EXPRESSION COMPLÈTE

DES

TERMES DU SECOND ORDRE

DANS LES

FORMULES DE RÉDUCTION AU LIEU APPARENT

Dans le volume de l'*Annuaire* pour 1894, j'ai fait voir que les observations en Æ faites à Paris, à Poulkova et à Washington, fournissent toutes de meilleurs résultats si l'on y substitue, dans leur réduction, aux facteurs $\operatorname{tg}\delta$ et $\sec\delta$, les facteurs $\operatorname{tg}(\delta + r)$ et $\sec(\delta + r)$, c'est-à-dire si l'on tient compte de la réfraction dans la déclinaison calculée (*).

La raison qui empêche les astronomes d'admettre cette règle, et qui m'a fait hésiter moi-même assez longtemps, est que la réfraction est nulle en azimut, et par suite, dit-on, en Æ dans le méridien.

Mais cela signifie simplement qu'il n'y a pas de réfraction en Æ, et nullement qu'il ne faille pas employer $(\delta + r)$ au lieu de δ dans la formule de réduction en Æ.

En veut-on une preuve bien convaincante?

Rien ne m'empêche de réaliser dans une observation la

(*) Voir *Comptes rendus*, 20 février 1893, et *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, avril 1893.

condition que l'aberration soit nulle en Æ, ce qui la place absolument sur le même pied que la réfraction; il suffit, pour cela, que

$$\cos\varepsilon \cos\alpha \cos\odot + \sin\alpha \sin\odot = 0.$$

Quel est l'astronome qui prétendra que ce n'est pas $\delta + Ab$ qui doit entrer dans la formule de réduction en Æ, c'est-à-dire, qui, dans ce cas, rejettera les termes du second ordre de l'aberration, ou ceux qui proviennent de la combinaison de la nutation et de l'aberration? Et ce cas n'est-il pas absolument identique à celui que nous avons traité, à la substitution près du terme réfraction à celui d'aberration?

Que les astronomes veuillent bien réfléchir à cet argument, corroboré, comme je l'ai dit, par les meilleures observations (voir l'*Annuaire de l'Observatoire royal* pour 1894).

Une conséquence, pour nous, absolument certaine de la négligence de la réfraction dans le facteur $\sec\delta$, est la valeur trop grande que l'on trouve pour la constante de l'aberration, lorsqu'on la déduit des Æ de la polaire. Il serait fort intéressant d'en reprendre les calculs en y introduisant la correction que nous avons signalée. Nous sommes persuadé qu'on trouverait une correction *négative* de la constante de Struve.

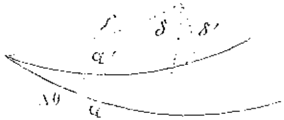
Au surplus, si l'on scrutait à fond la signification des formules de réduction, une chose qui semblerait bien difficile à trouver, serait le motif de la suppression de la réfraction dans l'expression de la déclinaison de l'étoile.

Peut-être la démonstration suivante de ces formules, que nous réduirons au seul cas de l'Æ, parviendra-t-elle à lever tous les doutes.

J'observe un lieu dans le ciel, et je détermine ses coordonnées par rapport à un certain plan de référence.

Je cherche ensuite ce que deviendront ces coordonnées, rapportées à une autre position de ce plan.

Cette nouvelle position peut être obtenue par deux déplacements successifs du plan : l'une en obliquité seulement, l'autre exclusivement en longitude. Et, comme il ne s'agit que de déplacements très petits, pour lesquels on peut s'en tenir aux termes du premier ordre, il sera permis d'ajouter simplement entre eux les effets de ces deux déplacements.



1° Soient E, E' les deux positions successives du plan de référence (équateur); ρ la distance du *lieu observé* à leur intersection; δ, δ' ses distances aux deux plans (*déclinaisons apparentes*): α, α' les arcs compris entre les pieds de ces distances et l'intersection des deux plans (Æ *apparentes*)

En désignant par V et V' les angles compris entre ρ et les deux plans, on a

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\rho\cos V, \qquad \operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}\cos V,$$

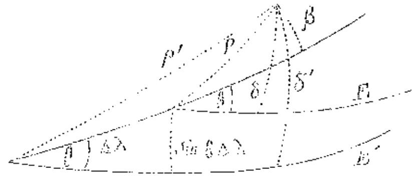
d'où l'on tire aisément, en posant

$$V - V' = \Delta\theta, \quad \alpha' - \alpha = \Delta_1\alpha :$$

$$\Delta_1\alpha = -\frac{1}{2}\,\Delta\theta\sin(\alpha+\alpha')\operatorname{tg}\frac{V+V'}{2},$$

qu'on peut écrire, en s'arrêtant aux termes du premier ordre

$$\Delta_1\alpha = -\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}V\Delta\theta = -\cos\alpha\operatorname{tg}\delta\,\Delta\theta.$$



2° L'équateur s'est déplacé en longitude de la quantité $\Delta\lambda$. On voit immédiatement que

$$\frac{\cos\rho'}{\cos\rho} = \frac{\cos\lambda'}{\cos\lambda} = \frac{\cos\delta'\cos\alpha'}{\cos\delta\,\cos\alpha}.$$

De l'égalité des deux derniers membres on déduit, en désignant par $\Delta_2\alpha$ et $\Delta_2\delta$ les variations qui proviennent du déplacement de l'équinoxe en longitude,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\lambda\Delta\lambda &= \operatorname{tg}\delta\Delta_2\delta + \operatorname{tg}\alpha\Delta_2\alpha\\ &= \sin\varepsilon\cos\alpha\operatorname{tg}\delta\Delta\lambda + \operatorname{tg}\alpha\Delta_2\alpha.\end{aligned}$$

Remplaçant $\operatorname{tg}\lambda$ par

$$\frac{1}{\cos\alpha}(\sin\varepsilon\operatorname{tg}\delta + \cos\varepsilon\sin\alpha),$$

on trouve

$$\Delta_2\alpha = (\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha\operatorname{tg}\delta)\Delta\lambda.$$

D'où enfin

$$\Delta\alpha = \cos \varepsilon \Delta\lambda + \mathrm{tg}\, \delta (\sin \alpha \sin \varepsilon \Delta\lambda - \cos \alpha \Delta\theta).$$

Or α et δ désignent, avons nous dit, les coordonnées du *lieu observé* Si α_0, δ_0 désignent celles du lieu vrai, on aura, dans le méridien, $\alpha = \alpha_0$, et, pour un passage au sud du zénith $\delta = \delta_0 + r$; pour un passage supérieur au Nord du zénith $\delta = \delta_0 - r$; pour un passage inférieur $\delta = \delta_0 + r$.

En général, on pourra écrire $\delta = \delta_0 + r$, en ayant soin de prendre r négatif dans le second cas.

Si l'on voit une raison pour supprimer r dans ce calcul, qu'on veuille bien la donner.

Quant à l'aberration, il est bien évident que le rayon lumineux qui en est affecté, soit dans la lunette, soit dans l'œil même, a été déjà auparavant réfracté par l'atmosphère; c'est-à-dire que les coordonnées qui entrent dans les formules relatives à l'aberration sont les coordonnées *apparentes*. Dans le méridien, elles seront, si α et δ désignent les coordonnées vraies, α et $\delta + r$, r étant introduit avec le signe *convenable*.

Il n'est donc plus douteux, et les meilleures observations l'ont confirmé, qu'il ne faille introduire $\delta + r$ au lieu de δ dans les facteurs tg δ et sec δ des formules de la nutation et de l'aberration pour obtenir les coordonnées du lieu *observé*.

Si les astronomes hésitent encore, voici un moyen bien simple pour vérifier l'exactitude de notre règle :

On observe une étoile de forte déclinaison, à 12 heures d'intervalle, à l'époque où $\Delta\alpha$ est, pour elle, un maximum (positif ou négatif).

Pour le passage *supérieur*, il faut, suivant notre règle,

ajouter, à la réduction au lieu apparent des astronomes, la quantité

$$- r\, \mathrm{tg}\, \delta \Delta\alpha;$$

pour l'inférieur

$$+ r\, \mathrm{tg}\, \delta \Delta\alpha.$$

D'où, entre les deux positions observées, une différence égale à $2r$ tg $\delta\Delta\alpha$, en prenant ici pour r une valeur moyenne.

Or, pour $\varphi = 51^\circ$, on a $r = 47''.2$, et pour $\delta = 89^\circ$: $r\, \mathrm{tg}\, \delta\Delta\alpha = 0^s,792$ si $\Delta\alpha = 1^m$.

(Du chef de la nutation eulérienne, il y aurait également une différence entre les heures des deux passages observées dans le méridien *fixe;* mais cette différence s'élèverait, *au plus*, à $0^s,58 \times 2$.)

Nous avons appliqué ce procédé aux observations de Wagner (1861-1872), faites de septembre à décembre sur la polaire et δ U. m.

Elles nous ont donné, pour les sommes de toutes les différences calculées et observées, au nombre de n

	Calcul.	Observations.	n
Polaire. . . .	$+ 50^s,8$	$+ 8^s,55$	57
δ U. m. . . .	$- 1,54$	$- 0,30$	16

Ce qui confirme à nouveau la règle.

Conformément à l'usage établi, dans la formule usitée

$$\Delta\alpha = \cos \varepsilon\Delta\lambda + \mathrm{tg}\, \delta N_\alpha + \sec \delta A_\alpha,$$

δ représentera la déclinaison moyenne.

Nous avons recherché antérieurement quels sont les termes du second ordre qu'il faut ajouter à cette expression pour tenir compte de la nutation et de l'aberration.

Il faut y joindre encore ceux qui proviennent de ce que c'est $\delta + r$ qui doit y entrer au lieu de δ.

Ces termes seront

$$\begin{aligned}\Delta^2\alpha &= r \sec^2\delta N_\alpha + r \sec\delta \operatorname{tg}\delta A_\alpha \\ &= r \operatorname{tg}\delta(\Delta\alpha - \cos\varepsilon\Delta\lambda) + rN_\alpha\end{aligned}$$

expression dont le dernier terme est généralement insensible vis-à-vis du premier, et pourra être négligé.

Pour plus de rigueur, toutefois, on pourra écrire

$$\Delta^2\alpha = r \operatorname{tg}\delta(1 + \cot\delta)N_\alpha + r \operatorname{tg}\delta \sec\delta A_\alpha,$$

et, considérant les facteurs $r \operatorname{tg}\delta$ et $r \operatorname{tg}\delta(1 + \cot\delta)$ comme égaux tous deux à leur moyenne, on aurait ainsi

$$\Delta^2\alpha = r \operatorname{tg}\delta\left(1 + \frac{1}{2}\cot\delta\right)(\Delta\alpha - \cos\varepsilon\Delta\lambda).$$

Les expressions complètes des termes du second ordre en AR sont donc, abstraction faite toutefois de ceux qui proviennent de l'aberration systématique (*) :

$$\begin{aligned}\Delta^2\alpha = {} & \frac{2}{\sin 2\delta}\left(1 - \frac{1}{2}\cos^2\delta\right)\Delta\alpha\Delta\delta - \operatorname{tg}\delta N_\delta \Delta\mu \\ & + r \operatorname{tg}\delta\left(1 + \frac{1}{2}\cot\delta\right)\Delta\alpha,\end{aligned}$$

où $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ représentent les réductions usuelles (precession, nutation, aberration), N_δ la nutation en déclinaison (précession comprise), $\Delta\mu = \cos\varepsilon\Delta\lambda$ les termes $46''1\,t - 13''5 \sin ☊ - 1''4 \sin 2\odot$, r, la réfraction en secondes d'arc.

(*) Voir *Memorie della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei*, vol. X.

On pourra généralement réduire cette expression à

$$\Delta^2\alpha = \operatorname{tg}\delta\left\{\Delta\alpha(\Delta\delta + r) - N_\delta\Delta\mu\right\},$$

où l'on aura soin de donner à r le signe convenable.

Quant à l'aberration systématique, nous avons recherché déjà les termes qui proviennent de sa combinaison avec l'aberration annuelle (*).

Mais elle donne lieu à d'autres termes périodiques du second ordre provenant de sa combinaison avec la nutation et la réfraction. On peut calculer, d'une manière suffisamment exacte, l'ensemble de ces termes, en substituant à α et à δ, dans les expressions des termes du premier ordre de l'aberration systématique

$$\alpha + \Delta\alpha \text{ et } \delta + \Delta + r.$$

$\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ désignent les réductions usuelles au lieu apparent, c'est-à-dire en substituant les coordonnées apparentes aux coordonnées vraies.

Les expressions de l'aberration systématique sont, si a' désigne sa constante *réduite*, c'est-à-dire projetée sur l'équateur, A' l'AR de l'Apex, T' la tangente de la déclinaison de ce point :

$$\begin{aligned}\Delta'_\alpha &= a' \sec\delta \sin(A' - \alpha), \\ \Delta'_\delta &= a'\left[\sin\delta \cos(A' - \alpha) - T' \cos\delta\right],\end{aligned}$$

α et δ désignant les coordonnées apparentes.

(*) *Monthly Notices*, V, 52, p. 553, et *Memorie della Pontificia Accad.*, vol. X.

On déduira aisément de là que les expressions complètes des termes périodiques du second ordre, provenant de l'aberration systématique, seront, si δ désigne la déclinaison *apparente*

$$\Delta''\alpha = a' \sec \delta \{\cos (\Lambda' - \alpha)\Delta\alpha - \sin (\Lambda' - \alpha) \operatorname{tg} \delta \Delta\delta\}$$
$$\Delta''\delta = a' \sin \delta \sin (\Lambda' - \alpha)\Delta\alpha.$$

Un calcul plus rigoureux introduirait simplement, au lieu du facteur $\operatorname{tg} \delta$ du second terme de $\Delta''\alpha$, le facteur

$$\operatorname{tg} \delta(1 + \frac{1}{2} \cos \delta).$$

La différence provient de ce que les facteurs de la réduction en Æ sont $\operatorname{tg} \delta$ pour la nutation, et $\sec \delta$ pour l'aberration, comme on l'a vu ci-dessus dans le calcul des termes du second ordre provenant de la réfraction.

Il ne sera peut-être pas superflu de faire remarquer ici que la correction dont nous venons de parler ne doit pas être appliquée dans le calcul des corrections instrumentales.

L'effet de la collimation, de l'inclinaison et de l'azimut de l'instrument, est de déplacer l'image hors du méridien.

Pour déterminer l'heure à laquelle elle arrivera dans ce plan, il faut calculer l'angle horaire décrit; celui-ci dépend de la vitesse de l'étoile, et cette dernière est bien la vitesse de l'étoile *vraie*, non celle de l'image réfractée.

SUR

LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

A CINQ OU SIX INCONNUES

L'un des plus grands ennuis qu'on éprouve dans la détermination des constantes astronomiques ou physiques, au moyen d'une longue série d'observations, consiste certainement dans la résolution des équations normales, lorsque le nombre des inconnues est un peu considérable.

La formation des carrés et des produits des coefficients est sans doute assez laborieuse, mais il est aisé d'en vérifier l'exactitude.

Il n'en est pas de même quant à l'élimination successive des inconnues; la vérification devient de plus en plus pénible à mesure qu'on avance; et, si la théorie peut indiquer à quel degré d'exactitude on doit effectuer les multiplications exigées par l'élimination pour obtenir une approximation déterminée, elle est bien malaisée à appliquer, et entraîne toujours à des multiplications très fastidieuses, si le nombre des inconnues est de cinq ou six.

Généralement, il est vrai, lorsque les observations se suivent d'assez près, il y a, dans chacune des équations