SUR

LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

A CINQ OU SIX INCONNUES

L'un des plus grands ennuis qu'on éprouve dans la détermination des constantes astronomiques ou physiques, au moyen d'une longue série d'observations, consiste certainement dans la résolution des équations normales, lorsque le nombre des inconnues est un peu considérable.

La formation des carrés et des produits des coefficients est sans doute assez laborieuse, mais il est aisé d'en vérifier l'exactitude.

Il n'en est pas de même quant à l'élimination successive des inconnues; la vérification devient de plus en plus pénible à mesure qu'on avance; et, si la théorie peut indiquer à quel degré d'exactitude on doit effectuer les multiplications exigées par l'élimination pour obtenir une approximation déterminée, elle est bien malaisée à appliquer, et entraîne toujours à des multiplications très fastidieuses, si le nombre des inconnues est de cinq ou six.

Généralement, il est vrai, lorsque les observations se suivent d'assez près, il y a, dans chacune des équations normales, un coefficient tout à fait prépondérant : c'est la somme des carrés des coefficients de l'une des inconnues. Et, dans ce cas, Gauss a indiqué un mode de résolution approximatif qui permet de déterminer les valeurs des inconnues, sans élimination, d'une manière très satisfaisante.

Mais il peut se présenter des cas où ce mode de résolution est absolument impraticable, et où l'on doit se déterminer à procéder par élimination.

On pourrait alors, pour éviter des multiplications très laborieuses, et qui ne peuvent plus, dès la seconde élimination, s'effectuer au moyen de tables, faire usage des logarithmes de Gauss; mais d'abord, on n'évite pas ainsi la plus grosse difficulté, celle de la vérification, qu'on ne peut guère faire sûrement qu'en recommençant *ab ovo* l'élimination, ce qui est excessivement pénible, comme j'en ai fait, à maintes reprises, l'expérience; ensuite, après la troisième élimination, il est douteux que les tables de Gauss à 5 décimales puissent encore suffire.

Aussi ai-je cherché à remplacer le procédé d'élimination généralement suivi par un autre plus simple.

Celui-ci consiste, en général, à chercher des combinaisons des équations normales multipliées par des facteurs très simples tels que l'une des inconnues, x, soit à très peu près éliminée, chose assez aisée à découvrir. On forme autant de combinaisons qu'il en faut pour obtenir le nombre des équations nécessaires renfermant les inconnues autres que x. Cette dernière n'est pas, à la vérité, *complètement* éliminée; on conservera, sous peine d'aggraver inutilement le labeur, la petite fraction de x qu'on n'aura pu éliminer, comme faisant partie de la quantité connue.

Il est bien entendu que ces différentes combinaisons des

équations primitives doivent renfermer toutes celles-ci sans exception.

On continuera à procéder de la sorte, en évitant d'avoir à multiplier par des facteurs supérieurs à 5; si une telle multiplication devenait nécessaire pour l'une des équations, mieux vaudrait diviser l'autre par le facteur correspondant.

Il faudra tâcher surtout de ne pas multiplier par un facteur un peu grand les équations dans lesquelles on a fait rentrer une petite fraction de l'une des inconnues dans la partie connue de l'égalité. En prenant ce soin, on pourra très généralement négliger, sans erreur appréciable, ces petites fractions, puisque les inconnues elles-mêmes sont déjà, de leur nature, des quantités très faibles.

Le choix exige naturellement un peu d'habitude ou de pénétration. Il n'est pas possible de donner de règles à ce sujet; et un exemple indiquera beaucoup mieux la marche à suivre.

Cet exemple sera choisi dans le cas le plus difficile certainement que j'aie eu à traiter.

La recherche de la nutation eulérienne et de la variation annuelle de la latitude au moyen des observations de Gylden m'a conduit aux équations normales :

$$\begin{array}{lrrrrrrl}
a) & 24.5x & -\ 4.6y & -\ 21.15u & -\ 11.25v & -\ 8.50w & -\ 2.032 & = 0; \\
b) & -\ 4.4 & +\ 6.7 & +\ 2.6 & +\ 5.5 & +\ 6.1 & +\ 0.165 & \\
c) & -\ 21.15 & +\ 2.6 & +\ 21.4 & +\ 7.7 & +\ 8.2 & +\ 2.155 & \\
d) & -\ 11.25 & +\ 5.50 & +\ 7.7 & +\ 9.9 & +\ 6.8 & +\ 0.735 & \\
e) & -\ 8.5 & +\ 6.1 & +\ 8.2 & +\ 6.8 & +\ 51 & -\ 0.94 &
\end{array}$$

Une difficulté particulière dans cet exemple est la grande ressemblance des coefficients de x et de u.

Elle s'évite aisément si l'on fait $u' = u - x$; on obtient alors :

$$\begin{array}{llllllll}
f) & -3.15x & +4.6 & +21.15u' & +11.25v & +8.3w & +2.032 & = 0; \\
g) & -2.0 & +6.7 & +\ \ 2.6 & +5.5 & +6.1 & +0.165 & \\
h) & -0.05 & +2.6 & +21.1 & +7.7 & +8.2 & +2.151 & \\
i) & -3.53 & +5.30 & +\ \ 7.7 & +9.8 & +6.8 & +0.735 & \\
k) & -0.10 & +6.1 & +\ \ 8.2 & +6.8 & +51 & -0.94 &
\end{array}$$

On s'aperçoit, à première vue, que le procédé approximatif de Gauss n'est pas applicable ici : il n'y a pas d'équations, en effet, dans lesquelles les inconnues aient des coefficients quelque peu prépondérants, à l'exception de w seulement.

Il faut donc procéder par élimination.

Je considérerai les deux équations h) et k) comme si x en était déjà disparu, et devrai, en l'éliminant entre les équations f), g), i), obtenir deux équations nouvelles, l), m), que je formerai de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
l) &= -1.5g + f + 0.05f \\
m) &= -i \qquad + f + 0.2g
\end{aligned}$$

et qui seront :

$$\begin{array}{llllll}
l) & -5.58y & +16.20u' & +2.740 & -1.205w & \\
 & & & & +1.6861 - 0\,0075x & = 0. \\
m) & \ \ 0.64 & +15.97 & +2.41 & +2.72 & \\
 & & & & +1.5926 & = 0.
\end{array}$$

Entre les quatre équations h), k), l), m), j'éliminerai u', au moyen des combinaisons,

$$\begin{aligned}
p) &= 1.5m - \quad h - 0.01h - \qquad 0.003h \\
q) &= \quad 2k - \quad l - 0.01h \\
r) &= \qquad l + \frac{1}{4}\,l + 0.05l - h + 0.001\,(4k + h),
\end{aligned}$$

ce qui donnera

$$\begin{array}{llllll}
p) & -\ 1.692v & +\ 4.050y & -\ 4.064w & -0.14155 & +0.0027u' \\
 & & & & & +0.04955x \\
q) & \ \ 17.854 & +10.783 & +65.185 & +0.1726 & -0.001u' \\
 & & & & & -0.207x \\
r) & -\ 9.953 & -\ 4.105 & -\ 9.712 & +0.0466 & +0.0009u' \\
 & & & & & +0.05935x
\end{array}$$

Les combinaisons suivantes

$$s) = \frac{q}{2} + p + \frac{1}{4}\,p + 0.1\,p + 0.001\left(\frac{q}{r} - p\right)$$

et

$$t) = \frac{q}{2} + r + \frac{1}{4}\,r - 0.1\,\frac{q}{4} - 0.01\,\frac{r}{6}$$

élimineront u et l'on aura :

$$\begin{array}{llllll}
s) & -6\,674y & +26\,589w & -0.1051 & +0.0004v & \\
 & & & +0.0052u' & -0.0375x & = 0 \\
t) & -3.944 & +17.888 & +0.1402 & +0v & \\
 & & & -0.0037u' & -0.245v &
\end{array}$$

Enfin, la combinaison

$$s - t - \frac{t}{2} + 0.001s - 0.001s + 0.001\,\frac{t}{2}$$

élimine w et donne :

5) $12.648y = 0.31418 + 0.00135x + 0.00252u' + 0.00056w.$

On en tire

$$y = 0.02484 + 0.00011x + 0.0002u' + 0.00004w.$$

Les substitutions successives donnent, par

$$\begin{aligned} l) : w &= -0.00239 + 0.00138x + 0.00032u' \\ p) : v &= -0.04523 + 0.0125x \;\; + 0.0005u' \\ h) : u' &= -0.08827 - 0.00274x. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} v &= -0.04527 + 0.0125x \\ w &= -0.00242 + 0.0014x \\ y &= -0.0248 \;\; + 0.0001x. \end{aligned}$$

Ces valeurs, substituées dans $f)$, $g)$, $i)$, donnent respectivement :

$$x = -0.0745, \qquad -0.0747, \qquad -0.0750.$$

La combinaison

$$f + g + i$$

donne

$$x = -0.07470;$$

d'où

$$u' = -0.0881; \quad u = -0.1628; \quad y = -0.0248;$$
$$v = -0.0422; \quad w = -0.0025.$$

Il n'est pas difficile, on le voit, d'arriver, par ce procédé, à l'élimination complète, au point de vue pratique, des inconnues. Mais lorsqu'on sait que celles-ci peuvent à peine atteindre 0″.2, on peut ne pousser l'élimination que jusqu'au millième près pour chaque inconnue, sans avoir à craindre d'erreur sensible, car le degré d'exactitude des coefficients eux-mêmes ne permet certes pas de compter sur 0″,0001 dans les valeurs des inconnues.

Dans le cas particulier dont nous nous sommes occupé, la nature même des équations nous a obligé à considérer x comme éliminé lorsqu'il avait encore 0.05 et même 0.10 pour coefficient; c'est parce que ces coefficients sont trop peu sûrs que nous n'avons pas pu faire usage, pour éliminer x, des équations qui les renferment.

Et dans des cas semblables, le procédé que nous venons d'exposer est certainement plus long que dans les cas ordinaires. Mais combien aussi ces cas seraient difficiles à traiter par le procédé habituel !