

dont la période est par conséquent  $\frac{1}{t_2}$  ou 450 jours sidéraux environ (\*).

Ce terme, à l'inverse des deux précédents qui appartiennent à la nutation spéciale (variable avec la longitude de l'observatoire), rentre dans la nutation générale (la même pour tous les observatoires). Je le crois très faible; l'observation semble toutefois en manifester l'existence (\*\*).

—

*Sur la période du mouvement absolu d'un point de la Terre autour de l'axe instantané; par F. Folie, membre de l'Académie.*

1. Il y a un an, j'ai trouvé deux termes pour l'expression de la nutation eulérienne de l'axe instantané.

Récemment, j'ai constaté que ces deux termes s'entre-détruisent et que cette nutation est nulle à une très petite quantité près (\*\*\*), absolument insensible aux observations, un seul cas excepté, celui des termes séculaires dans lesquels cette très faible nutation interviendrait.

Je laisse ce cas de côté et ne m'occuperai, de plus, que de la Terre supposée rigide.

(\*) *Théorie du mouvement de rotation de l'écorce solide du globe.* Bruxelles, 1898.

(\*\*) Les observations de Peters m'ont donné  $0'',04$  pour le coefficient de ce terme, et son introduction a réduit de moitié l'erreur probable d'une observation. Celles de Lindhagen ont donné un coefficient certainement trop fort,  $0''$  (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*). Nous sommes bien éloignés encore, on le voit, de la solution complète du problème de la variation des latitudes.

(\*\*\*)  $\frac{1''}{2000}$  environ.



eulérienne, en rapportant les *coordonnées* au pôle et à l'équateur instantanés. Mais tel n'est pas le cas.

Commençons par constater que l'argument  $\xi$  du mouvement *apparent* du pôle instantané autour du pôle géographique supposé fixe a une période

$$T = \frac{1}{1 + \frac{\mu}{n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{305}} = \frac{305}{306} \text{ jours sidéraux}$$

et non 305 jours sidéraux, comme on le croit très généralement; j'ai dit *apparent*, puisque le pôle instantané est immuable dans le ciel et que c'est en fait le pôle géographique qui tourne autour de lui en  $\frac{305}{306}$  jours sidéraux, d'où l'expression de *variations journalières de la hauteur du pôle* (Laplace), que j'ai si souvent répétée et à laquelle ont contredit plusieurs astronomes très distingués (Radau, Tisserand, B. A., 1890) (\*).

4. Cette idée fondamentale semble être en contradiction complète avec celle que les astronomes se forment du mouvement du pôle instantané. Avant de la poursuivre dans ses conséquences, qui sont l'incorrection des déter-

---

(\*) Si l'on était tenté de révoquer en doute la correction des calculs précédents, je me bornerais à répondre que, si  $\xi$  n'était pas égal à

$$\frac{\pi}{2} + \beta = \frac{\pi}{2} + \varphi + \Gamma,$$

la nutation eulérienne de l'axe instantané ne serait pas nulle, comme je l'ai cru longtemps, et que l'on n'aurait pas

$$\alpha_i = \alpha_m + \Delta\alpha, \quad \delta_i = \delta_m + \Delta\delta,$$

formules adoptées par tous les astronomes.

minations de l'heure et de l'ascension droite dans le système de l'axe instantané, tâchons d'en exposer les raisons sans nous aider du calcul, car un phénomène n'est bien expliqué que si ces raisons sont clairement exposées.

Nous avons dit que l'axe de rotation est immuable dans l'espace et que la vitesse autour de cet axe est la même qu'autour de l'axe géographique.

Les astronomes partent de ce dernier fait pour déterminer l'heure et l'ascension droite dans le système de l'axe instantané.

Ils ont tort, parce qu'ils omettent de tenir compte du déplacement du pôle instantané à la surface de la Terre, ou, en termes plus explicites, du mouvement  $u = n\gamma$  de la Terre autour de l'axe U (voir art. 2), axe qui effectue en 305 jours sidéraux une révolution complète dans le plan de l'équateur ( $xy$ ).

La vitesse angulaire de tout point de la Terre autour de l'axe I est bien  $n\sqrt{1 + \gamma^2} = n$ , et la période de *ce mouvement* est bien le jour sidéral; mais en *lui* ne consiste pas *tout* le mouvement du point considéré. Ce point est entraîné avec l'axe U dans un mouvement dont la période est de 305 jours sidéraux.

La combinaison de ces deux mouvements donne pour résultante un mouvement d'une période de

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{305}} = \frac{305}{304} \text{ jours sidéraux (*).}$$

---

(\*) Voir l'Appendice à ce travail.

Autrement encore :

L'axe géographique Z étant supposé fixe, on sait que la révolution de l'axe instantané I s'effectue autour de lui en 305 jours sidéraux ou, puisque I est immuable, c'est Z qui effectue cette révolution autour de I; or Z est, dans la Terre, une succession de points matériels invariablement reliés à tous les autres points; ceux-ci sont donc entraînés dans ce mouvement d'une période de 305 jours sidéraux, mais ils tournent autour de Z en un jour sidéral. La période de leur mouvement absolu autour de I est donc  $\frac{1}{1 - \frac{1}{305}}$  jours sidéraux.

5. Tel est le fait capital dont je ne vois tenir aucunement compte dans la détermination de l'heure et de l'ascension droite. Il est vrai qu'on ne les définit pas (Oppolzer le déclare, page 198) dans l'équateur et le méridien instantanés, mais dans l'équateur géographique et dans un méridien fixe.

Alors, on ne peut pas écrire

$$(4). \dots \alpha = \alpha_m + \Delta\alpha;$$

on doit écrire, en partant des formules (1)

$$(5). \dots \alpha = \alpha_m + \Delta\alpha + \gamma \operatorname{tg} \delta \sin (\beta - \alpha) (*)$$

$$= \alpha_m + \Delta\alpha \pm \gamma \operatorname{tg} \delta \sin (\mu t + L - \sigma)$$

dans le méridien, L désignant la longitude orientale du

(\*) Je fais rentrer dans la correction de la pendule la nutation eulérienne de l'équinoxe en ascension droite.

premier méridien, qui passe par l'axe principal X; les signes  $\pm$  se rapportent à un passage s. ou i.

En omettant de tenir compte du déplacement du pôle instantané à la surface de la Terre dans la formule de l'ascension droite (on en tient compte en D par la variation des latitudes), déplacement qui n'est que la traduction du mouvement de la Terre autour de l'axe U, et de celui de cet axe dans le plan de l'équateur, les astronomes n'ont donc envisagé qu'une des deux composantes de la nutation eulérienne, la nutation en déclinaison (variation des latitudes); ils ont complètement négligé la nutation en ascension droite.

Ils auraient raison si leurs formules et leurs observations étaient rapportées au pôle, à l'équinoxe et au méridien instantanés.

Ils ont tort, puisque tel n'est pas le cas, ni pour leurs formules (Oppolzer, *loc. cit.*), ni pour leurs observations qu'ils calculent comme si la période du mouvement absolu du lieu d'observation autour de l'axe de rotation était d'un jour sidéral, tandis qu'elle est en réalité de  $\frac{305}{304}$  jours sidéraux (\*).

6. Aussi ne doit-on pas être surpris des mécomptes que les astronomes les plus habiles rencontrent dans leurs déterminations de l'azimut de la lunette méridienne. En voici quelques exemples (\*\*):

|                |                  |                                |                                 |                               |
|----------------|------------------|--------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|
|                | Heure sidérale : | 9 <sup>h</sup> 24 <sup>m</sup> | 19 <sup>h</sup> 42 <sup>m</sup> | 0 <sup>h</sup> 4 <sup>m</sup> |
| 1868. Mars 30. | Azimut :         | — 0 <sup>s</sup> , 12          | — 0 <sup>s</sup> , 33           | — 0 <sup>s</sup> , 23.        |

(\*) Voir l'Appendice à ce travail.

(\*\*) WAGNER, *Observations de Poulkova*, t. XII, Introduction.

Et je n'ai jamais rien pu tirer, quant à la nutation eulérienne, des observations modernes en ascension droite, tandis que celles en D ou en latitude me donnaient d'excellents résultats, de même que les anciennes observations en ascension droite, faites dans un méridien fixe, avant l'introduction du système de l'axe instantané. (F.-W. Struve et Preuss.)

7. Si donc on veut conserver la formule de la variation des latitudes

$$\Phi_i = \Phi + \gamma \cos(\mu t + \lambda),$$

rapportée au pôle instantané, à laquelle on joint correctement

$$\delta_i = \delta_m + \Delta\delta,$$

on doit, pour l'ascension droite, faire usage de la formule (5), et non de

$$\alpha_i = \alpha_m + \Delta\alpha \quad (4),$$

puisque l'heure, base de la détermination de l'ascension droite, est indéfinissable et indéterminable dans le méridien instantané, jusqu'au jour où l'on aura les expressions correctes de l'heure et de l'ascension droite dans ce système.

Et si on les possédait même, nul astronome ne consentirait à en faire usage, puisque, sur un même méridien géographique, l'heure varierait, au même instant, avec la latitude du lieu d'observation, et serait même sujette à des variations journalières.

En appelant heure sidérale l'ascension droite du zénith, il est facile, en effet, de démontrer que la différence  $\tau_i - \tau$  des heures rapportées à l'un ou à

l'autre pôle renferme le terme  $\gamma \operatorname{tg} \Phi \sin \beta$ . Par suite,  $\tau_i$  étant uniforme,  $\tau_i$  est sujet à des variations diurnes ( $\beta = \varphi + \mu t - \sigma$ ) dépendant de la latitude  $\Phi$ , et qui sont du même ordre  $\gamma$  que les variations de latitude.

On peut donc affirmer, je pense, que jamais on ne songera à définir l'heure, ni par conséquent l'ascension droite, dans l'équateur instantané.

Et c'est la formule (5) qui doit remplacer la formule usitée (4).

Les astronomes, en croyant pouvoir écrire logiquement et correctement

$$(6) \quad \alpha_i = \alpha_m + \Delta\alpha, \quad \delta_i = \delta_m + \Delta\delta, \quad \Phi_i = \Phi + \gamma \cos(\mu t + \lambda)$$

se sont donc trompés quant à  $\alpha_i$ , qu'ils ne définissent ni ne déterminent.

Les seules formules logiques et rigoureuses sont, pour un passage supérieur,

$$(7) \quad \begin{aligned} \alpha &= \alpha_m + \Delta\alpha + \gamma \operatorname{tg} \delta \sin(\mu t + \lambda) \\ \delta &= \delta_m + \Delta\delta - \gamma \cos(\mu t + \lambda). \end{aligned}$$

Le dernier terme, pris en signe contraire, est ce que l'on nomme la variation des latitudes, ou celle du pôle instantané, quoique nous ayons encore une observation très importante à faire à ce sujet.

8. La troisième des formules (6) usitées par les astronomes n'est pas l'expression de la latitude rapportée au véritable axe instantané, mais à un axe *factif*, résultant de la composition de la vitesse constante de la Terre autour de son axe principal Z avec la vitesse eulérienne autour de l'axe U (voir art. 2).

On a pensé que la précession et la nutation n'affectent en rien la position de l'axe instantané à la surface de la Terre.

C'est une grave erreur, déjà signalée en 1848 par Poinsot, et facile à réfuter en partant des équations mêmes du mouvement de rotation de la Terre.

Les expressions des vitesses de la Terre autour des axes principaux X, Y, Z, déduites de ces équations, sont, si l'on néglige des quantités très petites (\*),

$$l = \gamma_1 \cos(\mu t - \sigma) - \frac{C-A}{A} \Sigma u \sin(v_1 t \pm \varphi)$$

$$m = \gamma_1 \sin(\mu t - \sigma) \mp \frac{C-A}{A} \Sigma u \cos(v_1 t \pm \varphi)$$

$$n = c^{te}.$$

On en tire  $\omega = n$  avec une exactitude plus qu'amplement suffisante; et, pour les angles de l'axe instantané avec les axes principaux,

$$\cos \alpha' = \frac{l}{\omega}, \quad \cos \beta' = \frac{m}{\omega}.$$

Les astronomes ne tiennent compte que du premier des termes  $l$  et de  $m$ . Or, en ce qui concerne la précession,  $\frac{C-A}{A} u$  est égal à  $20''$  par an; si l'on estime  $\gamma$  égal à  $0''1$ ,  $n\gamma$  sera égal à  $250''$ ; le premier nombre n'est certes pas négligeable vis-à-vis du second, et même le terme nodal ne devrait pas être négligé, si l'on voulait pousser l'approximation jusqu'aux  $0''01$ .

(\*) *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, p. 64.

Quant à  $\sin \gamma'$ , au lieu d'être égal à  $\gamma$ , il deviendrait, en ne tenant compte que de la précession :

$$\sin \gamma' = \gamma \left[ 1 - \frac{1}{11.5} \sin(\varphi + \mu t - \sigma) \right],$$

et serait donc sujet à des variations diurnes, insignifiantes, je le veux bien. Mais il n'en est pas de même des variations diurnes de  $\alpha'$  et de  $\beta'$  qui proviennent de la précession ( $v_1 = 0$ ) et du terme nodal de la nutation.

Quelle courbe compliquée, on le voit, que la polhodie décrite à la surface de la Terre par le véritable axe de rotation et supposée circulaire dans la formule de la variation des latitudes!

Et j'imagine que tel est bien le problème à la solution duquel concourent les efforts d'un si grand nombre d'astronomes des deux mondes : *Rechercher le mouvement du pôle instantané à la surface de la Terre*, et que ce problème n'aurait plus guère de signification si l'on ajoutait : *dans l'hypothèse que les forces perturbatrices n'existent pas*.

Car, dans cette hypothèse, ce n'est plus le véritable pôle instantané dont on rechercherait le mouvement, mais un pôle *fictif* sans nul intérêt pratique.

9. J'ai fait voir ci-dessus qu'en voulant prendre le pôle instantané pour point de référence, les astronomes n'ont tenu compte, dans leur formule de la variation des latitudes, que de la seule nutation eulérienne en D; .

Que leur formule et leurs déterminations de l'ascension droite, donc de l'heure, sont rapportées au pôle géographique, et tout à fait incorrectes, puisqu'elles suppriment la nutation eulérienne de ce pôle;

Que l'usage du pôle instantané (pour lequel on établirait aisément des formules correctes) ne sera jamais adopté, parce que, s'il supprime la nutation eulérienne, il conduit à des variations diurnes de l'heure qui dépendent de la latitude, et qui sont du même ordre  $\gamma$  que les variations de celle-ci;

Qu'enfin, dans leur formule de la variation des latitudes, ils n'ont tenu compte que de la nutation eulérienne en déclinaison, et non des variations du pôle instantané dues aux mouvements de précession et de nutation.

Il faut remarquer que ces dernières n'ont rien à voir dans le système des axes principaux, qui ne s'occupe *nullement* de la position de l'axe instantané, tout en pouvant la trouver aisément par le calcul des angles  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  (art. 7).

Un seul système donc est absolument rigoureux, comme je l'affirme depuis douze ans (\*); celui des axes principaux et du méridien fixe.

Je ne rappellerai pas ici mes critiques antérieures, résumées en 1892 dans les *Acta mathematica*, et dont je n'ai rien à retrancher, sauf l'affirmation que j'ai émise de l'existence de la nutation eulérienne de l'axe instantané.

10. Je ne me suis occupé ici que de la Terre solide, pour laquelle il n'existe qu'une seule nutation eulérienne, à période de 505 jours.

Pour l'écorce solide, il en existe deux : l'une qui est commune à l'écorce et au noyau, et dont la période doit différer assez peu de 505 jours, l'autre propre à l'écorce seule, et dont la période dépend presque exclusivement

(\*) C. R. et B. A., 1890.

des rapports des moments d'inertie de celle-ci entre eux (\*); elle ne peut donc être déterminée qu'empiriquement; j'ai admis qu'elle est celle de Chandler.

Tout ce que nous avons dit précédemment s'applique aussi bien à l'une et à l'autre, et à l'ensemble des deux.

J'ai donné, dans l'ouvrage cité en note, les formules qui doivent remplacer celles dont on fait usage.

## APPENDICE.

Les astronomes déterminent l'heure et l'ascension droite dans le méridien instantané, en partant du principe unique que la vitesse d'un point de la Terre autour de l'axe instantané est la même qu'autour de l'axe géographique, principe d'une exactitude plus qu'amplement suffisante en pratique, et écrivent en conséquence  $\frac{ds}{dt} = n\rho$ , oubliant que la vitesse  $n$  n'est pas la seule dont ce point est animé.

Pour trouver de la manière la plus simple l'expression correcte  $\frac{ds}{dt}$ , nous considérons la Terre comme immobile.

Alors le pôle instantané décrit en 505 jours sidéraux autour du pôle géographique un petit cercle dont le rayon est de  $0''{,}4$  environ.

Soit I la projection du pôle instantané, G celle du pôle géographique sur l'équateur,  $\rho$  et  $\xi$  les coordonnées d'un point de l'équateur terrestre relativement à I,

(\*) Voir *Théorie du mouvement de rotation de l'écorce solide du globe*.



$\rho$  et  $n_0 + nt$  relativement à G,  $r$  et  $\mu t - \sigma$  celles de I par rapport à G. On a

$$\rho \cos \xi = \rho \cos (n_0 + nt) - \tau \cos (\mu t - \sigma),$$

$$\rho \sin \xi = \rho \sin (n_0 + nt) - \tau \sin (\mu t - \sigma),$$

d'où

$$\rho^2 = \rho^2 + \tau^2 - 2\rho\tau \cos [n_0 + \sigma + (n - \mu)t],$$

et, puisque  $\rho$  diffère excessivement peu de  $\rho$  :

$$\frac{d\rho}{dt} = \tau(n - \mu) \sin [n_0 + \sigma + (n - \mu)t].$$

Ensuite, en faisant  $\frac{\tau}{\rho} = \gamma$ , on a

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\sin (n_0 + nt) - \gamma \sin (\mu t - \sigma)}{\cos (n_0 + nt) - \gamma \cos (\mu t - \sigma)},$$

d'où l'on tire

$$\xi = n_0 + nt + \gamma \sin [n_0 + \sigma + (n - \mu)t]$$

et

$$\frac{d\xi}{dt} = n + \gamma(n - \mu) \cos [n_0 + \sigma + (n - \mu)t].$$

Si l'on porte ces expressions dans

$$\frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\xi}{dt} + \xi \frac{d\rho}{dt},$$

on obtient

$$\frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} = n + \gamma(n - \mu) \cos [n_0 + \sigma + (n - \mu)t] + (n_0 + nt) \sin [n_0 + \sigma + (n - \mu)t].$$

La vitesse angulaire d'un point de la Terre autour de l'axe instantané I n'est donc pas simplement égale à  $n$ , comme autour de l'axe géographique G. Son expression renferme deux termes périodiques du même ordre  $\gamma$  que les variations de latitude; leur période est de  $\frac{1}{1 - \frac{1}{305}} = \frac{305}{304}$  jours sidéraux, et le second a même un

coefficient qui augmente avec le temps.

On ne peut donc pas songer à déterminer l'heure ou l'ascension droite dans le méridien instantané, et l'on doit en revenir au méridien fixe et à la formule

$$\alpha = \alpha_m + \Delta\alpha \pm \gamma \operatorname{tg} \delta \sin (\mu t + \lambda),$$

+ ou — selon qu'il s'agit d'un passage supérieur ou inférieur.

RÉCLAMATION DE PRIORITÉ au sujet d'un *Mémoire de M. G. Darwin* : « *The Eulerian nutation of the Earth's axis* », et des *Rapports de MM. Folie et Le Paige* sur ce mémoire; suivie d'une NOTE sur le mécanisme élémentaire de la rotation d'un corps autour de son centre d'inertie et sur la notion de l'infiniment petit absolu; par Ch. Lagrange, membre de l'Académie.

1. Le *Bulletin* de janvier 1905 renferme un travail du distingué géomètre anglais M. G. Darwin, établissant l'existence d'une variation de période eulérienne de l'angle horaire d'une étoile rapportée au pôle instantané,