annoncée plus haut et dont j'aurai l'honneur de donner lecture à l'Académie.

D'ailleurs, et cela va sans dire, je me rallie bien volontiers à l'avis de M. le premier commissaire (et je crois d'ailleurs utile à la discussion), de considérer comme de droit l'impression dans le *Bulletin* du travail de notre honorable confrère. »

Conformément au désir exprimé par M. Folie, les rapports des commissaires seront imprimés au *Bulletin*.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Sur la nutation chandlérienne (complément à mon rapport sur le mémoire de M. G.-H. Darwin); par F. Folie, membre de l'Académie.

« Lorsque M. Darwin a bien voulu m'autoriser à communiquer à l'Académie *The Eulerian nutation of the Earth's axis*, quoique mon état de santé m'empêchât de faire un rapport détaillé sur ce profond travail, j'ai voulu sans tarder en proposer l'impression, ayant eu, depuis assez longtemps, l'occasion de le lire, grâce à la communication que l'auteur avait eu l'obligeance de m'en faire.

La partie principale, sur laquelle j'ai fait un rapport sommaire, est absolument irréprochable, dans le cas, considéré par l'auteur, où l'on fait abstraction des forces perturbatrices : je traiterai prochainement la question en tenant compte de ces forces.

Mais j'ai trouvé, dans le mémoire de M. Darwin, une

assertion que je ne crois pas avoir rencontrée dans la première minute qu'il m'a communiquée; elle ne se rappporte, au reste, nullement à sa théorie et ne l'infirme en rien; elle semble même tellement accessoire qu'elle peut être supprimée sans que le travail en subisse le plus léger amoindrissement.

Elle est, toutefois, d'une importance théorique tellement capitale que je crois indispensable de la discuter.

Voici le passage du travail de M. Darwin auquel je ne puis me rallier :

« La nutation eulérienne d'une Terre absolument rigide serait telle que celle-ci décrirait un cercle autour de C (pôle géographique) en une période de 306 jours; si nous admettons que la Terre cède, en vertu de son élasticité, à la force centrifuge, la période de ce mouvement circulaire est augmentée, et l'observation montre qu'à la période de 306 jours environ en est substituée une de 430 jours environ. »

Certainement, la période théorique du mouvement eulérien, déterminée par $\frac{C-A}{A}$, serait trop faible, à raison de l'effet de la force centrifuge, si ce rapport avait été déterminé pour une Terre rigide. Mais il n'en est rien. On a pu le déterminer : 1° approximativement par la mesure des arcs de méridien, qui a donné un aplatissement compris entre $\frac{1}{292}$ et $\frac{1}{293}$, aplatissement qui diffère fort peu de $\frac{C-A}{A}$; 2° plus exactement par la comparaison des constantes de la précession et de la nutation, qui a donné $\frac{C-A}{C} = \frac{1}{305}$ (*).

(*) *Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde*, p. 63.

Les valeurs de $\frac{C}{A}$ déduites de ces deux déterminations ne diffèrent entre elles que de 0.00014 environ.

Or c'est bien pour la Terre dans sa forme actuelle, c'est-à-dire renflée par la force centrifuge, que ces deux valeurs ont été déterminées, et non pas pour une Terre soustraite à l'action de cette force.

La période eulérienne est donc bien de 305 jours environ, et les observations en démontrent l'existence (*), mais elles prouvent également l'existence de la période chandlérienne de 430 jours.

Comment expliquer celle-ci?

Newcomb a essayé de le faire (M. N., 1893); notre conclusion précédente s'applique également à son explication.

Pour nous, l'explication résulte du fait que la Terre se compose de deux parties, un noyau plus ou moins fluide à sa surface et une écorce solide.

Montrons que de ce fait résulte pour l'écorce l'existence de deux nutations de caractère eulérien.

Soient A_1, B_1, C_1 les moments d'inertie principaux du noyau, A_2, B_2, C_2 ceux de l'écorce; l_1, m_1, $l_2 = l_1 - \lambda$, $m_2 = m_1 - \mu$ leurs vitesses respectives autour des axes X, Y; d'où il résulte que λ est la différence de l_1 et de l_2, μ de m_1 et de m_2. En appelant L et M les moments des actions mutuelles autour des axes X, Y, et en négligeant le frottement (**), les deux premières équations d'Euler

(*) Voir la Note suivante.

(**) Celui-ci n'introduit que des termes de la forme e^{-Kt} qui sont bien probablement insensibles à l'époque actuelle. (Voir la *Théorie du mouvement de l'écorce terrestre autour de son centre de gravité.*)

s'écriront, en considérant un même rayon de l'ellipsoïde :

$$\text{I.}\quad \left.\begin{aligned} A_1\frac{dl_1}{dt} &= -(C_1-B_1)n(m_1+q)+L \\ B_1\frac{dm_1}{dt} &= \quad (C_1-A_1)n(l_1+p)+M \end{aligned}\right\}\ \text{pour le noyau ;}$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{aligned} A_2\frac{dl_2}{dt} &= -(C_2-B_2)n(m_2+q)-L \\ B_2\frac{dm_2}{dt} &= \quad (C_2-A_2)n(l_2+p)-M \end{aligned}\right\}\ \text{pour l'écorce ; ou}$$

$$\text{II}'.\quad \begin{aligned} A_2\frac{d(l_1-\lambda)}{dt} &= -(C_2-B_2)\,n\,(m_1+q-\mu)-L \\ B_2\frac{d(m_1+\mu)}{dt} &= \quad (C_2-A_2)\,n\,(l_1+p-\lambda)-M. \end{aligned}$$

Si l'on divise ces équations par le coefficient du premier membre, et qu'on en fasse la somme deux à deux, on aura, en négligeant, dans une première approximation, les produits de $\frac{C_1-B_1}{A_1}-\frac{C_2-B_2}{A_2}$ par λ ou μ, qui sont moindres que l_1 ou m_1 et par conséquent très petits :

$$\text{III.}\quad \begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= -\frac{C-B}{A}n(m+q)+\frac{1}{2}L\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right) \\ \frac{dm}{dt} &= \quad \frac{C-A}{B}n(l+p)+\frac{1}{2}M\left(\frac{1}{B_1}-\frac{1}{B_2}\right), \end{aligned}$$

où

$$l = \frac{l_1 + l_2}{2}, \qquad \frac{C - B}{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1 - B_1}{A_1} + \frac{C_2 - B_2}{A_2}\right), \text{ etc.}$$

Les termes qui dépendent des constantes arbitraires (nutation eulérienne) sont, dans l'hypothèse $B = A$:

$$l = \gamma_1 \cos(n\iota_1 t + \beta_1),$$

$$m = \gamma_1 \sin(n\iota_1 t + \beta_1),$$

ι_1 représentant $\frac{C-A}{A}$.

Leur période dépend donc de la moyenne des moments perturbateurs de l'écorce et du noyau.

De la différence des équations I et II′ on tire de même, en supposant provisoirement $\frac{C_1 - B_1}{A_1} = \frac{C_2 - B_2}{A_2}$:

$$\text{IV.} \quad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{dt} = -\dfrac{C_2 - B_2}{A_2} n\mu + \dfrac{1}{2} L \left(\dfrac{1}{A_1} + \dfrac{1}{A_2}\right) \\[2ex] \dfrac{d\mu}{dt} = \dfrac{C_2 - A_2}{B_2} n\lambda + \dfrac{1}{2} M \left(\dfrac{1}{A_1} + \dfrac{1}{A_2}\right). \end{cases}$$

Pour les termes dépendant des constantes arbitraires, on aura

$$\lambda = \gamma_2 \cos(n\iota_2 t + \beta_2)$$

$$\mu = \gamma_2 \sin(n\iota_2 t + \beta_2),$$

ι_2 représentant $\frac{C_2 - A_2}{A_2}$, en admettant que $B_2 = A_2$.

Des valeurs de l, m, λ, μ nous déduirons, puisque

$$l_2 = l - \tfrac{1}{2}\lambda, \qquad m_2 = m - \tfrac{1}{2}\mu :$$

$$l_2 = \gamma_1 \cos(n\iota_1 t + \beta_1) - \tfrac{1}{2}\gamma_2 \cos(n\iota_2 t + \beta_2),$$

$$m_2 = \gamma_1 \sin(n\iota_1 t + \beta_1) - \tfrac{1}{2}\gamma_2 \sin(n\iota_2 t + \beta_2).$$

Telles sont les vitesses angulaires de l'écorce qui dépendent des constantes arbitraires.

La nutation initiale de l'écorce terrestre se compose donc de deux parties :

L'une est la nutation eulérienne proprement dite; sa période est donnée par

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{C_1 - A_1}{A_1} + \frac{C_2 - A_2}{A_2}\right\}$$

et dépend donc à la fois des moments d'inertie de l'écorce et de ceux du noyau. On ne pourrait pas affirmer qu'elle est donnée par $\frac{C-A}{A}$ relatif à la Terre entière; et l'observation lui assignera probablement une valeur un peu différente de 305 jours (*).

(*) La comparaison des observations de Struve en ascension droite (1824) : 1° avec celles de Lindhagen en ascension droite (1843), 2° avec celles de Peters en D (1843), m'a donné pour la période eulérienne : 1° 304.8, 2° 318.6 jours; pour la chandlérienne, 447.2 et 460.3 jours. Des latitudes de Greenwich, j'ai déduit pour les coefficients de ces deux nutations 0″,16 et 0″09. De celles de Poulkova, 0″,09 et 0″,13.

(Voir *Trente-cinq années de travaux mathématiques et astronomiques*, 2e fascicule, pp. 26 et 29. Rome, 1903.)

La période de la seconde partie de la nutation initiale dépend *surtout* des moments d'inertie de l'écorce, je dis surtout, puisque j'ai négligé $\frac{C_1 - B_1}{A_1} - \frac{C_2 - B_2}{A_2}$ dans sa détermination. Ces moments nous sont absolument inconnus; j'ai admis que cette seconde partie de la nutation initiale est la nutation chandlérienne, dont j'ai trouvé la période de 431 jours assez bien confirmée par les observations (*).

Toutefois, comme Chandler, dans ses recherches, n'a jamais tenu compte de la nutation eulérienne proprement dite, il est possible que sa période, comme celle d'Euler, doive subir une légère modification.

La détermination exacte de ces deux périodes ainsi que des coefficients γ_1, γ_2 et des β_1 ou β_2 nécessitera encore de longs et pénibles travaux.

De

$$\frac{d\theta}{dt} = - l \cos \varphi + m \sin \varphi,$$

$$\sin \theta \frac{d\psi}{dt} = l \sin \varphi + m \cos \varphi, \text{ ou } \varphi = \varphi_0 + nt,$$

on conclut que les variations initiales en obliquité et en longitude ont deux périodes : l'une de $\frac{1}{1 + \iota_1}$, l'autre de $\frac{1}{1 + \iota_2}$ jour sidéral. Mais j'ai trouvé qu'il existe de plus pour l'écorce un terme à constantes arbitraires dont l'argument est, en obliquité et en longitude, $n\iota_2 t + \beta'$ et

(*) Voir le travail cité ci-dessus.

dont la période est par conséquent $\frac{1}{\iota_2}$ ou 430 jours sidéraux environ (*).

Ce terme, à l'inverse des deux précédents qui appartiennent à la nutation spéciale (variable avec la longitude de l'observatoire), rentre dans la nutation générale (la même pour tous les observatoires). Je le crois très faible; l'observation semble toutefois en manifester l'existence (**).

Sur la période du mouvement absolu d'un point de la Terre autour de l'axe instantané; par F. Folie, membre de l'Académie.

1. Il y a un an, j'ai trouvé deux termes pour l'expression de la nutation eulérienne de l'axe instantané.

Récemment, j'ai constaté que ces deux termes s'entre-détruisent et que cette nutation est nulle à une très petite quantité près (***), absolument insensible aux observations, un seul cas excepté, celui des termes séculaires dans lesquels cette très faible nutation interviendrait.

Je laisse ce cas de côté et ne m'occuperai, de plus, que de la Terre supposée rigide.

(*) *Théorie du mouvement de rotation de l'écorce solide du globe.* Bruxelles, 1898.

(**) Les observations de Peters m'ont donné 0″,04 pour le coefficient de ce terme, et son introduction a réduit de moitié l'erreur probable d'une observation. Celles de Lindhagen ont donné un coefficient certainement trop fort, 0″ (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*). Nous sommes bien éloignés encore, on le voit, de la solution complète du problème de la variation des latitudes.

(***) $\frac{1''}{2000}$ environ.