soient alors très dignes de figurer dans l'un de nos recueils académiques, comme nous le disions plus haut.

Nous proposons donc à la Classe d'en voter l'impression après que les modifications indiquées y auront été introduites, et d'adresser des remerciements et des félicitations à l'auteur qui est parvenu à conduire à bonne fin un travail aussi étendu au milieu des fatigues d'un laborieux professorat. »

Gand, 31 décembre 1899.

Ces conclusions, auxquelles MM. De Tilly et Le Paige se sont ralliés, sont adoptées par la Classe.

## COMMUNICATIONS ET LECTURES.

—

*Sur des termes nouveaux de l'accélération séculaire de la Lune;* par F. Folie, membre de l'Académie.

**1.** J'ai l'honneur de communiquer à l'Académie une note que j'ai retrouvée dans mes manuscrits, datée de 1887.

Il y a quelques années, je me rappelle en avoir fait une nouvelle rédaction qui a été égarée.

Les nombreuses recherches auxquelles je me suis livré sur les mouvements de l'axe de la Terre m'ont empêché de poursuivre le sujet traité dans cette note, malgré sa nouveauté et son importance.



Je me décide à la publier telle quelle, tout incomplète qu'elle est, afin de signaler ce sujet à l'attention des astronomes géomètres.

**2.** Dans un des fréquents entretiens que j'avais, il y a quinze ans, avec M. Ronkar (*) sur les nombreuses questions qui se rattachent à la constitution du sphéroïde terrestre, il me demanda si l'on avait tenu compte, dans la théorie de la Lune, de l'influence que les mouvements de l'axe de la Terre doivent exercer sur celui de cet astre.

Cette idée me frappa et m'amena naturellement à penser que l'omission, dans l'étude du mouvement de notre satellite, de l'influence de la précession pourrait avoir eu pour conséquence l'omission de certains termes séculaires dans l'expression de ce mouvement.

En relisant le chapitre dans lequel Laplace étudie l'influence de la non-sphéricité de la Terre sur le mouvement de la Lune, je fus plus frappé encore du passage dans lequel le grand géomètre parle de la *réaction de la nutation de l'axe terrestre* (**), tandis qu'aucun texte n'est relatif à la réaction de la précession.

Il semble donc que celle-ci ait échappé à Laplace, de même qu'à Hanssen, et à tous ceux qui les ont suivis.

**3.** Afin de pouvoir rechercher, d'une façon élémentaire, l'influence de la précession sur le mouvement de la Lune,

(*) Aujourd'hui professeur à l'Université de Liége, auteur de la première théorie du mouvement de rotation de l'écorce terrestre.

La partie essentielle de ce travail, malheureusement inédit, m'a servi à établir les formules de ce mouvement.

(**) *Mécanique céleste,* seconde partie, livre VII, n° 21.

je supposerai le renflement équatorial du globe remplacé par un satellite d'une durée de révolution infiniment courte, se mouvant dans un plan identique à celui de l'équateur et soumis, comme ce dernier, à la précession.

Soient désignés, pour les trois corps respectivement, Lune, Soleil, satellite fictif S'', la masse, le demi-grand axe de l'orbite, l'inclinaison de celle-ci sur l'écliptique fixe, la longitude de son nœud ascendant sur ce dernier plan relativement à l'équinoxe fixe, par les lettres suivantes :

$$\begin{aligned}
&☾ : m,\ a,\ i,\ \Omega;\\
&\odot : m',\ a',\ o;\\
&S'' : m'',\ a'',\ \theta,\ \psi;
\end{aligned}$$

les variations de l'inclinaison et du nœud de l'orbite lunaire pourront se représenter par

$$\frac{di}{dt} = [aa''] \operatorname{tg} \theta \sin(\Omega - \psi);$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\{[aa'] + [aa'']\} + [aa''] \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg} i} \cos(\Omega - \psi).$$

On peut faire abstraction du terme constant dans le second membre de la dernière équation, puisqu'il représente la rétrogradation du nœud.

Dans une première approximation, à laquelle nous nous bornons ici, nous considérerons $\theta$ comme constant ; en posant $[aa''] \operatorname{tg} \theta = K$, nous aurons donc simplement, pour les variations dues à la précession,

$$\frac{di}{dt} = K \sin \Omega - \psi);$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = K \cot i \cos \Omega - \psi)$$



**4.** L'intégration de la première équation donne, si $p_1$ désigne la constante de la précession, $\omega_1$ le moyen mouvement du nœud,

$$i = i_m - \frac{K}{\omega_1 + p_1} \cos(\Omega - \psi).$$

L'inclinaison de l'orbite n'est donc sujette, en vertu de la précession, qu'à de faibles variations périodiques, dont nous pourrons faire abstraction avec d'autant plus de raison que l'objet essentiel de notre analyse est de rechercher si la précession ne peut pas produire de termes séculaires dans le mouvement de la Lune.

Posons donc

$$K \cot i = K_1,\ \text{constante.}$$

**5.** L'intégrale de la seconde équation sera

$$l.\ \frac{1 + \operatorname{tg}\dfrac{\Omega - \psi}{2}}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{\Omega - \psi}{2}} = C + K_1 t + p_1 \int \frac{dt}{\cos(\Omega + p_1 t)}.$$

Dans cette dernière intégrale, on pourra considérer le mouvement du nœud comme uniforme, et la remplacer par

$$\frac{p_1}{\omega_1 + p_1}\, l.\ \frac{1 + \operatorname{tg}\dfrac{\Omega - \psi}{2}}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{\Omega - \psi}{2}}.$$

On aura donc

$$\frac{\omega_1}{\omega_1+p_1}\, l.\, \frac{1+\operatorname{tg}\dfrac{\Omega-\psi}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\Omega+\psi}{2}} = C + K_1 t,$$

d'où

$$\frac{1+\operatorname{tg}\dfrac{\Omega-\psi}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\Omega-\psi}{2}} = e^{C+K_2 t},$$

en faisant

$$K_1 \frac{\omega_1+p_1}{\omega_1} = K_2,$$

ou, en supposant

$$\Omega-\psi = 0 \text{ pour } t = 0:$$

$$\frac{1+\operatorname{tg}\dfrac{\Omega-\psi}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\Omega-\psi}{2}} = e^{K_2 t}.$$

Posons

$$e^{K_2 t} = \operatorname{tg}(45^\circ + \tau) = \frac{1+\operatorname{tg}\tau}{1-\operatorname{tg}\tau},$$

il s'ensuivra

$$\Omega-\psi = 2\tau = -\frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{arc\,tg} e^{K_2 t}.$$

Soit

$$\operatorname{arc\,tg} e^{K_2 t} = \frac{\pi}{4} + K_2 t + K_3 t^2 + K_4 t^3 \ldots;$$

dérivant :

$$\frac{K_2}{1+e^{2K_2 t}} = K_2 + 2K_3 t + 3K_4 t^2 + \ldots;$$



d'où

$$K_2 = (K_2 + 2K_3 t + 3K_4 t^2 + \ldots)\,(1 + 2K_2 t + 2K_2^2 t^2 + \ldots),$$

ou

$$0 = 2(K_2^2 + K_3)t + (3K_4 + 2K_2^3 + 4K_2 K_3)t^2 + \ldots;$$

d'où

$$K_3 = -K_2^2;\ K_4 = \frac{2}{3} K_2^3.$$

et

$$\operatorname{arc\,tg} e^{K_2 t} = \frac{\pi}{4} + K_2 t - K_2^2 t^2 + \frac{2}{3} K_2^3 t^3 + \ldots;$$

puis

$$\Omega - \psi = 2K_2 t - 2K_2^2 t^2 + \frac{4}{3} K_2^3 t^3 + \ldots$$

Comme

$$K_2 = K_1 \frac{\omega_1 + p_1}{\omega_1},$$

les termes indépendants de $p_1$ rentreront dans la partie du mouvement du nœud qui est indépendante de la précession; les autres exprimeront la variation séculaire de ce mouvement, qui est la *réaction de la précession.*

**6.** Nous n'en aborderons pas ici le calcul numérique, parce que les résultats pourraient en être sensiblement modifiés par l'introduction de la variation séculaire de l'obliquité, que nous avons considérée comme constante dans cette première note.

Nous espérons pouvoir revenir prochainement sur ce sujet.