Étude d'un cas particulier très important du mouvement de rotation d'un corps solide; par F. Folie, membre de l'Académie.

La latitude d'un lieu de la Terre peut être rapportée, soit au pôle d'inertie : c'est la latitude *géographique;* soit au pôle instantané de rotation : c'est la latitude *astronomique*.

La première est *constante;* la seconde, *variable* (*).

Entre ces deux définitions, le choix devra se décider d'après la rigueur et la simplicité des formules que l'on obtiendra en prenant l'un ou l'autre pôle comme point de référence.

(*) Dans le but de simplifier le problème, je ne traiterai ici que le cas d'une Terre solide, le seul, du reste, dont se soient occupés tous les géomètres qui ont traité la question de son mouvement de rotation, depuis Laplace jusques et y compris Tisserand.

Pour l'écorce solide, il existe deux termes, à constantes arbitraires, introduits par l'intégration : le terme eulérien et le terme chandlérien.

De plus, il existe un terme annuel dû à un déplacement de l'axe d'inertie produit par les précipitations hivernales, et un autre terme annuel, qui provient des déviations périodiques de la verticale : le premier produit des variations réelles; le second, des variations apparentes de latitude.

Voir : *Essai sur les variations de latitude,* 1893; *Théorie du mouvement de rotation de l'écorce solide,* 1898; *Quelques grandes phases dans l'histoire de l'astronomie,* 1899.

Relativement au pôle géographique, on possède des formules absolument correctes.

Mais les astronomes y ont renoncé, parce qu'elles renferment, en obliquité et en longitude, outre la précession et la nutation générale, des termes de nutation *eulérienne*. Et ils se sont imaginé, sur la foi d'un collègue éminent, que ces termes deviennent absolument négligeables, si l'on prend pour point de référence le pôle instantané ou astronomique.

On verra que c'est une très grave erreur.

Je me propose de traiter *correctement,* dans cette note, le problème que le regretté astronome s'est proposé de résoudre, et de rechercher si, comme il l'affirme, la nutation eulérienne est négligeable, et si l'heure reste uniforme, lorsqu'on prend le pôle instantané pour point de référence, en me bornant, comme il l'a fait lui-même, au cas où il n'y a pas de forces perturbatrices, la nutation eulérienne étant, alors, identiquement la même que dans le cas où ces forces existent.

Supposons le cas d'un ellipsoïde de révolution aplati, animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe très faiblement incliné sur son petit axe d'inertie, et qui n'est soumis à aucune force extérieure. Soient C et A les moments d'inertie autour du petit axe et d'un axe équatorial de l'ellipsoïde.

Les formules d'Euler deviennent, dans ce cas :

$$(1). \quad A\frac{dl}{dt} = (A - C)mn; \quad A\frac{dm}{dt} = (C - A)nl; \quad C\frac{dn}{dt} = 0,$$

l, m, n désignant les vitesses angulaires autour des axes principaux X, Y, Z.

Leur intégration donnera, γ et β désignant des constantes arbitraires :

$$(2). \quad . \quad l = \gamma_1 \cos(\iota t + \beta), \quad m = \gamma_1 \sin(\iota t + \beta), \quad n = c^{te},$$

ι représentant $\frac{C-A}{A}$.

Telles sont les vitesses angulaires autour des axes principaux X, Y, Z, que nous appellerons axes géographiques. Ce mouvement s'appelle eulérien, du nom du géomètre qui l'a découvert.

Il en découle une vitesse résultante $\omega = n\sqrt{1+\gamma^2}$, si l'on fait $\gamma_1 = n\gamma$, autour d'un axe instantané dont les cosinus directeurs sont

$$\frac{l}{\omega}, \quad \frac{m}{\omega}, \quad \frac{n}{\omega}.$$

Cet axe instantané Z′, mobile dans l'ellipsoïde, est fixe dans l'espace. Soit θ' l'inclinaison de l'équateur géographique sur l'équateur instantané, perpendiculaire à ce

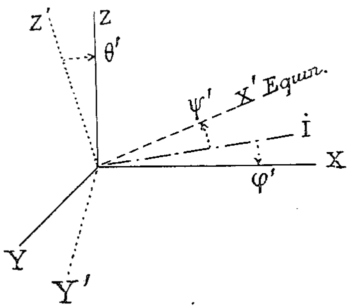

Fig. 1.

dernier axe; ψ', φ', les angles compris entre les axes X′, X, d'une part, et l'intersection des deux équateurs, d'autre part, X′ et Y′ étant deux axes rectangulaires dans le plan

de l'équateur instantané. Nous donnerons aux axes X′, Y′, Z′, pour les distinguer des axes géographiques X, Y, Z, le nom d'axes astronomiques.

Les formules de transformation connues

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \dfrac{d\theta'}{dt} - l\cos = \varphi' + m\sin\varphi' \\ \sin\theta' \dfrac{d\psi'}{dt} = l\sin\varphi' + m\cos\varphi' \\ \dfrac{d\varphi'}{dt} = n + \cos\theta' \dfrac{d\psi'}{dt} \end{cases}$$

deviendront, combinées avec les équations (2) :

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \dfrac{d\theta'}{dt} = -\gamma_1 \cos(\iota t + \beta + \varphi') \\ \sin\theta' \dfrac{d\psi'}{dt} = \gamma_1 \sin(\iota t + \beta + \varphi') \\ \dfrac{d\varphi'}{dt} = n + \gamma_1 \cot\theta' \sin(\iota t + \varphi'). \end{cases}$$

Ces expressions donnent les variations de position des axes principaux relativement aux axes astronomiques fixes.

L'intégration de la première de ces équations conduit d'abord à

$$(5). \quad . \quad . \quad \Delta\theta' = \theta' - \theta'_0 = -\gamma \sin(\iota t + \beta + \varphi'),$$

en faisant

$$\frac{\gamma_1}{n+\iota} = \gamma,$$

et en admettant, à cause de la petitesse de γ(*) (puisque nous avons supposé une très faible inclinaison de l'axe de rotation Z' sur l'axe principal Z), que $\varphi' = nt$ dans le second membre.

De là on tire

$$(6). \quad \begin{cases} \sin\theta' = \sin\theta'_0 [1 - \gamma \cot\theta'_0 \sin(\iota t + \beta + \varphi')] \quad \text{et} \\ \cos\theta' = \cos\theta'_0 + \gamma \sin\theta'_0 \sin(\iota t + \beta + \varphi') \\ \qquad = \sin\theta'_0 [\cot\theta'_0 + \gamma \sin(\iota t + \beta + \varphi')]. \end{cases}$$

A cause de la petitesse de θ' et de θ'_0, γ est aussi très petit; mais $\gamma \cot\theta'_0$ sera une quantité finie, puisque γ et $\sin\theta'_0$ sont du même ordre de grandeur; nous la ferons égale à g et écrirons

$$(7). \quad . \quad . \quad \sin\theta' = \sin\theta'_0 [1 - g \sin(\iota t + \beta + \varphi')].$$

La seconde des équations (4) deviendra

$$(8). \quad . \quad . \quad \frac{d\psi'}{dt} = \frac{\gamma_1}{\sin\theta'_0} \frac{\sin(\iota t + \beta + \varphi')}{1 - g\sin(\iota t + \beta + \varphi')}.$$

L'intégrale en serait très compliquée.

Afin de pouvoir arriver à des conclusions simples, nous admettrons que g^2 est négligeable vis-à-vis de l'unité et que $\cos\theta'_0 = 1$; nous trouverons ainsi

$$(9). \quad . \quad \begin{cases} \dfrac{d\psi'}{dt} = g(n + \iota)\sin(\iota t + \beta + \varphi') \\ \qquad + \frac{1}{2}g^2(n + \iota)[1 - \cos 2(\iota t + \beta + \varphi')]. \end{cases}$$

Avant de procéder à l'intégration, nous avons à chercher l'expression de φ' en fonction de t.

(*) γ est égal à 0",2 environ en astronomie.

Dans une première approximation, nous pourrons remplacer $\frac{d\varphi'}{dt}$ par

$$n + g(n + \iota)\sin(\iota t + \beta + \varphi'),$$

et φ' par

$$\varphi'_0 + nt - g\cos(n't + \beta'),$$

n' et β' représentant respectivement $n + \iota$ et $\varphi'_0 + \beta$.

Alors la troisième des équations (4) devient

$$\frac{d\varphi'}{dt} = n_1 + g n'_1 \sin(n't + \beta') - \tfrac{1}{2} n'\gamma (g \cot\theta'_0 + \gamma) \cos 2(n't + \beta'),$$

n_1 représentant

$$n + \tfrac{1}{2} n' g^2,$$

et n'_1,

$$n'(1 + \tfrac{1}{2} g^2);$$

en intégrant, on a, à très peu près :

$$(10) \quad . \quad . \begin{cases} \Delta\varphi' = \varphi' - \varphi'_0 - n_1 t = - g\cos(n't + \beta') \\ \qquad - \frac{1}{4}(g^2 + \gamma^2)\cos 2(n't + \beta'). \end{cases}$$

Le mouvement de l'ellipsoïde autour de l'axe instantané n'est donc pas uniforme, puisque, comme nous l'avons vu, g est une quantité finie. Et *l'heure* est, dans le système des axes instantanés, soumise à *des variations diurnes et semi-diurnes très sensibles.*

En remplaçant simplement φ' par

$$\varphi'_0 + n_1 t - g\cos(n't + \beta'),$$

on aura

$$\begin{aligned} \sin(\iota t + \beta + \varphi') &= \sin(n'_1 t + \beta')[1 - \tfrac{1}{2} g^2 \cos^2(n't + \beta')] \\ &\quad - g\cos(n'_1 t + \beta')\cos(n't + \beta') \\ &= \sin(n'_1 t + \beta') - \tfrac{1}{2} g \cos(n'_1 - n')t + \ldots \\ &= \sin(n'_1 t + \beta') - \tfrac{1}{2} g \cos(\tfrac{1}{2} g^2 n' t) + \ldots \end{aligned}$$

L'équation (9) deviendra donc

$$\frac{d\psi'}{dt} = n'g\sin(n'_1t+\beta') + \tfrac{1}{2}n'g^2[1-\cos(\tfrac{1}{2}g^2n't) - \cos 2(n'_1t+\beta')];$$

d'où, en négligeant la très faible différence $n'_1 - n_1$:

$$\Delta\psi' = -g\cos(n'_1t+\beta') + \tfrac{1}{2}n'g^2t - \sin(\tfrac{1}{2}n'g^2t) - \tfrac{1}{4}g^2\sin 2(n'_1t+\beta');$$

et, puisque

$$\sin\theta' = \sin\theta'_0[1 - g\sin(n't+\beta')],$$

on aura

$$(11)\ \begin{cases}\sin\theta'\Delta\psi' = -\gamma\cos(n'_1t-\beta') + \tfrac{1}{2}n'g\gamma t - \sin\theta'_0\sin(\tfrac{1}{2}g^2n't)\\ \qquad + \tfrac{1}{4}g\gamma\sin 2(n'_1t+\beta').\end{cases}$$

La variation en longitude $\Delta\psi'$ renferme donc un terme proportionnel au temps (précession) et un terme à longue période

$$\frac{4\pi}{g^2n'} = \frac{2}{g^2}$$

à peu près; le premier est très important, le second est de l'ordre de γ.

On sait, du reste, que tout mouvement de rotation d'un corps libre est toujours accompagné d'un mouvement de précession, hormis le cas où l'axe de rotation est un axe principal du centre de gravité.

Négligeant le dernier terme, posant

$$\sin\theta'_0 = \gamma_0,\quad \tfrac{1}{2}g^2n't = \tau \quad\text{et}\quad n'_1 = n_1$$

dans l'argument du premier terme, nous aurons :

$$(12)\ .\ .\ \sin\theta'\Delta\psi' = -\gamma\cos(\iota t+\beta+\varphi') + \tfrac{1}{2}n'g\gamma t - \gamma_0\sin\tau$$

Recherchons maintenant les expressions des vitesses angulaires de l'ellipsoïde autour de ses trois axes astronomiques.

Appelons Δa, Δb, Δc les composantes de la rotation au moyen de laquelle on amène les axes principaux X, Y, Z en coïncidence avec ces derniers axes X', Y', Z'.

Nous avons :

$$(13)\ .\ .\ .\ \begin{cases}\Delta a = \sin\varphi'\sin\theta'\Delta\psi' - \cos\varphi'\Delta\theta',\\ \Delta b = \cos\varphi'\sin\theta'\Delta\psi' + \sin\varphi'\Delta\theta',\\ \Delta c = \Delta\varphi' - \cos\theta'\Delta\psi';\end{cases}$$

et, en faisant usage des équations (5), (10) et (12) :

$$(14)\ .\ \begin{cases}\Delta a = \gamma\sin(\iota t+\beta) + \tfrac{1}{2}n'g\gamma t\sin\varphi' - \gamma_0\sin\tau\sin\varphi',\\ \Delta b = -\gamma\cos(\iota t+\beta) + \tfrac{1}{2}n'_0g\gamma t\cos\varphi' - \gamma_0\sin\tau\cos\varphi',\\ \Delta c = \sin\tau - \tfrac{1}{2}n'g^2t,\end{cases}$$

aux quantités du second ordre près, et en négligeant des termes à courte période.

Or les expressions des vitesses angulaires autour des axes X', Y', Z' sont données par

$$(15)\ .\ .\ .\ .\ \begin{cases}l' = l + n\Delta b - m\Delta c,\\ m' = m - n\Delta a + l\Delta c,\\ n' = n + m\Delta a - l\Delta b.\end{cases}$$

On en déduira, en remplaçant $\gamma_1 - n\gamma$ par $\iota\gamma$, et en négligeant les termes du second ordre :

$$(16)\ \begin{cases}l' = \iota\gamma\cos(\iota t+\beta) - n\sin\tau[\gamma_0\cos\varphi' + \gamma\cos(\iota t+\beta)]\\ \qquad + \tfrac{1}{2}nn'\gamma t[\cos\varphi' + g\sin(\iota t+\beta)],\\ m' = \iota\gamma\sin(\iota t+\beta) + n\sin\tau[\gamma_0\sin\varphi' + \gamma\sin(\iota t+\beta)]\\ \qquad - \tfrac{1}{2}nn'\gamma t[\sin\varphi' + g\cos(\iota t+\beta)]\\ n' = n + \gamma_1\cos(\iota t+\beta+\varphi')[\gamma_0\sin\tau - \tfrac{1}{2}g\gamma_1 t]\end{cases}$$

Comme γ est très petit et que $\iota = \frac{C-A}{A}$ l'est également $\left(\text{pour la Terre, } \iota = \frac{1}{300}\right)$, on peut laisser de côté les termes en $\iota\gamma$. Mais on voit que, néanmoins, *les expressions des vitesses angulaires autour des trois axes instantanés renferment des termes à longue période, et même assez considérables, puisque* $nn' = (2300)^2$ *environ, pour la Terre.*

Soient maintenant θ, φ les angles qui déterminent la position des axes astronomiques par rapport à un plan fixe (qui est, en astronomie, celui de l'écliptique).

Les formules (5), dans lesquelles on supprimera les accents de θ', ψ', φ', pour les ajouter à l, m et n, donneront, après substitution des expressions l', m', n'

$$(17). \quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\iota\gamma\cos(\iota t + \beta + \varphi') \\ &\qquad -(\tfrac{1}{2}nn'\gamma t - n\gamma_0 \sin\tau)\cos(\varphi' - \varphi), \\ \sin\theta\frac{d\psi}{dt} &= \iota\gamma\sin(\iota t + \beta + \varphi') \\ &\qquad -(\tfrac{1}{2}nn'\gamma t - n\gamma_0\sin\tau)\sin(\varphi' - \varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= n' + \cos\theta\frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Intégrant la première de ces équations, on aura très approximativement, en négligeant les termes insensibles en $\iota\gamma$, ainsi que les termes diurnes :

$$(18) \quad \Delta\theta = -\frac{n\gamma}{g^2}t\sin\tau - \frac{2\gamma}{g^4}\cos\tau - \frac{1}{2}\frac{\gamma_0}{g_2}\cos 2\tau.$$

On voit que la variation de l'angle θ est très faible, puisque γ_0 et γ le sont, et que g est une quantité finie; et, comme θ est un angle fini (23°,5 en astronomie), nous

pourrons le considérer comme constant dans la seconde équation, d'où l'on tirera, comme ci-dessus :

$$(19). \quad \sin\theta\Delta\psi = \tfrac{1}{2}n\gamma_0 t + \frac{n\gamma}{g^2}t\cos\tau - \frac{2\gamma}{g^4}\sin\tau - \frac{1}{2}\frac{\gamma_0}{g^2}\sin 2\tau.$$

La troisième équation deviendra, puisqu'on peut admettre que θ est constant :

$$\frac{d\varphi}{dt} = n + n'\gamma\cot\theta\left[\tfrac{1}{2}n\gamma_0(1 - \cos 2\tau) - \tfrac{1}{2}nn'\gamma t\sin\tau\right]$$

et l'on en tirera de même

$$(20). \quad \Delta\varphi = \gamma\cot\theta\left[\frac{1}{2}n\gamma_0 t + \frac{n\gamma}{g^2}t\cos\tau - \frac{2\gamma}{g^4}\sin\tau - \frac{1}{2}\frac{\gamma^0}{g^2}\sin 2\tau\right].$$

L'angle φ, que l'axe astronomique X' fait avec la droite fixe prise pour son origine (ligne des équinoxes en astronomie), est donc sujet à des variations périodiques qui ne sont pas insensibles, et même à des variations proportionnelles au temps.

Il en est de même de l'angle ψ.

Un astronome des plus distingués a traité incorrectement la question que nous venons de résoudre; il est arrivé à $\Delta\theta = 0$, $\Delta\psi = 0$, aux quantités près de l'ordre de $\frac{\iota\gamma}{n+\iota}$, c'est-à-dire aux dix-millièmes de seconde près, quantités que nous avons négligées, comme lui, dans les trois expressions (18), (19) et (20).

Cette erreur provient de ce qu'il a considéré θ' comme constant dans $\sin\theta'\frac{d\psi'}{dt}$, en sorte qu'il a négligé le second terme et les suivants de notre équation (11).

Alors les deux premières équations (16) se réduisent à leur premier terme, et l'intégration donne lieu à un terme périodique qui a pour coefficient $\frac{\iota\gamma}{n+\iota}$.

Nul astronome ne s'est aperçu de cette négligence (*), en sorte que, depuis une vingtaine d'années, tous se sont imaginé qu'en rapportant les équations du mouvement de rotation de la Terre à ses axes instantanés, la nutation eulérienne est complètement éliminée.

On vient de voir que c'est absolument faux et que, de plus, l'heure même, définie par l'angle φ', au lieu d'être uniforme, est sujette à des variations périodiques sensibles (20).

Aussi doit-on prendre, non les axes instantanés, mais les axes principaux de l'écorce terrestre comme axes de référence.

C'est, du reste, ce qu'ont fait, depuis Laplace jusques et y compris Tisserand, tous les géomètres qui ont traité du mouvement de rotation de la Terre.

L'axe instantané, pris comme axe de référence, loin d'éliminer la nutation eulérienne, conduit à des formules beaucoup plus compliquées que celles qui sont rapportées à l'axe géographique, et rend impossible la définition d'une heure uniforme.

C'est donc relativement au pôle géographique que doit être définie la latitude : celle-ci est constante, de même que la longitude ; mais l'ascension droite et la déclinaison renferment dans leur expression la nutation eulérienne, négligée, à tort, par tous les astronomes.

(*) Le plus illustre même des astronomes contemporains s'est incidemment rallié à ces formules incorrectes dans un de ses derniers ouvrages (NEWCOMB, *The elements of the four inner planets*, etc., 1895).