids de chaque boule, par rapport au même sommet A, est $H\,tg\,\alpha$. L'égalité des moments des force, F et P par rapport au sommet A, donne en écrivant $\frac{P}{g}$ à la place de m.

$$\frac{P}{g}\,\omega^2 H^2\,tg\,\alpha = P H\,tg\,\alpha\,; \quad \text{d'où } H = \frac{g}{\omega^2}. \ldots\ldots (1)$$

Remarque. Dans chaque position du lozange, la hauteur du manchon est égale au double de la projection d'un côté du lozange sur la diagonale verticale ; et la hauteur H des boules est égale à la projection de la distance du centre de chaque boule au sommet A, sur la même verticale, désignant par b cette distance, on a :

$$h = 2a\cos\alpha. \ldots (2)\,; \quad \text{et } H = b\cos\alpha. \ldots\ldots (3)$$

Des équations (1, 2, 3), on déduit :

$$\cos\alpha = \frac{g}{b\,\omega^2}. \ldots (4)\,; \quad \text{et } h = \frac{2ag}{b\,\omega^2} \ldots\ldots (5)$$

Nouvelle vitesse angulaire ω' *plus grande que* ω, *pour laquelle la nouvelle force centrifuge* F' *est en équilibre avec le poids* P *des boules et la résistance* p *du manchon et pour laquelle les boules se tiennent toujours à la hauteur* H, *mais sont sur le point de monter. Poids nécessaire aux boules pour cet équilibre.*

On fera voir par une décomposition de la résistance p du manchon que l'effet de cette résistance est d'augmenter la force verticale P qui agit au centre de chaque boule d'une quantité égale à $p\frac{a}{b}$. Cela posé, pour que la nouvelle force centrifuge $F' = m\omega'^2 H\, tg\,\alpha$, dont le bras de levier est H par rapport au sommet A, soit en équilibre avec la force verticale $\left(P + p\frac{a}{b}\right)$ dont le bras de levier est $H\, tg\,\alpha$, il faut que les moments de ces deux forces par rapport au sommet A soient égaux ; ce qui donne, en mettant à la place de H sa valeur (1) et à la place de m sa valeur $\frac{P}{g}$.

$$P\frac{\omega'^2}{\omega^2} = \left(P + p\frac{a}{b}\right). \; . \; . \; . \; (6)$$

Si l'on veut que cet équilibre s'établisse lorsque $\omega' = \omega + n\omega$, n étant une quantité que l'on prendra d'autant plus petite que l'on veut rendre le régulateur plus sensible, l'équation précédente deviendra :

$$P\,(n+1)^2 = P + p\frac{a}{b},$$

d'où l'on déduit en négligeant le carré de n :

$$P = \frac{1}{2n}\frac{a}{b}\,p \; . \; . \; . \; (7)$$

Si l'on prend $n = 0{,}02$, la formule donne $P = 25\,\frac{a}{b}\,p$, et comme dans le dispositif, représenté par le lozange, b ne peut pas dépasser sensiblement une fois et demie a, sans qu'on ait à craindre que les boules ne viennent rencontrer le levier qui par son extrémité enfourche le manchon, on aura, en faisant $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, $P = 16{,}67$ fois p.

Hauteur des boules, hauteur du manchon, course du manchon, angle des côtés du lozange avec la diagonale verticale, pour une nouvelle vitesse angulaire ω'' plus grande que ω'

A partir de sa position moyenne, les plus grandes courses du manchon en montant et descendant sont limitées par la fermeture complète et l'ouverture complète de la vanne ou robinet qui règle l'admission du fluide moteur. Soit h' la hauteur du manchon à l'instant où l'ouverture de la vanne est entièrement fermée. A cet instant la force centrifuge F'' qui correspond à la vitesse angulaire ω'' devra faire équilibre à la force $\left(P + p\frac{a}{b}\right)$. En désignant par α' l'angle que le côté du lozange fait avec la diagonale verticale, par H' la hauteur des boules, il faut pour l'équilibre que le moment de F'', dont le bras de levier est H' par rapport au sommet A, soit égal au moment de $\left(P + p\frac{a}{b}\right)$ dont le bras du levier est $H'\, tg\,\alpha'$ par rapport au même sommet. Cette égalité donne :

$$\frac{P}{g}\,\omega''^2 H' = P + p\frac{a}{b}\; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Or, d'après la remarque faite plus haut, on a :

$H' = b\cos\alpha'$,... (9) et $h' = 2a\cos\alpha'$,... (10) d'où $H' = \frac{b}{2a}\,h'$, et l'équation (8) devient :

$$\frac{P}{g}\,\omega''^2\frac{b}{2a}\,h' = P + p\frac{a}{b}\; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Egalant les premiers membres des équations (6 et 11), il vient :

$$\omega''^2\frac{bh'}{2ag} = \frac{\omega'^2}{\omega^2}\,;\ \text{d'où}\ h' = \frac{2ag}{b\omega^2}\frac{\omega'^2}{\omega''^2}\ ..(12);\quad \text{et}\ \cos\alpha' = \frac{h'}{2a} = \frac{g}{b\omega^2}\frac{\omega'^2}{\omega''^2}\ .... \ (13)$$

Et puisque d'après l'équation (5), $h = \frac{2ag}{b\omega^2}$, il vient pour la course ascendante $(h - h')$ du manchon, laquelle correspond à la fermeture complète de la vanne :

$$h - h' = \frac{2ag}{b\omega^2}\left(1 - \frac{\omega'^2}{\omega''^2}\right). \; . \; . \; (14)$$

Or, $\omega' = (1+n)\,\omega$ et si l'on pose $\omega'' = (1+n')\,\omega$, les deux équations précédentes deviennent en négligeant les carrés de n et n' :

$$h - h' = \frac{4ag}{b\omega^2}\frac{n'-n}{1+2n'}\ ..\ (15)\,;\quad \text{et}\ \cos\alpha' = \frac{g}{b\omega^2}\frac{1+2n}{1+2n'} .... \ (16)$$

Deuxième cas : la vitesse angulaire de régime ω, au lieu d'augmenter, diminue.

Dans ce cas, c'est le poids des boules qui doit faire équilibre à l'action de la force centrifuge et à la résistance p du manchon. Les équations précédentes restent donc les mêmes au signe près de p.

Ainsi la condition, pour qu'avec la nouvelle vitesse angulaire $\omega_1' = (1-n)\omega$ les boules restent toujours à la hauteur H, mais soient sur le point de descendre, sera donnée par la formule (6) en y changeant le signe de p et en remplaçant ω' par ω'_1, ce qui donne :

$$P\,\frac{\omega_1'^2}{\omega^2} = P - p\frac{a}{b}\; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

De même pour une nouvelle vitesse ω_1'' plus petite que ω_1', les boules descendront jusqu'à ce que la force centrifuge, correspondant à la vitesse angulaire ω'', fasse équilibre à la force verticale $\left(P - p\frac{a}{b}\right)$. Si H'', h'' sont alors les hauteurs des boules et du manchon, cet équilibre sera donné par l'équation (8) en y remplaçant α'' par ω_1'' et la hauteur H' par H''; ce qui donne :

$$\frac{P}{g}\,\omega_1''^2\,H'' = P - p\,\frac{a}{b}\ldots (18)$$

On a d'ailleurs, entre H'', h'' et l'angle α'' que les côtés du lozange font la diagonale verticale, les relations :

$$h'' = 2\,a\cos\alpha''; \quad H'' = b\cos\alpha''; \quad \text{d'où } H'' = \frac{b}{2a}\,h''.$$

Substituant cette valeur de H'' dans (18), les équations (18 et 17) donnent en égalant leurs premiers membres :

$$h'' = \frac{2\,ag}{b\,\omega^2}\,\frac{\omega_1'^2}{\omega_1''^2}\ldots\ldots(19); \quad \text{d'où } \cos\alpha'' = \frac{h''}{a2} = \frac{g}{b\,\omega^2}\,\frac{\omega_1'^2}{\omega_1''^2}\ldots (20)$$

Des équations (5 et 19), on déduit pour la course descendante du manchon, laquelle correspond à l'ouverture complète de la vanne :

$$h'' - h = \frac{2\,ag}{b\,\omega^2}\left(\frac{\omega_1'}{\omega_1''^2} - 1\right) = \frac{2\,ag}{b\,\omega^2}\,\frac{(\omega_1'^2 - \omega_1''^2)}{\omega_1''^2}\ldots\ldots (21)$$

On a $\omega_1' = (1 - n)\,\omega$; et si l'on pose $\omega_1'' = (1 - n'')\,\omega$, il vient :

$$h'' - h = \frac{4\,ag}{b\,\omega^2}\,\frac{n'' - n}{1 - 2\,n''}\ldots (21); \text{ et } \cos\alpha'' = \frac{g}{b\,\omega^2}\,\frac{1 - 2n}{1 - 2n''}\ldots (22)$$

Si l'on voulait que les courses $(h - h')$ et $(h'' - h)$ du manchon fussent égales, on aurait

$$\frac{n' - n}{1 + 2n'} = \frac{n'' - n}{1 - 2n''}.$$

Mais il n'est pas nécessaire que les quantités n, n', n'' satisfassent à cette égalité, n' et n'' peuvent différer tant soit peu.

En se donnant 1° ω, ω', ω'', ou bien n, n', n''; 2° a et b; 3° p; on déduira des équations précédentes P, h, h', h'', $(h - h')$, $(h'' - h)$, $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$, $\cos\alpha''$. Il est à remarquer que n' ne doit pas dépasser 0,03; que l'angle α'' ne doit pas être moindre que 20°, pour que les boules, dans leur position la plus basse, ne viennent pas toucher le levier qui lie le manchon à la vanne motrice. Les boules ne doivent pas non plus venir toucher les verges inférieures du lozange.

Si dans tous les résultats qui précèdent, on remplace $\frac{g}{\omega^2}$ par H, il vient :

$$H = \frac{g}{\omega^2}; \qquad H' = H\,\frac{1 + 2n}{1 + 2n'}; \qquad H'' = H\,\frac{1 - 2n}{1 - 2n''};$$

$$h = 2\,\frac{a}{b}\,H; \qquad h' = 2\,\frac{a}{b}\,H\,\frac{1 - 2n}{1 - 2n''}; \qquad h'' = 2\,\frac{a}{b}\,H\,\frac{1 - 2n}{1 - 2n''}$$

$$h - h' = 4\,\frac{a}{b}\,H\,\frac{n' - n}{n + 2n'}; \qquad h'' - h = 4\,\frac{a}{b}\,H\,\frac{n'' - n}{n - 2n'}$$

$$\cos\alpha = \frac{H}{b}; \qquad \cos\alpha' = \frac{H}{b}\,\frac{1 + 2n}{1 + 2n'}; \qquad \cos\alpha'' = \frac{H}{b}\,\frac{1 - 2n}{1 - 2n''}; \qquad P = \frac{1}{2n}\,\frac{a}{b}\,p.$$

Nous ferons remarquer que $\omega^2 = g$ correspond à peu près à 30 tours du régulateur par minute.

Les principes qui précèdent mettent en état de comprendre les autres dispositifs étudiés par M. Poncelet.

CALCUL DE L'EFFET UTILE DES MACHINES

LE PLUS FRÉQUEMMENT EMPLOYÉES DANS L'INDUSTRIE.

(VITESSE DU RÉCEPTEUR POUR LE MAXIMUM DU TRAVAIL UTILE).

Complication de la question de l'établissement des machines.

229. «Le but qu'on se propose en établissant dans l'industrie une machine quelconque, c'est de confectionner une certaine quantité d'ouvrage *au moindre prix possible, à qualité égale d'ailleurs des produits.* On voit d'après cela que la condition de l'établissement des machines se complique d'un grand nombre d'éléments différents, tels que la valeur des produits confectionnés, la mise de fonds nécessaires pour la construction de la machine et de ses accessoires, tels que bâtiments, magasins, employés, etc., la durée de la machine, son entretien journalier, le prix du travail moteur, etc. Un industriel habile met en balance tous ces éléments, et de plus, il doit avoir égard aux chomages, aux pertes de temps inévitables, dont le plus grave inconvénient n'est pas seulement de rendre les capitaux improductifs pendant une portion plus ou moins grande de l'année, mais de compromettre l'existence de l'établissement par une suspension absolue de travail. Cette dernière considération fait qu'on renonce souvent à la machine la moins coûteuse dont l'action est intermittente, pour en choisir une qui marche régulièrement pendant toute l'année. Enfin le prix de transport des produits, la facilité des débouchés, des communications, ajoutent encore à la complication de la question dans l'établisse-

ment. Or, de semblables questions sont particulièrement du domaine de la science que l'on nomme *Economie industrielle*, et ne peuvent pas faire l'objet d'un cours tel que le nôtre. Il nous suffira d'examiner la partie de la question qui concerne l'économie du travail moteur, abstraction faite du prix en argent que coûte la machine. »

« Notre but à nous est de déterminer la disposition la plus convenable de toutes les parties, de façon que l'ouvrage ou le travail utile soit le plus grand possible pour une quantité donnée de travail dépensé par le moteur. Quoique le prix du travail ne soit pas la seule chose qui constitue le prix de l'ouvrage, il en est cependant le principal élément; et en le comparant à ce que coûtent les frais de premier établissement d'une machine et de ses accessoires, on trouve que ces frais ne sont qu'une fraction bien faible du prix du travail. »

« Une autre raison milite en faveur de toute disposition susceptible de rendre le travail utile le plus grand possible ; c'est que la machine devient plus durable et par conséquent plus économique : car on ne remplit la condition du maximum de travail qu'en régularisant les actions des forces, et de cette régularité d'action résultent le minimum de dépense et le maximum de durée de la machine. »

« Voilà pourquoi nous étudierons les moyens de rendre le travail un maximum et d'éviter toutes les causes qui peuvent être contraires à cette condition. » (*Mécanique industrielle de M. Poncelet.* Liége, édition Leroux, 1839. 2^{me} partie, page 279).

Plan automoteur.

230. Deux wagons étant placés sur un même plan incliné, l'un au sommet, l'autre au pied, tous les deux attachés aux extrémités d'une corde qui passe sur une poulie de renvoi placée au sommet du plan : on demande le poids dont il faut charger le wagon qui se trouve au sommet pour qu'il soit en état de remorquer le wagon vide jusqu'au même sommet ; en second lieu le temps que les wagons mettront à parcourir le plan.

On sait, par des expériences faites sur les chemins de fer, qu'il suffit que la pente d'un plan incliné soit de 1/200 environ, pour qu'un convoi descende seul ; et que, lorsque la pente atteint 1/50, un convoi chargé descendant peut faire remonter un même convoi vide.

Tout plan incliné devant être construit pour descendre une certaine charge en un temps donné, ou peut devoir renoncer au plan parce que l'un ou l'autre de ces deux éléments serait trop grand.

NOTATIONS. — 1° P poids d'un wagon vide ; 2° Q poids de la charge utile ; 3° L longueur du plan incliné (la longueur de la corde est un peu plus grande) ; 4° α angle que le plan incliné fait avec le plan horizontal ; 5° Δ poids du mètre courant de la

corde ; 6° λ distance entre deux rouleaux consécutifs ; 7° $\frac{L}{\lambda}$ nombre de rouleaux de chaque plan incliné ; 8° q poids de chaque rouleau ; 9° S surface en mètres carrés que chaque wagon oppose à la résistance de l'air ; 10° v_0 vitesse moyenne des deux wagons, vitesse que l'on calcule d'après le temps minimum que l'on fixe aux wagons pour parcourir le plan ; 11° $f_0 = \theta\,\varepsilon$ coëfficient de résistance de l'air ; θ est constant et égal à 0,0625, ε est variable avec la longueur du wagon et peut être pris dans le cas actuel égal à 1,17, de sorte que $f_0 = \theta\,\varepsilon = 0{,}073125$; 12° $f_1 = 0{,}00269$ résistance par kilogramme (abstraction faite de la résistance de l'air) qu'oppose au mouvement un wagon placé sur un plan horizontal ; 13° f_2 coëfficient de frottement des tourillons des rouleaux ; 14°, r rayon des rouleaux ; 15°, ρ rayon des tourillons des rouleaux ; 16° m moment d'inertie d'un rouleau ; 17° R rayon de la poulie de renvoi ; 18° ρ' rayon du tourillon de la poulie de renvoi ; 19° f_3 coëfficient de frottement du tourillon de la poulie de renvoi ; 20° m_0 moment d'inertie de la poulie de renvoi ; 21° N poids de la poulie de renvoi et de son arbre.

On suppose que la corde est tendue en ligne droite d'un rouleau au suivant, ce qui est très-admissible pour des cordes en fil de fer.

Tension de la corde ascendante, au point où elle touche la poulie de renvoi, après que les wagons ont parcouru un chemin quelconque x.

On a d'abord, pour la tension T de la corde au point où elle est attachée au wagon vide, en ayant égard à la résistance de l'air qui est $f_0\,S\,v_0^2$:

$$T = P\,(\sin\alpha + f_1\cos\alpha) + f_0\,S\,v_0^2 . \quad . \; . \; . \; (1)$$

Pour la tension T_1 de la corde au point où elle touche la poulie de renvoi, on a, en ayant égard au frottement des tourillons des rouleaux et au poids de la corde :

$$T_1 = T + (L - x)\,\Delta\sin\alpha + f_2\left[(L - x)\,\Delta + \left(\frac{L - x}{\lambda}\right) q\right]\frac{\rho}{r} . \; . \; . \; (2)$$

En mettant à la place de T sa valeur tirée de (1) et posant :

$$P\,(\sin\alpha + f_1\cos\alpha) + f_0\,S\,v_0^2 + L\,\Delta\sin\alpha + f_2\,L\left(\Delta + \frac{q}{\lambda}\right)\frac{\rho}{r} = A. \quad (3)$$

$$\Delta\sin\alpha + f_2\left(\Delta + \frac{q}{\lambda}\right)\frac{\rho}{r} = B. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

L'égalité (2) devient : $\qquad T_1 = A - B\,x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$

Tension T_2 de la corde descendante, au point où elle touche la poulie de renvoi.

La tension T_2 devant faire équilibre à la tension T_1, par rapport à l'axe de la poulie de renvoi, on aura, en ayant égard : 1° au frottement du tourillon qui fait en même temps office de pivot ; 2° à la raideur de la corde que nous exprimerons au moyen de la formule de M. Morin (n° 60), en y remplaçant A et B par α et β :

$$T_2 R = T_1 R + f_3 (T_1 + T_2) \rho' + f_3 N \frac{2}{3} \rho' + \left(\frac{\alpha + \beta T_1}{2 R}\right) R. \ldots . (6)$$

En posant : $\dfrac{R + f_3 \rho' + \frac{\beta}{2}}{R - f_3 \rho'} = C ; \ldots (7) \qquad \dfrac{f_3 N \frac{2}{3} \rho' + \frac{\alpha}{2}}{R - f_3 \rho'} = D \ldots . (8)$

L'égalité (6) devient : $T_2 = C T_1 + D.$

Si dans cette équation on remplace T_1 par sa valeur tirée de (5), on aura :

$$T_2 = A C + D - B C x. \ldots (9)$$

Résultante de toutes les forces qui agissent sur les masses en mouvement.

La force qui sollicite le wagon chargé à descendre est, en ayant égard à la résistance de l'air, au poids de la corde et au frottement des tourillons des rouleaux,

$$(Q + P)(\sin \alpha - f_1 \cos \alpha) + x \Delta \sin \alpha - f_0 S v_0^2 - f_2 \left(x \Delta + \frac{x}{\lambda} q\right) \frac{\rho}{r} - T_2 \ldots (10)$$

En posant : $(Q + P)(\sin \alpha - f_1 \cos \alpha) - f_0 S v_0^2 = F. \ldots (11)$

Et $\Delta \sin \alpha - f_2 \left(\Delta + \frac{q}{\lambda}\right) \frac{\rho}{r} = G. \ldots \ldots (12)$

L'expression (10), qui représente la force qui sollicite le wagon chargé à descendre, deviendra : $F + G x - T_2. \ldots (13)$

Remplaçant dans cette expression T_2, par sa valeur fournie par l'équation (9), on aura pour la résultante de toutes les forces :

$$F - A C - D + (B C + G) x. \ldots (14)$$

Cette résultante a à vaincre : 1° l'inertie des masses $\dfrac{Q + 2 P + L \Delta}{g}$ qui ne peuvent prendre qu'une vitesse commune de translation ; 2° l'inertie des rouleaux et de la poulie de renvoi qui ne peuvent prendre que des vitesses de rotation.

Vitesse des wagons après qu'ils ont parcouru un chemin quelconque x.

V étant la vitesse de translation acquise par la masse M, la vitesse angulaire des rouleaux sera $\frac{V}{r}$ et celle de la poulie de renvoi $\frac{V}{R}$. Cela posé, remarquons que le nombre des rouleaux en mouvement et qui sont touchés par la corde est constant et égal à $\frac{L}{\lambda}$ et que le nombre des rouleaux abandonnés par le wagon vide pour un chemin x parcouru, est égal à $\frac{x}{\lambda}$. En remarquant que la force vive des rouleaux abandonnés par le wagon vide est perdue, et en supposant que cette force vive soit due à la vitesse moyenne v_0, on a : d'après le principe des forces vives :

$$(F - A C - D) x + (B C + G) \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(M + \frac{L}{\lambda} \frac{m}{r^2} + \frac{m_0}{R^2} \right) V^2 + \frac{x}{\lambda} \frac{m_0}{r^2} v_0^2 \right] \ldots (15)$$

Equation de condition pour que les wagons arrivent à la fin de leur course avec une vitesse nulle.

Si on veut que les wagons arrivent au bout de leurs courses, c'est-à-dire pour $x = L$, avec une vitesse nulle, il faudra considérer comme perdue la force vive tant des rouleaux abandonnés par la corde que de ceux sur lesquels la corde s'appuie. Car la force vive de ces derniers rouleaux est imparfaitement transmise à la corde. Il peut même arriver, s'il n'y a qu'une seule voie au delà du milieu du plan incliné, que la vitesse des rouleaux sur lesquels le wagon vide a passé, ne soit pas encore éteinte quand le wagon chargé vient à y passer : dès lors la corde doit détruire cette vitesse et en imprimer une autre en sens contraire.

En égalant le travail de la résultante pour $x = L$ à la moitié de la force vive perdue par tous les rouleaux, tant par ceux sur lesquels la corde a passé que par ceux sur lesquels la corde s'appuie, on aura l'équation :

$$(F - A C - D) L + (B C + G) \frac{L^2}{2} = \frac{L}{\lambda} \frac{m v_0^2}{r^2}. \ldots (16)$$

Qui est divisible par L, et de laquelle on déduira la charge Q capable de satisfaire à la condition que les wagons arrivent à la fin de leur course avec une vitesse nulle.

Equation de condition pour que les wagons arrivent à la fin de leur course avec la vitesse moyenne v_0.

Si au contraire, afin de marcher plus vite, on pose pour condition que les wagons puissent arriver à la fin de leur course avec la vitesse moyenne v_0, que l'on anéantira au moyen d'une poulie de friction placée sur l'arbre de la poulie de renvoi, on aura pour équation de condition :

$$(\mathrm{F}-\mathrm{AC}-\mathrm{D})\mathrm{L}+(\mathrm{BC}+\mathrm{G})\frac{\mathrm{L}^2}{2}=\frac{1}{2}\,v_0^{\,2}\left[\mathrm{M}+\frac{2\mathrm{L}}{\lambda}\,\frac{m}{r^2}+\frac{m_0}{\mathrm{R}^2}\right]\ldots(17)$$

Si la charge Q, que l'on déduit de l'une ou l'autre des équations (16 et 17), n'est pas trop grande, il restera à vérifier si le temps que les wagons mettront à parcourir le plan n'est pas non plus trop grand.

Temps que les wagons mettent à parcourir le plan.

Si, pour simplifier, on néglige dans le second membre de l'équation (15) le terme en x, comme étant très-petit par rapport aux autres termes; ou bien si pour ce terme on fait $x = \mathrm{L}$ et $v_0 = \mathrm{V}$, ce qui revient à supposer que toutes les poulies sont constamment en mouvement et animées à leurs circonférences de la vitesse des wagons, comme cela aurait lieu dans le cas d'une corde sans fin, l'équation (15) pourra, pour le dernier cas, être mise sous la forme, en désignant par t le temps employé à parcourir le chemin x : $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = ax + bx^2$, où a, b sont des constantes. En posant $\mathrm{X} = ax + bx^2$,

le calcul intégral donne $t = \frac{1}{\sqrt{b}} \log \frac{\sqrt{\mathrm{X}}+x\sqrt{b}}{\sqrt{\mathrm{X}}-x\sqrt{b}}$, ou $t = \frac{2}{\sqrt{-b}}$ arctg $\frac{x\sqrt{-b}}{\sqrt{\mathrm{X}}}$, selon que b est positif ou négatif; ces intégrales doivent être prises entre les limites $x = 0$ et $x = \mathrm{L}$.

Condition pour qu'au point de départ le wagon chargé puisse entraîner le wagon vide.

La charge Q et le temps t satisfaisant aux conditions que le plan automoteur doit remplir, il reste encore à vérifier si le wagon chargé placé au sommet du plan est capable d'entraîner le wagon vide.

L'expression (14) de la résultante des forces, aux points de départ des wagons, ou pour $x = 0$, devient $\mathrm{F}-\mathrm{AC}-\mathrm{D}$. . . . . (19)

Si la valeur de cette quantité est nulle ou positive, le mouvement commencera parce qu'au départ la résistance de l'air dont cette expression tient compte est nulle. Dans les deux cas, la résultante croîtra avec le chemin parcouru et la vitesse ira en augmentant jusqu'à la fin de la course.

Si l'expression (19) est négative et que l'équation (16 ou 17) soit satisfaite, le plan est toujours possible; mais pour faire naître le mouvement, il faudra substituer à la droite, qui représente le plan incliné, une ligne brisée de deux côtés d'inclinaison différente, et telle que le wagon chargé étant placé sur le premier côté à partir du sommet et le wagon vide sur le second côté, l'expression (19) devienne ou nulle ou positive,

c'est-à-dire qu'en remplaçant α qui entre dans F par l'inclinaison du premier côté et en remplaçant α qui entre dans A par l'inclinaison du second côté, l'expression (19) devienne ou nulle ou positive. Après cela on raccordera les deux côtés de la ligne brisée par une courbe.

Remarque. Pour ne pas trop compliquer les formules, nous n'avons pas tenu compte de certaines résistances passives auxquelles donnent lieu les voies d'évitement. Ainsi, quoique les rails extérieurs soient élevés d'une quantité suffisante pour détruire l'action de la force centrifuge, il arrive par l'effet du mouvement de lasset, que les rebords des roues frottent contre les rails; et que, à cause du parallélisme invariable des essieux, il y a frottement de glissement des bandages des roues sur les rails extérieurs.

Construction des voies que le wagon chargé et le wagon vide ont à parcourir.

1° On peut faire deux voies distinctes à deux rangées de rails chacune, l'une pour le wagon qui descend, l'autre pour le wagon qui monte.

2° On peut faire les deux voies avec trois rangées de rails, en établissant sur une certaine distance en-deça et au-delà du milieu du plan deux voies d'évitement. Cette distance dépend du rayon que l'on veut donner aux courbes des deux voies d'évitement.

3° On peut faire deux voies avec trois rangées de rails jusqu'au milieu du plan, et, à partir de là, une seule voie, en établissant toujours au milieu du plan deux voies d'évitement comme dans le cas précédent.

Les rouleaux placés sur les deux voies d'évitement ont des rebords afin d'empêcher la corde, qui change de direction à la naissance des vois d'évitement, de quitter ces rouleaux.

Comme l'axe de la poulie de renvoi est vertical, il faut que la corde, qui change de direction après avoir passé sur la poulie, passe sur deux rouleaux placés à la hauteur et tout près de la poulie afin d'empêcher la corde de glisser en bas de la poulie.

Application. La distance horizontale entre le sommet et le pied du plan est de 505^{m}; la différence de niveau $13^{\mathrm{m}},90$. La pente moyenne est de 0,0275. Le poids de la corde par mètre courant est de $0^{\mathrm{k}},48$. La corde est en fils de fer de 2,5 millim. de diamètre, composée de 12 fils avec noyau en chanvre; le diamètre de la corde est de 13 millim. Le poids d'un rouleau est de 16 kil. Le rayon d'un rouleau est de 8 centim. Le rayon du tourillon d'un rouleau est d'un centimètre. Le rayon de la poulie de renvoi est de $0^{\mathrm{m}},79$. Le rayon du tourillon supérieur de cette poulie est de $8^{\mathrm{c}},5$, et celui du tourillon inférieur, de $5^{\mathrm{c}},5$. Le poids de la poulie de renvoi avec arbre est de 300 kil. Le nombre des rouleaux est de 46. La distance entre les rouleaux est de $10^{\mathrm{m}},50$. Le Poids du wagon vide sans roue est de 1200 kil. et avec les roues de 2000 kil. Poids de 4 berlines vides sur le wagon 1200 kil.

Rayon des roues du wagon $0^m,415$. Rayon des tourillons du wagon $5^{cent.},5$. Surface exposée à la résistance de l'air $2^m,70$. Rayon du frein monté sur le même arbre que la poulie de renvoi $0^m,84$. Largeur de la bande $7^{cent.},5$. Sur les voies d'évitement, les rouleaux ont un diamètre de $0^m,22$ et pèsent 17 kil. Le diamètre des tourillons des mêmes est de 2 centimètres. Tous les tourillons mentionnés tournent sur coussinets en fonte. On exige que le temps du parcours du plan par les wagons soit de deux minutes. On demande que les wagons arrivent à la fin de leur course avec une vitesse moyenne qui est ici de $4^m,20$. Il s'agit de vérifier si satisfaisant à ces conditions la charge utile peut être d'environ 32 hectolitres de houille soit 3000 kil.

Théorie du pilon.

231 Il s'agit de déterminer le travail moteur nécessaire pour élever un pilon à une hauteur donnée par l'intermédiaire d'une camme fixée sur un arbre de rotation.

D'après l'art. (38) dont nous conservons la signification des lettres, la force verticale P qui, agissant à l'extrémité du mentonnet, fait équilibre au poids Q du pilon et au frottement de glissement contre les prisons, est une force variable dont on cherchera la valeur moyenne arithmétique, que nous continuerons à représenter par P. Cela posé, le travail de la force P, pour élever le pilon à une hauteur h, sera Ph. . . (1).

De la pression P de la camme contre le mentonnet résulte le frottement Pf; le chemin décrit par ce frottement est $\dfrac{h^2}{2r}$ (Art. 127); r étant le rayon du cercle qui a servi à décrire la développante qui termine la camme. Le travail de ce frottement sera donc :

$$Pf\,\frac{h^2}{2r}\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

ω étant la vitesse angulaire de régime de l'arbre de rotation et de la roue sur laquelle est fixée la camme, J le moment d'inertie de l'arbre et de la roue, on aura d'après l'art. (175) pour la perte de force vive due au choc de la camme contre le mentonnet, en remarquant que le choc a lieu en un point dont la distance à l'axe de l'arbre de rotation est r :

$$\frac{\dfrac{J}{r^2}\times\dfrac{Q}{g}}{\dfrac{J}{r^2}+\dfrac{Q}{g}}\,\omega^2 r^2\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

R étant la résultante des forces qui agissent sur l'axe des tourillons, si l'on désigne par ρ le rayon de ces derniers et par f' le coëfficient de frottement contre les coussinets, le travail du frottement des tourillons pour un tour de l'arbre sera $Rf'\,2\pi\rho$, et s'il y a m cammes, le pilon sera élevé m fois à la hauteur h pour un tour de l'arbre; par suite le travail du frottement des tourillons pour une élévation et une descente du pilon sera :

$$\frac{R\,f'2\pi\rho}{m}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(4)$$

La somme des expressions (1, 2, 4), plus la moitié de l'expression (3) représentera le travail moteur demandé.

THÉORIE DES MACHINES A VAPEUR.

PRÉLIMINAIRES.

232. Nous supposons connues les propriétés de la vapeur saturée.

La première table ci-dessous donne, d'après M. Regnault, les pressions en atmosphères de la vapeur saturée, correspondantes à des températures données. La seconde donne les températures, volume du kilog. et poids du mètre cube correspondants à des pressions données en atmosphères. Le volume du kilogramme et le poids du mètre cube ont été calculés au moyen des formules de l'article 248.

Température.	Pression.	Temp.	Pression.	Temp.	Pression.	Temp.	Pression.
cent.	atm.						
10°	0,012	112	1,512	149	4,587	169	7,656
20	0,023	121	2,025	153	5,104	171	8,035
30	0,041	128	2,515	156	5,521	174	8,632
35	0,055	134	3,007	160	6,121	176	9,049
40	0,072	140	3,576	163	6,602	179	9,703
100	1,000	144	4,000	166	7,114	181	10,159

Pression.	Temp.	Poids du mètre cube.	Volume du kil.	Pression.	Température.	Poids du mètre cube.	Volume du kil.
at.	cent.	k	m. c.	at		k	m. c.
0,10	46°,21	0,0690	14,4959	5,00	152,22	2,5803	0,3874
0,50	81,71	0,3094	3,2319	5,50	155,85	2,8142	0,3553
1,00	100,00	0,5884	1,6995	6,00	159,22	3,0461	0,3281
1,50	111,74	0,8556	1,1689	6,50	162,37	3,2761	0,3051
2,00	120,60	1,1151	0,8966	7,00	165,31	3,5044	0,2852
2,50	127,80	1,3688	0,7305	7,50	168,15	———	———
3,00	133,91	1,6179	0,6180	8,00	170,81	3,9554	0,2527
3,50	139,14	1,8631	0,5366	8,50	173,35	———	———
4,00	144,00	2,1050	0,4749	9,00	175,77	4,4005	0,2272
4,50	148,29	2,3439	0,4265	10,00	180,31	4,8404	0,2069

REMARQUE. Pour réduire les pressions ci-dessus en kilogrammes par cent. carré, il suffit de les multiplier par 1,033 qui est la pression exercée par une atmosphère sur un cent. carré.

233. Poids du mètre cube de quelques gaz et volume du kil. à 0° et à la pression d'une atmosphère.

	POIDS DU MÈTRE CUBE.	VOLUME DU KIL.
Air atmosphérique.	1^k 293587	0^{mc},7735
Azote.	1, 256167	0, 7961
Acide carbonique.	1, 977414	0, 5057

234. *Le volume relatif de la vapeur saturée,* c'est le rapport d'un volume de vapeur au volume d'eau qui a produit cette vapeur. On obtient le volume relatif en multipliant dans la table ci-dessus le volume du kil. de vapeur par 1000, ce qui donne la table suivante :

Pression.	Température.	Volume relatif.	Pression.	Température.	Volume relatif.
at. 0,10	46°.21	14496	3,00	133,91	618
0,50	81,71	3232	4,00	144,00	475
1,00	100,00	1699	5,00	152,22	387
2,00	120,60	897			

235. On appelle *calorie,* ou unité de chaleur, la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 0° à 1° la température d'un kilo d'eau pure.

Le nombre de calories que possède un kil. d'eau pure à t° est, d'après M. Regnault, égal à

$$t + 0,0000\,2\,t^2 + 0,000000\,3\,t^3$$

Nous négligeons dans la suite les deux derniers termes de cette expression.

236. La *chaleur spécifique* d'un corps ou la capacité d'un corps pour la chaleur est le nombre de calories qu'exige un kil. de ce corps pour passer de la température 0° à la température 1°.

SUBSTANCES.	EAU.	FONTE.	FER.	ACIER.	CUIVRE.
Chaleur spéc.	1,00500	0,12983	0,11379	0,11650	0,9515

Chaleur spécifique à pression constante de quelques gaz.

GAZ.	AIR.	AZOTE.	ACIDE CARBONIQUE.
Chaleur spéc.	0,2377	0,2440	0,2164

La chaleur spécifique de l'air à volume constant est égale à 0,1686.

237. *La chaleur spécifique de la vapeur d'eau* ou le nombre de calories, nécessaire pour élever de 1° la température d'un kil. de vapeur, est égal à 0,475.

238. *La chaleur totale contenue dans un kil. de* vapeur d'eau saturée à t^o est égale à

$$\alpha + \beta t\,; \ldots \text{ où } \alpha = 606,5\,;\ \beta = 0,305.$$

239. *Chaleur latente contenue dans un kil. de vapeur d'eau.* — En retranchant de l'expression précédente la chaleur contenue dans un kil. d'eau à t^o, on aura la chaleur appelée latente

$$\alpha - (1 - \beta)t, \text{ ou}\,; \ldots 606,5 - 0,695t.$$

La chaleur latente devient nulle pour $t = 872^o,7$ environ.

240. Le nombre x de kil. d'eau à t^o qu'il faut pour condenser q kil. de vapeur saturée à T°, de manière que la température du mélange soit t'^o, est donné par la formule suivante, à laquelle on arrive en égalant la chaleur contenue dans la vapeur et dans l'eau froide, à la chaleur du mélange,

$$x = q\,\frac{\alpha + \beta T - t'}{t' - t}$$

Pour condenser 1 kil. de vapeur saturée à 100° avec de l'eau à 12° de manière que la

température du mélange soit	25°	30	35	40
on trouve pour x :	47^k,08	33,72	26,17	21,32

241. *Chaleur totale contenue dans un kil. de vapeur d'eau surchauffée.* — Le nombre de calories, nécessaire pour porter de t^o à t'^o la température d'un kil. de vapeur saturée, est égal à 0,475 $(t' - t)$, et la chaleur totale est égale à $\alpha + \beta t + 0,475\,(t' - t)$.

242. *Chaleur de la vapeur humide.* q kil. de vapeur d'eau saturée à t^o, plus q' kil. d'eau en contact avec cette vapeur, renferment un nombre de calories égal à :

$$q\,(\alpha + \beta t) + q't.$$

243. Au moyen de la loi de Mariotte, combinée avec celle de Gay Lussac, on démontre que, pour une quantité de gaz dont les trois éléments : volume v, température t, pression p changent et deviennent respectivement v', t', p', on a la relation :

$$\frac{p\,v}{p'\,v'} = \frac{1 + a\,t}{1 + at'} \ldots \text{ où } a = 0,00367 \ldots (1)$$

244. Si d, d' sont respectivement les poids spécifiques (poids du mètre cube) quand

le gaz occupe successivement les volumes v, v', la formule précédente donne : vu que $v\,d = v'\,d'$,

$$\frac{p}{p'} = \frac{d}{d'} \cdot \frac{1 + at}{1 + at'} \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

245. *Trouver le volume* v *d'un kil. d'air à la pression* p *atmosphères et à la température* t, sachant par les expériences de M. Regnault que le vol. d'un kil. d'air à la pression d'une atm. et à la température 0° est égal à $0^{mc},7735$. La formule (§ 243) donne si l'on y fait $v' = 0^{mc},7735$; $p' = 1$; $t' = 0$,

$$v = 0,7735\,\frac{1 + at}{p}$$

246. *Trouver le poids d'un mètre cube d'air à la pression* p *atm. et à la température* t°, on a : .... $vd = 1$; d'où $d = \dfrac{1}{v}$

et en substituant la valeur ci-dessus de v on trouve

$$d = 1,29318\,\frac{p}{1 + at}.$$

247. Si la pression p est estimée en kil. par cent. carré, les formules (§ 243, 244) donnent, sachant que, à la température 0°, la pression d'une atm. sur un cent. carré est égale à $1^k,0333$.

Volume d'un kil. d'air . . . $v = 0,79926\,\dfrac{1 + at}{p}$

Poids du mètre cube d'air. . . $d = 1,2515\,\dfrac{p}{1 + at}$.

248. *Poids et volume de la vapeur d'eau saturée.* — On sait que le rapport de la densité de la vapeur à celle de l'air est de 0,622, à la même température et à la même pression. D'après cela, les formules des deux paragraphes précédents donnent :

Poids du mètre cube de vapeur saturée, $d = \dfrac{1 + at}{0,80436\,p}$

Volume d'un kil. de vapeur saturée, $v = \dfrac{0,80436\,p}{1 + at}$

Si la pression p est estimée en kil. par cent. carré, les formules précédentes deviennent :

Vol. d'un kil. de vapeur saturée, $v = \dfrac{1 + at}{0,7784\,p}$

Poids du mètre cube de vap. saturée, $d = \dfrac{0,7784\,p}{1 + at}$

249. La température à laquelle il faut élever un volume v d'air à 0° et à la pression constante d'une atm. pour qu'en se dilatant son volume devienne deux fois plus grand, sera, d'après (§ 243), donnée par l'équation :

$$2\,v = v\,(1 + at)\,;\quad \text{d'où}\quad t = 272°,7.$$

250. Le nombre de calories qu'il faut communiquer à 1 kil. d'air à 0° et à la pression d'une atm. pour que son volume devienne deux fois plus grand, est, d'après (236), égal à $0,2377 \times 272,7 = 64,711$ calories.

251. La température à laquelle il faut élever un poids d'air à la température 0° et à la pression p pour que, sans laisser varier son volume, la pression devienne deux fois plus grande, est, d'après (243), donnée par la formule :

$$2\,p = p\,(1 + at)\,;\quad \text{d'où}\quad t = 272°,7.$$

252. Le nombre de calories qu'il faut communiquer à 1 kil. d'air à 0° et à la pression d'une atm. pour que, sous le même volume, sa pression devienne deux fois plus grande, est, d'après (235), égale à $0,1686 \times 272,7 = 45^{c},977$ calories.

Quantités de chaleur développées par un kil. de divers combustibles.

Charbon de bois sec n'importe de quelle nature.	7050^{cent}
〃 ordinaires, contenant 0,20 d'eau.	6000
Coke pur.	7050
Houille de 1re qualité, contenant 0,02 de cendres.	7050
〃 2me 〃 〃 0,10 〃	6345
〃 3me 〃 〃 0,20 〃	5932
Bois séché au feu, contenant 0,52 de charbon.	3666
Bois séché à l'air, contenant 0,20 d'eau.	2945
Tourbe ordinaire.	1500
Tourbe de 1re qualité (d'après M. Garnier).	3000

Remarque. Les meilleurs foyers n'utilisent guère que 0,55 à 0,64 de la quantité de chaleur développée par le combustible brûlant complètement.

Le nombre de kil. d'un combustible à brûler, pour convertir q kil. d'eau à $t°$ en vapeur à T°, est égal à $\dfrac{q\,(\alpha + \beta T - t)}{n}$.

n étant le nombre de calories que l'on peut utiliser dans un bon foyer par kil. de combustible brûlé.

Classification des machines à vapeur.

Nous supposons connue la description des divers organes de la machine à vapeur, parce que cette description se fera sur un modèle et sous les yeux des élèves et que d'ailleurs il sera question de ces organes lorsqu'il s'agira de calculer leurs dimensions.

Classification des machines sous le rapport du mode d'action de la vapeur.

253. Toute machine à vapeur est à simple ou à double effet :

A simple effet, lorsque la vapeur n'agit sur le piston que dans son mouvement de va ou de vient seulement ;

A double effet, lorsque la vapeur agit sur le piston et dans son mouvement de va et dans son mouvement de vient.

254. Toute machine à vapeur est à pleine pression ou à détente :

A pleine pression, lorsque la vapeur est admise dans le cylindre depuis le commencement jusqu'à la fin de la course du piston ;

A détente, lorsque la vapeur entre dans le cylindre pendant une partie seulement de la course du piston, à partir de laquelle la lumière d'admission admise se trouve fermée, et la vapeur continue à agir sur le piston en se détendant.

255. Toute machine à vapeur est à condensation ou sans condensation :

A condensation, lorsque la vapeur, après avoir fait son effet dans le cylindre, se rend dans un vase clos appelé *condenseur*. Ce vase clos est placé dans une bâche maintenue pleine d'eau froide au moyen d'un pompe appelée *pompe à eau froide*. Le condenseur est muni d'un robinet, appelé *robinet d'injection*, qui, étant ouvert, laisse pénétrer dans le condenseur un jet continu d'eau froide qui condense la vapeur qui vient du cylindre après y avoir fait son effet.

Sans condensation, lorsque la vapeur, après avoir fait son effet dans le cylindre, se rend dans l'atmosphère.

Classification des machines à vapeur sous le rapport du mode de transmission du mouvement du piston à l'arbre du volant.

256. Les machines à vapeur sont *à balancier* ou *sans balancier*. Ces dernières sont appelées machines *horizontales, verticales*, inclinées, selon que l'axe du cylindre est horizontal, vertical ou incliné ; et machines *oscillantes* lorsque le cylindre oscille autour d'une horizontale rencontrant l'axe du cylindre.

Dans les machines *à balancier*, la tige du piston imprime un mouvement circulaire alternatif à l'une des extrémités du balancier au moyen du *parallélogramme de Watt*. L'autre extrémité du balancier imprime un mouvement circulaire continu à la manivelle du volant au moyen d'une *bielle*.

Dans les machines *sans balancier*, l'extrémité de la tige du piston se meut entre deux guides fixés au cylindre ou au bâti, et imprime un mouvement circulaire continu à la manivelle du volant au moyen d'une bielle.

Pompes.

257. Dans les machines sans condensation, il n'y a que deux pompes, l'une dite *à eau froide* qui aspire l'eau du puits et la refoule ou la déverse dans une bâche placée près de la chaudière La vapeur qui a fait son effet dans le cylindre se rend dans cette bâche pour y chauffer l'eau. Une seconde pompe, dite *alimentaire*, aspire l'eau de cette bâche et la refoule dans la chaudière.

Dans les machines à condensation, il y a de plus une pompe, dite *pompe à air* ; elle est destinée à retirer du condenseur et l'eau qui a servi à condenser la vapeur et l'air qui se dégage de cette eau dans le condenseur.

Dans les machines à balancier, les tiges des pompes alimentaire et à eau froide sont mises en mouvement par le balancier auquel elles sont articulées. Quant à la pompe à air, on a vu (§ 130) qu'un certain point du petit côté du parallélogramme, le plus rapproché du centre du balancier, décrit une verticale ; c'est en ce point que la tige de la pompe à air est articulée au parallélogramme.

Dans les machines avec ou sans balancier, les tiroirs de distribution de la vapeur sont mis en mouvement par des excentriques fixées sur l'arbre du volant.

Théorie ordinaire des machines à vapeur.

258. Cette théorie suppose : 1° que la vapeur a la même pression dans le cylindre que dans la chaudière, et que cette pression reste constante pendant tout le temps que dure la prise de vapeur.

2° Que la lumière d'admission de la vapeur dans le cylindre est entièrement ouverte pendant tout le temps que la vapeur entre dans le cylindre.

3° Cette théorie n'a pas égard aux espaces nuisibles, ce qui conduit, entre autres choses, à estimer trop fort le travail de la détente de la vapeur. On appelle espace nuisible celui qui existe entre le piston parvenu à la fin de sa course et le couvercle, plus celui du conduit qui va de la chapelle au cylindre.

4° Parmi les résistances passives, elle ne fait entrer dans le calcul que la contre-pression, ce qui ne permet pas d'exprimer que la machine est à mouvement périodique, et par suite de conclure à la vitesse la plus convenable de la machine, ni à la détente la plus convenable.

5° Elle ne fait pas entrer dans le calcul le travail théorique d'aucune des pompes, bien que ce travail ne soit pas difficile à calculer.

6° Elle suppose la contre-pression constante et égale à la pression du condenseur ou de l'air extérieur, selon que la machine est ou non à condensation.

En d'autres termes, elle suppose que la vapeur, quand le piston est à la fin de sa course, prend instantanément la pression du milieu dans lequel elle se rend.

Formule de l'effet utile des machines à pleine pression avec ou sans condensation.

259. Soient : P, la pression de la vapeur en kil. par centimètre carré dans la chaudière et dans le cylindre;

P', la contre-pression en kil. par cent. carré, laquelle est égale à la pression atmosphérique $1^k,0333$ si la machine est sans condensation, et à la pression du condenseur, si la machine est à condensation. Dans ce dernier cas, le volume du condenseur étant calculé pour que l'air qui s'y dégage de l'eau de condensation n'exerce, à la température du condenseur, qu'une pression de $0,^k055$ par cent. carré; en ajoutant à cette pression celle que la vapeur exerce dans le condenseur à la même température, on aura l'intensité de la contre-pression.

a, la base du piston en mètres carrés.

l, la course du piston en mètres.

m, nombre de tours du volant par minute.

$V = a\ l$, volume en mètres cubes décrit par le piston dans chaque pulsation.

P étant la pression de la vapeur par centimètre carré, 10000 P sera la pression de la vapeur en kil. par mètre carré; et d'après (136) 10000 P V sera le travail de la vapeur sur une face du piston et pour une pulsation simple. De même le travail de la contre-pression sur l'autre face du piston et pour une pulsation sera 10000 P'V. On aura donc pour le travail moteur par pulsation.

$$10000\ V\ (P - P'),\ \text{ou}\qquad 10000\ PV\left(1 - \frac{P'}{P}\right)$$

De là on déduit successivement le travail pour deux pulsations du piston ou pour un tour du volant, puis le travail pour *m* tours du volant ou par minute, et enfin le travail par seconde. Le résultat que l'on obtient ainsi représente en kilogrammètres et par seconde le travail de la machine. Pour l'avoir en chevaux vapeur, il ne reste plus qu'à diviser ce résultat par 75, ce qui donne, tous calculs faits,

$$4{,}444\ PV\left(1 - \frac{P'}{P}\right)m.$$

Or le travail utile n'étant qu'une fraction K de ce travail, on a pour le nombre N de chevaux vapeur utiles dont la machine est capable :

$$N^{ch.v} = 4{,}444\ PV\left(1 - \frac{P'}{P}\right)m\ K. \ . \ . \ (1)$$

Détermination du coefficient K de l'effet utile.

260. — Pour une machine donnée, les quantités P, P', V, *m* qui entrent dans l'expression ci-dessus sont connues, et par le frein appliqué sur l'arbre de la machine on connaîtra N. Par suite, l'équation précédente fournira la valeur de K.

Le tableau suivant qui résulte d'expériences faites au frein, montre que la valeur de K augmente avec la force de la machine. Cela provient de ce que le travail des frottements de toute espèce n'augmente pas comme la force de la machine.

261. *Valeurs moyennes de* K *pour les machines à pleine pression sans condensation.*

FORCE DE LA MACHINE.	VALEUR DE K.	FORCE DE LA MACHINE.	VALEUR DE K.
De 4 à 8 chevaux.	0,61	De 30 à 40 chevaux.	0,79
De 10 à 20.	0,70	De 60 à 100.	0,85

Exemple. Quelle est la force en chevaux d'une machine à pleine pression sans condensation, pour laquelle on a : $P = 5{,}166$; $V = 0^{mc}, 1965$; $m = 25$; ici $P' = 1^k,033$.

262. *Valeurs moyennes de* K *pour les machines à pleine pression et condensation.*

FORCE DE LA MACHINE	VALEUR DE K.	FORCE DE LA MACHINE.	VALEUR DE K.
De 4 à 8 chevaux.	0,60	De 30 à 50 chevaux.	0,73
De 10 à 20 id.	0,67	De 60 à 100 id.	0,78

Les machines à pleine pression sont dites *à basse-pression* lorsque la pression de la vapeur motrice n'est que d'une atmosphère ou d'une atmosphère et quart. Ces machines sont nécessairement à condensation.

Exemple. Quelle est la force en chevaux d'une machine à pleine pression et condensation, pour laquelle on a : $P = 1^k, 0{,}33$; $P' = 0_k,1$; $V = 0^{mc}, 922$; $m = 19$.

263. *Le travail dû à la combustion d'un kil. de houille dans les machines à pleine pression* est donné par la formule suivante, en comptant que le foyer utilise la moitié des calories contenues dans le combustible :

$$K.\ 47.913.750\ \frac{1 + 0{,}00368\ t}{\alpha + \beta\ t - t'}\left(1 - \frac{P'}{P}\right)\ \text{kilogrammètres.}\ .\ .\ (1).$$

où *t* est en degrés centigrades, la température de la vapeur de la chaudière correspondante à la pression P ; *t'*, celle de l'eau d'alimentation, soit celle du condenseur ou de la bâche.

On arrive à cette formule en considérant que le travail $10000\ PV \left(1 - \frac{P'}{P}\right) K$ est dû à un volume V de vapeur ou bien au nombre de calories contenues dans le volume V de vapeur.

Comme le terme $\frac{1 + 0,000368\ t}{\alpha + \beta\ t - t'}$ diffère très-peu de la constante 0,023 entre des limites de température et de pression assez éloignées, l'expression (1) peut être mise sous la forme

$$109722\ K \left(1 - \frac{P'}{P}\right)^{km.}$$

Formule de l'effet utile des machines à détente avec ou sans condensation.

264. Soient : V le volume décrit par le piston à pleine pression avant la détente ;

W le volume total décrit par le piston ou le volume de la vapeur à la fin de la détente.

P_1 pression de la vapeur à la fin de la détente de sorte que $PV = P_1 W$.

D'après (136), 10000 PV sera le travail à pleine pression effectué par la vapeur à l'instant où commence la détente. D'après (141), $10000\ PV\ c \log \frac{W}{V}$ ou bien $10000\ PV\ c \log \frac{P}{P_1}$ est le travail dû à la détente. De même d'après (136) le travail de la contre-pression sera $10000\ P'W$. On aura donc pour le travail de la vapeur et pour une pulsation simple du piston :

$$10000 \left[PV \left(1 + c \log \frac{P}{P_1}\right) - P'W \right]$$

ou bien, en remarquant que $PV = P_1 W$

$$10000\ PV \left(1 + c \log \frac{P}{P_1} - \frac{P'}{P_1}\right)$$

De là on déduit, comme à l'article (259) pour le nombre de chevaux-vapeur utiles dont la machine est capable par seconde :

$$N^{ch.\,v.} = 4,444\ PV \left(1 + c \log \frac{P}{P_1} - \frac{P'}{P_1}\right) m\ K. \ . \ . \ (1)$$

Remarque. En négligeant comme on l'a fait les espaces nuisibles, le second et le troisième terme entre parenthèses sont chacun trop grand.

Remarque. La formule (1) s'applique également aux *machines de Woolf* qui sont à deux cylindres. On fait en sorte que la vapeur se détende déjà un peu dans le petit cylindre avant de passer dans le grand cylindre, afin que les épaisseurs du grand cylindre, de son piston et de sa tige ne soient pas trop considérables.

Dans cette formule $P' = 1^k,033$ pour les machines sans condensation.

Pour les machines à condensation, P' est égal à la pression que la vapeur exerce dans le condenseur à la température de 35°, plus à la pression que l'air exerce dans le condenseur. Or le volume de celui-ci est calculé pour que l'air n'exerce qu'une pression de $0^k,050$. Par centimètre carré on a donc $P' = 0,055 + 0,05 = 0^k,105$.

265. *Valeurs moyennes de* K *pour les machines à détente et condensation à un cylindre.*

FORCE DE LA MACHINE.	VALEUR DE K.	FORCE DE LA MACHINE.	VALEUR DE K.
De 4 à 8 chevaux.	0,41	De 30 à 50 chevaux.	0,63
De 10 à 20 id.	0,52.	De 60 à 100 id.	0,74

Exemple. Quelle est la force en chevaux d'une machine à détente et condensation, pour laquelle on a : $P = 3^k,615$; $P_1 = 1/4\ P = 0^k,9037$; $P' = 0^k,1$; $V = 0^m,050$; $m = 20$.

266. *Valeurs moyennes de* K *pour les machines à détente sans condensation.*

FORCE DE LA MACHINE.	VALEUR DE K.	FORCE DE LA MACHINE.	VALEUR DE K.
De 4 à 8 chevaux.	0,70	De 30 à 50 chevaux.	0,70
De 10 à 20 id.	0,58	De 60 à 110 id.	0,81

Exemple. Quelle est la force en chevaux d'une machine à détente sans condensation, pour laquelle on a : $P = 6^k,555$; $P_1 = 1/5\ P = 1^k,311$; $V = 0^{mc},020$; $P' = 1^k,033$; $m = 22$.

267. *Le travail dû à la combustion d'un kilogramme de houille dans les machines à détente, avec ou sans condensation,* est donné en kilogrammètres par la formule

$$K\ 47.913.750\ \frac{1 + at}{\alpha + \beta\ t - t'} \left(1 + c \log \frac{P}{P_1} - \frac{P'}{P_1}\right)^{km.}$$

que, d'après les considérations du paragradhe (263), l'on peut remplacer avec une exactitude suffisante par la formule plus simple :

$$K\ 109722 \left(1 + c \log \frac{P}{P_1} - \frac{P'}{P_1}\right)^{km.}$$

268. *Moyen d'éviter l'emploi des logarithmes dans le calcul de l'équation* (1) § 264.

T_0 étant en km. le travail à pleine pression et à détente d'un mètre cube de vapeur à la pression d'une atmosphère, ou de $1^k,033$ par centimètre carré ; et n représentant le rapport du volume, à la fin de la détente, au volume avant la détente, on a

$$T_0 = 10000 \times 1{,}0330\ (1 + c \log n). \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Si dans cette équation, on attribue à n différentes valeurs, on aura le tableau suivant.

Table des quantités de travail produites, sous différentes détentes, par 1 *mètre cube de vapeur d'eau prise à la pression de* 1 *atmosphère.*

n	T_0	n	T_0	n	T_0	n	T_0
1,25	12635km	3,50	23271km	5,75	28399km	8,00	31844km
1,50	14510	3,75	23984	6,00	28839	8,25	32129
1,75	16111	4,00	24650	6,25	29261	8,50	32437
2,00	17490	4.25	25277	6.50	29665	8,75	32736
2,25	18707	4,50	25867	6.75	30055	9,00	33027
2,50	19795	4,75	26426	7,00	30431	9,25	33310
2,75	20780	5,00	26955	7.25	30794	9,50	33585
3,00	21679	5,25	27459	7,50	31144	9,75	33854
3,25	22506	5,50	27940	7,75	31483	10,00	34116

Nous ferons remarquer que le travail du même mètre cube agissant à pleine pression n'est que de 10330^m.

Pour le travail total à pleine pression et à détente d'un volume V de vapeur à la pression P, on a :

$$T = 10000\ PV\ (1 + c \log n). \quad . \quad . \quad (2).$$

En divisant membre à membre les équations (1 et 2) il vient

$$T = T_0\ \frac{PV}{1{,}0330}$$

équation qui donne le travail total à pleine pression et à détente d'un volume V^{mc} de vapeur à la pression P^k par centimètre carré, pour une détente donnée, au moyen de la valeur de T_0 que donne la table pour la même détente.

Application. Quel est le travail total à pleine pression et à détente effectué par

un volume $0^{mc},16085$ de vapeur à la pression de 3,50 atm. qui se détend jusqu'à occuper 4 1/2 fois son volume primitif.

La table donne $T_0 = 25867^{km}$, et puisque $P = 3{,}50 \times 1{,}0330$ et $V = 0^{mc},16085$, l'équation précédente donnera $T = 25867\ \dfrac{3{,}50 \times 1{,}0330 \times 0{,}16085}{1{,}0330} = 14562^{km},47$.

269. Pour la force d'une machine exprimée en chevaux vapeur, au moyen de la valeur de T_0, on trouve

$$N^{ch.v} = m\ K.\ PV \left(\frac{T_0}{2324{,}25} - 4{,}444\ \frac{P'}{P_1}\right)$$

équation dans laquelle T_0 est donné par la table ci-dessus.

Limite de la détente.

270. Si l'on cherche dans l'équation (I, § 264) la valeur de P_1 pour laquelle le travail utile est maximum, on trouve $P_1 = P'$, c'est-à-dire que la pression de la vapeur à la fin de la détente doit être égale à la contre-pression. Ce résultat n'est pas exact. Pour le corriger on indique dans la théorie ordinaire, que la pression de la vapeur à la fin de la détente doit surpasser, d'une demi atmosphère, la pression du milieu dans lequel elle se rend. Cette règle trop générale n'est pas plus exacte.

L'inexactitude provient de ce que, parmi les résistances inhérentes à la machine marchant à vide, et dont le travail, comme on sait, augmente avec la vitesse de la machine, on n'a fait entrer dans le calcul que la contre-pression. En ayant égard à toutes ces résistances, on trouve un résultat exact.

A cet effet, représentons pour un tour du volant par T_{fi} le travail de toutes les résistances, contre-pression comprise, inhérentes à la machine marchant à vide. Supposons que le travail du frottement provenant de la charge utile soit une fraction δ du travail utile Tu et que le travail du frottement provenant de la force motrice soit la même fraction δ du travail moteur Tm, on aura pour un tour du volant :

$$Tm = Tu + \delta\, Tu + T_{fi} + \delta\, Tm\ ; \quad . \quad . \quad \text{d'où.}$$

$$Tu = \frac{1-\delta}{1+\delta} \times Tm - \frac{T_{fi}}{1+\delta}$$

Représentons pour une pulsation du piston par V^{mc} le volume de vapeur dépensée avant la détente et à la pression P^k par mètre carré ; par P_1 et W les pression et volume à la fin de la détente, et par n le nombre de tours du volant par minute. En mettant à la place de

Tm le travail total de la vapeur à pleine pression et à détente, on aura pour le travail utile par minute :

$$Tu = \frac{1-\delta}{1+\delta} \times P\,2\,V \left(1 + c \log \frac{P}{P_1}\right) n - \frac{n\ Tfi}{1+\delta}$$

Comme il s'agit de faire produire le plus grand travail utile par minute, à une même quantité de vapeur dont la pression P est donnée, il en résulte que le volume $2Vn$ est une quantité constante que nous représenterons par G, de sorte que $2Vn = G$. En rappelant que $VP = WP_1$, l'équation précédente devient, en éliminant n :

$$Tu = \frac{1-\delta}{1+\delta} \times G \left[P \left(1 + c \log \frac{P}{P_1}\right) - \frac{Tfi}{2\,W} \times \frac{P}{P_1} \times \frac{1}{1-\delta} \right]$$

On trouve pour la valeur de P_1 qui rend cette expression un maximum

$$P_1 = \frac{Tfi}{2\,W} \times \frac{1}{(1-\delta)}$$

Or $\frac{Tfi}{2\,W}$ représente par mètre carré l'intensité de toutes les résistances (contre-pression comprise) inhérentes à la machine marchant à vide et rapportées à la surface du piston.

Ce résultat diffère très-peu de celui que donne la théorie de M. de Pambour laquelle nous a suggéré la démonstration qui précède. La différence vient de ce que nous avons eu égard au frottement provenant de la force motrice. De sorte que notre coefficient ne peut s'éloigner beaucoup de la moitié de celui 0,14 de M. de Pambour. En adoptant la valeur 0,07 pour δ, nous trouverons

$$P_1 = \frac{Tfi}{2\,W}\,1{,}0752$$

Sur l'avantage qu'il y a à faire travailler la vapeur à de hautes pressions.

271. Représentons pour un tour du volant par Tm le travail moteur ; par Tu le travail utile ; par Tfi le travail des frottements inhérents à la machine marchant à vide. En admettant que le travail des frottements provenant de la force motrice et de la résistance utile soit une fraction δ du travail de ces mêmes forces, nous aurons pour condition du mouvement périodique

$$Tm = Tu + \delta\,Tu + \delta\,Tm + Tfi \qquad \text{d'où}$$

$$Tu = \frac{1-\delta}{1+\delta} \times Tm - \frac{Tfi}{1+\delta}$$

Supposons que la machine soit à pleine pression et fasse n révolutions par minute en dépensant par révolution 2 V mètres cubes de vapeur dont la pression par mètre carré est P, nous aurons pour le travail utile par minute, en remplaçant Tm par 2 Pv.

$$Tu = \frac{1-\delta}{1+\delta}\ 2\ PVn - \frac{Tfi}{1+\delta}\ n \ . \ . \ . \ (1).$$

Supposons que l'on dépense par minute 1^k de vapeur à la pression P et à la température correspondante t. Le volume $2\,nV$ d'un kil. de vapeur à la pression P et à la température t est

$$2\,n\,V = \frac{1 + at}{0{,}7784\ P}$$

Avec cette valeur, l'équation (1) devient

$$Tu = \frac{1-\delta}{1+\delta} \times \frac{1+at}{0{,}7784} - n\,\frac{Tfi}{1+\delta}$$

En divisant ce travail par le nombre de calories $(\alpha + \beta\,t)$ contenues dans un kil. de vapeur à la température t, on aura pour le travail utile dû à une calorie,

$$\frac{1-\delta}{1+\delta} \times \frac{1+at}{0{,}7784\,(\alpha+\beta\,t)} - n\,\frac{Tfi}{(1+\delta)\,(\alpha+\beta\,t)} \ . \ . \ . \ (2).$$

Cette expression montre d'abord que, n'importe la pression à laquelle on dépense un kil. de vapeur, le travail utile augmente lorsque le nombre de tours du volant diminue. En second lieu, le nombre de tours restant le même, le travail utile augmente avec la température, ou, ce qui revient au même, avec la pression de la vapeur. Mais cette augmentation n'est pas considérable ; car le premier terme de l'expression (2) augmente lentement avec la température et le second terme qui est négatif diminue encore plus lentement. En effet, les facteurs $\frac{1+at}{\alpha+\beta\,t}$ et $\frac{1}{\alpha+\beta\,t}$ qui varient avec la température deviennent respectivement

0,002238055 et 0,001554 pour $t = 120^\circ,6$
0,00250655 et 0,0015117 pour $t = 180^\circ,3$

Or, ces deux températures correspondent respectivement aux pressions, très-différentes, de 2 et de 10 atmosphères.

Comme on le voit, l'avantage de dépenser la vapeur à de hautes pressions n'est pas considérable dans les machines à pleine pression. Il n'en est pas de même dans les machines à détente où celle-ci peut-être prolongée d'autant plus que la pression de la vapeur est plus élevée ; l'économie de chaleur qu'on réalise alors est due principalement au plus grand travail qu'on obtient en prolongeant davantage la détente.

272. *Autrement, on peut, sans recourir à une formule, se rendre compte de l'influence de la plus ou moins grande pression de la vapeur sur l'économie de chaleur qu'on peut réaliser pour produire un même travail utile.*

Supposons une machine qui marche avec de la vapeur à la pression de deux atmosphères. Si on emploie de la vapeur à la pression de quatre atmosphères et qu'on réduise de moitié la base du piston, rien ne sera changé au travail des forces, sauf que celui de la contre-pression sera réduit de moitié ; par suite le travail utile sera augmenté de cette même moitié ; c'est-à-dire, que la machine en faisant le même nombre de tours par minute, mettra en mouvement une charge utile plus forte que dans le premier cas.

Si l'on emploie de la vapeur à six atm. et qu'on réduise la base du piston au tiers de ce qu'elle était, le travail de la contre-pression sera diminué des deux tiers de ce qu'il était dans le premier cas, et par suite le travail utile sera augmenté de ces mêmes deux tiers. Et ainsi de suite pour des pressions plus élevées.

Quoique les volumes de vapeur dépensés soient respectivement dans les trois cas, comme 1, 1/2, 1/3, leurs poids diffèrent peu.

C'est ainsi que le poids d'un mètre cube de vapeur à deux atm. est de $1^k,1151$;

Le poids d'un demi mètre cube à quatre atm. est de $1^k,0525$;

Le poids d'un tiers de mètre cube à six atm. est de $1^k,0153$.

Les nombres de calories contenues dans ces trois poids de vapeur sont respectivement 717 ; 684 ; 665.

De là résulte que *le travail utile augmente avec la pression en même temps que le nombre de calories dépensées diminue.*

Mais ce double avantage est compensé en partie, par la perte de vapeur qui se fait par les joints et qui augmente avec la pression, et d'autre part par le travail de la pompe alimentaire qui augmente à peu près en raison directe de la pression de la vapeur.

273. *Influence sur le travail utile, du nombre de tours que font deux machines semblables qui dépensent chacune dans l'unité de temps un kil. de vapeur à la même pression ou à la même température.*

Le travail utile dû à un kil. de vapeur est (page 143).

$$Tu = \frac{1-\delta}{1+\delta}\,\frac{1+at}{0.7784} - \frac{n\ tfi}{1+\delta}$$

Dans cette équation tfi représente, pour un tour du volant, le travail de la contre-pression P', plus celui du frottement provenant des poids des organes de la machine.

Pour faciliter la discussion, il convient de séparer ces deux travaux, ce que nous aurions déjà dû faire à la page 143. Le travail de la contre-pression P' sera 2VP' pour un tour du volant, et en représentant par tfp le travail provenant des poids des organes, l'équation précédente devient

$$Tu = \frac{1-\delta}{1+\delta}\,\frac{1+at}{0.7784} - n\,\frac{2VP'}{1+\delta} - n\,\frac{tfp}{1+\delta}$$

Cette équation ne tenant pas compte des dimensions des organes de la machine lesquelles varient avec le nombre de tours, il faut pour faire resortir l'influence des dimensions raisonner sur un exemple.

Supposons donc deux machines semblables dont l'une fasse n tours et l'autre $2n$ tours par minute, en dépensant chacune un kil. de vapeur à la même température, ou à la même pression.

Puisque la pression reste constante, les volumes de vapeur dépensée par minute doivent être égaux. D'où il suit 1° que $2n$V est constant et que le travail de la contre-pression est le même dans les deux machines, c'est-à-dire que le second terme de l'équation est constant et indépendant de n.

2° En supposant les courses des pistons les mêmes dans les deux machines, la base du piston de la première devra être double de la base du piston de la seconde. Par suite la force motrice de la première sera deux fois celle de la seconde.

A part les pistons, si les dimensions et poids de tous les autres organes des deux machines restaient les mêmes, tfp serait constant et le travail, en une minute, des frottements provenant des poids serait, dans la première, la moitié de ce qu'il est dans la seconde. Donc le travail utile de la première serait augmenté de cette même moitié et partant la charge utile de la première serait plus que le double de la charge utile de la seconde.

Mais les dimensions des organes de la première machine devant être plus fortes, à cause que sa force motrice est le double de celle de la seconde, il en résulte que *l'intensité du frottement provenant de la force motrice est deux fois plus grande dans la première et que les chemins décrits dans un tour par les divers frottements sont également plus grands que dans la seconde machine.*

Mais on sait par les formules de la résistance des matériaux que, quoique les dimensions des organes de la première soient plus grandes, les poids de ces organes ne sont pas à beaucoup près le double des poids des organes de la seconde, et que les chemins décrits dans un tour par les divers frottements, quoique plus grands, ne sont pas à beaucoup près le double des chemins analogues décrits dans la seconde.

Des considérations qui précèdent, il n'est pas difficile de conclure que *le travail du frottement provenant des poids des organes pour les* n *tours de la première machine est notablement plus petit que le travail analogue pour les* 2n *tours de la seconde machine.*

Que le travail du frottement provenant de la force motrice et de la charge utile est un peu plus grand pour les n *tours de la première machine que pour les* 2n *tours de la seconde.*

Qu'en somme le travail utile sera plus grand dans la première machine, c'est-à-dire que la charge utile sera plus que le double de la charge utile de la seconde machine.

274. *Sur l'hypothèse que la vapeur a la même pression dans le cylindre que dans la chaudière.*

M. de Pambour a le premier démontré l'inexactitude de cette hypothèse. Supposons que la chaudière produise régulièrement dans chaque unité de temps un kilogramme de vapeur dont V est le volume en mètres cubes et P la pression correspondante par mètre carré. Examinons les trois cas où le volume décrit par le piston dans l'unité de temps est successivement :

$$V,\ 2\,V,\ 3\,V;$$

auxquels cas les vitesses du piston sont comme 1, 2, 3. D'après la loi de Mariotte, les pressions que la vapeur prendra successivement dans le cylindre seront :

$$P,\ \frac{1}{2}\,P,\ \frac{1}{3}\,P;$$

Donc la pression que la vapeur prend dans le cylindre est en raison inverse de la vitesse du piston.

D'où il résulte que la plus petite vitesse du piston a lieu lorsque la vapeur prend la plus

grande pression dans le cylindre ; et, comme cette plus grande pression ne peut surpasser celle de la vapeur dans la chaudière, on peut dire que

La plus petite vitesse du piston a lieu lorsque la vapeur se dépense dans le cylindre à la même pression qu'elle a dans la chaudière.

Nous ferons remarquer que, pour faire décrire à un piston dans l'unité de temps un volume plus grand ou plus petit, en d'autres termes, pour augmenter ou diminuer la vitesse du piston, il suffit de diminuer ou augmenter convenablement la charge utile ; d'où il résulte que

La plus petite vitesse du piston correspond à la plus grande charge utile que la force motrice peut mettre en mouvement.

275. Examinons maintenant si la pression que la vapeur prend dans le cylindre a une influence sur le travail de la vapeur.

En faisant abstraction de la contre-pression, c'est-à-dire, en supposant que la vapeur qui a fait son effet se rende dans le vide, on peut énoncer que

Le travail de la vapeur motrice est constant et indépendant de la pression que la vapeur prend dans le cylindre, en d'autres termes, indépendant de la vitesse du piston.

En effet, lorsque le piston décrit les volumes V, 2V, 3V, aux pressions respectives $P,\ \frac{1}{2}P,\ \frac{1}{3}P$, on a respectivement pour le travail de la vapeur dans les trois cas

$$PV,\ \frac{1}{2}P \times 2\,V,\ \frac{1}{3}P \times 3\,V,$$

Or, ces trois expressions qui sont égales à PV démontrent la proprité énoncée, et font voir en même temps que la force motrice de la vapeur se trouve dans le cas de l'hypothèse faite au paragraphe 192.

Mais cette propriété n'existe plus, si l'on a égard à la contre-pression P', dont le travail augmente en raison directe de la vitesse du piston, et devient respectivement dans les trois cas :

$$P'V;\ P'2V;\ P'3V.$$

En retranchant le travail de la contre-pression du travail constant PV de la force motrice, on aura pour le travail disponible dans les trois cas respectivement :

$$(PV - P'V);\ (PV - P'2V);\ (PV - P'3V).$$

Ces expressions, dont la première est la plus grande, montrent *l'avantage qu'il y a à dépenser la vapeur dans le cylindre à la pression qu'elle a dans la chaudière ; ou à la plus* *petite vitesse du piston ; ou à la plus grande résistance ou charge utile que la force motrice puisse mettre en mouvement.*

Cet avantage devient plus grand si, comme cela doit être, P' représente, outre la contre-pression, encore toutes les autres résistances inhérentes à la machine marchant à vide et rapportées à l'unité de surface du piston ; car le travail de ces résistances augmente également en raison directe de la vitesse du piston.

276. *Sur la différence entre les presions de la vapeur dans la chaudière et le cylindre.*

Alors même qu'une machine marche avec la plus grande charge utile, la vapeur ne saurait avoir la même pression dans le cylindre que dans la chaudière.

Dans ses leçons de mécanique pratique, 3e partie, page 126, M. Morin a trouvé pour la différence entre ces deux pressions la formule suivante :

$$\mathrm{P} - \mathrm{P}_0 = \frac{n_0^4\, dv^2}{2g}\left[\frac{1}{n_0^4} + 2\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{nm'} - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{n'}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{n_0^2}\right)^2 + 8\,\frac{b\,(\mathrm{L}+\mathrm{L'})}{\mathrm{D'}} + \frac{2\,b\,\mathrm{L''}\,c}{\mathrm{A}}\right]$$

Dans cette formule qui ne tient pas compte du refroidissement des tuyaux, le second membre doit être divisé par (1 — K), dans le cas où il y a de l'eau entraînée par la vapeur.

Signification des lettres qui entrent dans la formule

P, P_0 pressions par mètre carré dans la chaudière et le cylindre.

$m = 0,65$ coefficient du multiplicateur de la dépense théorique en le supposant le même aux orifices d'entrée du tuyau à vapeur et au passage de la boite à vapeur dans le conduit qui mène au cylindre.

m' coefficient de la dépense relatif au passage par la valve régulatrice, et qui atteint souvent une valeur 0,80 au plus selon les dispositions.

n rapport de l'aire du passage ouvert par la valve régulatrice à l'aire totale du tuyau à vapeur, rapport presque toujours inférieur à l'unité et souvent beaucoup trop petit.

n rapport de la section transversale de la boite à vapeur à celle du tuyau à vapeur.

n_0 rapport du diamètre du piston à celui du tuyau à vapeur.

d la densité de la vapeur.

D' diamètre du tuyau à vapeur.

L longueur du tuyau à vapeur depuis la chaudière jusqu'à la valve régulatrice.

L' longueur du tuyau à vapeur depuis la valve régulatrice jusqu'à la boite à vapeur.

L'' longueur du conduit qui va de la boite à vapeur au cylindre.

A Aire des orifices d'admission supposées égale à l'aire de la section du conduit qui va de la boite à vapeur au cylindre.

$B = 0.0032$ coefficient de la résistance des parois des tuyaux.

V vitesse du piston.

K rapport du volume de l'eau entraînée à l'état liquide au volume d'eau total sorti de la chaudière.

277. *Applications de la formule précédente tirées de l'ouvrage de M. Morin.*

1° *Dans une machine à basse pression* pour laquelle on a : $d = 0^k\ 725$, ce qui correspond à une pression $P = 2$ *atm.* $25 = 12910^k$; $n_0 = 5$; $V = 1^m00$; $\frac{L + L'}{D'} = 120$; $L'' = 0$; $n = 0.75$; $n' = 4$; la formule donne

$$P - P_0 = 128_k.903 \; ; \text{ et } \frac{P - P_1}{P} = \frac{1}{100.15}$$

Si dans la même machine il y a de l'eau entraînée et que $K = 0.40$, on trouve

$$P - P_0 = \frac{128.903}{1 - K} = \frac{125.903}{0.60} \; ; \quad \text{et} \quad \frac{P - P_0}{P} = \frac{1}{60.1}$$

Si en même temps au lieu de supposer $n = 0.75$ on eût fait $n = 0.30$, on aurait trouvé $\frac{P - P_0}{P} = \frac{1}{22.10}$

2° *Dans une machine à haute pression* pour laquelle on a : $d = 2^k586$, ce qui correspond à une pression $P = 5$ atmosphères $= 51650^k$; $n^2_0 = 36$; $\frac{L + L'}{D'} = 300$; $\frac{LC}{A} = 50$; $n = 0.50$; $n' = 4$; $V = 1^m00$; la formule donne :

$$P - P_0 = 2103^k.07 \; ; \text{ et } \frac{P - P_0}{P} = \frac{1}{24.56}$$

Si, au lieu de supposer $V = 1^m,00$, on eût fait $V = 2^m,00$, on aurait trouvé

$\frac{P - P_0}{P} = \frac{1}{6.14}$, au lieu de $\frac{1}{24.56}$

Ce qui manifeste la grande influence de la vitesse du piston.

Si, au lieu de supposer $V = 1^m$ *et* $n^2_0 = 36$, on eût fait $V = 1^m,40$ et $n^2_0 = 60$, on aurait trouvé $\frac{P - P_0}{P} = \frac{1}{4.40}$, au lieu de $\frac{1}{24.56}$; ce qui fait voir l'influence de la valeur de n_0.

3° *Dans une machine à haute pression* pour laquelle on a : $P = 4$ *atm.* $1/2 = 46485^k$; $d = 2^k, 3495$; $n^2_0 = 90$; $m = 0,65$; $m' = 0,70$; $\frac{L + L'}{D'} = 300$; $\frac{L''\,C}{A} = 50$; $n = 0.50$; n', ou rapport de la section transversale de la boîte à vapeur à celle du tuyau à vapeur $= 4$; $V = 1^m,00$; la formule donne :

$$P - P_0 = 13172^k ;\ldots \text{ et } \frac{P - P_0}{P} = \frac{1}{3.52}$$

Ce résultat montre de nouveau la grande influence de la valeur de n_0.

REMARQUE. La formule, comme le fait remarquer M. Morin (page 136), ne contenant que les rapports des diverses dimensions, si l'on veut qu'à pression égale dans la chaudière et à même vitesse du piston, la différence des pressions dans le cylindre et dans la chaudière soit la même, quelle que soit la force de la machine, il faudra que ces rapports restent les mêmes pour le même système de machines.

Espace que la vapeur doit occuper dans la chaudière.

278. Par chaque pulsation simple du piston, la pression de la vapeur dans la chaudière diminue depuis le commencement jusqu'à la fin de la prise de vapeur; et cette diminution est d'autant plus grande que l'espace occupé par la vapeur dans la chaudière est plus petit..

Supposons que la détente commence à la $n^{ième}$ partie de la course du piston, et que l'on pose pour condition que la différence $P - P'$ des pressions au commencement et à la fin de la prise de vapeur soit $\frac{1}{30}$ de la pression P.

En désignant par W le volume total décrit par le piston pour une course entière, et par V le volume décrit avant la détente, on a : $W = nV$, et $\frac{1}{20}$ W pour le volume des espaces nuisibles.

Cela posé, on trouve sans difficulté pour l'espace E que la vapeur doit occuper dans la chaudière :

$$E = 30\,V\left(1 + \frac{n}{20}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\text{Ou bien, } E = 30\,W\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{20}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) = KW. \quad . \quad . \quad (2)$$

La formule donne K =	8.25	7.70	6.80	6.00
Selon que n =	2	3	4	5

Si la machine n'est pas à détente, on pourra faire $n = \frac{4}{3}$; c'est-à-dire supposer que, quand le piston a parcouru les 3/4 de sa course, il n'arrive plus de vapeur dans le cylindre.

Inconvénients si la vapeur occupe un espace trop petit dans la chaudière.

279. Si l'espace occupé par la vapeur est trop petit, la différence $P - P'$ des pressions au commencement et à la fin de la prise de vapeur sera considérable et provoquera une ébullition tumultueuse dans la chaudière; l'eau de la chaudière sera projetée dans l'espace occupé par la vapeur; une portion de cette eau entrera dans le tuyau qui conduit la vapeur au cylindre : 1° la chaleur de cette eau est perdue; 2° le travail pour refouler cette eau dans la chaudière l'est également; 3° la machine calculée dans l'hypothèse que la pression dans la chaudière est constante, fera un travail trop petit; 4° si la machine est à condensation, la quantité d'eau froide pour condenser sera augmentée, car l'eau entraînée par la vapeur devra être ramenée à la température du condenseur.

Pour avoir une idée de la perte de chaleur occasionnée par l'eau entraînée par la vapeur, il suffit de considérer qu'un kilogramme ou décimètre cube d'eau à 100° renferme 100 calories; tandis qu'un décimètre cube de vapeur à 100° ne renferme que 0.374 calorie. Ainsi sur chaque kilog. d'eau entraînée, il y a une perte de 99.626 calories. C'est-à-dire presque toute la chaleur contenue dans l'eau entraînée. Et si la machine est à condensation, il faudra que la pompe à eau froide élève près de 3 kil. d'eau froide à 12° pour ramener la température 100° du kil. d'eau chaude à la température 35° du condenseur.

Donc la pompe à eau froide et la pompe à air devront faire chacune un surplus de travail qui est perdu.

Ajoutons enfin que l'eau entraînée augmente la contre-pression, comme il résulte du § 277.

D'après tout cela il est important, pour qu'il se projette le moins d'eau possible dans le tuyau de prise de vapeur, que l'ouverture de ce tuyau soit éloignée le plus possible du niveau de l'eau dans la chaudière, et c'est la raison pour laquelle dans les chaudières de locomotives on construit des dômes de vapeur.

On conseille aussi de fixer, dans le haut de la chambre de vapeur, un plateau circulaire horizontal au centre duquel serait fixé le tuyau de prise de vapeur. Ce plateau protégerait l'entrée de ce tuyau contre l'eau projetée.

REMARQUE. Pour éviter que l'eau entraînée dans le cylindre n'occasionne le bris de celui-ci, on pratique, aux fond du cylindre, des soupapes de sûreté.

Surchauffe de la vapeur.

Alors même que la vapeur occupe dans la chaudière le volume calculé par la formule du § 278, l'expérience prouve qu'il y a toujours de l'eau entraînée par la vapeur dans le cylindre. On évite les inconvénients de la perte de cette eau en surchauffant la vapeur dans son trajet de la chaudière à la chapelle, tout juste ce qu'il faut pour vaporiser l'eau qu'elle contient. Car l'expérience a appris qu'en surchauffant de la vapeur qui ne contient plus d'eau, les surfaces frottantes se grippent ; de là, augmentation du frottement du piston et usure prompte du piston et du cylindre. Il convient donc que la vapeur surchauffée soit encore un peu humide, c'est-à-dire qu'elle contienne encore une petite quantité d'eau.

Pour surchauffer la vapeur à point, nous proposerons d'ajouter au tuyau actuel de prise de vapeur un second tuyau d'un diamètre plus petit dont la vapeur serait seule surchauffée. Ce tuyau serait muni d'un robinet qui permettrait de laisser entrer dans la chapelle la quantité de vapeur surchauffée juste nécessaire pour vaporiser l'eau entraînée par la vapeur qui arrive par l'autre tuyau. Le robinet purgeur placé au bas du cylindre à vapeur permettra de vérifier si le mélange des deux vapeurs est ce qu'il doit être.

On peut surchauffer la vapeur dans un vase à part, ou bien on peut faire en sorte que le tuyau de la vapeur à surchauffer longe sur une certaine étendue les parois intérieures des carneaux.

Plus le cylindre à vapeur est éloigné de la chaudière, et plus la vapeur doit être surchauffée.

Enveloppe en fonte au cylindre.

La vapeur qui arrive de la chaudière dans l'enveloppe a pour effet de préserver du refroidissement la vapeur qui travaille dans le cylindre. L'augmentation de travail qui résulte de là s'explique comme il suit :

Sans enveloppe la vapeur perd par la surface extérieure du cylindre un certain nombre de calories, ce qui en fait diminuer la pression et par suite le travail ; tandis qu'avec une enveloppe au cylindre on perd par la surface de celle-ci la même quantité de chaleur et même un peu plus. Mais la pression de la vapeur dans le cylindre n'est pas altérée et par suite le travail de la vapeur est plus grand dans le cas d'une enveloppe.

Dans les machines à détente la vapeur de l'enveloppe cède d'autant plus de chaleur à la vapeur du cylindre que la détente est plus prolongée ; car la température baisse d'autant plus que la détente est plus prolongée, et l'on sait que la quantité de chaleur qu'un corps cède à un autre est en raison de la différence de leurs températures.

Dans le cas d'une enveloppe, faut-il alimenter le cylindre avec la vapeur de l'enveloppe, ou avec celle de la chaudière?

La vapeur prise dans l'enveloppe n'entraîne pas d'eau dans le cylindre ; par suite la chaleur contenue dans l'eau qui provient de la vapeur qui se condense dans l'enveloppe, et la chaleur contenue dans l'eau entraînée dans l'enveloppe par la vapeur qui vient de la chaudière ne sont pas perdues, puisque cette eau, mise de temps en temps en communication avec la pompe alimentaire, pourra être refoulée dans la chaudière.

Mais en prenant la vapeur dans l'enveloppe on perd sur la pression qui est évidemment moindre dans l'enveloppe que dans la chaudière.

La prise de vapeur se ferait peut-être avec plus d'avantage dans l'enveloppe si une portion de la vapeur y arrivait surchauffée.

280. *Vérification, au moyen du frein de Prony, de l'exactitude du coefficient* K *de l'effet utile, d'après lequel une machine a été construite.*

On calculera le poids dont il faut charger le frein appliqué sur l'arbre du volant de la machine, pour que celle-ci effectue son travail en faisant le nombre n de tours par minute pour lequel elle a été calculée.

Cela fait, si la machine, sous l'influence du frein, fait exactement un nombre n de tours, la valeur de K est exacte.

Mais si la machine fait un nombre de tours plus grand que n, c'est une preuve que les frottements ont été estimés trop forts, ou, ce qui revient au même, que la valeur de K a été prise trop faible. Dans ce cas, la machine a plus que sa force.

Si, au contraire, la machine fait un nombre de tours plus petit que n, cela indique que les frottements ont été estimés trop faibles, ou que la valeur de K a été prise trop grande. Dans ce cas, la machine n'a pas la force pour laquelle elle a été calculée, et il faudra augmenter la pression dans la chaudière, pour la faire marcher à la vitesse de n tours par minute ; mais alors les pièces de la machine se trouvent soumises à des efforts plus grands que ceux pour lesquels elles ont été calculées.

Intensité de la contre-pression.

281. L'intensité de la contre-pression est toujours plus grande que la pression de l'air atmosphérique ou celle du condenseur.

Soient : P' la pression en kilogrammes par mètre carré du milieu dans lequel se rend la vapeur qui a fait son effet ; A, la base du piston en mètres carrés ; a, la section en mètres carrés de la lumière d'émission ; v, la vitesse du piston, et V, celle avec laquelle la vapeur s'échappe par la section a.

Le volume décrit par le piston sera égal au volume de vapeur qui sort par l'orifice a, si l'on admet que la vapeur possède la même densité dans le cylindre et dans la section a. Dans cette hypothèse, on aura, en représentant par c le coefficient de contraction :

$$Av = aVc, \text{ d'où } \quad V = \frac{A}{ac} v.$$

La pression P par mètre carré que le piston doit exercer sur la vapeur dans le cylindre pour qu'elle sorte avec la vitesse V par l'orifice a, devra satisfaire à l'équation :

$$V = \sqrt{\frac{2g(P - P')}{D}} = \frac{A}{ac} v$$

où D est le poids du mètre cube de vapeur à la pression d'une atmosphère ou à la pression du condenseur, selon que la machine est sans, ou avec condensation.

Cette équation donne pour la valeur de la contrepression P

$$P = P' + v^2 \frac{A^2}{a^2 c^2} \frac{D}{2g}$$

Cette solution suppose que la lumière d'émission a est entièrement ouverte pendant tout le temps de la course du piston. Si l'on admet que la moitié seulement de a reste entièrement découverte, la valeur de P devient, en prenant $c = 0,65$

$$P = P' + v^2 \frac{A^2}{a^2} \frac{D}{2,0733}$$

Cette équation fait voir l'importance qu'il y a à donner au piston une petite vitesse, et à la lumière d'émission une section qui ne soit pas trop petite.

L'expression ci-dessus de la contre-pression est trop faible pour deux raisons :

1° La démonstration suppose qu'à la fin de la course du piston, la vapeur motrice prend instantanément la pression de l'air extérieur ou celle du condenseur; or, il faut un temps fini pour qu'à la fin de la course du piston supposé immobile, il s'écoule une quantité de vapeur telle que celle qui reste n'ait plus que la pression de l'air extérieur ou celle du condenseur; et pendant tout ce temps la pression est supérieure à celle de l'air extérieur. Pour se trouver dans l'hypothèse de la démonstration, il faut donner de l'avance à l'émission comme il sera dit plus loin;

2° L'eau entraînée par la vapeur, pour être transportée à l'air extérieur ou au condenseur, oppose une résistance beaucoup supérieure à celle d'un égal volume de vapeur.

Volume du condenseur.

282. Le volume du condenseur doit pouvoir contenir :

1° Les q kil. de vapeur à T°, qui entrent dans le cylindre par tour de volant;

2° Les q_1 kil. d'eau à T° entraînée par la vapeur;

3° Les q_2 kil. d'eau froide à la température moyenne de 12° qu'il faut mélanger aux q kil. de vapeur et aux q_1 kil. d'eau entraînée pour que la température du mélange ne soit que de 35°;

4° Le volume en litres de l'air qui se dégage de l'eau froide dans le condenseur. Ce volume doit être calculé de manière que l'air n'exerce, par centimètre carré et à la température de 35° du condenseur, qu'une pression de $0^k,05$.

Pour la quantité q_2 d'eau froide, ou trouve d'après § 240 :

$$q_2 = q \frac{\alpha + \beta T - 35}{35 - 12} + q_1 \frac{T - 35}{35 - 12}$$

Ces q_2 kil. ou litres d'eau, avant d'entrer au condenseur, renferment $\frac{1}{12}$ q_2 litres d'air à la température de 12° et à la pression de $1^k,033$. Dans le condenseur, cet air devant occuper un volume x, tel que sa pression ne soit que de $0^k,05$, à la température de 35°, on a d'après (243)

$$\frac{\frac{1}{12} q_2 \times 1,033}{x \times 0,05} = \frac{1 + 0,00365 \times 12}{1 + 0,00365 \times 35}$$

d'où $x = q_2 \times 22,322$ et le volume du condenseur sera égal à

$$q + q_1 + q_2 + q_2 \times 22,322 = q + q_1 + q_2 \times 23,322.$$

Si l'on suppose que $q_1 = \frac{1}{6} q$ (ce qui revient à supposer que l'eau entraînée est le $\frac{1}{7}$ du poids total de la vapeur et de l'eau qui sortent de la chaudière), et si l'on met à la place de q_1, q_2, α, β, leurs valeurs, on trouve pour le volume du condenseur exprimé en litres,

$$q\,(574,59 + 0,474\ T)$$

que l'on pourrait facilement exprimer en fonction du volume total décrit par le piston à vapeur.

Si l'on admet d'autres rapports entre l'eau froide et l'air qu'elle contient, entre la vapeur et l'eau qu'elle entraîne, on arrivera à une autre expression pour le volume du condenseur.

Limite de l'emploi du condenseur.

283. Le but du condenseur est de diminuer la contre-pression, qui est égale à la pression atmosphérique, si la machine est sans condensation, et qui n'est que de 1/10e d'atmosphère, si la machine est à condensation. L'effet du condenseur devient nul quand, pour un tour de volant, le travail utile de la pompe à eau froide, plus celui de la pompe à air sont égaux au travail utile que la machine donne en plus quand on emploie le condenseur.

Travail utile de la pompe à eau froide et de la pompe à air.

V étant le volume de vapeur en mètres cubes dépensé par pulsation simple du piston, le volume de vapeur à condenser par tour de volant sera $\frac{21}{20} \times 2\ V$, et le poids de cette vapeur sera $\frac{21}{20} 2V$ multiplié par le poids D du mètre cube de vapeur. L'eau nécessaire pour condenser ce poids de vapeur sera :

$$\frac{21}{20} \times 2VD\,(574,59 + 0,474\ T)$$

Supposons que la pompe à eau froide doive élever l'eau à la hauteur H et que la pompe à air doive soulever l'eau de condensation à la hauteur h; le travail utile sera pour un tour de volant,

$$(1) \ldots\ldots \quad \frac{21}{20}\,VD\,(574{,}59 + 0{,}474\,T)\,(H + h).$$

Travail utile dû à la condensation.

Les pressions de la vapeur dans ce qui suit sont exprimées en kil. par mètre carré.

Si la machine est à pleine pression sans condensation, la contre-pression sera égale à la pression atmosphérique, ou à 10333 kil., et le travail utile pour un tour de volant sera : (259)

$(2) \ldots\ldots \quad 2V\,(P - 10333)\,K$; où K est le coefficient d'effet utile (§ 261).

Si la machine est à condensation, la contre-pression sera 1033 kil. (1/10 d'atmosphère), et le travail utile pour un tour de volant sera :

$(3) \ldots\ldots \quad 2V\,(P - 1033)\,K'$; où K' est le coefficient d'effet utile (§ 262).

La différence entre les deux travaux (3) et (2) est le travail utile résultant de l'emploi de la condensation. Cette différence est :

$$(4) \ldots\ldots \quad 2V\,(K\,10333 - K'\,1033) - 2V\,P\,(K - K').$$

En égalant les expressions (1) et (4) on aura une équation divisible par V, de laquelle on pourra déduire la hauteur $(H + h)$, pour laquelle l'effet du condenseur devient nul.

Pour une machine donnée, toutes les quantités des deux expressions (1) et (4) sont connues, et la différence entre (4) et (1) représente le travail utile, auquel donne lieu la condensation.

Pour une machine à détente, le travail moteur diminué de celui de la contre-pression est d'après (264) pour un tour de volant :

$$(5) \ldots\ldots \quad 2PV\left(1 + c \log \frac{P}{P_1} - \frac{P'}{P_1}\right)$$

Si la machine est à condensation, la contre-pression est égale à celle du condenseur, d'où $P' = 1033$. D'après (270) la pression P_1 est égale à la contre-pression augmentée de toutes les autres résistances de la machine marchant à vide, lesquelles sont égales à 703 par mètre carré de la surface du piston. D'après cela, $P_1 = 1033 + 703 = 1737$.

Avec ces données, l'expression (5) donne pour le travail utile en tour du volant :

$$(6) \ldots \quad 2PV\left(1 + c \log \frac{P}{1736} - \frac{1033}{1736}\right)K;$$ où K est le coefficient de l'effet utile (§ 265).

Si la machine est sans condensation on a : $P' = 10333$; $P_1 = 10333 + 703 = 11036$;
Et l'expression (5) donne pour le travail utile en un tour de volant

$$(7) \ldots\ldots \quad 2PV\left(1 + c \log \frac{P}{11036} - \frac{10333}{11036}\right)K'$$; où K' est le coefficient de l'effet utile (§ 266).

La différence entre les travaux (7) et (6) est

$$2\,PV\,[(K - K')\,(1 + c \log P) + K'\,10{,}2469 - K\,8{,}0452].$$

En égalant cette différence à l'expression (1), on aura une équation divisible par V, de laquelle on déduira la hauteur $H + h$ pour laquelle l'effet du condenseur devient nul.

La différence entre les deux expressions (8) et (1) représente, pour une machine donnée, et pour un tour du volant, le travail utile résultant de l'emploi du condenseur.

CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES D'UNE MACHINE A VAPEUR.

284. Pour calculer les dimensions d'une machine à vapeur, il faut que soient données, outre la pression de la vapeur dans la chaudière, encore deux des trois quantités suivantes : *la vitesse du piston, la course du piston, le nombre de tours du volant par minute.*

On remarquera dans ce qui suit que les dimensions d'une machine capable d'un effet utile donné, sont d'autant plus grandes que le nombre de tours du volant est plus petit.

Course du piston.

285. Pour relation entre la vitesse v du piston par seconde, la course c du piston et le nombre n de tours du volant par minute, on a, par définition :

$$\frac{n2c}{60} = v; \quad \text{d'où} \quad n = 30\frac{v}{c}; \ldots (1), \quad \text{et} \quad c = 30\frac{v}{n} \ldots (2)$$

La dernière équation donne la course, si v et n sont connus

286. **Vitesse du piston et nombre de tours du volant par minute, pour les machines à basse pression.**

FORCE EN CHEVAUX.	4 à 6	8 à 14	16 à 24	26 à 36	40 à 60	70 à 100
VITESSE	0,90	1	1,10	1,15	1,25	1,30
NOMBRE DE TOURS .	30	25 à 24	23 à 22	20 à 18	17 à 16	9,50

D'où, au moyen de l'équation (§ 285), on pourra calculer la course du piston.

287. **Vitesse et course du piston pour les machines à haute pression, à détente, avec ou sans condensation.**

FORCE EN CHEVAUX.	4 à 8	10 à 16	18 à 24	26 à 36	41 à 60	70 et au-dessus.
VITESSE	0,90	1,00	1,10	1,15	1,25	1,30

Courses pour machines sans balanciers.

FORCE EN CHEVAUX	4 à 6	8 à 10	12 à 14	16 à 18	20 à 22	24 à 26	28 à 30	36 à 40	45 à 50	61 à 70	80 à 100
COURSE. . . .	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,15	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60

Courses pour machines à balancier.

FORCE EN CHEVAUX	4 à 6	8 à 16	12 à 14	16 à 18	20 à 24	26 à 28	30 à 36	40 à 45	50 à 60	70 et au-dessus.
COURSE. . . .	0,90	1,20	1,25	1,40	1,50	1,70	1,90	2,10	2,25	2,45

De ces données on déduira, au moyen de la formule (§ 285), le nombre de tours du volant.

Longueur du balancier.

288. La longueur du balancier se détermine d'après la considération que, pour que la tige du piston décrive sensiblement une droite au moyen du parallélogramme de Watt, il faut que le balancier, dans ses deux positions extrêmes, fasse avec la position horizontale un angle qui ne dépasse pas 18°. On a ainsi pour la demi-longueur L du balancier, en représentant par c la course du piston,

$$\frac{c}{2} = \mathrm{L} \sin 18^\circ, \text{ d'où } \mathrm{L} = \frac{c}{2 \sin 18^\circ} = 2{,}5\, c.$$

Longueur de la bielle et de la manivelle.

289. On stipule que l'angle variable que la bielle fait avec la verticale ne doit pas dépasser 9°, parce que le frottement, dans les articulations de la bielle, augmente considérablement avec un angle plus grand. Cette considération conduit à la règle suivante :

La longueur de la bielle doit être égale à trois fois la course du piston, et la longueur de la manivelle est égale à la moitié de la course du piston.

Poids du volant.

290. Nous avons fait connaître les formules qui donnent le poids du volant lorsqu'on connaît l'effet utile en chevaux, la vitesse que l'on veut donner à la circonférence moyenne du volant et le nombre duquel dépend le degré de régularité du mouvement qui convient à la machine.

Diamètre moyen des volants.

291. *Pour les machines à basse pression et à balancier*, le diamètre moyen du volant est égal à 3,5 fois la course du piston.

Pour les machines à deux cylindres, détente, condensation et balancier, le diamètre moyen est égal à 3, 5 ou 4 fois la course du piston.

Pour les machines à un seul cylindre, à haute pression, avec ou sans détente, sans balancier, le diamètre moyen est égal à 4 ou 4,5 fois la course du piston.

Diamètre du cylindre.

292. L'effet utile en chevaux-vapeur étant donné, ainsi que le nombre de tours du volant, l'équation de l'effet utile de la machine donnera le volume V en mètres cubes décrit par le piston en une pulsation simple, et si r et C sont le rayon et la course du piston, on a :

$$\pi r^2 c = \mathrm{V}, \text{ d'où } r = \sqrt{\frac{\mathrm{V}}{\pi c}}$$

Si la machine est à détente, et que celle-ci commence à la n[ième] partie de la course du piston, on a

$$\pi\, r^2 c = n\mathrm{V} \;;\ldots\ \text{d'où } r = \sqrt{\frac{n\mathrm{V}}{\pi\, c}}$$

où V est le volume décrit par le piston avant la détente.

Dans ces formules, r et c sont exprimés en mètres.

293. **Nombre de tours du volant exprimé en fonction de la vitesse du piston et du rapport de la course du piston au diamètre.**

Si, après avoir remplacé par $\pi r^2 c$ le volume V décrit par le piston qui entre dans la formule de l'effet utile de la machine, on en tire le nombre de tours du volant, on aura :

$$n = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{G}\, r^2\, c}, \text{ en posant } 4{,}444\,(\mathrm{P} - \mathrm{P}')\,\pi\,\mathrm{K} = \mathrm{G}.$$

Le nombre de tours en fonction de la vitesse est d'après (285)

$$n = 30 \frac{v}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

De ces deux valeurs de n on déduit :

$$r = \sqrt{\frac{N}{30\ G\ v}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

L'équation (1) peut être mise sous la forme $n\ \frac{c}{2r} = \frac{30\ v}{2r}$, et devient, en faisant $\frac{c}{2r} = r'$, et remplaçant dans le second membre r par sa valeur (2)

$$n\ r' = 30\ v \sqrt{\frac{30\ G\ v}{N}}$$

et en remettant à la place de G sa valeur, on a

$$n = 15 \sqrt{30} \sqrt{4{,}444 \times \pi} \sqrt{\frac{(P - P')\ K\ v^3}{r' \sqrt{N}}} = 306{,}90 \sqrt{\frac{(P - P')\ K\ v^3}{r' \sqrt{N}}}$$

où P, P' expriment des pressions par centimètre carré, et qui montre que le nombre de tours augmente comme la racine carrée du cube de la vitesse du piston, et qu'il est en raison inverse du rapport de la course au diamètre.

C'est d'après cette considération que l'on fait croître la vitesse du piston avec la force de la machine, afin que le nombre de tours du volant ne devienne pas trop petit quand la force augmente. Pour le même motif, on fait varier le rapport de la course au diamètre entre les limites 3,50 et 2 ; la première a rapport aux plus petites machines et la seconde aux plus grandes.

Nous laissons trouver ce que devient la formule ci-dessus pour les machines à détente.

Pompe à eau froide.

294. Soit q en kil. ou en litres l'eau froide qu'il faut pour condenser la vapeur, qui passe dans le cylindre par tour du volant, et amener, à la température du condenseur, l'eau entraînée par la vapeur. En se donnant la course c du piston, on aura le rayon r de la pompe en égalant le volume décrit par le piston en une course simple aux 5/4 de q afin de tenir compte des fuites, ce qui donne :

$$\pi r^2\ c = \frac{5q}{4}\ ;\ \text{d'où} \quad r = \sqrt{\frac{q}{0{,}8\ \pi c}}$$

où r et c sont exprimés en décimètres.

Pompe alimentaire.

295. Le volume V décrit à pleine pression par le piston en une course simple, est donnée par la formule de l'effet utile de la machine. En ajoutant au double de ce volume celui des espaces nuisibles, on aura le volume de vapeur dépensée par tour du volant.

q étant le poids en kil. de ce volume de vapeur, on exige que la pompe alimentaire puisse refouler dans la chaudière un volume d'eau égal à $3q$ litres. D'après cela,

En se donnant la course c, on aura pour le rayon r du piston

$$\pi r^2 c = 3q; \quad \text{d'où} \quad r = \sqrt{\frac{3q}{\pi c}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

où r et c sont exprimés en décimètres.

On donne à cette pompe des dimensions trop fortes pour parer, d'un côté, à toutes les fuites de vapeur et à l'eau entraînée par la vapeur ; et, d'autre part, pour avoir égard au cas où la machine devrait marcher à une pression supérieure à celle pour laquelle elle a été calculée, ce qui arrive dans deux cas :

1° Si l'on fait marcher la machine avec une charge supérieure à sa charge normale ; ce qui a lieu dans les locomotives, en marchant à une vitesse supérieure à la vitesse normale pour laquelle elles ont été calculées.

2° Si l'on est obligé de faire marcher la machine plus vite dans le cas où elle ne ferait pas le nombre de tours pour lequel elle a été calculée ; ce qui a lieu quand le travail du frottementa été estimé trop faible.

Alimentation au moyen de l'injecteur Giffard.

296. Dans l'injecteur Giffard dont nous supposons connue la description, l'eau alimentaire entre dans la chaudière en vertu de la force vive que lui imprime la vapeur venant de la chaudière. Mais comme cette vapeur agit par choc, il en faut une quantité beaucoup plus considérable que si elle agissait par simple pression sur le piston même de la pompe alimentaire, au moyen d'un cylindre à vapeur à part.

La quantité de vapeur relativement grande qu'exige l'injecteur a pour effet de diminuer d'une manière sensible la pression de la vapeur dans la chaudière et par suite de diminuer le travail de la vapeur motrice dans le cylindre.

La chaleur contenue dans la vapeur qui ferait marcher la pompe alimentaire est perdue, puisque cette vapeur ne retourne pas dans la chaudière. Mais cette perte de chaleur occasionne dans la chaudière une dépression beaucoup moindre que la quantité beaucoup plus grande de vapeur nécessaire pour faire marcher l'injecteur.

L'injecteur fonctionne d'autant mieux que la température de l'eau froide est moins élevée. Il cesse de fonctionner quand la température de l'eau froide atteint environ 60°.

Il est utile surtout pour alimenter les machines au repos.

Pompe à air.

297. Cette pompe aspirante et soulevante devant vider le condenseur dans une course simple du piston, le volume décrit par le piston devra être égal au volume W du condenseur exprimé en litres, plus un quart du volume W pour tenir compte des fuites.

D'après cela, en se donnant la course c du piston, on aura pour le rayon r de la pompe

$$\pi r^2 c = \frac{5W}{4}, \quad \text{d'où} \quad r = \sqrt{\frac{W}{0,8\,\pi c}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

où r et c sont exprimés en décimètres.

298. *L'aire des orifices d'admission et d'émission* est ordinairement de 1/25 de la surface du piston. Mais M. Morin conseille de la prendre égale à 1/20 de l'aire du piston, ce qui faciliterait l'entrée de la vapeur mais augmenterait l'espace nuisible et par suite la dépense de vapeur. On peut éviter ce défaut en donnant aux tiroirs un peu de recouvrement du côté de l'échappement, afin que l'émission cesse plustôt et que la pression de la vapeur réduite à l'espace nuisible soit augmentée.

299. Le *Tuyaux à vapeur* doit avoir une section égale à 1/20 de la surface du piston.

300. *La valve régulatrice doit*, à l'état normal, laisser un passage libre égal au moins aux trois quarts de l'aire de la section du tuyau à vapeur ; contrairement à ce que nous avons indiqué à l'article 228.

Vérification, au moyen du calcul, de l'exactitude du coefficient d'effet utile dont on s'est servi pour faire le projet d'une machine.

301. Pour faire le projet d'une machine, on doit calculer les dimensions de ses divers organes et ainsi on peut connaître les poids de ces derniers. De plus, le projet permet de connaître les chemins décrits par les points d'application de toutes les forces. Cela posé, la machine devant faire n tours par minute, on calculera quelle doit être la pression de la vapeur dans le cylindre pour que, pour un tour du volant, le travail dû à cette pression soit égal au travail utile, plus au travail de tous les frottements pour ce même tour. Si cette pression est égale à celle qui a servi à faire le projet de la machine, le coefficient d'effet utile employé sera exact.

Calcul du travail utile et de tous les frottements pour un tour du volant.

On calculera pour un tour du volant :

1° Le travail utile t_1 ;

2° Le travail t_2, pour vaincre le frottement du tiroir et de l'excentrique qui le met en mouvement ;

3° Le travail t_3, pour vaincre les frottements du régulateur à force centrifuge ;

4° Le travail t_4, des frottements des tourillons de l'arbre du volant. Pour cela, le poids du volant doit être augmenté de celui de la résistance utile qu'on supposera agir suivant la verticale et tangiellement à la circonférence décrite par le bouton de la manivelle. Le poids du volant doit encore être augmenté de la moitié du poids de la bielle ;

5° Le travail t_5, que l'extrémité du balancier transmet à la bielle. Ce travail doit être égal à la somme de tous les travaux précédents, plus au travail du frottement du bouton de la manivelle, plus au travail du frottement de l'étrier. Pour calculer ces deux derniers travaux, on supposera l'effort que fait le balancier à son extrémité augmenté de la moitié du poids de la bielle ;

6° Le travail t_6 de la pompe à eau froide, eu égard au frottement ;

7° Le travail t_7 de la pompe alimentaire, eu égard au frottement de la boîte à étoupe et de l'articulation qui lie la tige au balancier ;

8° Le travail t_8 de la pompe à air, eu égard au frottement ;

9° Le travail t_9 du frottement du piston, du frottement de sa tige dans la boîte à étoupe et du frottement des articulations du parallélogramme de Watt. Pour calculer ces divers frottements, on pourra supposer à la vapeur la pression qui a servi à calculer la machine.

Cela posé, P étant la pression que la vapeur doit avoir dans le cylindre, et P' la contre-pression, le travail moteur, diminué de celui de la contrepression, sera

$$PV\left(1 + C\,log\,\frac{P}{P_1} - \frac{P'}{P_1}\right)$$

qu'on devra égaler à $t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9$.

Pour résoudre par rapport à P l'équation que l'on obtient, on posera :

$$C\,log\,\frac{P}{P_1} = \frac{1}{6}\left(\frac{P}{P_1}\,\frac{8\,(P - P_1)}{P + P_1} - \frac{P_1}{P}\right)$$

Si la valeur de P, que l'on déduit de l'équation en question, est égale à la pression qui a servi à faire le projet de la machine, le coefficient de l'effet utile sera exact.

Sur la distribution de la vapeur.

302. Le tiroir qui règle l'admission de la vapeur dans le cylindre et son émission au condenseur ou à l'air extérieur, reçoit son mouvement de va et vient d'un excentrique placé sur l'arbre du volant.

Les différents cas de distribution se distinguent d'une part par l'angle que la ligne des centres de l'excentrique fait avec la ligne des centres de la manivelle ; et d'autre part d'après la distance entre les arêtes extérieures, et la distance entre les arêtes intérieures des bandes du tiroir comparées aux distances entre les arêtes de même nom des lumières.

303. Examinons d'abord le cas où la ligne des centres de l'excentrique est perpendiculaire à la ligne des centres de la manivelle et où la distance entre les arêtes extérieures et la distance entre les arêtes intérieures des bandes du tiroir sont égales respectivement aux distances entre les arêtes de même nom des lumières.

Dans ce cas, le piston étant à la fin de sa course, le tiroir se trouve dans sa position moyenne, c'est-à-dire que les bandes du tiroir recouvrent exactement les lumières du cylindre ; ou, ce qui revient au même, les arêtes extérieures et intérieures des bandes du tiroir coïncident respectivement avec les arêtes de même nom des lumières.

Avec cette disposition, l'admission et l'émission commencent ensemble et au commencement de chaque course du piston pour finir ensemble à la fin de la même course.

304. *Défauts de cette disposition qui existait dans les anciennes machines.*

1° La vapeur étant admise dans le cylindre à l'instant juste où le piston est à la fin de sa course, elle met un certain temps avant d'avoir le maximum de pression, qu'elle est capable de prendre dans le cylindre ; d'où résulte une diminution du travail moteur.

2° De même, la vapeur qui a fait son effet commençant à s'en aller juste à la fin de la course du piston, met un certain temps à prendre la pression du condenseur, ou de l'air extérieur, et pendant ce temps la contrepression est plus grande que celle calculée à l'article (281).

3° La vapeur qui remplit l'espace nuisible à chaque course de piston est perdue ou à peu près, puisque au commencement de l'émission, l'espace nuisible est rempli de vapeur à une pression, toujours supérieure à celle du condenseur, tandis qu'à la fin de l'émission il se trouve rempli de vapeur à la pression du condenseur.

4° A cause que l'admission et l'émission commencent ensemble à la fin de la course du piston, il y a choc dans les articulations qui relient la tige du piston à la manivelle du volant ou au balancier.

Remarque. Pour que les lumières soient démasquées en entier par le tiroir, il faut que l'excentricité soit égale à la hauteur des lumières. Dans ce cas les lumières ne sont démasquées en entier que pendant un instant. Pour qu'elles restent démasquées en entier pendant un certain temps, il faut que l'excentricité soit plus grande que la hauteur des lumières. Mais il est à remarquer que le travail du frottement de l'excentrique et du tiroir augmente avec l'excentricité.

Avance du tiroir. — Angle d'avance.

305. Le piston étant à la fin de sa course et le tiroir dans sa position moyenne, si, sans changer la position du piston, on fait tourner, d'une crtaine quantité, dans le sens du mouvement, l'excentrique préalablement décalé, l'angle décrit par la ligne des centres de l'excentrique dans ce mouvement se nomme *l'angle d'avance*, et la quantité dont le tiroir a marché se nomme *l'avance du tiroir*.

L'excentrique dans cette nouvelle position étant recalé sur l'arbre du volant, si on le ramène dans sa position primitive, le tiroir se trouvera dans sa position moyenne, mais le piston ne se trouvera plus à la fin de sa course ; il en sera distant d'une certaine quantité qui dépend de la grandeur de l'avance du tiroir. De plus, en appelant α l'angle d'avance, la ligne des centres de l'excentrique fera, dans toutes ses positions, un angle $(90^{\circ} + \alpha)$ avec la ligne des centres de la manivelle.

L'avance du tiroir a pour effet d'ouvrir à la fois les lumières d'admission et d'émission un peu avant la fin de la course du piston, et à partir de la position moyenne du tiroir.

306. *Avantage de l'avance à l'émission.*

La vapeur qui a fait son effet commençant à s'en aller au condenseur un temps suffisant avant la fin de la course du piston, pour avoir pris la pression du condenseur à l'instant du retour du piston, il en résulte que la contre-pression est notablement moindre que dans le cas où il n'y a pas d'avance.

307. *Défaut de l'avance à l'admission.*

1° La vapeur étant admise avant la fin de la course du piston aura, à l'instant du retour de ce dernier, le maximum de pression qu'elle peut prendre dans le cylindre, ce qui est un avantage ; mais l'expérience prouve que l'avance nécessaire à l'émission est trop grande pour l'admission et que l'effet nuisible produit par cette trop grande avance n'est pas compensé par l'avantage qui en résulte. Nous verrons plus loin comment, tout en conservant l'avance convenable à l'émission, on peut retarder l'admission au moyen du recouvrement dont il sera parlé plus loin.

2° Par les mêmes raisons exposées à l'article (304, n° 3), la vapeur qui remplit l'espace nuisible à chaque course du piston est perdue.

3° L'admission commençant en même temps que l'émission, il y a choc dans les articulations qui relient la tige du piston à la manivelle du volant ou au balancier.

308. *Grandeur de l'avance à l'émission ou grandeur de l'angle d'avance.*

L'avance à l'émission peut être déterminée théoriquement comme il suit :

Le cylindre étant rempli de vapeur à une pression connue (celle que possède la vapeur au moment où l'émission commence), supposons que l'on ait calculé le temps t que la vapeur met à prendre la pression du condenseur, en se rendant dans ce dernier par la lumière d'émission dont la moitié seulement est supposée démasquée. Cela posé, si v est la vitesse du piston, supposée uniforme, l'émission devra commencer quand le piston sera distant de la fin de sa course d'une quantité égale à vt.

La formule qui donne le temps montre que l'avance à l'émission dépend de la pression de la vapeur dans le cylindre, de celle dans le condenseur et de la vitesse du piston.

D'après M. Morien, un angle d'avance de 20 à 25° serait plus que suffisant pour les machines fixes, mais trop petit pour les locomotives. Aussi chez nous, si nos informations sont exactes, l'angle d'avance pour les locomotives est de 29°.

309. **Avance avec recouvrement du côté de l'admission ou recouvrement extérieur.**

Le but du recouvrement du côté de l'admission est de retarder l'admission ; c'est-à-dire de faire commencer celle-ci plus tard que l'émission.

Il y a recouvrement du côté de l'admission lorsque dans la position moyenne du tiroir, c'est-à-dire lorsque, les arêtes intérieures du tiroir coïncidant avec les arêtes intérieures des lumières, les arêtes extérieures des bandes du tiroir dépassent d'une certaine quantité, les arêtes extérieures des lumières. Cette quantité est appelée *recouvrement du côté de l'admission* ou *recouvrement extérieur*.

Remarque. Pour que les lumières d'admission soient démasquées en entier par le tiroir, il faut que l'excentricité soit égale au recouvrement extérieur augmenté de la hauteur des lumières, cela étant, les lumières d'émission resteront démasquées en entier pendant un certain temps, deux fois le temps que le tiroir met à parcourir le recouvrement après avoir parcouru, à partir de sa position moyenne, un chemin égal à la hauteur des lumières.

310. *Les effets du recouvrement extérieur sont :*

1° Il retarde l'admission de la vapeur, puisque le tiroir, à partir de sa position moyenne, doit décrire un chemin égal au recouvrement, avant de démasquer la lumière.

2° Il diminue la durée de l'admission, puisque, à partir de sa position moyenne, le tiroir, dont le temps de la course reste le même, se meut d'une quantité égale au recouvrement

avant de démasquer la lumière, et se meut de la même quantité, après que la lumière d'admission est déjà fermée.

Pour les mêmes raisons, la durée de l'émission est également diminuée.

3° L'admission ayant cessé d'un côté, l'émission ne commence du même côté que lorsque le tiroir, à partir de sa position moyenne, a décrit un chemin égal au recouvrement ; et, pendant ce temps, la vapeur agit par détente.

4° De même l'émission ayant cessé d'un côté, l'admission ne commence, du même côté, que lorsque le tiroir, à partir de sa position moyenne, a décrit un chemin égal au recouvrement et, pendant ce temps, la vapeur qui reste dans le cylindre quand l'émission cesse, est comprimée.

Si le recouvrement est égal à l'avance du tiroir, la vapeur arrive sur le piston quand celui-ci est juste à la fin de sa course.

Si le recouvrement est tant soit peu plus petit que l'avance, la vapeur arrive sur le piston avant la fin de la course de ce dernier ; c'est ce que nous supposons dant tout ce qui suit.

Le recouvrement ne peut pas être plus grand que l'avance du tiroir ; autrement, la vapeur serait admise dans le cylindre, alors que le piston aurait déjà décrit un certain volume que la vapeur viendrait combler en pure perte et avec choc ; ce qui occasionnerait la condensation d'une portion de vapeur.

311. *Avantages du recouvrement extérieur.*

1° La vapeur agit par détente pendant une portion de la course du piston.

2° Le travail nuisible effectué par la vapeur qui arrive sur le piston avant la fin de sa course, est moindre que dans le cas où l'admission commencerait en même temps que l'émission.

3° De ce que l'émission commence d'un côté en même temps que la compression du côté opposé, il en résulte que la force vive du piston est anéantie avant la fin de sa course et que les contacts dans les articulations dont il a été question changent par degrés et non brusquement comme dans le cas d'une avance du tiroir sans recouvrement ; le choc dans les articulations en question est donc évité.

4° L'effet nuisible de la compression de la vapeur qui ne peut se rendre au condenseur, quand l'émission cesse, est en partie compensé en ce que, à l'instant où la lumière d'admission s'ouvre, l'espace nuisible se trouve rempli de vapeur comprimée à une pression à peu près égale à la plus grande pression que la vapeur prend dans le cylindre. On gagne donc à chaque course du piston la vapeur qui, dans le cas de l'article (304, 3°), était perdue par l'espace nuisible.

5° De plus la vapeur, depuis l'instant où elle commence, d'un côté du piston, à se rendre dans le condenseur, aide à comprimer, jusqu'à la fin de la course du piston, celle qui se trouve de l'autre côté du piston.

312. *Grandeur du recouvrement extérieur.*

L'avance laissée à l'admission par le recouvrement extérieur serait nulle, (ou le recouvrement égal à l'avance du tiroir) si la pression de la vapeur d'émission supposée réduite à l'espace nuisible pouvait atteindre le maximum de pression que la vapeur motrice prend dans le cylindre. Après cela, l'avance laissée à l'admission (ou la différence entre l'avance du tiroir et le recouvrement extérieur) sera d'autant plus grande que la pression que la vapeur comprimée prend vers la fin de la course, s'éloigne davantage du maximum de pression, que la vapeur motrice prend dans le cylindre.

L'admission doit commencer dans les machines sans condensation lorsque le piston a encore à parcourir 1/700 environ de sa course pour être à la fin de sa course.

Dans les machines à condensation l'admission doit commencer plus tôt. C'est ainsi que dans les machines à basse pression, elle doit commencer quand le piston a encore 1/40 de sa course à parcourir.

313. *Condition pour que la pression de la vapeur comprimée vers la fin de la course du piston soit égale à la plus grande pression que la vapeur motrice prend dans le cylindre.*

Comme l'avance laissée à l'admission par le recouvrement extérieur est dans tous les cas très-petite, on pourra supposer que la vapeur, qui reste dans le cylindre quand l'émission cesse, doive être réduite dans l'espace nuisible. Cela posé :

Soit x le chemin en mètre que le piston a encore à parcourir pour être à la fin de sa course, au moment où l'émission cesse : (ce qui a lieu dans la position moyenne du tiroir).

Soit P' la pression de la vapeur quand l'émission cesse (pression toujours un peu supérieure à celle du condenseur), P la plus grande pression que la vapeur motrice prend dans le cylindre.

En prenant pour l'espace nuisible 1/20 du volume décrit par le piston en une course l, et en considérant la vapeur qui reste dans le cylindre quand l'émission a cessé, comme de la vapeur détendue, on pourra supposer qu'en la comprimant elle suit la loi de Mariotte, et on trouvera que :

$$x = 1/20 \; l \times \frac{P - P'}{P'} = \frac{1}{20} l \left(\frac{P}{P'} - 1 \right)$$

pour que la pression de la vapeur comprimée soit égale à P'.

La formule montre que dans les machines à condensation, la compression doit commencer plus tôt que dans les machines sans condensation, c'est-à-dire que l'angle d'avance dans les premières doit être plus grand que dans les secondes.

Remarque Nous verrons plus loin par le calcul que, pour les angles d'avance et les recouvrements consacrés en pratique, la limite de pression P n'est pas atteinte ; c'est-à-dire que la portion de la course du piston, pendant laquelle a lieu la compression, est plus petite que la valeur de x calculée plus haut.

Pour, avec un même angle d'avance, faire commencer la compression plus tôt, ou ce qui revient au même, pour faire cesser l'émission plus tôt, il faudra recourir au recouvrement intérieur dont nous allons parler.

314. Avance avec recouvrement extérieur et recouvrement intérieur.

Avec le recouvrement extérieur, quand l'émission cesse d'un côté, elle commence aussitôt de l'autre côté ; et toujours avant la fin de la course du piston.

La vapeur du côté où commence l'émission ne doit prendre la pression du condenseur que quand le piston est à la fin de sa course, par la raison que la vapeur, depuis le commencement de l'émission jusqu'à la fin de la course du piston, aide à comprimer celle qui se trouve du côté où l'émission a cessé.

Cela posé, si l'on veut obtenir, au moyen du recouvrement extérieur, une détente notable, il faudra un grand recouvrement extérieur qui, à son tour, exige une grande avance. Mais, avec une avance plus grande que celle qui convient à l'émission, celle-ci commence trop tôt, c'est-à-dire que la vapeur qui se rend au condenseur aura pris la pression du condenseur, avant la fin de la course du piston, ce qui est un défaut ; et c'est pour retarder l'émission qu'on donne du recouvrement intérieur.

Il y a recouvrement du côté de l'émission lorsque, dans la position moyenne du tiroir, la distance des arêtes intérieures des bandes du tiroir est plus petite que la distance des arêtes intérieures des lumières. La quantité dont une arête intérieure d'une bande dépasse l'arête intérieure de la lumière voisine se nomme *recouvrement du côté de l'émission* ou *recouvrement intérieur.*

315. *Effets du recouvrement intérieur.*

1° L'effet du recouvrement intérieur est de faire commencer l'émission plus tard et de la faire cesser plus tôt que cela n'a lieu sans recouvrement intérieur.

Et comme la compression commence quand l'émission finit, on peut dire que la compression commence plus tôt ou plus tard, selon que le recouvrement intérieur est plus grand ou plus petit.

2° Il en résulte que le volume de vapeur à comprimer, qui reste dans le cylindre après que l'émission a cessé, est plus grand que celui qui est à comprimer s'il n'y a pas de recouvrement intérieur ; en d'autres termes, le recouvrement intérieur augmente la durée de la compression.

3° Avec le recouvrement intérieur quand l'émission cesse d'un côté, elle ne commence que plus tard de l'autre côté.

4° De plus, l'émission ne commence plus à partir de la position moyenne du tiroir, mais bien après que celui-ci, à partir de sa position moyenne, a décrit un chemin égal au recouvrement intérieur.

5° Le recouvrement intérieur augmente la détente ; car, lorsque l'admission cesse, la détente commence et dure jusqu'à ce que le tiroir ait parcouru un chemin égal au recouvrement extérieur et au recouvrement intérieur. De sorte que la pression, que possède la vapeur quand l'émission commence, est moindre que lorsqu'il n'y a pas de recouvrement intérieur.

316. *Quand il faut employer le recouvrement intérieur.*

1° Le recouvrement intérieur est indispensable si, dans le but d'augmenter la détente, on emploie un angle d'avance plus grand que celui qui convient à l'émission.

Dans ce cas, α étant l'angle d'avance qui convient à l'émission, pour que, avec un angle d'avance α' plus grand que α ; l'émission ne commence pas plus tôt qu'avec l'angle α, il faut que le recouvrement intérieur soit égal au chemin que le tiroir décrit, à partir de sa position moyenne, pendant que la ligne des centres de l'excentrique décrit un angle $(\alpha' - \alpha)$.

2° Si, avec un angle d'avance qui convient à l'émission, on veut augmenter la pression de la vapeur comprimée, si cela est jugé nécessaire.

3° A cause de l'obliquité de la bielle, la pression de la vapeur comprimée n'étant pas la même à droite qu'à gauche du piston, on doit donner du recouvrement intérieur, seulement du côté où la pression de la vapeur comprimée est plus petite.

4° Si le cylindre est vertical, on peut donner un peu de recouvrement intérieur seulement du côté où le piston descend, alors surtout que le poids du piston et de sa tige ne serait pas équilibré par un contre-poids ajouté à la jante du volant.

Remarque. M. Morin fait remarquer que par l'effet de l'inégalité de dilatation des tiroirs et des cylindres, et par celui des flexions des pièces de transmission dans les changements de direction de mouvements si brusques dans les locomotives, ainsi que par le jeu qui s'accroît dans les articulations, les avances réglées au repos ne sont pas les avances en marche. Il sera donc nécessaire de vérifier l'état de la réglementation pendant la marche.

Remarque. Comme la durée de l'émission est diminuée, il est important que la lumière d'émission soit démasquée en entier par le tiroir ; or si cela a lieu pour la lumière d'admission, il aura lieu à plus forte raison pour la lumière d'émission. (Remarque 309).

Sur un modèle que nous avons fait construire pour le musée de mécanique, on peut faire varier à volonté l'avance et les deux recouvrements ; d'autre part des modèles pour montrer les diverses détentes nous dispensent d'entrer dans aucun détail à ce sujet.

317. **Calcul des chemins parcourus par le piston au commencement et à la fin tant de l'admission que de l'émission ; dans l'hypothèse que le recouvrement intérieur est nul, et que le recouvrement extérieur est égal à l'avance du tiroir.**

Supposons le cylindre horizontal ; l'arbre de la manivelle et de l'excentrique, à droite du cylindre et tournant de gauche à droite.

Représentons par λ la ligne des centres de l'excentrique ; par r, la manivelle qui commande la tige du piston au moyen d'une bielle b ; et par α l'angle d'avance.

Dans toutes les positions, λ faisant avec r un angle constant $(90^\circ + \alpha)$, il est facile de construire ou de calculer la position qu'occupe λ pour une position donnée de r ;

Remarques préalables. 1° Chaque fois que λ se trouve dans la verticale positive ou négative, le tiroir est dans sa position moyenne, et l'émission commence d'un côté et cesse du côté opposé.

2° Pour deux positions de λ, symétriques par rapport à l'horizontale, le tiroir occupe la même position.

3° Chaque fois que r est dans l'horizontale positive ou négative, le piston est à la fin de sa course.

4° Pour deux positions de r, symétriques par rapport à l'horizontale, le piston occupe la même position.

5° D'après (2°) connaissant les positions de λ pour lesquelles l'admission et l'émission commencent d'un côté, on peut conclure celles pour lesquelles l'admission et l'émission cessent du même côté.

Commencement et fin de l'admission à gauche.

Le recouvrement étant égal à l'avance du tiroir, l'admission commence du côté gauche quand le piston est à la fin de sa course du même côté. Dès lors, r est dans l'horizontale négative, et λ fait un angle α avec la verticale positive, et à droite de celle-ci. Donc, d'après la remarque (5°) l'admission cesse quand λ fait un angle α avec la verticale négative à droite de celle-ci.

Commencement et fin de l'admission à droite du piston.

L'admission commence du côté droit quand le piston est à la fin de sa course du même côté et fait un angle α avec la verticale négative et à gauche de celle-ci.

Donc d'après la remarque (5°) l'admission cesse quand λ fait un angle α avec la verticale positive et à gauche de celle-ci.

Commencement et fin de l'émission à droite et à gauche.

D'après la remarque (2°) il suffit de savoir que l'émission commence à droite quand λ est dans la verticale positive, et qu'elle commence à gauche quand λ est dans la verticale négative.

Compression et détente à gauche.

Compression à gauche. Quand λ est dans la verticale positive, le tiroir est dans sa position moyenne, l'émission cesse à gauche et la compression y commence; r fait avec l'horizontale négative et en dessous de celle-ci un angle α, et la bielle un angle β. On trouve que

Quand l'émission cesse à gauche, le chemin A, *que le piston a encore à décrire pour être à la fin de sa course, est donné par la formule*

$$A = r(1 - \cos\alpha) + b(1 - \cos\beta), \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\text{avec la relation} \quad . \quad . \quad b \sin\beta = r \sin\alpha. \quad . \quad . \quad (2)$$

Le volume à comprimer sera, en représentant par a la base du piston et en comptant que l'espace nuisible est 1/20 du volume décrit par le piston en une course entière $2r$:

$$\text{volume à comprimer} = a\left(A + \frac{r}{10}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Le travail pour comprimer ce volume et le réduire à l'espace nuisible est : en représentant par P_0 la pression de la vapeur quand l'émission cesse.

$$aP_0\left(A + \frac{r}{10}\right) \text{clog} \left(\frac{A}{r} + 1\right). \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

La pression que possède le volume (3) réduit à l'espace nuisible est

$$\left(10\frac{A}{r} + 1\right)P_0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Détente à gauche. Quand λ fait un angle α avec la verticale positive et à droite de celle-ci, le piston est à la fin de sa course du côté gauche et l'admission commence du même côté.

Quand λ fait de nouveau un angle α avec la verticale négative et à droite de celle-ci, l'admission cesse, la détente commence, r fait alors un angle 2α avec l'horizontale positive et au-dessus de celle-ci, et la bielle, un angle β'. L'on trouve que

Le chemin B *décrit par le piston quand l'admission cesse à gauche, et que la détente commence, est*

$$B = r(1 + \cos 2\alpha) + b(1 - \cos\beta'). \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\text{avec la relation :} \quad . \quad . \quad b \sin\beta' = r \sin 2\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Le travail effectué à pleine pression par la vapeur est, en représentant par P la pression de la vapeur avant la détente :

$$\text{travail à pleine pression} = B\,a\,P. \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Le volume occupé par la vapeur quand l'admission cesse et que la détente commence, est, eu égard à l'espace nuisible :

$$\text{volume avant la détente} = a\left(B + \frac{r}{10}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Quand λ est dans la verticale négative, l'émission commence à gauche et la détente cesse du même côté; r fait un angle α avec l'horizontale positive, et au-dessus de celle-ci, et la bielle un angle β; et l'on trouve que

Le chemin C *décrit par le piston quand la détente cesse à gauche, est*

$$C = r(1 + \cos\alpha) + b(1 - \cos\beta). \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Et le volume occupé par la vapeur quand la détente cesse est, eu égard à l'espace nuisible :

$$\text{volume après la détente} = a\left(C + \frac{r}{10}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Le travail dû à la détente est § 141 :

$$P\,a\left(B + \frac{r}{10}\right) \text{clog} \frac{10\,C + r}{10\,B + r} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

La pression de la vapeur à la fin de la détente est :

$$\text{pression à la fin de la détente} = P\left(\frac{10\,B + r}{10\,C + r}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Compression et détente à droite.

Compression à droite. Quand λ coïncide avec la verticale négative, le tiroir est dans sa position moyenne, l'émission cesse à droite et la compression commence de ce côté ; r fait un angle α avec l'horizontale négative et au-dessus de celle-ci, et la bielle un angle β.

Le chemin A' *que le piston a à décrire pour être à la fin de sa course, est égal à* $2r$ *diminué du chemin déjà décrit par le piston* ; ce qui donne

$$A' = r(1 - \cos\alpha) - b(1 - \cos\beta). \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$\text{avec la relation : } \quad . \quad . \quad b \sin\beta = r \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Le volume à comprimer est, eu égard à l'espace nuisible :

$$\text{volume à comprimer} = a\left(A' + \frac{r}{10}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Le travail pour comprimer ce volume, et le réduire à l'espace nuisible est, en représentant par P_1 la pression de la vapeur quand l'émission cesse à droite,

$$P_1 A' a \ c\log \frac{10\,A' + r}{r} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

La pression que possède le volume (16) réduit à l'espace nuisible est égale à

$$\left(10\,\frac{A'}{r} + 1\right) P_1 \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Détente à droite. Quand λ fait un angle α avec la verticale négative et à gauche de celle-ci, le piston est à la fin de sa course (ou r coïncide avec l'horizontale), et l'admission commence à droite.

Quand λ fait avec la verticale positive et à gauche de celle-ci un angle α, l'admission cesse ; r fait un angle 2α avec l'horizontale négative et en dessous de celle-ci, et la bielle un angle β' ; et l'on trouve que

Le chemin B' *décrit par le piston, quand l'admission cesse à droite, est*

$$B' = r(1 + \cos 2\alpha) - b(1 - \cos\beta' 1) \quad . \quad . \quad (19)$$

$$\text{avec la relation : } b \sin\beta' = r \sin 2\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Le travail effectué à pleine pression est

$$B' a P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Le volume occupé par la vapeur quand l'admission cesse et que la détente commence est, eu égard à l'espace nuisible :

$$\text{volume avant la détente} = a\left(B' + \frac{r}{10}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Quand λ est dans la verticale positive, l'émission commence à droite et la détente cesse à droite ; r fait avec l'horizontale positive et en dessous de celle-ci un angle α et la bielle un angle β ; et l'on trouve que

Le chemin C' *décrit par le piston, quand la détente cesse à droite, est*

$$C' = r(1 + \cos\alpha) - b(1 - \cos\beta) \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$\text{avec la relation : } \quad . \quad . \quad b \sin\beta = r \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

et le volume occupé par la vapeur quand la détente cesse est, eu égard à l'espace nuisible :

$$\text{volume après la détente} = a\left(C' + \frac{r}{10}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

On a d'après (§ 141) pour le travail dû à la détente :

$$Pa\left(B' + \frac{r}{10}\right) c\log \frac{10\,C' + r}{10\,B' + r} \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Pour la pression de la vapeur à la fin de la détente , on a :

$$\text{pression à la fin de la détente} = P\left(\frac{10\,B' + r}{10\,C' + r}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Dans ce qui précède les pressions sont données par mètre carré , la base du piston en mètres carrés, et les autres quantités en mètres.

Applications des formules précédentes dans l'hypothèse que $b = 5\,r$.

1° $\alpha = 19°$

$A = 2r \times 0{,}03254$; $B = 2r \times 0{,}94412$; $C = 2r \times 0{,}97806$; $C - B = 2r \times 0{,}06394$
$A' = 2r \times 0{,}02194$; $B' = 2r \times 0{,}87387$; $C' = 2r \times 0{,}96746$; $C' - B' = 2r \times 0{,}09359$

2° $\alpha = 24°$.

$A = 2r \times 0{,}051475$; $B = 2r \times 0{,}859765$; $C = 2r \times 0{,}965015$; $C - B = 2r \times 0{,}105250$
$A' = 2r \times 0{,}034985$; $B' = 2r \times 0{,}809365$; $C' = 2r \times 0{,}948525$; $C' - B' = 2r \times 0{,}139160$

3° $\alpha = 29°$.

$A = 2r \times 0{,}07443$; $B = 2r \times 0{,}80110$; $C = 2r \times 0{,}94905$; $C - B = 2r \times 0{,}13795$
$A' = 2r \times 0{,}05095$; $B' = 2r \times 0{,}72882$; $C' = 2r \times 0{,}92557$; $C' - B' = 2r \times 0{,}19675$

4° $\alpha = 33°$.

$A = 2r \times 0{,}09555$; $B = 2r \times 0{,}7454$; $C = 2r \times 0{,}9342$; $C - B = 2r \times 0{,}1888$
$A' = 2r \times 0{,}0658$; $B' = 2r \times 0{,}66130$; $C' = 2r \times 0{,}90445$; $C' - B' = 2r \times 0{,}24315$

Nous laissons au lecteur le soin d'introduire ces diverses valeurs dans les formules précédentes.

MACHINE D'EXTRACTION.

Données. L profondeur du puits; q poids d'une tonne vide; Q poids de la charge utile; t temps pendant lequel doit s'effectuer l'ascension de la charge utile; — donc la vitesse moyenne, durant l'ascension, est égale au rapport de L sur t.

Connaissant L, q et Q, les formules A (page 115) font connaître la section transversale de la corde. Cette section servira à trouver le poids p du mètre courant. Et en donnant la largeur de cette section, on connaîtra son épaisseur e.

Les quantités L, q, Q, p, e, étant connues, la formule (A) page (115) fera connaître le rayon moyen ρ des bobines à la rencontre des tonnes (abstraction faite des résistances passives).

Cette première valeur de ρ permettra d'en calculer une seconde en ayant égard à toutes les résistances passives, comme nous l'avons indiqué à l'article (225).

Avec cette seconde valeur du rayon moyen, la formule B (111) fera connaître le nombre n de tours que l'arbre des bobines doit effectuer pour opérer l'ascension de la charge Q, depuis le fond du puits jusqu'au jour.

Calcul des dimensions du cylindre à vapeur.

Les dimensions de la machine doivent être calculées pour résister au plus grand effort qu'elle a à faire. Or cela a lieu au départ des tonnes parce que alors la différence des moments des deux tonnes est la plus grande.

Représentons par M cette dernière différence, et supposons que la bielle de la machine agit directement sur la manivelle de l'arbre des bobines; auquel cas, à chaque tour de la machine, correspond un tour des bobines.

Si r est la longueur de la manivelle et w la vitesse que l'on veut donner au piston, on aura :

$$n\,4\,r = w\,t$$

d'où l'on déduit pour la course $2\,r$ du piston :

$$2\,r = \frac{wt}{2\,n} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

X étant la force agissant tangentiellement à la circonférence décrite par le bouton de la manivelle et capable de faire équilibre à la différence des moments M, on a :

$$X\,r = M$$

et le travail de X pour un tour de l'arbre des bobines sera $2\,\pi\,r\,X$ ou

$$2\,\pi\,M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

En représentant par P la pression par mètre carré de la vapeur dans le cylindre; par P', la contrepression; par a m q, la base du piston; par K, le coefficient de l'effet utile, on aura pour le travail transmis par la machine à l'arbre des bobines en un tour ou révolution :

$$4ra\,(P - P')\,K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

En égalant les deux expressions (2) et (3), il vient :

$$2ra\,(P - P')\,K = \pi\,M\,; \quad \text{d'où} \quad a = \frac{\pi\,M}{2\,r\,(P - P')\,K} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

La chaudière devra être calculée pour produire dans le temps t un volume de vapeur égal à

$$n4ar \text{ mètres cubes.}$$

Les machines d'extraction sont à pleine pression sans condensation, et la valeur de K peut être portée à 0,70.

MACHINE D'ÉPUISEMENT A TRACTION DIRECTE (1).

Problème de la descente de la maîtresse-tige.

318. *On demande:* 1° *que la maîtresse-tige, en descendant, arrive à la fin de sa course avec une vitesse nulle*; 2° *que la plus grande vitesse qu'elle acquiert, en descendant, ne dépasse pas une limite assignée d'avance.*

Notations. — Q poids ou kilogrammes de la maîtresse-tige, des pistons plongeurs et autres attachés à la maîtresse-tige. Q' contrepoids agissant à la même distance du point d'appui que la maîtresse-tige. De cette manière, les vitesses de Q et Q' seront égales.

a, base en mètres carrés des pistons plongeurs.

λ, Nombre de pistons plongeurs.

a, section des tuyaux de refoulement, la même que celle des plongeurs.

a', base en mètres carrés du piston de la pompe aspirante et soulevante. (Cette pompe n'effectue aucun travail utile lors de la descente de la maîtresse-tige).

Remarque. Les bases a, a', dans tout ce qui suit, sont supposées multipliées par 1000.

h, distance en mètres entre les bases inférieures de deux corps de pompe consécutifs.

L, course de la maîtresse-tige et des pistons plongeurs. Le tuyau de refoulement de

(1) Un modèle que possède le Musée de mécanique nous dispense de faire la description de la machine.

chaque corps de pompe est prolongé jusqu'au niveau de la base supérieure du corps de pompe qui suit immédiatement, à l'exception du tuyau qui refoule l'eau à la surface. En refoulant ainsi l'eau jusqu'à la base supérieure de chaque corps de pompe, l'aspiration de l'eau, lors de la montée de la maîtresse-tige, se fait plus facilement, et la quantité d'air qui peut se dégager de l'eau aspirée, est diminuée.

On suppose que l'eau est refoulée par le bas de chaque corps de pompe.

F, frottement et résistances passives de toute espèce, exprimés en kil., qui ont lieu dans la descente de la maîtresse-tige, et dont l'ensemble peut être estimé au quart du poids des colonnes d'eau à refouler.

319. *Résultante de toutes les forces qui agissent dans la descente de la maîtresse-tige après un chemin* x *parcouru par cette dernière.*

1° La force verticale qui agit de haut en bas sur les bases de tous les pistons est

$$Q - Q' \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

2° La pression verticale de l'eau contre les bases des pistons plongeurs et qui agit de bas en haut est égale à

$$\lambda a(h - L + 2x) + F - ax \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Le dernier terme ax provient de ce que le premier tuyau verse continuellement son eau à la surface et ne la conserve pas, comme les autres.

La résultante des forces verticales (1) et (2) après un chemin x parcouru est :

$$\text{Résultante} = Q - Q' - \lambda\, a\,(h - L) - F - ax\,(2\,\lambda - 1) \quad \ldots \quad (3)$$

$$\text{En posant : } Q - Q' - \lambda\, a\,(h - L) - F = n \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$(2\,\lambda - 1)\,a = b \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\text{La résultante sera : } \quad n - bx \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

320. *Masses dont la résultante* (6) *a à vaincre l'inertie.*

D'après les hypothèses faites, toutes les masses mises en mouvement ayant la même vitesse, on peut les considérer comme réunies ensemble et on a pour leur somme M, après un chemin x parcouru, en faisant abstraction de la quantité d'eau ax refoulée à la surface par le premier tuyau :

$$M = \frac{Q + Q' + \lambda\, a\,(h + L)}{g} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

321. *Travail de la résultante.*

Le travail de la résultante (6) pour un chemin x parcouru est

$$nx - \frac{bx^2}{2}$$

En nommant V la vitesse acquise par l'eau, et V_0 la vitesse moyenne avec laquelle l'eau a été refoulée à la surface par la première pompe, on a, entre le travail de la résultante et la force vive imprimée, la relation :

$$n\,x - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\,M\,V^2 + \frac{1}{2}\,\frac{ax}{g}\,V_0^{\,2} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

322. *Vitesse maximum.*

Cette vitesse a lieu lorsque la résultante (4) est nulle (c'est-à-dire lorsque toutes les forces se font équilibre), ce qui donne, en désignant par x_1 le chemin décrit à l'instant de la plus grande vitesse :

$$n - bx_1 = o\,; \qquad \text{d'où} \quad x_1 = \frac{n}{b} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

En substituant cette valeur de x_1 à la place de x dans (8), il vient pour la plus grande vitesse, que nous représenterons par V'.

$$\frac{n^2}{b} = MV'^2 + \frac{a}{g}\,\frac{n}{b}\,V^2_0, \text{ où l'on peut supposer } V_0 = 1/2V' \quad \ldots \quad (10)$$

323. *Condition pour que la vitesse de la maîtresse-tige soit nulle à la fin de la course.*

D'après (§ 196), cette condition est exprimée par l'équation :

$$n\,L - b\,\frac{L^2}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{a}{g}\,V^2_0 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Cette équation donne la valeur de n et par suite celle de (Q — Q'), pour que la vitesse de la maîtresse-tige arrive à la fin de sa course avec une vitesse nulle.

n étant connu, l'équation (7) donne la vitesse maximum lorsque la somme M des masses sera connue, et comme cette somme peut être augmentée indéfiniment sans altérer la différence (Q — Q'), puisqu'il suffit pour cela d'augmenter Q et à Q' d'une même quantité, il en résulte qu'on peut diminuer à volonté la vitesse maximum que prend la maîtresse-tige dans la descente.

Mais comme le problème de la montée de la maîtresse tige, ainsi que nous le verrons, donne la somme (Q + Q'), et que la valeur de celle-ci est en général considérable, surtout si l'on marche à détente, il s'ensuit que la vitesse maximum dans la descente, loin d'être trop grande, est au contraire trop petite, et qu'il y a lieu en général de recourir à un moyen d'augmenter cette vitesse, afin de pouvoir augmenter le nombre de pulsations de la machine par minute.

325. *Temps de la descente de la maîtresse tige.*

Ce temps peut se déterminer de la manière qu'il est indiqué à la page (126).

On pourrait aussi trouver ce temps par le théorème de Sympson (§ 148), en divisant la course L, en un nombre pair de parties égales, et en cherchant au moyen de la formule (8) la vitesse à chaque point de division, etc., etc.

326. *Moyen d'accélérer la descente de la maîtresse-tige.*

Si l'on veut accélérer la descente de la maîtresse-tige, il faudra ajouter un poids supplémentaire q à son poids Q; mais alors elle ne peut plus arriver à la fin de sa course avec une vitesse nulle; ce qui donnerait lieu à un choc et à un bris inévitable de la machine.

Pour éviter ce choc, il faut anéantir vers la fin de la course une portion de la force vive de la maîtresse-tige. Le moyen employé à cet effet consiste à fermer la soupape d'équilibre et à ouvrir celle de décharge à une certaine distance de la fin de la course. De cette manière le piston obligé de comprimer la vapeur qui se trouve en dessous de lui et que nous nommerons le matelas de vapeur, sa vitesse s'éteint graduellement de manière à être nulle à la fin de la course.

327. *Inconvénients du moyen précédent.*

1° Il y a d'abord une perte de travail qL, pour remonter le poids additionnel q à la hauteur L. Mais cette perte est compensée en ce que, la descente se faisant plus vite, on pourra faire faire à la même machine un plus grand nombre de pulsations par minute, en dépensant, bien entendu, un plus grand travail moteur.

2° Le piston à vapeur étant obligé de comprimer le matelas de vapeur, sa vitesse se ralentit, tandis que les colonnes d'eau, qui ne sont pas invariablement reliées aux pistons plongeurs, continuent leur mouvement ascensionnel, en vertu de la vitesse acquise; il résulte de là qu'il se forme un vide dans chaque corps de pompe, vide en faveur duquel les soupapes d'aspiration s'ouvrent, et les corps de pompe s'emplissent de nouveau.

Ceci explique comment chaque plongeur peut refouler un volume d'eau tant soit peu plus grand que celui décrit par la base du plongeur.

Pendant tout le temps que dure l'aspiration de l'eau, la pression atmosphérique se fait sentir sur la base supérieure de chaque plongeur et sur le sommet de chaque colonne d'eau refoulée.

La pression atmosphérique sur les sommets des colonnes d'eau, pendant le temps que

dure l'aspiration, a pour effet d'empêcher l'eau de monter aussi haut qu'elle le ferait sans l'intervention de cette pression, et par là de diminuer la quantité d'eau aspirée.

La pression atmosphérique sur la base supérieure de chaque plongeur, pendant le temps que dure l'aspiration, a pour effet d'accélérer la vitesse de la maîtresse-tige. Cette accélération à son tour a pour effet de fermer brusquement et avec choc les soupapes d'aspiration. Ce n'est que lorsque les soupapes d'aspiration sont fermées que l'influence de la pression atmosphérique cesse.

328. *Moyen que nous proposons pour éviter les inconvénients qui résultent du vide qui se forme dans les corps de pompe, par suite de la compression du matelas de vapeur.*

Laissant ce qu'il est le premier tuyau de refoulement qui part du premier corps de pompe et qui verse son eau à la surface, supposons que le tuyau de refoulement qui part de chacun des autres corps de pompe soit prolongé au delà de la base inférieure du corps de pompe qui suit d'une quantité l plus grande que L, et fermons hermétiquement chaque tuyau à sa partie supérieure. Par ce procédé, l'eau en montant dans chaque tuyau est obligée de comprimer l'air qui s'y trouve renfermé, et par là les colonnes d'eau pendant le refoulement ne pouvant quitter les bases des plongeurs, l'aspiration de l'eau dont il a été question est évitée. D'un autre côté le travail du poids additionnel q, employé à comprimer l'air dans la descente de la maîtresse-tige, est restitué intégralement par la détente de l'air comprimé lors de la montée de cette dernière.

Tout revient donc à déterminer l et q de façon que la maîtresse-tige arrive à la fin de sa course avec une vitesse nulle.

329. *Résultante des forces dans l'hypothèse précédente.*

Représentons par p la pression atmosphérique sur un mètre carré. Le piston ayant parcouru le chemin x, le volume que l'air occupe dans les tuyaux de refoulement est $(\lambda-1)\times a\,(l-x)$, et sa pression $(\lambda-1)\,a\,p\,\dfrac{l}{l-x}$; de sorte que la résultante de toutes les forces sera, en se référant au n° (319).

$$n - bx + q + (\lambda-1)\,ap - (\lambda-1)\,ap\,\frac{l}{l-x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

où a qui est en évidence ne doit pas être multiplié par 1000.

conservant b et n et faisant $\mathrm{N} = n + q + (\lambda-1)\,ap \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$

$$\mathrm{B} = (\lambda-1)\,ap \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

l'expression (1) de la résultante sera : $\mathrm{N} - bx - \mathrm{B}\,\dfrac{l}{l-x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$

Le travail de cette résultante pour un chemin x décrit par la maîtresse-tige étant égal à la moitié de la force vive imprimée à toutes les masses en mouvement, on a, en désignant par V la vitesse possédée par les masses, et en négligeant la force vive de l'eau versée à la surface par le premier tuyau de refoulement :

$$\mathrm{N}\,x - b\frac{x^2}{2} - \mathrm{B}\log\frac{l}{l-x} = 1/2\,\mathrm{M}\,\mathrm{V}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Où M représente les masses mentionnées à l'art. (320) augmentées de celle de q.

330. *Vitesse maximum.*

La vitesse maximum a lieu au moment où la résultante de toutes les forces est nulle. Ce qui donne, en représentant par x_1 le chemin décrit à ce moment par la maîtresse-tige,

$$\mathrm{N} - bx_1 - \mathrm{B}\,\frac{l}{l-x_1} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\text{d'où} \quad x_1 = \frac{\mathrm{N} + \mathrm{B}\,l = \sqrt{(\mathrm{N} \times b\,l)^2 + 4\,(\mathrm{B} - \mathrm{N})\,bl}}{2b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

et pour la vitesse maximum V′ on a :

$$\mathrm{N}x_1 - \frac{bx_1^{\,2}}{2} - \mathrm{B}\,\mathrm{clog}\frac{l}{l-x} = 1/2\,\mathrm{M}\,\mathrm{V}'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

La condition pour que la maîtresse-tige arrive à la fin de sa course avec une vitesse nulle est que le travail de la résultante pour le chemin $x = \mathrm{L}$ décrit par la maîtresse-tige soit nul, ce qui donne :

$$\mathrm{NL} - b\,\frac{\mathrm{L}^2}{2} - \mathrm{B}\ \mathrm{clog}\ \frac{l}{l-\mathrm{L}} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Cette équation, au moyen de celle du n° (324) donne, après avoir remplacé N, B, par leurs valeurs :

$$q\,\mathrm{L} + (\lambda - 1)\,ap\mathrm{L} - (\lambda - 1)\ ap\ \mathrm{L}\,\mathrm{clog}\ \frac{l}{l-\mathrm{L}} = o \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

qui signifie que le travail des forces introduites par la nouvelle solution est nulle pour la course L ; ce qui doit être en vertu du principe : qu'une machine à mouvement périodique conserve cette propriété si l'on introduit parmi les forces qui la sollicitent, d'autres forces quelconques, pourvu que la somme de travail de celles-ci soit nulle pendant le temps de la période.

De l'équation (10) on déduit la valeur de q en se donnant celle de l.

331. **Problème de l'ascension de la maîtresse-tige.**

Représentons par A la base du piston à vapeur, exprimée en mètres carrés ; par P la pression de la vapeur par mètre carré ; par P′ la contre-pression ; par F′ l'ensemble des résistances passives qui ont lieu lors de la montée de la maîtresse-tige, résistances que l'on peut estimer 1/5 des poids des colonnes d'eau à refouler ; par l la portion de la course parcourue à pleine pression, avant la détente.

On suppose que la vapeur agit par détente. De même que pour la course descendante, les conditions auxquelles les forces doivent satisfaire sont que la maîtresse-tige arrive à la fin de sa course avec une vitesse nulle et que la plus grande vitesse qu'acquiert la tige ne dépasse pas une limite assignée d'avance.

332. *Masses mises en mouvement pendant la course ascendante.*

La somme des masses en mouvement, pour un chemin x décrit est

$$\frac{\mathrm{Q} + \mathrm{Q}' + (\lambda - 1)\,a\,\mathrm{L} + a'\,h' + ax}{g}$$

En négligeant le terme en x qui se rapporte à l'eau de la pompe aspirante et soulevante, ou bien en attribuant à x la valeur moyenne 1/2 L, la somme M des masses en mouvement peut être considérée sans erreur sensible comme constante et égale à

$$\frac{\mathrm{Q} + \mathrm{Q}' + (\lambda - \tfrac{1}{2})\,a\,\mathrm{L} + a'\,h'}{g} = \mathrm{M}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

333. *Résultante des forces qui agissent sur la masse* M.

La résultante des forces avant la détente de la vapeur, ou pour un chemin x parcouru plus petit que l, est

$$\mathrm{AP} - \mathrm{AP}' - (\mathrm{Q} - \mathrm{Q}') - \mathrm{F}' + (\lambda - 1)a\,(\mathrm{L} - 2x) - a'\,(h' + \mathrm{L}) + a\,(\mathrm{L} - x)$$

Dans cette équation, le tuyau de la pompe aspirante et soulevante est supposée prolongée jusqu'à la base supérieure du corps de pompe qui suit immédiatement.

La résultante des forces durant la détente et par suite pour un chemin x plus grand que l parcouru par le piston est, en adoptant la loi de Mariotte

$$\mathrm{AP}\,\frac{l}{x} - \mathrm{AP}' - (\mathrm{Q} - \mathrm{Q}') - \mathrm{F}' + (\lambda - 1)\,a\,(\mathrm{L} - 2x) - a'\,(h' + \mathrm{L}) + a\,(\mathrm{L} - x)$$

$$\text{qui devient} \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{AP}\,\frac{l}{x} + r - qx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\text{en posant} \left.\begin{aligned} -\,\mathrm{AP}' - (\mathrm{Q} - \mathrm{Q}') - \mathrm{F}' + \lambda\,a\,\mathrm{L} - a'\,(h' + \mathrm{L}) &= r. \\ a\,(2\,\lambda - 1) &= q. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

334. *Condition pour que le piston arrive à la fin de sa course ascendante avec une vitesse nulle.*

Cette condition sera remplie si le travail de AP pour $x = l$, plus le travail de la force (2) pour $x = \mathrm{L}$ est nul, ce qui donne

$$\mathrm{AP}\, l \left(1 + c \log \frac{\mathrm{L}}{l}\right) + r\,\mathrm{L} - q \frac{\mathrm{L}^2}{2} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Comme on se donne P, L, l, et comme $\mathrm{Q} - \mathrm{Q}'$ est connu par le problème précédent, que l'on connaît d'ailleurs la contre-pression P', cette équation dont le terme en r renferme A, fera connaître la valeur de la base A.

335. *Relation entre le chemin* x *décrit par le piston et la vitesse* V *imprimée aux masses en mouvement.*

Pour un chemin x plus grand que l décrit par le piston, le principe des forces vives donne

$$\mathrm{AP}l \left(1 + c \log \frac{x}{l}\right) + rx - \frac{qx^2}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{M}\,\mathrm{V}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

336. *Chemin* x_1 *décrit par le piston à l'instant de la plus grande vitesse que nous nommerons* V'.

Cette vitesse a lieu à l'instant où la résultante (2) est nulle. Or il est facile de voir que cela ne peut avoir lieu que pour une valeur de x plus grande que l et que l'on obtiendra en égalant à zéro l'expression (2). Ce qui donne

$$\mathrm{AP}\,\frac{l}{x_1} + r - qx_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Cette équation donne la valeur x_1, et, en substituant cette valeur à la place de x dans l'équation (5), on aura pour la vitesse maximum :

$$\mathrm{AP}l \left(1 + c \log \frac{x_1}{l}\right) + rx_1 - \frac{qx_1^2}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{M}\,\mathrm{V}'^2 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

La valeur de $(\mathrm{Q} - \mathrm{Q}')$ qui entre dans le terme en r est connue ; et, comme le terme en M renferme $(\mathrm{Q} + \mathrm{Q}')$, il en résulte qu'en se donnant la valeur de la vitesse maximum que l'on ne veut pas dépasser dans la course ascendante, cette équation fera connaître $(\mathrm{Q} + \mathrm{Q}')$. Elle montre que pour une même vitesse maximum V', la valeur de M et par suite celle de $(\mathrm{Q} + \mathrm{Q}')$ est d'autant plus grande que la détente est poussée plus loin.

Nous laissons à trouver la solution du problème de l'ascension de la maîtresse-tige dans l'hypothèse que tous les tyaux de refoulement, le premier excepté, sont fermés à leur base supérieure.

Sur l'écoulement des gaz et des vapeurs comme préliminaire à la théorie des machines soufflantes.

337. *Un gaz ou de l'air, enfermé dans un cylindre dont la base est* A *mètres carrés, est pressé à sa partie supérieure par un piston qui exerce un effort de* p *kil. par mètre carré ; la vitesse du piston est constante et égale à* v. *On demande la vitesse* V *avec laquelle le gaz s'écoulera par un orifice dont la section est* A *mètres carrés, et sur lequel l'air extérieur exerce une pression de* p' *kil. par mètre carré. L'on fait abstraction du poids du gaz.*

Solution. Premier cas : p *ne surpasse pas* p' *de plus de* 1/10 *de* p' *ou de* 1033 *kil. par mètre carré.*

Dans ce cas on peut supposer sans erreur sensible que l'air a la même densité dans l'orifice a que dans l'intérieur du cylindre (c'est supposer en d'autres termes que l'air est incompressible). Il résulte de cette hypothèse que pendant chaque instant très-petit t, le piston déplace un volume d'air $\mathrm{A}vt$ égal au volume $a\mathrm{V}t$ qui sort par l'orifice a ; de sorte que $\mathrm{A}vt = a\mathrm{V}t$, et $\mathrm{A}v = a\mathrm{V}$.

Soit m la masse du volume $\mathrm{A}vt$, et M la masse totale de l'air contenu dans le cylindre au commencement du mouvement du piston.

Pendant le premier instant du mouvement du piston, celui-ci imprime à toute la masse d'air M la vitesse v, sauf à la masse d'air m qui se trouve au fond du cylindre et qui sort par l'orifice avec la vitesse V ; de sorte que le travail de la force motrice $\mathrm{A}\,(p - p')$ qui agit sur tout l'air contenu dans le cylindre est égal, pendant le premier instant à $1/2\,(\mathrm{M} - m)\,v^2 + 1/2\,m\,\mathrm{V}^2 = 1/2\,\mathrm{M}\,v^2 + 1/2\,m\,(\mathrm{V}^2 - v^2)$.

Après le premier instant t, tout l'air contenu dans le cylindre conserve la vitesse v en vertu de son inertie, et le travail de la force motrice pendant chacun des instants suivants est égal à $1/2\,m\,(\mathrm{V}^2 - v^2)$.

Or le travail du piston pendant un de ces instants t est $\mathrm{A}vt\,(p - p')$. . . (1)

d'un autre côté, Δ étant le poids du mètre cube de gaz, on a : $m = \mathrm{A}vt\,\frac{\Delta}{g}$;

et en appliquant le principe des forces vives, on aura :

$$\mathrm{A}vt\,(p - p') = 1/2\ \mathrm{A}vt\,\frac{\Delta}{g}\,(\mathrm{V}^2 - v^2)\ ;\ \text{d'où :}$$

$$\mathrm{V}^2 - v^2 = 2g\left(\frac{p - p'}{\Delta}\right)\ ;\ \text{et, si } v \text{ peut être négligé :}$$

$$\mathrm{V}^2 = 2g\left(\frac{p - p'}{\Delta}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

Second cas : *La pression intérieure* p *du gaz est sensiblement plus grande que la pression extérieure* p'.

Ici le gaz ne peut plus être supposé incompressible, et sa pression diminue depuis la surface du piston, où elle est p, jusqu'à l'orifice a, où elle est égale à p'.

Il résulte de là et de la permanence du mouvement, que *le poids du volume de gaz déplacé par le piston pendant chaque instant indéfiniment petit* t, *est égal au poids du volume de gaz qui sort par l'orifice* a. Donc en représentant par Δ, Δ' les poids d'un mètre cube de gaz correspondant aux pressions p et p', on a

$$Avt\,\Delta = aVt\,\Delta'; \text{ d'où } Av\Delta = aV\Delta' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Mais les poids Δ, Δ' étant entre eux comme les pressions p, p', l'équation précédente peut être convertie en cette autre

$$Avtp = aVtp',$$

qui exprime d'après (1) que le travail du piston pendant chaque instant t est égal au travail de la pression extérieure p' qui s'oppose à la sortie du gaz.

Il ne reste donc pour imprimer la vitesse V au gaz, qui possède déjà la vitesse v dans le cylindre, que le travail de la détente du gaz.

Pour nous rendre compte de la manière dont s'effectue le travail dû à la détente du gaz depuis la surface du piston jusque dans l'orifice a, divisons le volume du cylindre, à partir de la surface du piston, en un nombre indéfini de tranches de même poids. En représentant les pressions de ces différentes tranches, à partir de la première, par

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_n; \text{ où } p_1 = p, \text{ et } p_n = p'$$

les volumes de ces mêmes tranches seront, d'après la loi de Mariotte, w étant le volume de la première tranche :

$$w, \ w\frac{p_1}{p_2}, \ w\frac{p_1}{p_3}, \ w\frac{p_1}{p_4}, \text{ etc.}$$

Faisons le volume w de la première tranche égal au volume décrit par le piston pendant l'instant indéfiniment petit t; de sorte que

$$w = Avt.$$

Supposons actuellement que le piston, en un point quelconque de sa course, s'arrête pendant un instant, voici ce qui se passera :

La première tranche, dont la pression est p et le volume w, poussera toutes les tranches suivantes, en se détendant jusqu'à ce qu'elle ait pris la pression p_2 de la seconde tranche; d'après le § 141, le travail dû à la détente de la première tranche sera $p_1 wc \log \frac{p_1}{p_2}$.

La seconde tranche, dont la pression est p_2 et le volume $w\frac{p_1}{p_2}$, poussera toutes les tranches suivantes, en se détendant jusqu'à ce quelle ait pris la pression p_3 de la troisième tranche; d'après le § 141 le travail dû à la détente de la seconde tranche sera $p_1 w\, c \log \frac{p_2}{p_3}$.

De la même manière on trouvera que le travail dû à la détente de la troisième tranche sera $p_1\, w\, c \log \frac{p_3}{p_4}$.

Si l'on ajoute les travaux dûs à la détente des trois premières tranches, il vient $p_1\, w\, c \log \frac{p_1}{p_4}$.

Cette expression montre que le travail dû à la détente des trois premières tranches est le même que celui qu'effectuerait la première tranche si elle se détendait jusqu'à ce qu'elle eût pris la pression de la quatrième tranche.

Il résulte de cette loi que la somme des travaux dûs à la détente de toutes les tranches est équivalente au travail de la première tranche qui se détendrait jusqu'à ce que sa pression fût égale à la pression p_n de la dernière tranche; ce qui donne en remplaçant p_1 par p, et w par Avt, pour l'expression du travail dû à la détente de toutes les tranches, pendant l'instant t :

$$p\, Avt\, c \log \frac{p}{p'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

La masse d'air qui s'écoule pendant le temps t est $\frac{Avt\Delta}{g}$, et en appliquant le principe des forces vives on a :

$$p\, Avt\, c \log \frac{p}{p'} = 1/2\, Avt\, \Delta\, (V^2 - v^2);$$

d'où en divisant par Avt :

$$V_2 - v^2 = 2\, g\, \frac{p}{\Delta}\, c \log \frac{p}{p'} \quad . \quad . \quad (5)$$

Si l'on remplace v par sa valeur tirée de (3), on aura :

$$V^2 \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\, \frac{\Delta'_2}{\Delta^2} \right) = 2\, g\, \frac{p}{\Delta}\, c \log \frac{p}{p'} \quad . \quad . \quad (6)$$

Si la vitesse v du piston est petite par rapport à la vitesse V de sortie, comme cela a lieu dans les machines soufflantes, on pourra négliger v^2 dans (5), et il viendra

$$V = \sqrt{2\, g\, \frac{p}{\Delta}\, c \log \frac{p}{p'}} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Si le fluide qui s'écoule est de la vapeur, on doit supposer qu'il n'y a point de condensation.

Remarque. Dans une machine soufflante, la différence $(p - p')$ est donnée par un manomètre à syphon, contenant de l'eau ou du mercure, et ouvert à ses deux extrémités; la différence de hauteur du liquide dans les deux tranches étant représentée en mètres et multipliée par 1000 ou par 13596, selon que le syphon contient de l'eau ou du mercure, donnera la pression $(p - p')$ sur un mètre carré. Ceci est fondé sur ce que 1000 et 13596 sont respectivement les pressions sur un mètre carré d'une colonne d'eau ou d'une colonne de mercure ayant un mètre de hauteur.

Machine soufflante à cylindre en fonte.

1° De la quantité de fonte que l'on veut produire en 24 heures, on conclut la quantité de minerai d'après le rendement de celui-ci.

2° De la quantité et de la qualité du minerai on conclut la quantité de charbon à brûler en 24 heures. (Voir les tableaux A et B ci-dessous).

3° De la quantité de charbon à brûler on conclut le volume d'air, à la température et à la pression atmosphérique, qu'il faut lancer dans le haut fourneau en 24 heures, et par suite en une seconde. (Voir C).

4° De la nature du combustible on conclut la tension de l'air à lancer dans le haut fourneau. (Voir D).

5° De la tension de l'air on conclut la vitesse V avec laquelle l'air doit être lancé, au moyen de l'une des formules trouvées précédemment. (Voir E).

6° La moitié de la force vive de l'air lancé par seconde sera le travail utile produit, abstraction faite des frottements et des résistances de l'air dans les tuyaux. Pour tenir compte de ces résistances, on augmente ce travail utile de 1/3 de sa valeur, et l'on a le travail que le piston du cylindre soufflant doit effectuer par seconde.

A. *Quantité de charbon de bois à brûler pour produire* 100 *kil. de fonte.*

1° Pour minerais fusibles rendant	25 à 30	30 à 35	35 à 40	pour 100
il faut	66 à 90	90 à 110	120 à 130	kil. de charbon.
2° Pour minerais moyennement fusibles rendant.	30 à 40	40 à 50	50 à 60	pour 100
il faut	100 à 140	140 à 180	180 à 210	kil. de charbon.

3° Pour minerais difficilement fusibles rendant.	30 à 40	40 à 50	50 à 60	pour cent
il faut	160 à 200	200 à 250	250 à 300	kil. de charbon.

B. *Quantité de coke à brûler pour produire* 100 *kil. de fonte.*

Pour minerais	fusibles,	il faut	180 à 210 kil.
	moyennement fusibles,	"	210 à 260 "
	difficilement fusibles,	"	260 à 300 "

C. *Quantité d'air nécessaire pour brûler en* 1 *minute* 1 *kil. de charbon de bois ou de houille.*

Le volume d'air nécessaire est de $7^{m.c},714$.

D. *Tension de l'air qui doit alimenter les hauts-fourneaux.*

Cette tension varie d'après la nature du combustible. Elle est

Pour charbon de bois	tendre,	de 2 à 3	centim.	de mercure.
	résineux,	de 3 à 4	"	"
	dur,	de 4 à 6	"	"
Pour coke	léger,	de 8 à 13	"	"
	dur et compacte,	de 13 à 19	"	"

Lorsque les charbons sont humides, la tension de l'air doit être plus considérable.

E. *Vitesse avec laquelle l'air est lancé dans le haut fourneau.*

Cette vitesse sera donnée par la formule (2) ou la formule (7), selon que la pression intérieure de l'air ne sera pas ou sera sensiblement plus grande que la pression extérieure. Ces formules sont :

$$V = \sqrt{2\,g\,\frac{p-p'}{\Delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$V = \sqrt{2\,g\,\frac{p}{\Delta}\,c\,\log\frac{p}{p'}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

où p est la pression en kil. par mètre carré à l'intérieur du cylindre soufflant; p' la pression à l'extérieur; et Δ le poids d'un mètre cube d'air à la température moyenne.

On connaît donc, au moyen des données précédentes, le volume d'air U à lancer par seconde, ainsi que sa vitesse ; on calculera le poids de ce volume, et sa masse m ; et l'on aura le travail utile

$$T_u = 1/2\ m\ V^2.$$

En augmentant ce travail d'un tiers, pour tenir compte des frottements et des résistances de l'air dans les tuyaux, on aura le travail moteur

$$T_m = \frac{4}{3} . 1/2\, m\, V^2 = \frac{2}{3}\ m\ V^2.$$

Rayon des tuyères. En désignant par r ce rayon, par U, comme plus haut, le volume d'air à lancer par seconde, par $\varkappa = 0{,}96$, le coëfficient de dépense d'un courant de gaz, on aura :

$$U = \varkappa\ \pi\ r^2\ V;$$

d'où

$$r = \sqrt{\frac{U}{\varkappa\ \pi\ V}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (8)$$

Diamètre du cylindre soufflant. Comme on fait généralement la course du piston égale au diamètre du cylindre, en représentant ce diamètre par 2 R, le volume sera $\pi\ R^2\ 2\ R$; et le volume engendré par le piston en une seconde $\frac{n}{60}\ \pi\ R^2\ 2\ R$, où n est le nombre de pulsations simples par minute.

En égalant ce volume au volume U augmenté d'un quart pour tenir compte des fuites, on aura :

$$\frac{n}{60}\ \pi\ R^2\ 2\ R = \frac{5}{4}\ U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (9)$$

La vitesse varie de $0^m{,}50$ à 1^m. En adoptant une valeur v pour cette vitesse, on aura :

$$\frac{n.\ 2R}{60} = v;$$

et la formule (9) donnera par suite :

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5U}{\pi v}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (10)$$

R étant connu, le nombre n de pulsations simples par minute sera :

$$n = \frac{30 v}{R}.$$

Aire des orifices des soupapes d'aspiration. Elle doit être de $\frac{1}{15}$ à $\frac{1}{12}$ de l'aire du piston dans les petites machines, où la vitesse du piston est comprise entre $0^m{,}50$ et $0^m{,}75$; de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{9}$ de l'aire du piston dans les grandes machines, où cette vitesse est comprise entre $0^m{,}75$ et 1^m.

Aire des orifices des soupapes d'expiration. Elle est $\frac{1}{22}$ de l'aire du piston.

Section des conduits. Elle est $\frac{1}{20}$ de cette même aire.

Application. *Établir une machine soufflante à piston, pour alimenter un haut-fourneau au coke donnant* 3000 *kil. de fonte en* 24 *heures. Le minerai est difficilement fusible ; le coke est dur et compacte, et exige un air dont la tension est de* $0^m{,}19$. *La température moyenne de l'air est de* 10^o.

Le poids d'un mètre cube d'air à la température de 10^o est égal à $1^k{,}5609$.

D'après (2) la vitesse de cet air $V = 180^m{,}19$.

En admettant que pour 100 kil. de fonte il faille 280 kil. de coke, il faudra pour produire les 3000 kil. de fonte en 24 heures 8400 kil. de coke, et en une minute $\frac{8400}{24 \times 60}$ kil. de coke.

D'après (C) en multipliant ce nombre de kil. de coke par 7,714, on trouvera 45 mètres cubes pour le volume d'air à lancer par minute, et $0^{m.c}75$ pour le volume à lancer par seconde. Le poids de cet air $= 0{,}75 \times 1{,}5609 = 1^k{,}170675$.

Le travail, pour imprimer à cet air la vitesse V, est égal à $1941^{k.m.}{,}4$

Les 4/3 de ce travail, ou $2588^{k.m.}{,}5 = 35$ chevaux représenteront le travail moteur (1).

D'après (8) le rayon de la tuyère, en prenant $\varkappa = 0{,}96$, sera $0^m{,}03715$.

Si nous adoptons 1^m pour la vitesse du piston,

D'après (10) le rayon du cylindre sera $0^m{,}5463$, et la course du piston $1^m{,}0926$.

Le nombre d'oscillations doubles du piston par minute sera $\frac{15}{R} = 27{,}5$.

Le rayon des soupapes d'aspiration sera $0^m{,}1727$; et celui des soupapes d'expiration 0,1165.

(1) Quant aux dimensions qui suivent, nous avons trouvé dans le manuscrit des erreurs de copie qui nous ont obligé à refaire les calculs; nous en avons consigné les résultats dans le texte.

Nous ferons remarquer en outre qu'il eût été préférable de calculer la vitesse V par la formule (7) plutôt que par la formule (2), puisque $p - p' = 19 = \frac{76}{4} = \frac{1}{4} p'$, tandis que la formule (2) suppose que $p - p'$ n'est pas $> \frac{1}{10} p'$.

Si l'on effectue ce calcul, on trouvera $V = 190^m{,}33$; d'où pour le travail utile $2164^{km}{,}6$, et pour le travail moteur $2882^{k.m.}{,}13$ ou 38,5 chevaux.

Ces valeurs n'influent du reste pas sur celles qui suivent.

Sur les raisons pour lesquelles le manuscrit ne portait pas ce calcul, voir l'Avant-Propos. F. F.

339. Théorie ordinaire de la machine à vapeur modifiée d'après la théorie de Pambour en supposant que la vapeur en se détendant suive la loi de Mariotte.

Dans la théorie que M. de Pambour donne des machines à vapeur, il s'écarte de la théorie ordinaire en ce que

1° Il exprime que la machine est à mouvement périodique;

2° Il distingue les frottements en deux espèces, ceux inhérents à la machine marchant à vide, et ceux provenant de la charge utile.

Il nous semble qu'il aurait dû aussi considérer, comme nous le ferons plus loin, le frottement provenant de la force motrice.

3° Il fait entrer dans ses formules les espaces nuisibles;

4° Il suppose et cherche à démontrer que la vapeur en se détendant depuis la chaudière jusque dans le cylindre, reste toujours saturée pour les nouvelles températures et pressions qu'elle prend successivement.

Pour que cette loi, qui est en contradiction avec la formule de Regnault qui donne la chaleur totale d'un kil. de vapeur, fût vraie, il faudrait que, pendant la détente, une portion de la vapeur se condensât. Or on trouve que la quantité qui devrait se condenser est négative; ce qui nous conduit à penser que si la loi dont il s'agit est exacte, c'est à cause de l'eau entraînée par la vapeur dans le cylindre, et dès lors la vapeur étant en contact avec de l'eau pourra être saturée.

340. Théorie des machines à pleine pression (sans détente), avec ou sans condensation.

Notations. a base du piston en mètres carrés; l course du piston en mètres; c liberté du cylindre ou hauteur d'un cylindre de base a, équivalent au volume du canal par lequel la vapeur arrive de la chapelle au cylindre, plus le volume de l'espace qui existe entre le fond du cylindre et le piston à la fin de la course; v vitesse du piston ou chemin décrit par le piston en une minute; n nombre de pulsations simples du piston par minute; W volume de vapeur en mètres cubes produit par minute dans la chaudière; P pression de la vapeur dans la chaudière; P′ pression que prend la vapeur dans le cylindre; R résistance totale du piston par mètre carré, tenant lieu de toutes les résistances de la machine; r résistance utile du piston par mètre carré; δ coefficient du frottement de la résistance utile et de la force motrice, et par suite $r\delta$ est l'intensité du frottement de la résistance utile et $P'\delta$ celle du frottement de la force motrice; p contre-pression ou résistance par mètre carré contre la base du piston de la part de la vapeur qui a fait son effet; f résistance par mètre carré du piston pour tenir lieu des résistances inhérentes à la machine marchant à vide, autre que la contre-pression. De sorte que l'on a

$$R = r + r\delta + p + f + P'\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

L'équation de périodicité est

Travail moteur $aP' \times l = a\,R \times l$ travail de toutes les résistances;

d'où
$$R = P'.$$

Remplaçant dans l'équation (1) R par P′, on a :

$$P' = \frac{r(1+\delta)+p+f}{1-\delta};$$

multipliant par nal les deux membres de cette égalité, on a

$$na\,P'l = na\,l\,\frac{r\,(1+\delta)+p+f}{1-\delta} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

d'où l'on déduit pour le travail utile $narl$ par minute :

$$T_u = narl = nalP'\,\frac{1-\delta}{1+\delta} - nal\,\frac{p+f}{1+\delta} \quad . \quad . \quad (3)$$

$nalP'$ est une quantité constante. En effet le volume W de vapeur produit par minute, à la pression P dans la chaudière, en passant dans le cylindre devient $na\,(l+c)$, et prendra une pression P′, qui, d'après la loi Mariotte, est donnée par l'équation :

$$PW = n\,a\,(l+c)\,P' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Cette équation, en prenant $\frac{c}{l} = 1/20$, devient : $\frac{PW}{1{,}05} = nalP' \quad . \quad . \quad (5)$

et prouve que $nalP'$ est une quantité constante.

Tout en nous servant de la valeur de P′ que fournit cette équation, nous ferons remarquer cette valeur est trop grande, parce que la vapeur arrivée dans le cylindre a déjà subi différentes diminutions de pression, indépendantes du volume qu'elle prend dans le cylindre.

Remplaçant dans l'équation (3) $nalP'$ par sa valeur tirée de (2), on a :

$$T_u = \frac{PW}{1{,}05}\,\frac{1-\delta}{1+\delta} - nal\,\frac{p+f}{1+\delta} \quad . \quad . \quad (6)$$

Si v est la vitesse du piston par minute, on a $nl = v$, et l'équation précédente devient :

$$T_u = \frac{P\,W}{1{,}05}\,\frac{1-\delta}{1+\delta} - va\,\frac{p+f}{1+\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

et si dans l'équation (6) on remplace nal par sa valeur $\frac{\mathrm{PW}}{\mathrm{P}'1{,}05}$, on a encore

$$\mathrm{T}_u = \frac{\mathrm{P\,W}}{1{,}05\,(1+\delta)}\left[1 - \delta - \frac{p+f}{\mathrm{P}'}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (8)$$

Les trois équations 6, 7, 8 sont équivalentes, et montrent respectivement que le travail utile, pour un même volume W de vapeur produit dans la chaudière à la pression P, est le plus grand : 1° ou lorsque le volume nal décrit par le piston en une minute est le plus petit ; 2° ou lorsque la vitesse du piston est la plus petite ; 3° ou lorsque la pression P' dans le cylindre est la plus grande ; c'est-à-dire pour le cas où la vapeur dans le cylindre a la même pression que dans la chaudière (cas impossible à réaliser).

Les mêmes équations montrent que si les résistances $(p+f)$ inhérentes à la machine marchant à vide étaient nulles, l'influence de la vitesse et de la pression P' sur l'effet utile serait nulle également.

Détermination des valeurs de f et δ pour des machines d'un même système.

341. Si dans l'équation (2) on détermine pour une machine en marche le travail utile $narl$ au moyen du frein, et le travail moteur $na\mathrm{P}'l$ au moyen de l'indicateur de Mac-Naught, il ne restera d'inconnues que f et δ. Cela posé, en faisant marcher la machine successivement à deux vitesses différentes, donc avec deux charges différentes appliquées au frein, on aura deux équations à deux inconnues f et δ, desquelles on déduira les valeurs de ces dernières. En quoi il est à remarquer cependant que plus la machine marchera vite, et plus la contre-pression p sera grande. De sorte que p n'est pas une constante absolue. Mieux vaudrait remplacer dans la formule (2) la contre-pression p par sa valeur calculée à l'article 281, laquelle tient compte de la vitesse du piston.

Dans chaque système de machines, il faut déterminer f expérimentalement pour des machines de forces différentes, parce que les poids des pièces mobiles, desquels dépend la valeur de f, n'augmentent pas proportionnellement à la force de la machine.

Machine à détente.

342. Toutes les dénominations précédentes étant conservées, nommons l' la portion de la course parcourue à pleine pression, avant la détente, P' la pression que la vapeur prend dans le cylindre pendant cette portion de la course, et P_1, la pression de la vapeur à la fin de la détente.

L'équation de périodocité est que pour un tour *le travail moteur avant la détente plus le travail moteur pendant la détente est égal au travail de toutes les résistances R.*

Le travail moteur à pleine pression est $nal'\mathrm{P}'$ . . . . . . (9)

Pour le travail moteur durant la détente, je remarque que le volume avant la détente est $a\,(l'+c)$ à la pression P', et le volume après la détente $a\,(l+c)$ à la pression P_1 ; d'après l'article 241, on a pour le travail dû à la détente

$$a\,(l'+c)\,\mathrm{P}'k\log\frac{l+c}{l'+c} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (10)$$

où $k = 2{,}3026$;

Ajoutant (9) et (10), et multipliant par n, on a pour l'équation de périodicité :

$$nal'\,\mathrm{P}' + na\,(l'+c)\,\mathrm{P}'\,k\log\frac{l+c}{l'+c} = nal\,\mathrm{R} \quad . \quad . \qquad (11)$$

En remplaçant R par sa valeur on a :

$$nal'\,\mathrm{P}' + na\,(l'+c)\,\mathrm{P}'k\log\frac{l+c}{l'+c} = nal\left[r\,(1+\delta) + p + f + \mathrm{P}'\delta\right] \qquad (12)$$

équation dont nous nous servirons plus loin pour déterminer les valeurs de f et de δ.

Remarquons que d'après la loi de Mariotte on a :

$$\mathrm{P\,W} = na\,(l'+c)\,\mathrm{P}' = na\,(l+c)\,\mathrm{P}_1 \quad . \quad . \quad . \qquad (13)$$

Si dans l'équation (12) on remplace $na\mathrm{P}'$ par sa valeur tirée de (13) il vient, en représentant par T_u le travail utile $narl$:

$$\mathrm{P\,W}\left(\frac{l'-l\,\delta}{l'+c} + k\log.\frac{l+c}{l'+c}\right) - nal\,(p+f) = (1+\delta)\,\mathrm{T}_u. \quad (14)$$

Cette équation montre que pour chaque détente, dans une machine donnée, l'effet utile est le plus grand lorsque le nombre de tours n est le plus plus petit, ou bien lorsque la vitesse nl est la plus petite.

Remplaçant na par sa valeur tirée de (13) on a :

$$\mathrm{T}_u = \frac{\mathrm{P\,W}}{1+\delta}\left\{\frac{l'-l\,\delta}{l'+c} + k\log.\frac{l+c}{l'+c} - \frac{p+f}{\mathrm{P}'}\,\frac{l}{l'+c}\right\} \quad . \quad . \qquad (15)$$

Cette équation fait voir que dans une machine à détente variable, l'effet utile pour chaque détente devient le plus grand, lorsque P' a la plus grande valeur, c'est à dire pour $\mathrm{P}' = \mathrm{P}$. Quoique cette hypothèse, d'après l'article 340, soit impossible à réaliser, examinons néanmoins les conséquences auxquelles elle conduit. En remplaçant P' par P dans l'équation (15) il vient

$$\frac{\mathrm{P\,W}}{1+\delta}\left\{\frac{l'-l\delta}{l'+c}+k\log\frac{l+c}{l'+c}-\frac{p+f}{\mathrm{P}}\,\frac{l}{l'+c}\right\}=\mathrm{T}_u \quad . \qquad (16)$$

Cette équation donne l'effet utile le plus grand que l'on puisse retirer de chaque détente donnée. Recherchons maintenant, parmi toutes les détentes d'une même machine, celle qui donne le maximum absolu d'effet utile.

Pour cela, posant $\frac{l'}{l}=\rho$, et $c=\alpha l$, l'équation (16) devient :

$$\frac{\mathrm{P\,W}}{1+\delta}\left\{\frac{\rho-\delta}{\rho+\alpha}+k\log.\frac{1+\alpha}{\rho+\alpha}-\left(\frac{p+f}{\mathrm{P}}\right)\frac{1}{\rho+\alpha}\right\}=\mathrm{T}_u \qquad (17)$$

Egalant à zéro le coefficient différentiel de T_u par rapport à ρ, on aura pour condition du maximum absolu d'effet utile :

$$\rho=\frac{p+f}{\mathrm{P}}+\delta=\frac{l'}{l} \quad . \quad . \quad . \qquad (18)$$

Or en vertu de (13) on a, en supposant $\mathrm{P}'=\mathrm{P}$:

$$(l+c)\,\mathrm{P}_1=(l'+c)\,\mathrm{P}\,;\ \text{ou bien}\ (1+\alpha)\,\mathrm{P}_1=(\rho+\alpha)\,\mathrm{P}. \quad . \quad . \qquad (19)$$

Eliminant ρ entre (18) et (19), et prenant $\alpha=0{,}05$, on aura :

$$\mathrm{P}_1=\frac{1}{21}\,\mathrm{P}+\frac{p+f+\mathrm{P}\delta}{1{,}05}.$$

Cette valeur de P_1 est trop grande, parce qu'elle suppose que la pression P' dans le cylindre est égale à la pression P dans la chaudière.

Détermination des valeurs de f et de δ dans les machines à détente.

343. Cette détermination se fera au moyen de l'équation (12).

On remarquera que $\left(n\alpha l'\,\mathrm{P}'+n\alpha l'\,\mathrm{P}'\,k\log.\frac{l+c}{l'+c}\right)$ représente le travail moteur, qui sera donné par l'indicateur de Mac-Naught. La suite comme à l'article (341).

Introduction du volume relatif de la vapeur saturée dans toutes les formules précédentes.

344. S étant le volume d'eau qui a produit le volume W de vapeur à la pression P dans la chaudière, le rapport de W à S, que nous présenterons par m, est appelé volume relatif par

de Pambour. De sorte que dans toutes les formules qui précèdent on pourra remplacer W par $m\,s$.

Les valeurs de m sont données par la formule

$$\frac{\mathrm{W}}{s}=m=1287\,\frac{1+0{,}00364\,t}{p} \quad . \quad . \qquad (20)$$

En y substituant, à la place de p et de t, les valeurs qui conviennent à la vapeur saturée et qui sont données par les deux premières colonnes de la table ci-après, on aura les volumes relatifs consignés dans la troisième colonne; le tout calculé par de Pambour.

Démonstration de la formule (20).

345. V, P, t représentant respectivement le volume, la pression et la température d'une masse de gaz, si ces trois éléments deviennent respectivement V', P', t', pour la même masse, on a la relation :

$$\frac{\mathrm{P\,V}}{\mathrm{P'\,V'}}=\frac{1+a\,t}{1+a\,t'}..$$

dans laquelle $a=0{,}00364$ représente le coefficient de dilatation des gaz.

On arrive à cette formule en cherchant par la loi de Gay-Lussac le volume x que prend le gaz quand sa température t devient t', et que sa pression P reste constante ; en appliquant ensuite la loi de Mariotte quand le volume x devient V' et que la pression P devient P', la température restant la même.

Pour comprendre comment la formule ci-dessus peut convenir à la vapeur saturée qui n'est plus en contact avec le liquide, il faut imaginer qu'on fasse d'abord dilater la vapeur par la chaleur, sans laisser varier sa pression ; puis qu'on la comprime, sans laisser varier sa température, jusqu'à ce qu'elle soit de nouveau saturée. Jusque là, elle suit (par hypothèse) la loi de Mariotte, et sa pression est donnée en fonction de sa température par l'une des formules de l'article 347 ou par la table des pressions et températures, article 346.

Or, on sait par expérience que sous la pression de $1^k{,}033$ par centimètre carré, et à la température de 100°, le volume relatif de la vapeur saturée est 1700, c'est-à-dire qu'un volume d'eau S produit, à ces pressions et température, un volume de vapeur saturée égal à 1700 fois S. Si donc dans la formule précédente ont fait $\mathrm{P}'=1^k{,}033$, $t'=100°$ et $\mathrm{V}=1700$ S, on aura pour le volume relatif de la vapeur saturée à la pression P et à la température correspondante t (1) :

$$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{S}}=1700\,\frac{1{,}033}{\mathrm{P}}\,\frac{1+0{,}00364\,t}{1+0{,}364}=1287\,\frac{1+0{,}00364\,t}{\mathrm{P}} \quad . \qquad (21)$$

(1) Nous ferons remarquer que les chiffres donnés dans cet article et le précédent sont ceux dont s'est servi Pambour ; c'est par ce motif que nous les avons laissé subsister, quoiqu'ils aient été modifiés par suite d'expériences.

346. *Pressions, températures et volumes relatifs de la vapeur saturée.*

PRESSION EN KIL. PAR CENT. CARRÉ.	TEMPÉRATURE EN DEGRÉS CENTIGRADES.	VOLUME RELATIF.	PRESSION EN KIL. PAR CENT. CARRÉ.	TEMPÉRATURE EN DEGRÉS CENTIGRADES.	VOLUME RELATIF.
0, 1	45, 9	15019	4, 5	147, 8	440
0, 5	80, 5	3329	5, 0	151, 8	400
1, 0	99, 0	1751	5, 5	155, 5	366
1, 5	155, 1	1205	6, 0	158, 9	339
2, 0	120, 1	925	6, 5	162, 1	315
2, 5	127, 4	754	7, 0	165, 2	294
3, 0	133, 6	638	7, 5	168, 0	277
3, 5	138, 9	554	8, 0	170, 7	261
4, 0	143, 7	400			

347. Dans ce tableau les pressions et températures correspondantes ont été calculées par les formules empiriques suivantes, dans lesquelles la température t est exprimée en degrés centigrades et la pression P en kilogrammes par centimètre carré.

Formule de Southern convenable aux pressions moindres que celles de l'atmosphère :

$$P = 0{,}0034542 + \left(\frac{46{,}278 + t}{145{,}360}\right)^{5{,}13} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_a)$$

$$t = 145360 \sqrt[513]{P - 0{,}0034542} - 46278 \quad . \quad . \quad (2_a)$$

Formule de Tredgold modifiée par M. Nollet, convenable aux pressions de 1 à 4 atmosphères :

$$P = \left(\frac{75 + t}{174}\right)^6 \quad . \quad . \quad . \quad (3_a)$$

$$t = 174 \sqrt[6]{P} - 75 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4_a)$$

Formule de Pambour, convenable, ainsi que la précédente, aux pressions de 1 à 4 atmosphères :

$$P = \left(\frac{72{,}\ 67 + t}{171{,}\ 72}\right)^6 \quad . \quad . \quad . \quad (5_a)$$

$$t = 171{,}72 \sqrt[6]{P} - 72{,}67 \quad . \quad . \quad (6_a)$$

Formule de Dalong et Arago convenable aux pressions de 4 à 50 atmosphères :

$$P = (0{,}28658 + 0{,}0072003\ t)^5 \quad . \quad . \quad (7_a)$$

$$t = 138{,}883 \sqrt[5]{P} - 39{,}802 \quad . \quad . \quad (8_a)$$

348. Remarque. Si dans les équations qui précèdent, on voulait faire entrer le travail théorique des pompes, afin que les coefficients δ et f se rapportent uniquement à des frottements, cela se ferait comme suit :

Le poids de la vapeur employée par minute est 1000 S kil. et, en comptant sur 0,30 pour cent d'eau entraînée par la vapeur, il faut que la pompe élève par minute 1300 S kil. d'eau depuis le fond du puits jusqu'au sommet de la chaudière. Si h est cette hauteur estimée en mètres, le travail pour élever cette eau sera 1300 S h.

Cette eau devant être refoulée au fond de la chaudière où la pression de la vapeur est P kil. par mètre carré, exige un travail égal à P S $\times$ 1,30. Donc le travail théorique de la pompe à eau froide et de la pompe alimentaire, sera (1300 S h + P S 1,30). Cette quantité devra être ajoutée dans l'équation de périodicité à la quantité $nalR$ qui représente le travail de toutes les résistances, non compris celui des pompes.

THÉORIE DES ROUES HYDRAULIQUES.

Préliminaires.

349. *Vitesse de l'eau s'écoulant par un petit orifice pratiqué en mince paroi.* — En supposant que la distance du niveau supérieur au centre de l'orifice, ou la *charge*, ne soit pas considérable, nous pourrons faire abstraction de la différence des pressions atmosphériques à ces deux niveaux. Nous ferons en outre abstraction de la contraction de la veine et du frottement, ainsi que du choc de la veine contre l'air. Enfin nous supposerons le niveau constant, et le mouvement devenu permanent, ce qui exige qu'il entre à chaque instant par la surface supérieure, avec une vitesse nulle, une quantité d'eau égale à celle qui sort par l'orifice.

Le poids de chaque molécule d'eau agit sur celle-ci depuis le niveau supérieur du vase jusqu'au centre de l'orifice; la projection sur la verticale du chemin décrit par chaque molécule, quel qu'il soit, est égale à la hauteur h de la charge; le travail du poids p de cette molécule sera donc $p\,h$; si nous représentons par v la vitesse acquise par la molécule à sa sortie de l'orifice, nous aurons, en vertu du principe des forces vives :

$$p\,h = \frac{1}{2}\,\frac{p}{g}\,v^2$$

D'où
$$v = \sqrt{2\,g\,h}.$$

Si l'orifice est noyé sur une hauteur h', il est facile de prouver que l'on a :

$$v = \sqrt{2\,g\,(h - h')}$$

350. *Dépense.* — La quantité d'eau qui s'écoule pendant l'unité de temps (une seconde) s'appelle dépense.

Elle est évidemment égale au produit de l'aire de l'orifice (exprimée en mètres carrés) par la vitesse d'écoulement (exprimée en mètres).

En conservant les notations précédentes, et appelant A l'aire de l'orifice, et E la dépense, nous aurons si l'orifice n'est pas noyé :

$$E = A\sqrt{2\,g\,h}$$

s'il est noyé sur une hauteur h' :

$$E = A\sqrt{2\,g\,(h - h')}$$

351. *Dépense d'une chûte d'eau.* — Pour trouver la dépense effective d'une chûte d'eau, on doit multiplier la dépense théorique par un coefficient déduit de l'expérience, et qui s'appelle *coëfficient de la dépense*; nous le désignerons par c, et nous en donnerons la valeur par les orifices les plus usités.

Pertuis. — Le coëfficient de la dépense est, d'après Rankine :

$c = 0{,}62$ pour un orifice circulaire,

$c = 0{,}6$ pour un orifice carré,

pourvu que la hauteur du niveau au-dessus du centre de l'orifice ne soit pas inférieure au triple du diamètre de celui-ci.

Pertuis à vanne inclinée de Poncelet. — Le coëfficient de la dépense est, d'après ce savant :

$c = 0{,}74$ pour des vannes inclinées à 1 de base sur 2 de hauteur.

$c = 0{,}8$ " " à 1 " 1 "

Déversoirs. — Il est facile de prouver que dans ce cas la dépense théorique est

$$E = \frac{2}{3}\,A\sqrt{2\,g\,h}\ (*)$$

Le coëfficient de la dépense est, d'après Rankine :

$$c = 0{,}57 + \frac{l}{10L}$$

l étant la largeur de l'orifice, et L celle du déversoir.

Si la vitesse du courant près de l'orifice n'est pas négligeable, en désignant par h_0 la hauteur dûe à cette vitesse v_0, de sorte que $h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$, la dépense sera, d'après de Neville:

(*) En effet, h désignant la hauteur du niveau supérieur au-dessus de l'arête, x la distance d'une tranche d'épaisseur dx à ce niveau, l la largeur de l'orifice, la dépense de cette tranche sera $l\,dx\sqrt{2gx}$, et la dépense totale

$$D = l\sqrt{2g}\int_0^h \sqrt{x}\,.\,dx = \frac{2}{3}\,l\sqrt{2g}\,.\,h^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\,A\sqrt{2gh}.$$

$$E = \frac{2}{3} c\, l \sqrt{2g}\ \left[(h + h_0)^{3/2} - h_0^{\,3/2}\right],$$

où c a la même valeur que plus haut.

352. *Vitesse effective d'écoulement.* S'il n'y avait pas de contractions de la veine, on a vu (art. 349) que la vitesse d'écoulement due à une charge h serait $\sqrt{2\,g\,h}$.

Pour tenir compte du phénomène de la contraction de la veine, désignons par A' l'aire de la section contractée ; par v' la vitesse d'écoulement dans cette section ; par A et v respectivement les mêmes quantités correspondant à l'orifice. La veine contractée en A' se dilate jusqu'en A ; et comme la dépense à travers ces deux sections est la même, on a ;

$$A'\, v' = A\, v\,;$$

d'où l'on tire, en remarquant que $A' = c.\, A$ (art. 351) :

$$v' = \frac{v}{c}\,.$$

D'un autre côté, la masse d'eau m, en passant de a section A' à la section A perd une vitesse $v' - v$, et par suite une quantité de force vive $m\,(v' - v^2)$; en passant par la section A, elle a la force vive $m\,v^2$; et comme le travail de la pesanteur est égal à la demi-somme de ces quantités de force vive :

$$\frac{1}{2}\, m\,(v' - v)^2 + \frac{1}{2}\, m\, v^2 = m\, g\, h,$$

ou

$$(v' - v)^2 + v^2 = 2\, g\, h\,;$$

d'où, remplaçant v' par sa valeur $\frac{v}{c}$:

$$v^2 \left[\left(\frac{1}{c} - 1\right)^2 + 1 \right] = 2\, g\, h,$$

et par suite

$$v = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 + \left(\frac{1}{c} - 1\right)^2}}$$

Travail dont est capable une chûte pouvant fournir une dépense E *par seconde.*

353. Soit m la masse d'eau fournie par seconde, et qui est égale à $\frac{1000\ E}{g}$, E étant exprimé en mètres cubes.

1° Si la masse m est prise au point le plus bas de la chûte, V étant la vitesse d'écoulement, la chûte sera capable d'un travail $\frac{1}{2}\, m\, V^2$.

2° Si la masse m est prise au point le plus haut de la chûte, et que sa vitesse en ce point soit négligeable, la chûte sera capable d'un travail $m\, g\, H$, en désignant par H la hauteur de chûte.

3° Si la masse m est prise en un point intermédiaire de hauteur h au-dessus du niveau d'aval, v étant la vitesse de l'eau en ce point, la chûte sera capable d'un travail $\frac{1}{2}\, m\, v^2 + m\, g\, h$.

Il est évident que dans les trois cas, le travail de la chûte est le même ; car

$$V^2 = 2g\, H\,;\ v^2 = 2g\,(H - h).$$

$$\text{d'où } \frac{1}{2}\, m\, V^2 = mgH = \frac{1}{2}\, mv^2 + mgh.$$

Travail transmis par une chûte d'eau à une roue hydraulique.

354. L'eau reçue par la roue peut travailler par son poids et par sa force vive ; mais généralement, en arrivant, elle produit un choc, et en quittant la roue, elle conserve une certaine vitesse.

Si nous supposons que le mouvement soit uniforme, nous devons donc écrire que le travail d'une chute d'eau transmis à la roue pendant une seconde est égal :

1° A la moitié de la force vive due à la vitesse avec laquelle l'eau atteint la roue, moins la moitié de la force vive perdue par le choc ;

2° Plus le travail dû au poids de l'eau depuis le point où elle atteint la roue jusqu'au point où elle la quitte ;

3° Moins la moitié de la force vive due à la vitesse conservée par l'eau à l'instant où elle quitte la roue.

Les meilleures roues seraient donc celles dans lesquelles l'eau entrerait sans choc et quitterait sans vitesse ; mais aucune de ces conditions n'est réalisable.

355. Représentons par V la vitesse de l'eau à son arrivée sur la roue ; par v la vitesse de la circonférence moyenne de celle-ci ; par w la vitesse avec laquelle l'eau quitte la roue ; par h la hauteur de chute sur la roue ; par m la masse de l'eau qui arrive sur la roue ; par M la masse de celle-ci.

Choc normal. — Dans le cas d'un choc normal de l'eau contre l'aube, la perte de force vive dûe au choc sera

$$\frac{m\, M\,(V - v)^2}{m + M}$$

or, nous pouvons négliger m vis-à-vis de M, et par suite nous aurons simplement

$$m(V - v)^2$$

pour la perte de force vive dûe au choc.

Si nous faisons entrer explicitement le frottement des tourillons dans l'équation de périodicité, comme le travail de ce frottement pendant une seconde est proportionnel au chemin parcouru par les points frottants et par suite à la vitesse de la roue, nous pourrons le représenter par une expression de la forme

$$m\ F\ v.$$

L'équation de périodicité sera donc, d'après l'article précédent, en désignant par T_u le travail utile :

$$T_u = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m (V - v)^2 + m g h - \frac{1}{2} m w^2 - m F v;$$

ou :

$$T_u = m g h + m V v - \frac{1}{2} m (v^2 + w^2) - m F v.$$

Si nous posons $w = k v$, et que nous divisions par m, nous aurons :

$$\frac{T_u}{m} = g h + (V - F) v - 1/2\, v^2 (1 + k^2).$$

Le maximum de cette expression, en supposant que v soit la seule variable, correspondra à la valeur de v donnée par :

$$0 = V - F - v(1 + k^2),$$

d'où

$$v = \frac{V - F}{1 + k^2}$$

On voit par là que

si $k = 1$, la vitesse correspondante au maximum d'effet utile est plus petite que $1/2$ V ;

si $k = 0$, cette vitesse est plus petite que V.

Le travail utile maximum sera, en substituant à v la valeur précédente :

$$m g h + \frac{1}{2} m \frac{(V - F)^2}{1 + k^2}$$

tandis que le travail moteur absolu est

$$m g h + \frac{1}{2} m V^2.$$

356. *Choc oblique.* — Dans le cas d'un choc oblique de l'eau contre l'aube, en désignant par α l'angle d'incidence, la composante de la vitesse normale à l'aube sera $V\sin\alpha$, et en

supposant que la vitesse relative de l'eau le long de l'aube ne soit pas telle que l'eau aille choquer le fond de celle-ci, la seule perte de force vive dûe au choc sera :

$$m(V\sin\alpha - v)^2.$$

L'équation de périodicité sera donc :

$$T_u = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m (V\sin\alpha - v)^2 + m g h - \frac{1}{2} m w^2 - m F v;$$

ou, en réduisant comme plus haut :

$$T_u = \frac{1}{2} m V^2 \cos^2\alpha + m g h + m v (V\sin\alpha - F) - \frac{1}{2} m v^2 (1 + k^2).$$

En supposant que v soit la seule variable, le maximum de cette pression correspondra à la valeur de v donnée par :

$$V\sin\alpha - F - v(1 + k^2) = 0,$$

d'où

$$v = \frac{V\sin\alpha - F}{1 + k^2};$$

et pour le maximum du travail utile on trouvera :

$$m g h + \frac{1}{2} m V^2 \cos^2\alpha + \frac{1}{2} m \frac{(V\sin\alpha - F)^2}{1 + k^2}$$

tandis que le travail moteur absolu est, comme précédemment :

$$m g h + \frac{1}{2} m V^2.$$

357. *Classification des roues hydrauliques.* Les roues hydrauliques se partagent en deux grandes classes : les roues verticales, et les roues horizontales ou turbines.

Les roues verticales peuvent recevoir l'eau par-dessous, sur le côté, ou par-dessus. Dans les premières, qui sont à palettes ou à aubes courbes, l'eau n'agit que par sa force vive ; dans les secondes et les troisièmes, qui sont à aubes ou à augets, elle agit par son poids et par sa force vive.

Dans les turbines enfin, l'eau n'agit évidemment que par sa force vive.

Roues à palettes planes mues par dessous.

358. Ces roues se composent d'un arbre et, selon la largeur de la roue, d'une ou de plusieurs jantes circulaires quelquefois en fonte, mais ordinairement en bois, reliées à l'arbre par quatre ou six bras qui traversent l'arbre ou l'embrassent extérieurement.

Des *aubes* ou *palettes planes* sont fixées, au moyen de boulons, sur les prolongements des bras et sur des bracons, fortes chevilles en bois assemblées dans les jantes.

La hauteur des palettes (dimension dans le sens du rayon), est en général de $0^m,30$ à $0^m,40$. Dans tous les cas, cette hauteur doit être trois fois l'épaisseur de la lame d'eau dans le coursier, afin que l'eau, par suite du remous qui se produit en avant de la palette choquée, ne puisse passer au-dessus du bord intérieur de la palette.

Espacement des palettes. La distance d'une palette à l'autre mesurée sur la circonférence extérieure de la roue sera un peu moindre que leur hauteur (Daubuisson).

La largeur des palettes (dimension dans le sens de l'axe de l'arbre) est égale à celle du coursier moins 1 à 2 centimètres de jeu de chaque côté. Le même jeu doit exister entre le fond du coursier et le bord extérieur des palettes.

Point le plus bas de la roue. La roue doit être enfoncée en-dessous du niveau des eaux d'aval d'une quantité h telle que l'eau ayant passé le point le plus bas de la roue, puisse en vertu de sa vitesse v (qui est celle de la roue), remonter un plan incliné de hauteur h;

d'où $v^2 = 2\,g\,h$, et $h = \dfrac{v}{2\,g}$.

Ainsi la hauteur de chûte est rendue plus grande de h que la différence des niveaux d'amont et d'aval de la rivière.

Mais en adoptant cette valeur de h, l'eau arriverait au sommet du plan incliné avec une vitesse nulle. Pour qu'elle y arrive animée encore d'une certaine vitesse, nous pensons qu'on ne doit donner à h que la moitié ou les deux tiers au plus de cette valeur; point d'ailleurs à décider par l'expérience.

Coursier. L'eau est amenée sur la roue au moyen d'un coursier.

Le fond du coursier a une pente de 1/8 à 1/15. Il est rectiligne jusqu'au niveau du bord inférieur de la deuxième palette en amont du diamètre vertical. Là il se courbe concentriquement à la roue jusqu'à l'extrémité du diamètre vertical. A partir de ce point le fond du coursier est prolongé par un plan incliné à 1/12 environ. Les joues ou côtés verticaux du coursier sont de même prolongés jusqu'à quelques mètres en aval de la roue, et leurs bords tenus notablement au-dessus des eaux d'aval, afin d'empêcher l'eau, en temps de crue, de pénétrer dans le coursier par les côtés.

La largeur du coursier dépend du volume d'eau E que la rivière débite par seconde, de la vitesse V de l'eau au sortir de la vanne, et de l'épaisseur de la lame d'eau dans le coursier. Cette épaisseur ne doit pas être au-dessus de $0^m,25$, ni au-dessous de $0^m,15$.

Vitesse d'arrivée de l'eau. L'eau à sa sortie du vannage éprouve une contraction, puis, en se dilatant, elle rejoint les parois du coursier et elle les suit.

Lors même qu'à la section contractée, elle aurait la vitesse due à la hauteur du réservoir, elle en perd ensuite une partie notable et par l'effet de la dilatation et par l'effet du frottement contre les parois du coursier, s'il est un peu long. De sorte qu'assez souvent l'eau n'arrive aux palettes qu'avec les trois quarts de cette vitesse.

En admettant que le coursier soit presque horizontal, on aura à peu près pour la vitesse d'arrivée de l'eau sur la roue, en négligeant l'influence du frottement (art 352).

$$V = \sqrt{\frac{2\,g\,H}{1 + \left(\frac{1}{c} - 1\right)^2}},$$ où H est la charge sur le centre de l'orifice, et c le coëfficient de la dépense.

THÉORIE DE LA ROUE. *Dans l'hypothèse que la roue n'est pas enfoncée.*

359. Travail utile de la roue. H hauteur disponible, c'est-à-dire celle due à la vitesse V d'arrivée de l'eau sur la roue, hauteur qui peut différer notablement de la chûte véritable. V vitesse de la circonférence extérieure de la roue. m masse d'eau dépensée en une seconde.

Remarquant que l'eau ne travaille pas par son poids, qu'en frappant les palettes elle perd la force vive $m\,(V - v)^2$, et qu'elle possède encore la force vive mv^2 lorsqu'elle quitte la roue, on a d'après (355) pour le travail utile théorique :

$$tu = 1/2\;m\,V^2 - \frac{1}{2}\,m\,v^2 - 1/2\;m\;(V - v)^2 = m\,v\,(V - v). \qquad (1)$$

Dans cette équation v est seul variable, et le produit $v\,(V - v)$ devient le plus grand pour $v = 1/2$ V; ce que l'on démontre en égalant à z le produit $v\,(V - v)$, et en résolvant l'équation par rapport à v; dès lors il devient visible que la plus grande valeur correspond à $v = 1/2$ V.

L'équation (1), en y faisant $v = 1/2$ V, donne pour le travail utile maximum

$$tu = 1/2 \times 1/2\;m\;V_2 \qquad (2)$$

équation qui montre que théoriquement le maximum de travail utile n'est que la moitié du travail dont l'eau est capable à l'instant où elle atteint la roue.

Formules pratiques.

360. D'après les expériences de Smeaton et celles de Bossut, la vitesse qui donne le maximum de travail est comprise entre $v = 0,35$ V, et $v = 0,40\ V = \dfrac{2}{5}$ V.

Le travail utile pratique n'est que les 0,60 du travail théorique. Cela étant

Si la roue marche à une vitesse quelconque, l'équation (1) devient :

$$tu = 0,60\;m\;v\;(V - v). \qquad (3)$$

Si la roue marche à la vitesse du maximum de travail utile, l'équation devient, en adoptant le même coefficient 0,60 :

$$tu = 0,30 \times 1/2\;m\;V^2 = 0,30\;m\;g\;H. \qquad (4)$$

Si le volume d'eau dépensé par seconde est de E mètres cubes, 1000 E sera son poids en kilogrammes, et l'on a : 1000 E $= mg$; et les équations (3) et (4) deviennent :

travail utile par une vitesse quelconque de la roue : $tu = 61 \text{ E } v (\text{V} - v)$. . (5)
travail utile pour la vitesse du maximum de travail utile : $tu = 300 \text{ E H}$ . . (6)

Calcul de l'effet utile d'une roue établie. (Morin, 2^{me} éd. 192).

361. ***Données.*** Largeur de la vanne $= 1^m,20$; levée de la vanne $= 0,30$; hauteur disponible H $= 1^m,50$; coefficient de dépense $c = 0,62$. E volume de l'eau dépensée ; sa charge h sur le centre de l'orifice sera $1^m,50 - 0,15 = 1^m35$, d'où $\text{E} = c \text{ L } e \sqrt{2gh} = 1^{mc},147$.

Le travail absolu du moteur $= 1000 \text{ E H} = 1721^{km} = 23$ *chev.*

En admettant que le coursier soit presque horizontal et qu'on puisse négliger la résistance des parois, la vitesse V d'arrivée de l'eau sera à peu près

$$\text{V} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\frac{1}{c} - 1\right)^2}} = 4^m,388 \text{ ; tandis que } \sqrt{2gh} = 5^m,146.$$

Si la vitesse v de la roue est 0,40 de V, on aura : $v = 1^m,752$, la formule (5) donne pour le travail utile de la roue

$$tu = 61 \times 1^{mc} 147 \ (4,38 - 1,752) \ 1^m,752 = 332^{km} = 4^{chev.}, 3.$$

Le rapport de l'effet utile au travail absolu $= 0,187$, ce qui montre combien ces roues sont désavantageuses sous le rapport de l'économie de la force motrice (*).

Cas où les palettes ont un jeu considérable dans le coursier.

362. Dans ce cas, il faut substituer à E dans les formules (1) et (2) le volume d'eau qui agit directement sur les palettes. Si V est la vitesse d'arrivée de l'eau, E le volume d'eau dépensé en une seconde, L la largeur du coursier, e l'épaisseur de la lame d'eau dans le coursier, l la largeur des palettes, A l'aire de la partie dont la palette est plongée, i le jeu, on a :

$$\text{L} e \text{V} = \text{E} ; \ l(e - i) = \text{A}, \text{ d'où } \text{A} = l \left(\frac{\text{E}}{\text{L V}} - i\right),$$

et A V sera le volume d'eau qui agit sur les palettes.

En substituant A V à la place de E dans les formules (5) et (6) et en adoptant d'après

(*) Ces chiffres étant ceux que donne Morin, nous n'y avons rien changé, quoique les calculs soient effectués avec une certaine négligence. F. F.

l'expérience 0,75 pour le coefficient de l'effet utile, ce qui changera le coëfficient 61 de la formule (5) en 76,45 et celui 300 de la formule (6) en 375, on aura si la roue marche à une vitesse quelconque :

$$tu = 76,45 \text{ A V } (\text{V} - v) v \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

si la roue à la vitesse du maximum d'effet utile :

$$tu = 375 \text{ A V H}.$$

363. *Application.* Pour une roue établie on a L largeur du coursier $= 1^m$; l largeur des palettes $= 0,85$; i jeu au fond du coursier $= 0^m,04$; $\text{E} = 0^{mc},450$; $\text{V} = 5^m,50$; $v = 3^m$.

On trouve que

$$l \left(\frac{\text{E}}{\text{L V}} - i\right) = l\,(0,082 - 0,04) = l.\ 0,042, \text{ et}$$
$$\text{A} = 0,85 \times 0,042 = 0,0357 \text{ ;}$$

avec cette valeur de A la formule (7) donne :

$$tu = 76,45 \times 0,0357 \times 5,5 \ (5,5 - 3) \ 3 = 112^{km} = 5^{chev.}, 5 \text{ ;}$$

le travail absolu de la chute est $1/2 \ m v^2 = 694^{km}$.

Le rapport de l'effet utile au travail absolu n'est que de 0,16.

Remarque sur l'épaisseur de la lame dans le coursier. Le volume d'eau E qui passe par seconde dans le coursier sans choquer les palettes, est égal à $\text{L } e \text{ V} - l\,(e - i)\,v = \text{E} - le\,v + li\,v$; expression qui fait voir que, l et i restant constants, ce volume diminue quand e augmente, et c'est ce qui motive la forte épaisseur que l'on doit donner à la lame d'eau dans le coursier.

Roues à palettes planes emboîtées dans des coursiers circulaires.

364. Ces roues sont les meilleures pour les petites chûtes de $2^m,50$ et au dessous. L'eau y travaille principalement par son poids en pressant les palettes, mais sans peser sur la roue, ce qui fait que le frottement des tourillons est moindre que dans les roues à augets dont il sera question plus loin.

Rayon extérieur de la roue. La grandeur du rayon de la roue n'a pas d'importance quant à l'effet utile qu'elle produit ; il suffit qu'il soit plus grand de $0^m,25$ à $0^m,30$ environ que la chûte totale pour que l'eau entre convenablement dans les augets.

364 bis. *Dimensions des aubes.* L'espacement des aubes ou palettes sur la circonférence extérieure est de $0^m,30$ à $0^m,40$. Elles ont la même dimension dans le sens du rayon et sont dirigées suivant ce dernier.

Lorsqu'on est obligé d'employer de forts abaissements de vanne de $0^m,30$ et plus, on pourra être conduit à donner aux aubes un écartement et une hauteur de $0^m,48$ à $0^m,50$, afin que l'auget ait une capacité suffisante, comme il sera dit plus loin.

Nombre des aubes. Dans les cas ordinaires, on divisera la circonférence extérieure de la roue par $0^m,35$, et le nombre entier le plus voisin du quotient, et divisible par le nombre des bras, sera le nombre des aubes.

L'intervalle entre deux aubes est fermé vers la circonférence intérieure par un fond cylindrique; un jour de $0^m,04$ à $0^m,08$ est ménagé entre le fond et l'aube précédente, pour que l'air contenu entre deux aubes consécutives puisse s'échapper et ainsi faciliter l'admission de l'eau.

Le *coursier* concentrique à la roue doit être exécuté en pierres de taille et l'axe de son radier, qui est une surface de révolution, doit coïncider avec l'axe de rotation de la roue.

Le jeu de la roue au fond du coursier et sur les côtés doit être de $0^m,01$ à $0^m,02$ au plus.

Point le plus bas du coursier. La quantité dont la roue doit être enfoncée en dessous du niveau des eaux d'aval doit être à peu près égale à la hauteur que l'eau occupe entre les palettes inférieures, à moins que l'on ne soit exposé à de fortes crues.

Prolongement du coursier à partir de son point le plus bas. Le coursier, à partir de son point le plus bas, doit être prolongé par un plan incliné à $1/12$. Les joues latérales du coursier doivent de même être prolongées jusqu'à la fin de ce plan incliné et être tenues à une hauteur supérieure à celle des grandes eaux d'aval, par lesquelles on ne peut marcher.

365. *Vannage.* L'eau arrive sur la roue par une vanne avec charge sur le sommet, ou par une vanne en déversoir. Celle-ci est plus avantageuse que l'autre, comme on le verra plus loin.

Abaissement de la vanne. M. Morin conseille un fort abaissement de la vanne d'environ $0^m,20$ au dessous du niveau du réservoir, parce que l'importance des fuites est relativement plus considérable pour de petites dépenses que pour de grandes, et aussi pour diminuer la largeur de la roue.

L'épaisseur e *de la lame d'eau* qui passe sur l'arête intérieure du déservoir est environ les $0,80$ de l'abaissement h de la vanne, quand le déversoir a même largeur que le réservoir; d'où $e = 0,80h$.

Si la largeur du déversoir n'est que les $4/5$ de celle du réservoir, alors l'épaisseur de la lame d'eau est les $0,56$ de l'abaissement de la vanne, ou $e = 0,56h$.

L'on déduira facilement de ces données la hauteur h, si l'épaisseur e est connue.

La distance du filet moyen au niveau du réservoir sera $h - 1/2e = 0,60h$ ou $0,72h$; d'où l'on déduit pour la vitesse horizontale U avec laquelle le filet moyen franchit le déversoir

$$U = \sqrt{2g \times 0,60h} \text{ ou } U = \sqrt{2g \times 0,72h}.$$

366. L'eau, après avoir passé au-dessus du déversoir, décrit une parabole dont on obtient l'équation comme suit :

Si la pesanteur n'intervenait pas, une molécule du filet moyen, en vertu de la vitesse horizontale U, décrirait pendant le temps t un chemin $x = Ut$.

Si maintenant la pesanteur agissait seule pendant le même temps t, elle ferait décrire suivant la verticale un chemin $y = 1/2\, gt^2$.

En vertu de son double mouvement, la molécule occupera le point x, y au bout du temps t; l'élimination de t entre ces deux égalités donne pour l'équation de la trajectoire de la molécule :

$$y = \frac{g}{2U_2}\, x^2.$$

Pour avoir la vitesse d'arrivée de l'eau, il faut chercher le point où la parabole décrite par le filet moyen rencontre la circonférence extérieure. Si H est la distance de ce point au niveau du réservoir, on a pour la vitesse d'arrivée V :

$$V = \sqrt{2gH}.$$

La largeur L *du déversoir* se déduit de la formule qui donne la dépense E du canal

$$E = cLeU,$$

où le coëfficient de dépense $c = 0,480$, si le déversoir a même largeur que le canal. Si la formule précédente donnait 5 à 6 mètres pour la largeur du déversoir, on devrait porter l'abaissement de vanne à $0^m,30$, et augmenter la vitesse de la roue pour que les augets ne fussent pas trop remplis. Si, malgré ces dispositions, la largeur devait atteindre 5 à 6 mètres, il faudrait renoncer à ce genre de roue et employer la turbine.

La largeur de la roue sera de $0^m,06$ à $0^m,08$ plus grande que la largeur du déversoir; afin qu'elle dépasse un peu le vannage de part et d'autre.

La largeur du coursier aura 0^m02 de plus que la roue.

Rapport de la capacité des augets au volume d'eau qui peut y être introduit.

367. Le volume de l'auget doit être le double de celui de l'eau admise. Si l'espace entre deux palettes était plus petit, l'eau commencerait à jaillir dans l'intérieur de la roue par les jours ménagés pour l'échappement de l'air.

Rayon intérieur de la roue pour que les augets aient un volume double de celui de l'eau qui y entre.

Le rayon intérieur r' est égal au rayon extérieur r diminué de la hauteur l des palettes :

L étant la largeur de la roue, le plus grand volume d'eau qui puisse entrer dans les augets pour un tour de la roue est $\pi (r^2 - r'^2)$ L. . . . . (1)

Lorsque la circonférence extérieure décrit un mètre, il y entre un volume

$$\pi \frac{(r^2 - r'^2)\,\mathrm{L}}{2\,\pi\,r}.$$

Lorsque la circonférence extérieure décrit v mètres par seconde, il y entre un volume

$$\left(\frac{r^2 - r'^2}{2r}\right) \mathrm{L}\, v.$$

Cette quantité devant être égale 2 E, on a :

$$\left(\frac{r^2 - r'^2}{2r}\right) \mathrm{L}\; v = 2\ \mathrm{E}.$$

or $(r - r') = l$, et en éliminant r', on a :

$$l\left(\frac{2\,r - l}{2\,r}\right) = 2\ \mathrm{E}\,;\ \text{d'où}\ l = r \pm \sqrt{\frac{r^2 - 2\,\mathrm{E} \times 2\,r.}{4\,v}}$$

où le radical doit être pris avec le signe moins. Si l'on a égard au volume des palettes, ce volume devra être retranché de l'expression (1).

369. *Calcul du volume d'eau qui entre dans chaque auget d'une roue établie.* Soient q ce volume, v la vitesse de la circonférence extérieure de la roue, ε l'écartement de deux augets mesuré sur la circonférence extérieure. On a $v : \varepsilon$ pour le nombre d'augets qui passent par seconde devant l'orifice ; ce nombre multiplié par q donne la dépense E. On a donc

$$\frac{v}{\varepsilon} \times q = \mathrm{E};\ \text{d'où}\ q = \frac{\varepsilon}{v}\,\mathrm{E}.$$

Pour exprimer cette valeur de q en fonction du nombre n des augets et du nombre N de tours de la roue on a : $n\varepsilon = 2\,\pi\,r$ et $v = \dfrac{\mathrm{N}\,2\,\pi\,r}{60}$, d'où

$$q = \frac{60}{n\,\mathrm{N}}\,\mathrm{E}.$$

En divisant q par le volume d'un auget, calculé au moyen des dimensions prises sur la roue, on aura la fraction de l'auget qui est remplie, fraction qui d'après l'art. 367 ne devra pas excéder 1/2.

Théorie de roues de côté

dans l'hypothèse que le point le plus bas du coursier circulaire est au niveau moyen des eaux d'aval.

370. L'eau travaille dans cette roue par choc, d'abord, puis par son poids, et quand elle quitte la roue, elle possède une vitesse v égale à celle de la roue.

Soit V la vitesse d'arrivée de l'eau sur la roue et h la hauteur due à cette vitesse, ou la distance du point où l'eau atteint la roue au niveau supérieur, H la hauteur totale de chûte, m la masse d'eau qui afflue par seconde.

L'eau entrant sur la roue avec la vitesse V transmettrait à celle-ci un travail $\frac{1}{2}m\,\mathrm{V}^2$ si elle agissait par pression ; mais comme elle agit par choc normal, il y a une quantité $\frac{1}{2}m\,(\mathrm{V} - v)^2$ de travail perdue; de plus, l'eau à sa sortie reste capable du travail $\frac{1}{2}mv^2$; et l'on a par suite pour l'expression du travail transmis par le choc, diminué de celui dont l'eau reste capable en quittant la roue

$$\frac{1}{2}\,m\,\mathrm{V}^2 - \frac{1}{2}\,m\,(\mathrm{V} - v)_2 - \frac{1}{2}\,m\,v^2.$$

Le travail effectué par le poids de l'eau qui descend de la hauteur H — h est égal à $mg\,(\mathrm{H} - h)$.

D'après l'art. 355, on a pour l'équation de périodicité de la roue, abstraction faite du frottement :

$$\mathrm{T}_u = \frac{1}{2}\,m\,\mathrm{V}^2 - \frac{1}{2}\,m(\mathrm{V} - v)^2 - \frac{1}{2}\,mv^2 + mg\,(\mathrm{H} - h) \quad . \qquad (1)$$

ou en observant que $mgh = \frac{1}{2}m\mathrm{V}^2$ . . . . (2)

$$\mathrm{T}_u = mg\mathrm{H} - \frac{1}{2}\,m\,(\mathrm{V} - v)^2 - \frac{1}{2}\,mv^2. \quad . \quad . \qquad (3)$$

En réduisant simplement la formule (1) on trouve :

$$\mathrm{T}_u = mv\,(\mathrm{V} - v) + mg\,(\mathrm{H} - h). \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

pour que ce travail fût égal au travail moteur, il faudrait en vertu de (3) que l'on eût à la fois V = 0 et V — v = 0, ce qui est impossible.

371. *Maximum d'effet relatif.* 1° La vitesse V étant donnée, la valeur de v, pour laquelle le terme négatif de l'équation (3) devient le plus petit, est $v = 1/2$ V et cette équation devient, en substituant cette valeur et tenant compte de (2) :

$$\mathrm{T}_u = mg\left(\mathrm{H} - \frac{h}{2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5)$$

qui montre qu'il faut prendre l'eau le plus près possible de la surface et pour cela se servir de vannes en déversoir. Ce résultat théorique est aussi confirmé par l'expérience.

2° La vitesse v de la roue étant obligée, on peut demander quelle doit être la valeur de V, ou en quel point de la hauteur de chûte il faut établir la prise d'eau pour que le terme négatif dans l'équation (3) soit le plus petit possible ; l'on trouve visiblement que $V = v$; et la valeur de T_u devient dans ce cas :

$$T_u = mg\,(H - h). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Ce maximum relatif est plus petit que celui de l'équation (5) parce que si la vitesse v est tant soit peu considérable, on ne pourra pas faire usage d'une vanne en déversoir, mais bien d'une vanne avec charge sur le sommet.

372. *Vitesse de la circonférence extérieure.* D'après les expériences de M. Morin, cette vitesse peut sans diminution notable de l'effet utile atteindre $1^m,50$ et même $2^m,00$, selon la grandeur des abaissements de vanne.

Vitesse de la roue. On construira la roue pour que sa vitesse v soit les 0,70 V de la vitesse d'arrivée, de sorte que $v = 0,70$ V.

De cette manière, que la vitesse de la roue augmente ou qu'elle diminue, l'effet utile, dans les deux cas approchera de l'un des maxima relatifs mentionnés à l'article 371.

Formules pratiques qui donnent l'effet utile des roues de côté.

373. D'après les expériences de M. Morin, le coefficient de l'effet utile est 0,755 pour les roues qui reçoivent l'eau par des orifices avec charge sur le sommet. Le même coefficient est 0,799 pour les roues qui reçoivent l'eau par un déversoir. D'après cela, la formule (4) devient, en remarquant que $m = \frac{1000}{g}$ E :

pour les premières : $$T_u = 755\ E \left\{ H - h + \left(\frac{V - v}{g}\right) v \right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

pour les secondes : $$T_u = 799\ E \left\{ H - h + \left(\frac{V - v}{g}\right) v \right\} \quad . \quad . \quad (8)$$

Application $E = 0^{mc},560$; $V = 1^m,12$; $v = 1,05$; $h = 0^m,124$; $H = 2^m,50$, l'orifice est un déversoir ; la formule (8) donne ; $tu = 1065$ k^m. Le travail total de la chute est 1400 k^m ; et le coëfficient de l'effet utile = 0,76.

D'après cela on pourra, dans le cas où l'eau arrive par un déversoir, prendre pour le travail utile

$$T_u = 760\ E.H. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,bis.)$$

374. Calcul des dimensions principales d'une roue de côté pour un travail utile do[illegible]

1° Déduire de la formule (8bis) le volume d'eau nécessaire pour produire l'effet utile donné. Ce volume devra être au plus égal à la dépense de la rivière.

2° Fixer l'épaissseur que l'on veut donner à la lame d'eau, et en déduire l'abaissement de la vanne, ainsi que la hauteur de l'arête du déversoir en dessous du niveau du réservoir (art. 365).

3° Calculer la vitesse avec laquelle l'eau franchit le déversoir ;

4° Calculer la largeur du déversoir (art. 366) ;

5° La largeur de la roue sera plus forte de $0^m,06$ à $0^m,08$;

6° La largeur du coursier sera plus forte de $0^m,01$ à $0^m,02$ que celle de la roue ;

7° Fixer le rayon de la circonférence extérieure de la roue (art. 364). Ce rayon doit être augmenté de la quantité donc la roue est enfoncée en dessous des eaux d'aval ;

8° Calculer le nombre d'aubes (art. 364bis) ;

9° Construire le point où la parabole décrite par le filet moyen, rencontre la circonférence extérieure de la roue (art. 366) ;

10° Calculer la vitesse V de l'eau en ce point de rencontre (id.);

11° Prendre les 0,70 de V pour la vitesse v de la circonférence extérieure de la roue ;

12° Calculer le rayon intérieur de la roue pour que les augets aient une capacité double du volume d'eau qui y entre (art. 368).

Roues à augets recevant l'eau par dessus.

375. Ces roues, qui conviennent aux grandes chûtes, se composent de deux couronnes annulaires dont les circonférences intérieures sont réunies par un fond cylindrique ; les augets occupent l'espace compris entre les couronnes et le fond.

Espacement des augets. Les augets sont espacés de $0^m,30$ à $0^m,40$ sur la circonférence extérieure de la roue. On déduit de là le nombre des augets quand le diamètre de la roue est connu ; ce nombre devra être divisible par le nombre des bras qui relient les couronnes à l'arbre de la roue ; il est d'après D'Aubuisson, de

24 — 36 — 44 — 56 — 76 — 96 — 108

pour des roues à huit bras dont les diamètres sont de

3 — 4 — 5 — 6 — 8 — 10 — 12 mètres.

Largeur des couronnes. Cette largeur, dans le sens du rayon, est égale à l'écartement des augets sur la circonférence extérieure.

376. *Construction des augets.* 1° La circonférence extérieure étant divisée en autant de parties égales qu'il y a d'augets, on mène des rayons aux points de division ; du milieu de

la partie de chaque rayon comprise entre la circonférence intérieure et l'extérieure, on mène une droite au point de division précédent qui est situé sur cette dernière circonférence ; cette droite sera la face de l'auget ; le fond est formé par la moitié inférieure de la partie du rayon interceptée entre les circonférences.

2° A cette construction ordinaire, il est préférable de substituer la construction suivante, destinée à faire introduire l'eau sans choc contre la face de l'auget.

Au point où le filet moyen rencontre la circonférence extérieure (voir art. 366) on mène à la parabole une tangente, sur laquelle on porte une longueur égale à la vitesse V de l'eau ; on porte sur une tangente à la circonférence une longueur égale à la vitesse v de la roue (art. 385,1°), et l'on décompose la première V en deux, dont l'une est v, et dont l'autre aura la direction qu'il faut donner à la face de l'auget.

Le fond sera formé par un rayon, et sa longueur sera le 1/3 de la partie interceptée entre les circonférences extrêmes.

On ménagera dans le fond cylindrique de la roue, en-dessous de chaque auget, sur toute la longueur de celui-ci, un jour de $0^m,03$ à $0^m,04$ pour l'échappement de l'air

377. *Vannage.* L'eau arrive sur la roue par un orifice avec charge sur le sommet, prolongé par un coursier.

Coursier. Le fond du coursier est formé par un plan incliné à 1/12, qui se termine à $0^m,10$ en amont de la verticale passant par le centre de la roue ; on ne laisse que $0^m,01$ de jeu entre l'extrémité du coursier et celle-ci.

378. *Levée de la vanne.* La distance entre les faces de deux augets consécutifs étant généralement comprise entre $0^m,10$ et $0^m,12$ on limitera la levée de la vanne à $0^m,08$ ou $0^m,10$ pour les roues moyennes, et à $0^m,12$ ou $0^m,15$ au plus pour les grandes.

379. La vitesse de l'eau à la sortie de l'orifice sera

$$U = \sqrt{2gh}$$

où h représente la distance du centre de l'orifice au niveau du réservoir.

379 bis. *Largeur de l'orifice.* Connaissant la dépense E et la levée e de la vanne, on calculera la largeur l de l'orifice par la formule

$$E = cle\,U,$$

où l'on prendra $c = 0,70$.

Largeur intérieure de la roue. Cette largeur L sera égale à la précédente l augmentée de $0^m,10$.

380. *Diamètre de la roue.* H représentant la hauteur totale de chûte, h' la distance de l'extrémité inférieure du coursier au centre de l'orifice, distance qui peut s'évaluer à $0^m,10$, on aura :

$$D = H - h - h' - 0^m,01.$$

381. On cherchera comme précédemment (art. 366), parabole décrite par le filet moyen, et la vitesse de l'eau au point où cette parabole rencontre la circonférence extérieure de la roue.

382. *Rapport du volume des augets à celui de l'eau introduite.* Il importe, pour que le versement ne commence pas trop tôt, que ce rapport soit égal à 2 au moins, ce dont on s'assurera au moyen du calcul suivant.

En appelant ε l'écartement de deux augets mesuré sur la circonférence extérieure, v la vitesse de la roue, le nombre d'augets qui passera en une seconde devant l'orifice sera $\frac{v}{\varepsilon}$; chacun d'eux recevra donc un volume d'eau égal à $E\frac{\varepsilon}{v}$.

De plus, r et r' désignant les rayons extérieurs et intérieurs de la roue, n le nombre des augets, le volume de chacun d'eux sera $\frac{\pi(r^2 - r'^2)}{n}$; et l'on devra donc avoir :

$$E\frac{\varepsilon}{v} < \frac{\pi(r^2 - r'^2)}{2\,n}$$

Si cette relation n'est pas satisfaite, on augmentera la largeur $r - r'$ des couronnes.

On pourra tenir compte, comme plus haut (art. 368), du volume occupé par les faces des augets.

383. *Vitesse de la roue.* Il convient que la vitesse de la circonférence extérieure soit de $1^m,50$ environ, et qu'elle ne dépasse pas 2^m pour les petites roues, ni $2^m,50$ pour les grandes, comme on le verra plus bas (art. 385).

On sera ainsi conduit à donner des charges sur le seuil de l'orifice de

$$0^m,50\ ;\quad 0,60\ ;\quad 0,70\ ;\quad 0,80\ ;\quad 0,90$$

pour des hauteurs totales de chûte de

$$2^m,60 \text{ à } 3^m\ ;\ 3 \text{ à } 4\ ;\ 4 \text{ à } 6\ ;\ 6 \text{ à } 7\ ;\ 7 \text{ à } 8.$$

Théorie des roues à augets par-dessus

dans l'hypothèse que leur vitesse n'est pas considérable.

384. Dans cette hypothèse, l'eau ne se déversera qu'au bas de la roue ; elle effectuera donc un travail égal à celui de son poids, diminué de la perte de force vive dûe au choc, et de celle qui est dûe à la vitesse que l'eau conserve en quittant la roue.

En désignant par V la vitesse de l'eau, par v celle de la roue et en supposant que l'eau choque normalement le fond de l'auget, la perte de force vive dûe au choc sera

$\frac{1}{2} m (V - v)^2$; la force vive que l'eau conserve en quittant la roue est $\frac{1}{2} m v^2$; par suite, l'équation de périodicité sera, abstraction faite du frottement :

$$T_u = m g H - \frac{1}{2} m (V - v)^2 - \frac{1}{2} m v^2 ; \qquad (1)$$

ou

$$T_u = m g H - \frac{1}{2} m V^2 + m v (V - v). \qquad (2)$$

or $V^2 = 2 g h$; et par suite :

$$T_u = m g (H - h) + m v (V - v). \qquad (3)$$

Pour le *maximum absolu*, il faudrait en vertu de (1) qu'on eût à la fois $v = o$ et $V - v = o$; d'où $V = o$, $v = o$, ce qui est impossible.

385. *Maximum relatif.* 1° Si h et par suite V sont donnés, le maximum de l'expression (3) correspondra à $v = \frac{V}{2}$, et sera :

$$T_u = m g (H - h) + m \frac{V^2}{4} = m g \left(H - \frac{h}{2}\right). \qquad (4)$$

2° Si au contraire v est donné, le maximum, d'après l'équation (1), répondra à $V = v$, et sera :

$$T_u = m g H - \frac{1}{2} m V^2 = m g (H - h). \qquad (5)$$

Ce maximum est plus faible que le précédent, ce qui prouve qu'il est avantageux que la vitesse de la roue ne soit pas considérable.

Les expériences de M. Morin prouvent qu'elle peut varier entre 0,30 V et 0,80 V sans que l'effet utile soit notablement diminué. Dans tous les cas, on voit que la charge h doit être aussi faible que possible, c'est-à-dire qu'on doit prendre l'eau le plus près qu'il se peut du niveau supérieur.

Formules pratiques de l'effet utile des roues à augets par-dessus
dans l'hypothèse que leur vitesse n'est pas considérable.

386. D'après M. Morin, le rapport du travail utile au travail absolu est pour ces roues 0,65 à 0,70.

Le coëfficient de rendement est égal à 0,780 pour le premier terme seulement de l'expression (3) ; de sorte que la formule pratique sera, si l'on remplace mg par 1000 E :

$$T_u = 780 \, E \, (H - h) + \frac{1000 \, E}{g} v \, (V - v) \qquad (6)$$

cette formule donnera approximativement :

$$T_u = 650 \, E \, H. \qquad (6bis)$$

387. Calcul des dimensions principales d'une roue à augets par-dessus pour un travail utile donné.

1° De la formule (6bis) on déduira le volume d'eau nécessaire pour produire l'effet utile donné. Ce volume devra être au plus égal à la dépense du cours d'eau ;
2° On fixera la charge sur le seuil de l'orifice (art. 383) ;
3° On fixera la levée de la vanne (art. 378) ;
4° On calculera la vitesse de l'eau à l'orifice (art. 379) ;
5° On calculera la largeur de l'orifice (art. 379bis) ;
6° La largeur dans œuvre de la roue sera plus grande de 0m10 ;
7° On fixera le diamètre de la roue (art. 380) ;
8° On calculera le nombre des augets (art. 375) ;
9° On construira le point de rencontre du filet moyen avec la roue (art. 381) ;
10° On calculera la vitesse de l'eau en ce point (id.) ;
11° On prendra la moitié de cette vitesse V pour celle v de la roue (art 385, 1°), pourvu qu'elle reste dans les limites fixées à l'article 383 ; sinon, on pourra donner à v une valeur comprise entre 0,30 V et 0,80 V et telle qu'elle soit comprise entre ces limites (art. 385) ; si la vitesse est encore trop grande ou trop petite, on diminuera ou l'on augmentera la charge.
12° On vérifiera si les augets ont la capacité voulue (art. 382) ; sinon l'on donnera aux couronnes une largeur plus grande que l'écartement des augets ;
13° On tracera les augets (art. 376).

Théorie des roues à augets par dessus
dans l'hypothèse que leur vitesse est considérable.

388. Lorsque la vitesse de la roue est considérable, le versement de l'eau hors des augets commence à s'effectuer avant que ceux-ci soient arrivés au point le plus bas de la roue ; de sorte qu'une partie du travail de l'eau est perdue.

Pour tenir compte de cette perte, il faut déterminer les points où commence et où finit le versement ; ce qui pourra se faire si nous connaissons, outre la figure de l'auget et le volume d'eau qui y est admis, la surface extérieure de ce volume d'eau.

389. Or, cette surface dans le cas d'une vitesse considérable de la roue, n'est pas horizontale.

En effet, considérons une section verticale de la roue ; une molécule m d'eau est soumise à deux forces ; l'une verticale, qui est son poids mg ; l'autre dirigée suivant le prolongement de son rayon ρ, et qui est la force centrifuge $m \, \omega^2 \rho$, ω désignant la vitesse angulaire de la roue. Si nous prolongeons la direction de la résultante de ces deux forces jusqu'à son point de rencontre A avec la verticale qui passe par le centre de la roue, et si nous nommons d la distance du point de rencontre au centre, la similitude du triangle des trois forces et du triangle dont les côtés sont d, ρ et le prolongement de la résultante, donnera :

$$m g : m \omega^2 \rho = d : \rho ;$$

d'où

$$d = \frac{g}{\omega^2}.$$

Cette distance étant constante pour une vitesse angulaire donnée, il s'ensuit que toutes les résultantes passent par un même point A situé verticalement au-dessus du centre à cette distance d.

De plus, toutes ces résultantes $m \omega^2 \rho$ peuvent être considérées comme égales entre elles à cause des faibles variations que ρ éprouve d'une molécule à l'autre dans l'auget.

Toutes les molécules situées dans un même plan vertical sont donc sollicitées par des forces égales dirigées vers un centre fixe A ; la ligne de niveau sera donc circulaire ; comme il en est de même dans toutes les sections verticales, et que les centres de tous les cercles sont sur une parallèle à l'axe de la roue, la surface de niveau de l'eau dans chaque auget sera un cylindre circulaire ayant pour axe cette parallèle.

390. Pour déterminer les points où commence et où finit le versement, nous supposerons que l'auget ne reçoive qu'un volume d'eau égal au 1/3 de sa capacité.

En opérant dans une section verticale, nous pourrons substituer sans erreur sensible, la corde à l'arc déterminé par la surface de niveau de l'eau.

Si nous traçons une corde partant de l'extrémité de l'auget, et laissant en-dessous d'elle le 1/3 de la capacité de celui-ci, et si nous élevons une perpendiculaire au milieu de cette corde, il est évident que le versement commencera au moment où cette perpendiculaire, variable avec la position de l'auget, passera par le centre A de la surface de niveau de l'eau dans l'auget. Mais le pied de cette perpendiculaire décrit une circonférence concentrique à la roue, et à laquelle la perpendiculaire est toujours tangente. Donc en menant du point A une tangente à cette circonférence, on aura le point où commence le versement.

Le point où il finit se déterminera d'une manière analogue, en remarquant qu'il faut en ce point que la perpendiculaire élevée au milieu de la grande face de l'auget passe par le centre A. On tracera donc la circonférence qui passe par les milieux des faces, et par le point A on lui mènera une tangente, dont le point de contact sera le point cherché.

Il résulte de ces constructions que si le point A tombait sur la circonférence de la roue, l'eau ne pourrait pas s'introduire dans les augets.

391. *Formule de l'effet utile.* Désignons par H_1 la hauteur du point où commence le versement en-dessous du sommet de la roue ; par H_1' la distance verticale de ce point à celui où le versement se termine ; par u le volume d'eau admis dans chaque auget, exprimé

en mètres cubes ; le travail dû au poids de cette eau tombant de la hauteur H_1 sera

$$1000\, u\, H_1.$$

Pour déterminer le travail dû au poids de l'eau qui parcourt dans l'auget la hauteur H_1', on partagera cette hauteur en un nombre pair de parties égales ; par les points de division on mènera des horizontales, et aux points où elles rencontrent la circonférence de la roue, on tracera le profil des augets et de la surface de niveau de l'eau qu'ils contiennent ; on évaluera les volumes $u_1 = u,\ u_2,\ \ldots,\ u_{2n}$ de l'eau, et l'on obtiendra au moyen de la formule de Simpson le travail

$$1000 . \frac{H'_1}{6n} \left\{ u_1 + 4 u_2 + 2 u_3 + \ldots, + u_{2n} \right\}.$$

On devra ajouter à ces deux travaux la différence des travaux dûs à la force vive avec laquelle l'eau arrive sur la roue et la quitte, différence qui se trouvera de même que plus haut (art. 384), puisque chaque molécule d'eau qui quitte la roue à une hauteur quelconque est toujours animée de la vitesse v de celle-ci. Or le travail dû à la force vive d'arrivée est $\frac{1}{2} \frac{1000\, u}{g} V^2$; la perte de travail dûe au choc : $\frac{1}{2} \frac{1000\, u}{g} (V - v)^2$; le travail dû à la force vive de sortie $\frac{1}{2} \frac{1000\, u}{g} v^2$; la somme algébrique de ces travaux est :

$$\frac{1}{2} \frac{1000\, u}{g} \left\{ V^2 - (V - v)^2 - v^2 \right\} = \frac{1000\, u}{g} v (V - v).$$

L'équation de périodicité sera donc, en comprenant dans le premier membre le travail absorbé par le frottement :

$$T_u = 1000 \frac{H_1'}{6n} \left\{ u_1 + 4 u_2 + 2 u_3 + \ldots + u_{2n} \right\} + \frac{1000\, u}{g} v (V - v).$$

Pour avoir le travail utile par seconde, on multipliera cette expression par $\frac{v}{\varepsilon}$ qui représente le nombre d'augets qui passent en une seconde, v étant la vîtesse de la roue, et ε l'écartement de deux augets.

Roues à augets recevant l'eau de côté.

392. Ces roues s'emploient de préférence aux précédentes :

1° Si des causes accidentelles peuvent amener des crues dans le canal de fuite, auquel cas une roue recevant l'eau par-dessus serait plongée dans un fluide animé d'un mouvement contraire au sien ;

2° Si le niveau supérieur est sujet à des variations qui peuvent atteindre $0^m,30$.

3° Si la chûte n'est que de 2^m50 à 3^m, parce que cette disposition permettra de donner à la roue un diamètre plus considérable.

393. La théorie de ces roues, les formules pratiques et le calcul de leurs dimensions se font de la même manière que pour les précédentes; il n'y a de différence que dans le calcul du diamètre et dans la disposition du vannage.

Diamètre. La vitesse v de la roue devant être de 1^m50 à 2^m (art. 383), et la vitesse V d'arrivée de l'eau devant être double (art. 385), le point de rencontre du filet moyen avec la roue devra être à une distance $\frac{V^2}{2g}$ c'est-à-dire à $0^m.46$ ou $0^m.60$ environ du niveau. Si nous désignons cette hauteur par h, la hauteur totale du chûte par H, la hauteur que l'on parcourt sur la roue, par $H_1 = H - h$, et le diamètre par D, il faudra que celui-ci soit au moins égal à H_1.

Mais pour que l'eau ne pénètre pas dans les orifices destinés au passage de l'air, il faut que le point de rencontre soit à 30° environ du sommet; de sorte que

$$H_1 = D. \cos 30° = 0{,}933\ D = \frac{D}{1{,}072}.$$

Le diamètre devra donc au moins être égal à

$$1{,}072\ (H - h),$$

dans le cas où le niveau supérieur n'est pas sujet à varier.

Dans le cas contraire, pour pouvoir introduire convenablement l'eau dans les augets malgré les fluctuations du niveau, il est bon qu'elle tombe à peu près verticalement sur la roue, et par suite qu'elle atteigne celle-ci à 60° environ du sommet; on aura alors $H_1 = \frac{3}{4}$ D, et par conséquent le diamètre devra être au moins égal à

$$\frac{4}{3}(H - h).$$

394. *Vannage.* Soient donnés le profil de la roue et des augets, que l'on tracera d'après d'après les règles précédentes (art. 376). A 30° ou 60° du sommet, suivant le cas, menons une tangente à la circonférence extérieure dans le sens du mouvement, et portons sur cette droite une longueur égale à $\frac{1}{2}$ V; de son extrémité avec un rayon égal à V, décrivons un arc qui coupera le prolongement de la face de l'auget vers le haut en un point; la droite qui joindra l'extrémité prise pour centre à ce point pourra être considérée comme la résultante de deux vitesses, l'une égale et de même sens que celle de la roue au point considéré, l'autre dirigée suivant la face de l'auget; et comme cette droite représente en grandeur la vitesse de l'eau affluente, si l'on donne à l'eau cette direction, elle entrera dans l'auget sans en choquer la face.

En menant à cette droite des parallèles à $0^m,04$ ou $0^m,05$ de distance de part et d'autre, on aura les directrices du vannage.

Cette construction étant faite pour le niveau moyen, on pourra la répéter pour des niveaux qui diffèrent entre eux de 0^m10 en 0^m10, et obtenir ainsi une série de directrices que l'on espacera entre elles de $0^m,08$ environ et qui se termineront à une circonférence concentrique à la roue à $0^m.01$ de distance de celle-ci.

395. *Largeur du vannage.* En appelant l cette largeur, d la plus courte distance de deux directrices, h la distance du niveau au centre de l'orifice, E la dépense, et en supposant un seul orifice démasqué, on aura

$$E = c\,l\,d\sqrt{2gh},$$

où l'on prendra $\qquad c = 0.75.$

Si la largeur l déterminée par cette relation est convenable, on l'adoptera, et l'on ne démasquera qu'un seul orifice; mais si elle est trop considérable, on en démasquera deux, et en appelant d' et h' les quantités correspondantes au second, on aura :

$$E = c\,l\left(d\sqrt{2gh} + d'\sqrt{2gh'}\right),$$

d'où l'on déduira la largeur l.

396. *Remarque.* Les constructions données précédemment pour les augets ne sont applicables qu'aux roues en bois. Dans celles en fer, le profil des augets est une ligne courbe au lieu d'être une ligne brisée; cette modification présente un double avantage : d'augmenter la capacité de l'auget, et de diminuer la perte de force vive dûe au choc de l'eau contre le fond de celui-ci. Le tracé s'effectuera du reste simplement en raccordant au moyen d'une courbe les deux faces du profil d'un auget de bois déterminées au moyen de l'une des règles précédentes (art. 376).

Qu'il s'agisse de roues en bois ou en fer, on s'assurera dans tous les cas comme plus haut (art. 382) que les augets ne sont pas remplis au-delà de la moitié de leur capacité. Sinon, l'on augmentera soit la vitesse de la roue, si cela ne présente pas d'inconvénients, soit la largeur des couronnes.

Roue Poncelet.

397. Dans cette roue on cherche à réaliser les deux conditions du maximum absolu d'effet utile qui sont (art.) que l'eau arrive sans choc sur la roue, et qu'elle la quitte sans vitesse.

Aubes. Les aubes de cette roue sont circulaires et emboîtées dans deux couronnes annulaires.

Vannage. La vanne est inclinée à 1 de base sur 2 de hauteur, ou plutôt, si c'est possible, à 1 de base sur 1 de hauteur.

398. *Coursier*. On mène à la circonférence extérieure de la roue une tangente inclinée à 1/10 ; et, à une distance de cette droite égale à l'épaisseur que l'on veut à la lame d'eau, on mène à cette droite une parallèle qui rencontre la circonférence en un point a ; soit b le point de rencontre du rayon tiré vers a avec la tangente. Si le point b se meut uniformément vers a le long du prolongement du rayon ba, tandis que ce rayon tourne d'un mouvement uniforme autour du centre jusqu'au point de contact c de la tangente, le point b décrira une spirale. Cela posé, la partie rectiligne du fond du coursier sera représenté par la tangente jusqu'au point b, et la partie curviligne au-delà de ce point vers c par cette spirale.

On peut admettre que cette disposition de coursier conserve à l'eau toute sa vitesse, car si, d'un côté, le frottement tend à la diminuer, d'un autre côté l'inclinaison du coursier l'augmente.

399. *Construction des aubes*. On doit construire des aubes de telle sorte que l'eau en y arrivant n'ait de vitesse relative que tangentiellement à elles. Soit V la vitesse d'arrivée de l'eau, v celle de la roue. Au point c, où la circonférence de la roue est rencontrée par la spirale, menons à celle-ci une tangente.

Cette dernière se construira au moyen de cette considération que le point générateur de la courbe étant animé de deux vitesses uniformes, l'une dirigée vers le centre et représentée par ba, l'autre sur la circonférence, représentée par $a\,c$, la vitesse résultante, qui a la direction de la tangente, sera la diagonale du parallélogramme construit sur les deux vitesses. On portera donc une longueur égale à ba sur le rayon qui aboutit en c, et une longueur égale au développement de $a\,c$, sur la tangente menée en ce point à la circonférence dans le sens du mouvement ; la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux droites sera la tangente à la spirale.

Portons maintenant sur cette droite une longueur égale à V, et sur la tangente à la circonférence une longueur égale à v. Si nous construisons le parallélogramme dont V est la diagonale, et v l'un des côtés, l'autre côté représentera en grandeur et en direction la vitesse que doit avoir l'eau le long des aubes pour y arriver sans choc. On élèvera donc

une perpendiculaire à cette droite au point c jusqu'à son point de rencontre avec la circonférence intérieure des couronnes, et de ce dernier point comme centre, avec la perpendiculaire pour rayon, on décrira une circonférence ; celle-ci sera le profil de l'aube.

Nombre des aubes. On le choisira de telle sorte qu'elles soient espacées de $0^m,25$ à $0^m,30$, et que leur nombre soit divisible par celui des bras.

400. *Largeur des couronnes*. On donne aux couronnes dans le sens du rayon une largeur égale au quart du diamètre de la roue.

401. *Largeur du coursier*. Soit H la charge sur le sommet de l'orifice, E la dépense, L la largeur du coursier, e l'épaisseur de la lame d'eau, V la vitesse de l'eau à l'orifice, c le coëfficient de la dépense ; on aura :

$$E = c\,L\,e\,V, \text{ où } V = \sqrt{2gH}$$

On déduit de là L.

H n'est évidemment pas la hauteur totale de chûte ; pour obtenir H, il faut diminuer celle-ci, que nous désignerons par H_1, de la perte de hauteur due à la longueur l du coursier, perte qui est égale à $0,10\,l$; de la moitié de l'épaisseur e de la lame d'eau ; et enfin de la hauteur du ressaut qui est de $0^m,10$; on aura donc :

$$H = H_1 - 0,10\,l - \frac{1}{2}e - 0^m,10.$$

402. *Largeur de la roue*. Elle est égale à celle du coursier, augmentée de $0^m,10$. Celui-ci sera construit de telle sorte que l'épaisseur des couronnes soit logée dans les joues des murs, afin que l'eau pénètre entre les couronnes sans les frapper sur leur épaisseur.

403. *Diamètre de la roue*. On le déterminera de telle sorte que la roue puisse admettre un volume d'eau triple de celui qu'elle dépense en temps ordinaire. Soient R et r le rayon extérieur et le rayon intérieur des couronnes ; L′ la largeur dans œuvre de la roue ; le volume pris entre les couronnes sera $\pi\,(R^2 - r^2)\,L'$.

La fraction de ce volume qui passe en une seconde devant le coursier sera $\frac{v}{2\pi R}$, v étant la vitesse de la circonférence extérieure.

Egalant cette partie du volume au triple de la dépense, nous aurons :

$$\frac{v}{2\pi R} \cdot \pi\,(R^2 - r^2)\,L' = 3\,E\,;$$

ou, en posant $R - r = a$, largeur des couronnes, d'où $r = R - a$, et $R + r = 2\,R - a$:

$$\frac{a\,(2\,R - a)\,L'\,v}{2\,R} = 3\,E\,;$$

et, prenant $a = \frac{1}{2}$ R (art. 400), et réduisant :

$$1/8 \text{ R. L}' v = \text{E}; \text{ d'où } 2 \text{ R} = \frac{16 \text{ E}}{\text{L}' v},$$

ce qui donnera le diamètre en fonction de la dépense, de la largeur de la roue, et de sa vitesse.

404. *Ressaut.* Son arête est située à $0^m,10$ ou $0^m,15$ en amont de la verticale qui passe par l'axe de la roue, et à $0^m,10$ environ au-dessus du niveau moyen des eaux d'aval; un arc de cercle concentrique à la roue, sur $0^m,20$ à $0^m,25$ de longueur, raccorde l'arête avec la spirale qui forme le fond du coursier.

Jeu. On laisse entre la circonférence extérieure de la roue et le fond concentrique du coursier un jeu de $0^m,005$ pour des roues en fonte avec coursier en pierre, et de $0^m,01$ pour des roues en bois.

405. *Levée de la vanne.* Il résulte des expériences de M. Morin que les levées de vanne les plus favorables sont comprises entre $0^m,20$ et $0^m,25$.

Théorie de la roue Poncelet.

406. Nous admettrons que l'eau arrive sans choc sur les aubes, et que celles-ci sont tangentes à la circonférence extérieure de la roue; de plus, nous supposerons que l'eau ait quitté entièrement les aubes avant que celles-ci atteignent la verticale qui passe par l'axe, parce qu'au delà de cette verticale, le travail du poids de l'eau contrarierait le mouvement de la roue; enfin nous étudierons l'action d'une seule molécule d'eau.

Soit V la vitesse d'arrivée de l'eau; v celle de la roue, l'eau montera sur l'aube, avec une vitesse relative V — v, jusqu'à une certaine hauteur, et lorsqu'elle sera redescendue à l'extrémité de l'aube, elle aura repris cette même vitesse en vertu du principe des forces vives, abstraction faite du frottement. Aussi longtemps qu'elle reste sur l'aube, elle travaille par sa pression normale; et lorsqu'elle la quitte, elle sera animée d'une vitesse réelle qui sera la résultante de sa vitesse relative V — v, dirigée tangentiellement à la circonférence dans le sens opposé au mouvement, et de la vitesse v de la roue, qui est de sens contraire; cette vitesse réelle sera donc V — $2v$.

Pour obtenir le maximum de travail utile, il faut que l'eau quitte la roue sans vitesse (art. 354), et par conséquent que

$$\text{V} - 2v = 0\,; \text{ d'où } v = \frac{\text{V}}{2}$$

Dans ces hypothèses, l'eau arrivant sans choc et quittant sans vitesse, l'effet utile théorique serait égal au travail absolu de l'eau (art. 354).

407. Il serait facile de déterminer, dans ces mêmes conditions, la largeur à donner aux couronnes dans le sens du rayon pour que la molécule d'eau arrive avec une vitesse nulle à l'extrémité supérieure de l'aube. Pour cela, désignons respectivement par T_1 et T_2 les travaux effectués par la pression normale de l'eau sur les aubes, pendant son ascension et pendant sa descente. Le travail de la pesanteur dans l'un et l'autre est cas mg (R — r).

Les forces vives initiales et finales sont, pour l'ascension : $m\text{V}^2$ et $m\left(v\frac{r}{\text{R}}\right)^2$; pour la descente : $m\left(v\frac{r}{\text{R}}\right)^2$ et $m(\text{V} - 2v)^2$. Le principe des forces vives nous donnera donc :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}m\text{V}^2 - \frac{1}{2}m\left(v\frac{r}{\text{R}}\right)^2 &= mg(\text{R} - r) + \text{T}_1 \\ \frac{1}{2}m\left(v\frac{r}{\text{R}}\right)^2 - \frac{1}{2}m(\text{V} - 2v)^2 &= -mg(\text{R} - r) + \text{T}_2 \end{aligned}\right\} \text{d'où } \text{T}_1 + \text{T}_2 = \frac{1}{2}m\text{V}^2 - \frac{1}{2}m(\text{V} - 2v)^2$$

En admettant, pour simplifier le calcul, que le temps de l'ascension est égal à celui de la descente, les travaux effectués pendant ces temps seront égaux; par suite en prenant $v = \frac{1}{2}\text{V}$, nous aurons :

$$\text{T}_1 = \frac{1}{4}m\text{V}^2 = \frac{1}{2}m\text{V}^2 - \frac{1}{2}m\left(v\frac{r}{\text{R}}\right)^2 - mg(\text{R} - r);$$

ou

$$o = mv^2 - \frac{1}{2}mv^2\frac{r^2}{\text{R}^2} - mg(\text{R} - r).$$

Réduisant, et posant $\frac{2g\text{R}}{v^2} = f$, $\frac{r}{\text{R}} = x$, nous obtiendrons :

$$x = \frac{f}{2} - \sqrt{\left(\frac{f}{2} - 1\right)^2 + 1}.$$

On prend le signe *moins*, parce que x est nécessairement une fraction.

Mais le calcul qui précède, n'étant relatif qu'à une molécule, ne tient pas compte de la pression qu'elle éprouve de la part de celles qui suivent, pression en vertu de laquelle elle monte à une hauteur plus considérable. C'est pourquoi l'on donne aux couronnes une largeur généralement plus grande que celle qui résulterait de cette équation.

Formules pratiques.

408. D'après les expériences de M. Poncelet et celles de M. Morin, la vitesse qui répond au maximum du travail est les 0,55 de la vitesse d'arrivée de l'eau.

Le travail utile est dans ces conditions, d'après M. Morin, pour des roues convenablement exécutées d'après les règles précédentes, les 0,65 du travail absolu de l'eau. Toutefois, il convient, par prudence, de ne l'évaluer qu'aux 0,60 de ce dernier.

La roue peut marcher à des vitesses notablement différentes de celle qui répond au maximum d'effet utile, sans que celui-ci s'éloigne sensiblement de ce maximum.

Nous poserons donc, en appelant P le poids de l'eau dépensée par seconde :

$$T_u = 0{,}60\ P.H' = 600\ E\ H',$$

H' étant la hauteur totale de chute, diminuée de celle du ressaut.

Calcul des dimensions de la roue.

409. S'il s'agit d'établir une roue capable de fournir un travail utile donné, on commencera par vérifier, au moyen de la formule précédente, si la chute est suffisante. Dans ce cas :

1° On déduira de cette formule la dépense.
2° On calculera la vitesse d'arrivée de l'eau, et la largeur du coursier (401).
3° On prendra pour la vitesse de la roue les 0,55 de celle de l'eau (408).
4° On calculera la largeur de la roue (402) et son diamètre (403).
5° On prendra la largeur des couronnes égale au 1/4 du diamètre (400).

Application.

410. Etablir une roue de 14 chevaux, avec une chute réelle de 1^m80. (Poncelet).

1° $E = \dfrac{14 \times 75}{600 \times 1{,}8} = 0^{mc},972$, le ressaut réduisant la hauteur totale de chute à 1^m80.

2° Soit $e = 0^m,30$ la hauteur de l'orifice; $0^m,15$ la perte de hauteur due au coursier; nous aurons (401) $H = 1{,}80 - 0{,}15 - 0{,}15 = 1{,}50$.

d'où $V = \sqrt{2gH} = 5{,}42$, et $L = \dfrac{E}{c\,e\,V} = 0{,}75$, en supposant un vannage incliné à 1 de base sur 1 de hauteur, pour lequel $c = 0{,}80$.

3° Nous prendrons $v = 0{,}55\ V = 2{,}98$.

4° La largeur de la roue sera $L' = L + 0{,}10 = 0{,}85$.

Son diamètre $2\ R = \dfrac{16\ E}{L'\,v} = 6^m$ (Poncelet prend 3,8).

La largeur des couronnes $a = \dfrac{6}{4} = 1{,}50$.

411. Si nous appliquons à cette roue la formule de l'article 407, pour déterminer théoriquement la largeur des couronnes, nous trouverons $f = \dfrac{2\,g\,R}{v^2} = 6{,}3$ approximativement ; et par suite :

$$\frac{r}{R} = x = 3{,}15 - 2{,}37 = 0{,}78\ ;\ \text{d'où}\ r = 0{,}78\ R,\ \text{et}\ a = 0{,}22\ R = 0{,}66.$$

En adoptant le diamètre de 3,8 donné par Poncelet, on trouverait

$$f = 4{,}2\ ;\ x = 2{,}1 - 1{,}5 = 0{,}6\ ;\ \text{d'où}\ a = 0{,}4\ R.$$

Théorie de la turbine Fourneyron.

412. Dans cette roue, dont des modèles du musée nous dispensent de donner la description, on cherche à réaliser les deux conditions du maximum d'effet utile (art. 354) : 1° que l'eau entre sans choc ; 2° qu'à l'instant où elle a quitté la roue, sa vitesse soit nulle.

Ces deux conditions étant réalisées, il en résulte que l'eau, dans la turbine Fourneyron, travaille uniquement par sa force centrifuge, ainsi que D'Aubuisson l'énonce dans son traité d'hydraulique. C'est sur ce principe que repose la théorie que nous allons exposer.

Cette théorie permet de déterminer le rapport des rayons intérieur et extérieur de la turbine, rapport que M. Fourneyron a déduit de l'expérience.

Nous distinguerons dans cette turbine deux genres différents, selon que le premier élément de chaque palette est normal à la circonférence intérieure, ou fait avec celle-ci un angle différent de l'angle droit ; et dans chacun de ces deux cas nous supposerons successivement le dernier élément de chaque palette tangent à la circonférence extérieure, puis faisant un certain angle avec elle.

Premier genre.

413. *Premier cas. Le premier élément de chaque palette est normal à la circonférence intérieure, et le dernier élément est tangent à la circonférence extérieure.*

Notations. Soit r le rayon de la circonférence intérieure ; β le rapport du rayon de la circonférence extérieure à celui de la première ; de sorte que le rayon de celle-là sera βr ;

V la vitesse de l'eau sur le dernier élément d'une directrice ; α l'angle que cet élément fait avec le rayon r ; v la vitesse de la circonférence intérieure ; βv celle de l'extérieure ; m la masse d'eau qui s'écoule par seconde ; Y la vitesse de l'eau sur le premier élément d'une palette ; Y' sa vitesse sur le dernier élément.

414. *Condition pour que l'eau entre sans choc.* La vitesse V que possède l'eau sur le dernier élément d'une directrice étant décomposée suivant le rayon qui aboutit à l'extrémité de cet élément, et suivant la tangente au même point à la circonférence intérieure, il faut que cette dernière composante soit égale à v pour que l'eau entre sans choc.

Or, la composante de V suivant le rayon est $Y = V \cos \alpha$;

. . . . la tangente $v = V \sin \alpha$; d'où

$$Y^2 = V^2 - v^2. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Pour avoir la vitesse de l'eau sur le dernier élément des palettes, il suffit d'exprimer que travail de la force centrifuge qui sollicite l'eau sur les palettes est égal à la moitié de l'accroissement que prend la force vive de l'eau depuis le premier élément des palettes jusqu'au dernier.

Or, le travail de la force centrifuge est (*)

$$\frac{1}{2} m (\beta^2 v^2 - v^2) ;$$

la moitié de l'accroissement de la force vive est

$$\frac{1}{2} m (Y'^2 - Y^2).$$

Egalant ces deux quantités, et réduisant au moyen de (1), on a pour la vitesse sur le dernier élément des palettes :

$$Y'^2 = V^2 - 2 v^2 + \beta^2 v^2. \quad . \quad . \quad (2)$$

415. *Condition pour que l'eau n'ait plus de vitesse à l'instant où elle a quitté la palette.* Les vitesses Y' et βv étant dirigées en sens contraires suivant la même droite, il faut, pour que leur résultante soit nulle, que $Y' = \beta v$, ce qui donne au moyen de (2)

$$V^2 - 2v^2 = 0 ; \text{ ou } v = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,7. \quad . \quad (3)$$

(*) En effet, en désignant par ω la vitesse angulaire, la force centrifuge est $m\omega^2 r$; son travail élémentaire $m\omega^2 r dr$; intégrant entre les limites r et βr, on obtient $\frac{1}{2} m\omega^2 (\beta^2 r^2 - r^2) = \frac{1}{2} m (\beta^2 v^2 - v^2)$.

Or, nous avons trouvé (art. 414)

$v = V \sin \alpha$; et $Y = V \cos \alpha$. Il résulte donc de (3) que $\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, d'où $\cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, et $Y = V$.

Puisque l'eau entre sans choc et quitte sans vitesse, le travail moteur doit être égal au travail absolu (354) et par conséquent à celui de la force centrifuge (412) ; on aura donc

$$\frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m (\beta^2 - 1) v^2 ; \text{ ou}$$

$$(\beta^2 - 1) v^2 = V^2 ; \text{ d'où en vertu de (3) :}$$

$$\beta^2 - 1 = 2 \text{ et } \beta = \sqrt{3} = 1,73 ; \ \frac{1}{\beta} = 0,58.$$

416. Mais comme tous les filets d'eau ne peuvent pas entrer dans la roue tangentiellement au premier élément des palettes; que d'un autre côté l'eau, à l'instant où elle a quitté la roue conserve toujours encore une certaine vitesse, il en résulte que le travail utile, c'est-à-dire celui de la force centrifuge, n'est qu'une fraction k du travail moteur ; on doit donc poser :

$$\frac{1}{2} m (\beta^2 - 1) v^2 = \frac{1}{2} m V^2 k,$$

d'où l'on déduit à cause de $V^2 = 2 v^2$

$$\beta = \sqrt{2k + 1}$$

Selon que $k = 0,60$ ou $0,70$, β sera égal à 1,48 ou à 1,55, et $\frac{1}{\beta}$ à 0,85 ou à 0,65.

417. *Second cas. Le dernier élément des palettes fait un angle δ avec la circonférence extérieure.* Dans ce cas l'eau, à l'instant où elle a quitté la roue, possède encore une vitesse w qui est la résultante des vitesses Y' et βv ; et la force vive due à cette vitesse est perdue.

Or, en vertu du parallélogramme des vitesses, on a

$$w^2 = Y'^2 + \beta^2 v^2 - 2 Y' \beta v \cos \delta$$

et si, pour éviter les complications de calcul, nous faisons $Y' = \beta v$, il viendra :

$$w^2 = 2 \beta^2 v^2 (1 - \cos \delta) ;$$

cette vitesse est d'autant plus petite que l'angle δ est plus petit.

En exprimant que le travail utile dû à la force centrifuge est égal au travail moteur diminué du travail perdu par suite de la vitesse w conservée par l'eau à l'instant où elle a quitté la roue, nous aurons :

$$\frac{1}{2}\, m\,(\beta^2 - 1)\, v^2 = \frac{1}{2}\, m\, [V^2 - 2\, \beta^2 v^2 (1 - \cos \delta)] \qquad (4)$$

d'où l'on déduit au moyen de l'équation (3) :

$$\beta = \sqrt{\frac{3}{3 - 2 \cos \delta}};$$

pour $\delta = 30^o$, on trouve $\beta = 1{,}54$ et $\frac{1}{\beta} = 0{,}65$.

Si l'on suppose, de même que plus haut (art. 416), que le premier membre de l'équation (4) n'est qu'une fraction k du second membre, on trouvera :

$$\beta = \sqrt{\frac{2\,k + 1}{2\,k + 1 - 2\,k \cos \delta}}$$

Pour $k = 0{,}60$, on aura $\beta = 1{,}37$ et $\frac{1}{\beta} = 0{,}73$.

" $k = 0{,}70$, " $\beta = 1{,}42$ et $\frac{1}{\beta} = 0{,}70$.

Deuxième genre.

418. *Le premier élément des palettes fait avec la conférence intérieure un angle différent de l'angle droit.*

Premier cas. Le dernier élément de chaque palette est tangent à la circonférence extérieure.

Soit V la vitesse d'arrivée de l'eau, α l'angle de sa direction avec le rayon ; Y la vitesse de l'eau le long du premier élément de la palette, Y' le long du dernier ; γ l'angle du premier élément avec le rayon ; v la vitesse de la circonférence intérieure.

Condition pour que l'eau entre sans choc. Il faudra que la vitesse V se décompose en Y, dirigée suivant le premier élément de la palette, et en v, dirigée suivant la tangente à la circonférence intérieure, ou en d'autres termes, que la projection de V sur une direction quelconque soit égale à la somme des projections de Y et de v.

Les projections de ces trois vitesses sur la direction de la tangente sont :

$$V \sin \alpha,\ Y \sin \gamma \text{ et } v.$$

Les projections de ces trois vitesses sur la direction du rayon sont : $V \cos \alpha$, $Y \cos \gamma$ et o; par suite :

$$V \sin \alpha = Y \sin \gamma + v \quad . \quad . \quad (1)$$

$$V \cos \alpha = Y \cos \gamma \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Faisant passer v dans le premier membre, et ajoutant les carrés :

$$Y^2 = V^2 + v^2 - 2\, Vv \sin \alpha \quad . \quad . \quad (3)$$

En se fondant sur le même principe qu'à l'art. 417, on trouvera la vitesse Y' de l'eau le long du dernier élément de la palette au moyen de l'équation

$$Y'^2 - Y^2 = \beta_2\, v^2 - v^2,$$

qui donne, par la substitution de la valeur précédente de Y^2 :

$$Y'^2 = V^2 - 2\, Vv \sin \alpha + \beta^2 v^2. \qquad (4)$$

419. *Condition pour que l'eau n'ait plus de vitesse à l'instant où elle a quitté la palette.* On trouvera, comme à l'art. 415, que cette condition est $Y' = \beta v$. Substituant cette valeur dans l'équation (4) :

$$V_2 - 2\, Vv \sin \alpha = o. \quad . \quad . \quad (5)$$

Or, puisque le travail moteur est égal au travail absolu de l'eau (art. 415), on aura :

$$V^2 = (\beta^2 - 1)\, v^2. \qquad (6)$$

L'équation (5) donne, en supprimant le facteur commun V qui n'est pas nul :

$$\sin \alpha = \frac{V}{2\, v} \qquad (A)$$

Au moyen de cette même équation, (3) donnera :

$$Y = v \qquad (B)$$

et l'on tirera de (4) :

$$Y' = \beta v \qquad (C)$$

et de (6) : $4 \sin_2 \alpha = \beta^2 - 1$; d'où :

$$\beta^2 = 1 + 4 \sin^2 \alpha \qquad (D)$$

Par suite de ces valeurs, (1) donnera : $V \sin \alpha = v\,(1 + \sin \gamma)$; d'où :

$$\sin \gamma = 4 \sin^2 \alpha - 1. \qquad (E)$$

En se donnant l'angle α, on trouvera toutes les autres quantités au moyen des équations précédentes.

420. Mais comme le travail utile n'est qu'une fraction k du travail moteur par les raisons exposées à l'art. 416, on devra écrire :

$$k\, V^2 = (\beta^2 - 1)\, v_2,$$

de sorte que (D) deviendra :

$$\beta^2 = 1 + 4\,k \sin^2 \alpha. \qquad \text{(D')}$$

Il n'en résulte aucun changement dans les autres équations.

421. *Second cas. Le dernier élément de chaque palette fait un angle δ avec la circonférence extérieure.*

Dans ce cas, en égalant, comme nous l'avons fait à l'art. 417, la vitesse Y' à la vitesse βv de la circonférence extérieure, nous aurons pour leur résultante w :

$$w^2 = \beta^2 v^2 (1 - \cos \delta),$$

et le principe des forces vives nous donnera de même qu'à cet article :

$$\beta^2 v^2 = V^2 - \beta^2 v^2 (1 - \cos \delta). \qquad \text{(6 bis)}$$

Cette équation remplace l'équation (6), et devient au moyen de la relation (A), qui a lieu comme dans le premier cas :

$$\beta^2 - 1 = 4 \sin^2 \alpha - 2\,\beta^2 (1 - \cos \delta), \text{ ou } \beta^2 (3 - 2 \cos \delta) = 1 + 4 \sin^2 \alpha,$$

d'où

$$\beta^2 = \frac{1 + 4 \sin^2 \alpha}{3 - 2 \cos \delta} \qquad \text{(D'')}$$

Cette équation remplace l'équation (D), et les autres subsistent dans ce second cas comme dans le premier.

422. Enfin, si l'on exprime que le travail utile n'est qu'une fraction k du travail moteur, on aura au lieu de (6 bis) :

$$(\beta^2 - 1)\, v^2 = k\,[\,V^2 - 2\,\beta^2 v^2 (1 - \cos \delta)\,],$$

équation d'où l'on tirera par (A) :

d'où

$$\beta^2 - 1 = k\,[\,4 \sin^2 \alpha - 2\,\beta^2 (1 - \cos \delta)\,],$$

$$\beta^2 = \frac{1 + 4\,k \sin^2 \alpha}{1 + 2\,k\,(1 - \cos \delta)}, \quad \text{(D''')}$$

équation qui tiendra lieu de la précédente (D'')

FIN.