DE LA

SUPÉRIORITÉ DE LA MÉTHODE DE LAPLACE

SUR CELLE D'OPPOLZER

QUANT A LA

CORRECTION DU CALCUL DES COORDONNÉES DES ÉTOILES

ET A LA

PRÉCISION DES OBSERVATIONS

INTRODUCTION

Malgré l'article que nous avons publié dans les *Acta Mathematica* en 1892, et reproduit, avec quelque développement, dans l'*Annuaire* pour 1893, article auquel, à notre connaissance, il n'a jamais été répondu, les astronomes continuent à prendre le pôle instantané de rotation de la Terre pour point de référence.

Il nous paraît utile de démontrer :

1° Qu'au point de vue du calcul, la méthode de Laplace est la seule rigoureuse ;

2° Qu'au point de vue de la définition de l'heure, elle est la seule correcte ;

3° Que si, quant au calcul des déclinaisons, il est permis de regarder comme insignifiantes en pratique les négligences qu'entraine la méthode d'Oppolzer, elle est entachée d'un vice irrémédiable : l'heure y est *définie* par le méridien *fixe* ; elle y est *déterminée*, de même que les ascensions droites, dans le méridien *instantané*.

Ce dernier argument suffit à établir la vanité de toutes les déterminations d'ascensions droites faites depuis trente ans par les astronomes, en observant dans le méridien instantané.

C'est là le tort le plus grave que l'introduction de la méthode d'Oppolzer ait fait à l'astronomie ; et, si l'on n'en revient au méridien fixe et à la methode de Laplace, toutes les déterminations d'heure et d'ascensions droites resteront entachées d'erreurs qu'il sera impossible d'éliminer.

Nous démontrerons irréfutablement ce point dans les lignes qui suivent (*).

1. Dès l'origine de la grosse question, actuellement encore à l'ordre du jour, de la variation des latitudes, j'ai montré que, quant à leur partie eulérienne, ces variations seraient

(*) Les articles 1 à 5 inclus de la présente notice sont la reproduction d'un memoire qui a ete communiqué à la Classe des sciences de l'Académie de Belgique dans sa séance du 4 août 1894, sous le titre : *Fondements théoriques de l'astronomie sphérique*, mémoire qui n'a pas été inséré dans les publications académiques, de l'avis conforme des trois commissaires. (Voyez les *Bulletins* du 4 août 1894 et du 7 mai 1895.)

purement apparentes, si l'on rapportait les coordonnées, non à l'équateur instantané, mais à l'équateur géographique.

J'ai soutenu, de plus, que ce dernier choix est préférable au point de vue de la rigueur du calcul.

Plusieurs astronomes et géomètres, même très distingués, ont combattu cette manière de voir, que j'ai développée, sans calculs, dans un article intitulé : *L'invariabilité de la hauteur du pôle opposée à la variation des latitudes.* (Revue des Questions scientifiques, avril 1893.)

Une partie des dernières critiques (*) paraîtra fondée à ceux qui n'ont pas lu les développements publiés dans mon *Catéchisme correct d'astronomie sphérique* (t. X des *Mémoires de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei*, 1894), au chapitre VII, intitulé : *Heure actuelle et Heure correcte*, et qui pensent que ma définition de l'heure ne diffère pas de la définition actuelle.

Aussi, afin d'établir la conviction dans l'esprit de tout lecteur quelque peu géomètre (pour me servir de l'expression de Laplace), je crois indispensable de reprendre *ab ovo* la question du mouvement de rotation de la Terre.

On sait que, lorsqu'un corps solide est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe de son *plus grand* moment d'inertie (axe que je désignerai abréviativement sous le nom d'*axe d'inertie* ou d'*axe géographique*), il continuera à tourner indéfiniment autour de cet axe, s'il n'est pas soumis à des forces perturbatrices; mais que, s'il est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe légèrement incliné sur l'axe d'inertie, la position de l'axe de rotation, fixe dans l'espace, *variera* incessamment dans le corps.

(*) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, février 1895.

Ce dernier cas est celui de la Terre; elle ne tourne pas autour de son axe d'inertie, mais autour d'un axe instantané de rotation, qui ne s'écarte guère du premier que de 3 mètres. Si l'on regarde l'axe d'inertie comme fixe, ce que nous ferons ultérieurement, on peut dire que l'axe de rotation décrit une circonférence de cercle autour de l'axe d'inertie, dans une période de 305 jours, en admettant que la Terre puisse être considérée comme un corps solide de révolution.

Depuis un demi-siècle environ, les astronomes ont cru pouvoir déduire de leurs observations l'existence de cette légère inclinaison de l'axe de rotation sur l'axe d'inertie, et un assez grand nombre de déterminations faites par Peters, Downing et moi-même, ont toutes conduit au résultat que je viens de signaler, savoir une distance de 3 mètres environ entre les deux pôles, exemple merveilleux de la précision des observations astronomiques modernes.

Partant de ce fait, un astronome viennois très distingué, Oppolzer, a eu l'idée de rapporter les formules du mouvement de rotation de la Terre (ou de la précession et de la nutation), non plus, comme Euler, Laplace, Bessel, Poisson, Peters, Serret, à son axe d'inertie, mais, au contraire, à son axe instantané de rotation.

J'ai démontré en différents endroits, et en dernier lieu dans les *Acta mathematica*, l'un des meilleurs journaux de mathématiques de l'Europe (1892) (*), que l'emploi de ce procédé entraîne fatalement à des négligences avouées par

(*) Article reproduit dans l'*Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique* pour 1893.

Oppolzer lui-même, et que le procédé de Laplace et des anciens géomètres lui est bien supérieur.

Il n'a jamais été répondu à mon article; tous les astronomes néanmoins continuent à suivre Oppolzer. Et je me l'explique par ce fait, capable de frapper l'esprit des astronomes non géomètres, qui sont nombreux, que ce n'est pas autour de l'axe d'inertie, mais autour de l'axe instantané que tourne en réalité la Terre.

Mais qu'importe l'axe instantané!

Plus d'un lecteur s'étonnera, sans doute, de cette assertion. Qu'il veuille bien me suivre, pendant quelques instants, d'un esprit dégagé de toute prévention, et il partagera ma conviction.

Que faisons-nous dans nos observations astronomiques?

Nous supposons la Terre *fixe* et le Ciel *mobile* autour d'elle. Ce que nous faisons dans la pratique astronomique, qu'est-ce qui nous empêche de le faire dans le calcul?

Et les astronomes eux-mêmes ne procèdent-ils pas ainsi quand ils calculent l'orbite que le Soleil décrit en apparence autour de la Terre? Or, remarquez que tous les géomètres, sans en excepter Oppolzer, sont obligés de rapporter tout d'abord les équations du mouvement de rotation de la Terre à ses axes principaux.

Lorsqu'ils ont intégré ces équations, ils connaissent la position des axes principaux de la Terre par rapport à un système d'axes arbitraires, *absolument fixes dans le Ciel*, et, jusque-là, le procédé d'Oppolzer ne diffère pas, en quoi que ce soit, de celui de Laplace.

Ne puis-je pas maintenant dire :

Les formules que nous venons de trouver me donnent la position des *axes du Ciel* par rapport *aux axes principaux*

de la Terre, considérés comme *absolument fixes dans l'espace*, tout comme nous étudions le mouvement du Soleil autour de la Terre considérée comme fixe?

Évidemment oui; et tout le monde en tombera d'accord.

La Terre et ses axes principaux sont donc fixes; le Ciel est mobile autour d'eux.

Or, quels sont les résultats de l'analyse de Laplace, auxquels sont identiques, jusqu'à cette partie du développement, ceux d'Oppolzer?

1° Que la vitesse angulaire n de la Terre autour de son *axe d'inertie* z est constante;

2° Qu'elle est animée de vitesses variables l et m autour des axes des x et des y.

D'où il résulte nécessairement qu'autour de l'axe instantané de rotation elle est animée d'une vitesse variable, résultant de la composition de la vitesse constante n avec les vitesses variables l et m.

Que les astronomes démontrent qu'en fait cette variation de vitesse de la Terre autour de son axe de rotation est insignifiante, nous le concédons, mais seulement pour le cas où la Terre serait un corps solide et de révolution, ce qui n'est pas le cas de la nature.

Ce que nous affirmons à nouveau, et pas un géomètre ne nous contredira sur ce point, c'est que, quelque grandes même que puissent être les vitesses l et m, la vitesse angulaire n du Ciel autour de l'axe d'inertie est constante, tandis que la vitesse angulaire ω autour de l'axe instantané ne le serait pas.

On me répondra que « cette dernière est la véritable vitesse de rotation de la Terre. »

Ceci est évident. Mais, encore une fois, que m'importe?

J'ai les trois composantes l, m, n de cette vitesse autour des trois axes; je me borne à constater que la dernière est constante, et c'est la raison qui me fait choisir son axe comme axe de référence; j'affirme en conséquence que la vitesse d'un point fixe du Ciel *autour de cet axe* est uniforme, et c'est cette vérité tout à fait élémentaire qu'on voudrait nier! C'est absolument comme si l'on niait qu'un projectile lancé dans le vide se meut avec une vitesse horizontale constante, sous prétexte que sa vitesse réelle est variable en vertu de la gravité.

Car enfin la vitesse n autour de l'axe z n'est pas autre chose que la projection, sur un plan perpendiculaire à cet axe, de la vitesse résultante ω, tout comme la vitesse horizontale du projectile est la projection de sa vitesse réelle sur une ligne horizontale. Et je tiens à déclarer que je me place ici, comme dans tout ce que j'ai écrit, au point de vue astronomique, c'est-à-dire en ne faisant abstraction d'aucune des trois nutations de l'*axe d'inertie*.

Ah! s'il n'existait pas de forces perturbatrices, il n'y aurait rien à reprendre au procédé d'Oppolzer, et il est vraiment trop commode de le défendre dans cette hypothèse. C'est en astronomie réelle seulement que j'ai attaqué ce procédé, et les négligences que je lui reproche sont avouées par Oppolzer lui-même. Comme je le disais dans mon article, cité ci-dessus, des *Acta mathematica*, « de négligence en négligence cependant, que deviendrait la correction des formules, correction que l'astronomie de précision est en droit d'attendre aujourd'hui des géomètres? »

Du reste, si ce procédé était correct, au contraire de celui de Laplace, M. Tisserand ne l'eût-il pas suivi dans son tout récent *Traité de mécanique céleste*, de préférence à ce dernier? Cet argument, quoique non mathématique, ne semblera pas dépourvu de valeur aux yeux des astronomes.

2 Le lecteur et les astronomes sont peut-être suffisamment édifiés. Je crois cependant devoir ajouter, à l'usage spécial de ces derniers, quelques autres arguments, et, afin de ne pas entrer dans des détails de calcul qui seraient très longs, dans l'un et l'autre système, du reste, je supposerai l'*axe d'inertie* fixe dans la Terre, c'est-à-dire que je fais abstraction des déplacements auxquels il peut être sujet par l'effet d'actions météorologiques ou intérieures.

Dans le système de Laplace, qui est le mien, cet axe est l'axe de référence. L'ascension droite et la déclinaison sont rapportées à l'équateur géographique, qui est perpendiculaire à cet axe. Ces coordonnées s'expriment, dans l'un et l'autre système du reste, au moyen des mêmes formules :

$$\frac{d\delta}{dt} = n\cos\alpha + \cos\alpha\sin\theta\frac{d\lambda}{dt} + \sin\alpha\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n\sin\alpha\operatorname{tg}\delta + \cos\theta\frac{d\lambda}{dt} + \operatorname{tg}\delta\left(\sin\alpha\sin\theta\frac{d\lambda}{dt} - \cos\alpha\frac{d\theta}{dt}\right),$$

en adoptant ici les notations besséliennes m et n.

Les expressions seules de $\frac{d\theta}{dt}$ et de $\frac{d\lambda}{dt}$ varient dans les deux systèmes.

Dans celui de Laplace, elles sont *absolument correctes*, mais renferment l'expression de la nutation eulérienne, qui y revêt un caractère *diurne*, reconnu *aujourd'hui* par M. Tisserand.

Dans celui d'Oppolzer, elles sont incorrectes, puisqu'il les a rapportées à l'équateur instantané, et que, à raison de la très faible inclinaison des deux axes l'un sur l'autre, il est obligé de négliger, dans sa transformation des coordonnées, des termes qui ne sont en réalité pas négligeables, vu la précision des observations modernes, puisqu'ils sont du même ordre que la nutation eulérienne elle-même.

Mais elles sont débarrassées, par suite de cette transformation, de la nutation eulérienne, du moins à fort peu près.

Dans l'un et dans l'autre système, on peut substituer, pour la grande majorité des étoiles, les variations finies $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, $\Delta\theta$, $\Delta\lambda$, aux différentielles d.

Je reviendrai ci-dessous sur le cas des étoiles voisines du pôle, et reprends mon argumentation relative au système de Laplace.

Dans ce système, le méridien est *fixe*, les latitudes et les longitudes terrestres sont *constantes*, étant rapportées à des axes absolument fixes, non seulement dans la Terre, mais même dans l'espace, en vertu de notre convention que c'est la Terre qui est fixe, et le Ciel qui est mobile autour d'elle; et toute équatoriale repassera *exactement* après vingt-quatre heures sidérales, *définies* comme nous l'avons fait (*), dans le méridien.

C'est ici le point le plus délicat de la question, et celui sur lequel ont porté, quoique incorrectement du reste, les dernières critiques, dont une partie serait toutefois fondée, si notre définition de l'heure sidérale reposait, comme la définition actuelle, sur le passage d'une équatoriale au méri-

(*) *Catéchisme correct d'astronomie sphérique* (Memoria della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei, 1894, vol. X, pp. 42-46).

dien. Comme la plupart des lecteurs n'auront pas eu connaissance de notre *Catéchisme d'astronomie*, il nous semble nécessaire de développer à nouveau ce point.

Si, au lieu du pôle instantané, je prends pour point de référence le pôle d'inertie, l'équinoxe sera naturellement, comme tout autre point du Ciel, soumis à la nutation eulérienne et à la nutation diurne.

Afin d'obtenir une définition *absolument rigoureuse* de l'heure, je prendrai pour origine l'équinoxe *soustrait à toute nutation*, et je l'appellerai *équinoxe médian*.

0 heure sidérale marquera l'instant du passage de l'équinoxe médian par le méridien.

Or on a, en désignant par φ l'angle compris entre l'équinoxe vrai et l'axe principal X, qui détermine le *premier méridien* :

$$\frac{d\varphi}{dt} = n + \cos\theta\,\frac{d\lambda}{dt},$$

ou, en décomposant $\frac{d\lambda}{dt}$ en précession et nutation, et intégrant,

$$\varphi = \varphi_0 + n_1\tau + \cos\theta\Delta\lambda,$$

n_1 étant égal à $n + m$, et $\Delta\lambda$ représentant la nutation complète en longitude.

Pour l'équinoxe *médian*, qui est soustrait à toute nutation, on supprimera d'abord le terme $\cos\theta\Delta\lambda$; ensuite, puisque, par définition, il est 0 heure sidérale pour le premier méridien quand l'équinoxe médian est dans ce plan, φ_0 sera égal à 0, et l'on aura $\psi = n_1\tau$, ψ désignant la valeur de φ rapportée à l'équinoxe médian.

ψ sera l'heure sidérale du premier méridien, heure *rigoureusement uniforme*, et non *approximativement*, comme l'heure actuelle.

Il est évident que, pour un observatoire de longitude géographique occidentale L par rapport au premier méridien, l'heure sidérale t sera liée à ψ par la relation $\psi = L + t$, et sera aussi *parfaitement uniforme*.

L'heure sidérale actuelle t_a, au contraire, ne l'est pas, puisqu'elle est

$$t_a = t + \cos\theta\Delta\lambda,$$

même si, suivant le système d'Oppolzer, la nutation eulérienne est supprimée dans $\Delta\lambda$.

Et la différence des heures sidérales actuelles en deux lieux n'est pas égale à leur différence de longitude, car $\cos\theta\Delta\lambda$ renferme, dans le système de Laplace, les termes de la nutation eulérienne et de la nutation diurne, qui, à raison de la courte période (1 jour ou $^1/_2$ jour environ) de ces deux nutations, varieront de l'un à l'autre de ces observatoires ; dans celui d'Oppolzer, ceux de la nutation diurne.

Ces deux nutations ont à peu près la même importance numérique ; Laplace les avait négligées ; la précision des observations modernes oblige d'en tenir compte, et nous avons cru impossible de conserver une définition qui y rende l'heure sujette.

Mais, en même temps, nous avons cherché à affranchir celle-ci de l'incorrection qui résulte, dans la définition actuellement en usage, de la présence du terme périodique $\cos\theta\Delta\lambda$ dans son expression, et qui peut occasionner, en trois mois, une négligence de $0^s,37$ dans la détermination de l'état de la

pendule ! (*) Et c'est pourquoi nous avons pris l'équinoxe *médian* pour origine.

La définition nouvelle de l'heure sidérale que nous proposons ne diffère de la définition usuelle que d'une manière si légère, à côté de l'avantage qu'elle présente d'être *absolument rigoureuse*, qu'elle sera certainement un jour adoptée.

Comme nous le disons dans notre *Catéchisme d'astronomie* (p. 45) : « La définition actuelle de l'heure était correcte aussi longtemps que la nutation n'était pas soupçonnée ; quand Bradley eut découvert celle-ci, s'il avait songé à corriger l'heure de la nutation de l'équinoxe en ascension droite, afin de lui laisser le caractère d'uniformité absolue qu'elle doit avoir, cette définition nouvelle, que nous proposons, eût été admise d'emblée en même temps que la nutation, dont elle dérive nécessairement. »

A la formule connue, dans laquelle n a la signification besselienne :

$$\Delta\delta = \cos\alpha\,(n\tau + \sin\theta\Delta\lambda) + \sin\alpha\Delta\theta,$$

correspondra, en effet, la formule parfaitement analogue :

$$\cot\delta\Delta\alpha_m = \sin\alpha\,(n\tau + \sin\theta\Delta\lambda) - \cos\alpha\Delta\theta,$$

$\Delta\theta$ et $\Delta\lambda$ représentant, en obliquité et en longitude, les

(*) Lorsque la longitude du nœud passe de 2°,4 à −2°,4, et, en même temps, celle du Soleil de 90° à 270°.

sommes des trois nutations bradléenne, eulérienne et diurne (*).

Et si l'on pose

$$\Delta\theta = j\cos J; \qquad n\tau + \sin\theta\Delta\lambda = j\sin J,$$

on aura simplement:

$$\Delta\delta = j\sin(J+\alpha)$$
$$\cot\delta\Delta\alpha_m = j\cos(J+\alpha).$$

j et J pourront être calculés dans les éphémérides en ce qui concerne la nutation bradléenne. On y joindra la valeur de

$$m\tau + \cos\theta\Delta\lambda = \Delta\mu,$$

$\Delta\lambda$ étant calculé pour la nutation bradléenne seulement, et l'on aura très simplement l'ascension droite vraie de l'étoile, telle que les astronomes la calculent actuellement. Mais il faudra y ajouter la nutation initiale et la nutation diurne en ascension droite.

Ces deux nutations variant avec la longitude de l'observatoire, ne peuvent pas se réduire en tables analogues.

(*) En désignant par α_0 l'ascension droite moyenne à l'origine de l'année, on sait que

$$\alpha = \alpha_0 + m\tau + \cos\theta\Delta\lambda + \operatorname{tg}\delta\left[\sin\alpha(n\tau + \sin\theta\Delta\lambda) - \cos\alpha\Delta\theta\right].$$

Or, $m\tau + \cos\theta\Delta\lambda$ est la variation en ascension droite qui provient du mouvement de l'équinoxe vrai, $m\tau$ celle qui provient du mouvement de l'équinoxe *médian*. En appelant donc α_m l'ascension droite rapportée à l'équinoxe médian, on aura

$$\Delta\alpha_m = \operatorname{tg}\delta[\ldots] \quad \text{et} \quad \alpha = \alpha_m + \cos\theta\Delta\lambda.$$

Si nous les désignons par Δ_1 et Δ_2, les expressions de la déclinaison et de l'ascension droite vraie seront:

$$\delta = \delta_0 + j\sin(J+\alpha) + \Delta_1\delta + \Delta_2\delta;$$
$$\alpha = \alpha_0 + \operatorname{tg}\delta . j\cos(J+\alpha) + \Delta\mu + \Delta_1\alpha + \Delta_2\alpha.$$

Ces formules sont absolument *correctes et complètes.*

Celles d'Oppolzer suppriment, à la vérité, correctement, la nutation eulérienne Δ_1 (je ne parle pas de la nutation diurne, inconnue de son temps), mais elles sont incorrectes en ce qu'il calcule la nutation bradléenne (c'est-à-dire j, J et $\Delta\mu$) absolument de la même manière que Laplace, Bessel, Poisson, Peters, Serret, Tisserand, c'est-à-dire qu'il commet, puisqu'il rapporte ces quantités à des axes différents des 'eurs, des négligences avouées, et signalées comme fatales par lui-même, fait que personne n'a jamais contesté, et qui est la raison pour laquelle son système n'a pas été suivi par M. Tisserand, quoique ce dernier définisse la latitude à la manière d'Oppolzer et des astronomes contemporains.

Pour le lieu apparent, nous aurons à ajouter aux expressions précédentes l'aberration $A\delta$ ou A_α et la parallaxe $\pi\delta$ ou π_α. En désignant les seconds membres ci-dessus par $N\delta$ et N_α, et en appelant maintenant α et δ les coordonnées apparentes, $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ les différences $\alpha - \alpha_0$, $\delta - \delta_0$, nous aurons:

$$\Delta\delta = N\delta + A\delta + \pi\delta, \qquad \Delta\alpha + N_\alpha + A_\alpha + \pi_\alpha.$$

3. Nous allons indiquer les termes qu'il faut ajouter aux seconds membres pour le calcul rigoureux des positions apparentes des circompolaires.

Le premier qui ait cherché à simplifier le calcul des termes du second ordre est Wagner, astronome très distingué de l'Observatoire de Poulkova.

M. Fabritius a donné ensuite une formule très élégante, mais incorrecte, en ascension droite surtout, pour le calcul de ces termes, formule qui a été néanmoins adoptée par Oppolzer, et dont on a même fait usage pour le calcul des éphémérides des circompolaires dans le *Nautical Almanac* et dans la *Connaissance des temps.*

J'ai démontré l'incorrection de ces formules dans le *Bulletin astronomique*. M. Fabritius, dans le tome III des *Annales de l'Observatoire de Kiev*, a admis mes critiques quant à sa formule des termes du second ordre en déclinaison, la plus correcte cependant, mais non quant à sa formule en ascension droite.

Ce n'est pas ici le lieu de développer les formules correctes, que j'ai démontrées en différents endroits (*), et, en dernier lieu, dans mon *Catéchisme correct d'astronomie sphérique* (**).

Ces formules sont (*loc. cit.*, t. X, pp. 33 et 34) :

$$\Delta^2\delta = -\frac{1}{4}\sin 2\delta(\Delta\alpha)^2 + \mathrm{K}\,\frac{\sin\odot}{\sin\delta}\cos\odot\Delta\delta$$

$$-\frac{1}{4}\sin 2\delta\cos^2\delta\,(\mathrm{N}_\alpha)^2,$$

K désignant la constante de l'aberration.

(*) *Monthly notices*, vol. III, et *Memoria della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei*, vol. IX, pp. 237 et suivantes; vol. X, pp. 31 et suivantes.

(**) *Ibidem.*

Les deux derniers termes seront très généralement négligeables; le premier a été donné par M. Fabritius.

$$\Delta^2\alpha = \frac{2}{\sin 2\delta}\left(1 - \frac{1}{2}\cos^2\delta\right)\Delta\alpha\Delta\delta - \operatorname{tg}\delta\mathrm{N}_\delta\cot\theta\Delta\mu,$$

en représentant par $\cot\theta\Delta\mu$ l'expression

$$46''.1\,t - 15''.5\sin\Omega - 1''.4\sin 2\odot.$$

M. Frabritius a donné

$$\Delta^2\alpha = \frac{2}{\sin 2\delta}\Delta\alpha\Delta\delta.$$

Mais à nos expressions il y a lieu d'ajouter encore les termes qui proviennent de la combinaison de l'aberration annuelle et de l'aberration systématique, termes dont j'ai, le premier, donné l'expression (*), et qui permettent de déterminer par un calcul direct la constante de l'aberration systématique.

Nous extrairons ces expressions de notre *Catéchisme d'astronomie* (**).

En désignant par K la constante de l'aberration annuelle, par K′ la constante *réduite* (c'est-à-dire projetée sur l'équa-

(*) *Un chapitre inédit d'astronomie sphérique* (ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, no 188).

(**) *Memoria della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei*, vol. X, pp. 31 et 32.

teur) de l'aberration systématique, par A' l'ascension droite de l'Apex du mouvement systématique, ces termes sont

$$\Delta'\delta = K' \sin\delta \sin(A'-\alpha) A_\alpha$$

$$= -KK' \operatorname{tg}\delta \sin(A'-\alpha)(\cos\theta\cos\alpha\cos\odot + \sin\alpha\sin\odot).$$

$$\Delta'\alpha = -KK'\left\{\sec^2\delta[\sin(A'-2\alpha)\sin\odot - \cos\theta\cos(A'-2\alpha)\cos\odot]\right.$$

$$\left.+\frac{2\sin\theta}{\sin 2\delta}\sin(A'-\alpha)\cos\odot\right\}$$

$$= KK'\left\{-\sec^2\delta m'\cos(\odot + A'') + \frac{2\sin\theta}{\sin 2\delta}\sin(A'-\alpha)\cos\odot\right\},$$

en posant

$$\sin(A'-2\alpha) = m'\sin A'', \quad \cos(A'-2\alpha) = m'\cos A''.$$

Pour nous enfin, dans les facteurs $\operatorname{tg}\delta$ et $\sec\delta$ des variations en ascension droite, on doit substituer la déclinaison apparente à la déclinaison vraie. Tout au moins cette règle est-elle confirmée par les meilleures observations (voir sur ce point : *Sur les termes du second ordre provenant de la combinaison de la nutation ou de l'aberration avec la réfraction* [ANNUAIRE DE L'OBSERVATOIRE pour 1895, p. 288], ainsi que la notice ci-jointe sur ce même sujet).

4. Les formules que nous venons d'exposer sont *absolument* correctes, sauf en un point de très minime importance, et se rattachant encore à la partie la plus délicate de la question du mouvement de rotation de la Terre.

Quoiqu'aucun géomètre ne s'en soit occupé, nous tenons à appeler sur ce point l'attention du lecteur, désirant ne laisser absolument rien dans l'ombre.

Dans l'intégration des équations d'Euler

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{b}{A}n(m+q),$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{a}{B}n(l+p),$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{c}{C}(lm+nr),$$

nous avons admis, à l'exemple de tous les géomètres, qu'on peut poser $n =$ constante, et $\varphi = L + n_1 t$; et nous avons trouvé, dans cette hypothèse, les intégrales rigoureuses des deux premières équations (*).

Les moments p et q des forces perturbatrices pouvant se mettre sous la forme :

$$p = \Sigma u \sin(v_1 t + \varphi), \qquad q = \Sigma u \cos(v_1 t + \varphi),$$

ces intégrales sont :

$$l = \gamma_1 \cos(\iota\varphi + \beta_1) - \frac{b}{A}\Sigma u \frac{1 - \frac{a}{B} + v_2}{(1+v_2)^2 - \frac{ab}{AB}} \sin(1+v_2)\varphi,$$

(*) Ces intégrales ont été données dans notre *Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde*, 1884.

Tous les géomètres, y compris M. Tisserand, ont négligé v_2 vis-à-vis de l'unité dans les facteurs des sin ou cos des arguments.

$$m = \sqrt{\frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{B}b}}\,\gamma_3 \sin(\iota\varphi + \beta_1)$$

$$- \frac{a}{\mathrm{B}} \Sigma u \frac{1 - \frac{b}{\mathrm{A}} + v_2}{(1 + v_2)^2 - \frac{ab}{\mathrm{AB}}} \cos(1 + v_2)\varphi.$$

Les formules de transformation donnent ensuite

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \cos\theta \frac{d\psi}{dt}, \qquad \frac{d\theta}{dt} = -l\cos\varphi + m\sin\varphi,$$

$$\sin\theta \frac{d\psi}{dt} = l\sin\varphi + m\cos\varphi.$$

Dans une première approximation, on peut, à raison de la faiblesse des variations de θ, poser

$$\varphi = \mathrm{L} + n_1 t, \qquad \theta = \text{constante}.$$

C'est ce que nous avons fait.

On obtient ainsi, en ne retenant que les termes les plus importants de la nutation bradléenne :

$$\Delta\theta = a\cos\Omega - b\cos 2\odot$$
$$\sin\theta\Delta\psi = pt - a'\sin\Omega - b'\sin 2\odot$$
$$\varphi = \mathrm{L} + n_1 t - a''\sin\Omega - b''\sin 2\odot,$$

en posant $n_1 = n - p\cos\theta$.

Peters (*Numerus constans nutationis*, p. 36) a déjà tenu compte de la variation de θ. Nous pouvons donc nous dispenser d'y revenir.

Quant à la variation de $\frac{d\varphi}{dt}$, que nous avons supposé

être une constante dans l'intégration précédente, nous pourrons en déterminer l'effet en admettant qu'elle consiste dans une variation des constantes arbitraires γ_1 et β_1.

Comme le coefficient ι est inférieur à $\frac{1}{300}$ et que le plus fort coefficient de la partie périodique de $\Delta\varphi$ est 17″, nous négligerons cette variation de l'argument $\iota\varphi$; avec Laplace et tous les géomètres, nous négligerons, dans les coefficients, v_2 vis-à-vis de 1, avec d'autant plus de raison ici que cette quantité est très faible dans les termes prépondérants, les seuls qu'il importe de considérer; nous supposerons aussi $\mathrm{B} = \mathrm{A}$, c'est-à-dire n = constante, ce qui sera absolument sans conséquence dans cette recherche des très faibles corrections de β et de γ.

En considérant comme variables ces constantes arbitraires, et en posant

$$u\frac{b}{\mathrm{A}} \frac{1 - \frac{b}{\mathrm{B}}}{1 - \frac{ab}{\mathrm{AB}}} \quad \text{ou} \quad u\frac{c - \mathrm{B}}{c},$$

de même que

$$u\frac{a}{\mathrm{B}} \frac{1 - \frac{b}{\mathrm{A}}}{1 - \frac{ab}{\mathrm{AB}}} \quad \text{ou} \quad u\frac{c - \mathrm{A}}{c}$$

égal à u, nous aurons

$$\Delta l = \cos(\iota\varphi + \beta)\Delta\gamma - \gamma\sin(\iota\varphi + \beta)\Delta\beta$$
$$- \Sigma u'(\iota + v_2)\cos(1 + v_2)\varphi\Delta\varphi$$

$$\Delta m = -\sin(\iota\varphi + \beta)\Delta\gamma + \gamma\cos(\iota\varphi + \beta)\Delta\beta$$
$$+ \Sigma u'(\iota + v_2)\sin(1 + v_2)\varphi\Delta\varphi.$$

Or on sait que

$$A l \Delta l + B m \Delta m + C n \Delta n = 0,$$
$$A^2 l \Delta l + B^2 m \Delta m + C^2 n \Delta n = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} l\Delta l = {} & \gamma\Delta\gamma[1 + \cos 2(\iota\varphi + \beta)] - \gamma^2 \sin 2(\iota\varphi + \beta)\Delta\beta \\ & - \Sigma u' \{\sin[(1 + v_2 + \iota)\varphi + \beta] + \sin[(1 + v_2 - \iota)\varphi - \beta]\}\Delta\gamma \\ & - \Sigma u' \cos[(1 + v_2 + \iota)\varphi + \beta]\gamma[(1 + v_2 + \iota)\Delta\varphi + \Delta\beta] \\ & - \Sigma u' \cos[(1 + v_2 - \iota)\varphi + \beta]\gamma[(1 + v_2 - \iota)\Delta\varphi - \Delta\beta] \\ & + \Sigma u'^2 \sin 2(1 + v_2)\varphi\Delta\varphi. \end{aligned}$$

$\Delta\varphi$ et u' sont égaux à quelques secondes d'arc, γ à $0''.1$ au plus; $\Delta\beta$ est, de sa nature, une quantité finie.

Nous pouvons donc négliger les termes en $\gamma^2\Delta\beta$, $u'\gamma\Delta\beta$ vis-à-vis des autres, et nous borner à écrire, en négligeant ν_2 et ι dans le coefficient de $\Delta\varphi$:

$$\begin{aligned} l\Delta l = {} & \gamma\Delta\gamma[1 + \cos 2(\iota\varphi + \beta)] \\ & - \Sigma u' \{\sin[(1 + v_2 + \iota)\varphi + \beta] \\ & \qquad + \sin[(1 + v_2 - \iota)\varphi - \beta]\}\Delta\gamma \\ & - \gamma\Delta u' \{\cos[(1 + v_2 + \iota)\varphi + \beta] \\ & \qquad + \cos[(1 + v_2 - \iota)\varphi - \beta]\}\Delta\varphi \\ & + \Sigma u'^2 \sin 2(1 + v_2)\varphi\Delta\varphi. \end{aligned}$$

On trouverait une expression analogue pour $m\Delta m$.

Et la substitution de ces expressions dans l'équation

$$A' l \Delta l + B' m \Delta m = 0$$

résultant de l'élimination de Δn entre les deux équations

$$A l \Delta l + \cdots = 0, \qquad A^2 l \Delta l + \cdots = 0,$$

fournira la valeur de $\Delta\gamma$, qui sera évidemment de l'ordre de $u'\Delta\varphi$ et de $\frac{u'^2}{\gamma}\Delta\varphi$, et, par conséquent, négligeable.

On ne pourrait pas, à priori, en dire autant de $\Delta\beta$, qui aura peut-être une valeur appréciable et nécessairement périodique. Sa période sera une combinaison de celle de la nutation eulérienne avec les périodes des différents arguments de la nutation bradléenne.

Mais la recherche en serait prématurée aujourd'hui que l'on ne connaît encore exactement ni β ni γ. Au surplus, le point que nous avons surtout voulu établir ici, c'est que le procédé d'intégration dont nous nous sommes servi en supposant $\varphi = L + n_1 t$, est absolument rigoureux en ce qui concerne tous les termes de nutation, à l'exception peut-être de la nutation eulérienne, dans laquelle β, au lieu d'être constant, pourrait avoir une partie périodique.

On a vu, en ce qui concerne l'heure, comment nous nous sommes débarrassé, dans sa définition, de la partie périodique de φ.

5. Il n'a pas été question de l'angle horaire, auquel certains critiques attachent une si grande importance.

L'angle horaire n'a rien à voir avec la méthode d'intégration des équations du mouvement de l'axe du monde.

Il est la différence entre l'ascension droite du zénith et celle de l'étoile.

La méthode exposée nous permet de calculer exactement l'une et l'autre, et cela suffit.

Que cet angle horaire ne croisse pas uniformément, il n'importe *absolument pas*. La seule chose qui importe, c'est l'uniformité du temps sidéral, *parfaitement* établie dans ce qui précède, et le calcul *correct* de l'ascension droite, tel que nous venons de le développer.

Au point de vue de la rigueur, il n'y a donc rien à reprocher à la méthode de Laplace, pourvu qu'on tienne compte des deux nutations à courte période, négligées par lui comme insensibles, et qu'on modifie la définition actuelle de l'heure de manière à rendre cette dernière rigoureusement uniforme.

Au point de vue de la précision des observations, qui niera qu'un méridien *fixe* est bien autrement sûr qu'un méridien qu'on est obligé de déterminer de jour en jour, en s'exposant à toutes les erreurs d'observation et de réduction? Parmi ces dernières, nous ne citerons que la nutation diurne, l'aberration et la parallaxe, trois erreurs manifestes, bien certainement.

Dans le système de Laplace, la différence de longitude de deux lieux est constante, avantage considérable également.

Je ne parle pas de la constance de la latitude (puisque cette dernière est sujette à une variation réelle, provenant d'un faible déplacement annuel de l'axe d'inertie), tout en estimant que la définition de Laplace, hauteur du pôle (géographique), est conforme à celle des géodésiens, ce qui n'est nullement le cas pour la définition astronomique.

6. Pour compléter notre démonstration, il importe maintenant que nous mettions en relief les incorrections du procédé du regretté astronome viennois.

On sait que ce procédé consiste essentiellement à prendre pour axe de référence l'axe instantané.

D'où résulte nécessairement la variation des latitudes et des longitudes terrestres, puisque ce dernier axe décrit un cône autour de l'axe géographique dans l'intérieur de la Terre : notion peu acceptable pour les géodésiens.

Je passe sur cet inconvénient, qui n'en serait pas un pour les astronomes, dans le cas où le procédé d'Oppolzer serait plus correct que celui de Laplace.

Et je vais démontrer que les formules d'Oppolzer sont absolument identiques à celles de Poisson (qui a suivi le procédé de Laplace), à part la suppression de la nutation eulérienne; et, par conséquent, qu'elles sont incorrectes, puisqu'il reconnaît lui-même la correction de celles de Poisson, qui sont rapportées à l'axe géographique. Je signalerai, de plus, successivement, les diverses négligences ou omissions qu'il a commises.

Afin d'abréger, j'appellerai le pôle instantané, pôle astronomique; le pôle d'inertie, pôle géographique; les coordonnées qui s'y rapportent seront qualifiées de même.

Oppolzer a été frappé de cette idée juste que, s'il prenait le pôle astronomique pour point de référence, il ferait disparaître (aux termes près du second ordre, qui sont absolument négligeables) la nutation eulérienne des formules de réduction. Mais il n'a pas suffisamment approfondi les conséquences de cette transformation.

Nous allons les développer successivement, en prenant pour base de nos critiques les textes mêmes de l'astronome viennois.

1° Puisque le méridien astronomique n'est pas fixe, si même on admet l'uniformité du mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe astronomique, le jour sidéral des astronomes n'est pas constant, et les variations en sont d'autant plus grandes que l'observateur est plus rapproché du pôle.

2° Mais ce mouvement lui-même n'est pas uniforme : « *Dans les limites d'exactitude admises*, dit l'auteur (*), ω doit donc être considéré comme une constante. » Et ce n'est pas tout. Se mettant en contradiction avec lui-même, dans le paragraphe tout entier relatif à la mesure du temps (**), il ne s'occupe plus que de la vitesse de la Terre autour de son axe géographique, absolument comme si ses formules se rapportaient à ce même axe!

Et lorsqu'il s'agit de la définition du jour, il dit : « Le dernier terme représente ainsi le mouvement du point vernal moyen par rapport à un *méridien fixe*, au bout d'un jour solaire moyen. »

Deuxième négligence, et bien moins légère que la première, pour ne pas dire très grave.

Que l'on compare ce jour sidéral, variable dans la théorie d'Oppolzer, comme dans la pratique astronomique, avec le jour absolument constant que nous avons défini, et l'on jugera immédiatement de l'avantage d'une méthode sur l'autre au point de vue de la correction des observations astronomiques.

Mais il y a plus; car ce n'est pas le jour sidéral seul qu'il faut définir correctement; c'est également l'heure sidérale.

Dans la théorie de Laplace, le *premier méridien*, qui passe par l'axe principal X, est *fixe* dans la Terre; et nous avons trouvé $n_1\tau$ pour l'expression de l'heure sidérale sur le premier méridien, $L + n_1\tau$ en un lieu de longitude orientale L

(*) Page 156 de la traduction Pasquier.

(**) Pages 198 et suivantes.

rapportée à ce méridien; c'est-à-dire des heures sidérales *rigoureusement uniformes* pour toute la Terre.

Dans celle d'Oppolzer, il serait indispensable de substituer aux axes X, Y, perpendiculaires à l'axe géographique, les axes X'', Y'', perpendiculaires à l'axe instantané. Mais l'auteur ne fait pas seulement la moindre mention des deux nouveaux axes perpendiculaires à l'axe instantané, et qu'il devrait cependant définir exactement, puisqu'il passe du système géographique au système astronomique.

Où donc est l'origine du jour sidéral?

Pour les astronomes contemporains, c'est l'instant où le point vernal se trouve dans le méridien astronomique.

Pour Oppolzer, il en devrait être de même; on a vu qu'il n'en est rien, et que c'est le méridien fixe qui lui sert à définir le jour.

Toutes les notions relatives à l'heure sont la partie la plus faible du travail de l'astronome viennois; négligences, contradictions, inconséquences se rencontrent à chaque pas dans cette théorie de la mesure du temps, la plus capitale certainement de l'astronomie « Comme la discussion de la valeur de p (vitesse de la Terre autour de l'axe d'inertie), dit Laplace, est très importante à cause de son influence sur la durée du jour. . . . . »

Examinons comment il faudrait s'y prendre pour déterminer l'heure dans le système qui choisit pour axe de référence l'axe instantané.

A première vue, certains astronomes pourraient s'imaginer que l'uniformité du mouvement de rotation autour de l'axe instantané suffit pour établir la définition de l'heure.

Admettons cette uniformité, quoique cette concession entraîne encore la négligence de termes du second ordre.

négligence qu'il conviendrait d'éviter dans une question aussi capitale que celle de l'heure ; car au lieu de

$$\omega = n \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{l^2 + m^2}{n^2} \right\},$$

on doit écrire $\omega = n$, ce qui revient à confondre l'axe instantané avec l'axe d'inertie.

Mais, pour définir l'heure, il ne suffit pas du mouvement de rotation uniforme de la Terre. Il faut un plan fixe dans le Ciel. Ce plan sera déterminé par un point fixe (pour lequel on peut provisoirement choisir une étoile *fixe*) et par un axe fixe.

Or cet axe fixe ne peut être l'axe instantané, qui est soumis à la précession et à la nutation bradléenne ; je fais abstraction de la nutation diurne, qui est très faible, et de la nutation eulérienne, beaucoup plus faible encore pour cet axe. Mais quant à la précession et à la nutation, personne ne s'avisera qu'on peut les négliger. On en est donc réduit à faire choix d'un axe parfaitement fixe ; et, afin d'arriver aux résultats établis dans la pratique, on choisira comme tel l'axe de l'écliptique fixe.

Et alors, on voit que l'on en revient tout simplement au procédé employé dans la méthode de Laplace, à part cette différence que, dans cette dernière méthode, n est véritablement constant, tandis que dans celle d'Oppolzer, on remplace abusivement ω par n, et que l'équateur instantané n'est plus soumis qu'à une nutation eulérienne si faible qu'on est encore obligé de la négliger.

Qu'on ne pense pas cependant que l'heure serait actuellement tout à fait déterminée, dans le système de l'axe instantané. Car il ne suffit pas d'un plan fixe dans le Ciel, il faut encore un point fixe sur la Terre, qui revienne dans ce plan

fixe à des intervalles de temps rigoureusement égaux entre eux.

On me dira : Cette condition est réalisée à très peu près, du jour au lendemain, si l'on prend pour plan fixe le méridien astronomique.

Oui, *du jour au lendemain,* et *à très peu près.*

C'est toujours à des à peu près qu'on est conduit en prenant pour axe de référence l'axe instantané (*), et c'est tellement inadmissible dans la question de l'heure, qu'Oppolzer lui-même a renoncé ici à son procédé pour adopter la définition de l'heure au moyen d'un méridien fixe :

« Le dernier terme représente ainsi le mouvement du point vernal moyen par rapport à un méridien fixe. » (Voir le paragraphe : *De la grandeur de la rotation de la Terre, prise comme mesure du temps*, page 201.)

Les astronomes qui observent dans le méridien astronomique déterminent donc incorrectement l'heure, puisqu'ils l'observent dans un méridien variable.

Et voilà où ils ont abouti en suivant le procédé nouveau, qui fourmille de négligences et de contradictions !

Toutes les formules, sans nulle exception, en reviennent *absolument* à celles de Laplace, de Poisson et de Peters qui, du moins, déclarent *négliger* la nutation eulérienne comme insensible, tandis qu'Oppolzer a la prétention de la *supprimer.*

Or, l'emploi des formules de Laplace n'exige nullement, nous l'avons vu, que l'on commette cette négligence.

(*) Les *à peu près* abondent dans Oppolzer (voir pp. 148, 151, 156, 157 l. 21), et il imagine même l'axe *principal* X' tracé dans le *méridien* d'un lieu donné, qui n'est pas, dès lors, le méridien astronomique (p. 147).

En ajoutant à ces formules les termes de la nutation eulérienne, tels que Laplace lui-même les a donnés, et ceux de la nutation diurne, qu'il a jugé *inutile* de développer, puisqu'il l'a négligée également, on obtiendra les seules formules jusqu'à cette heure absolument correctes de l'astronomie sphérique.

Les observations des anciens astronomes, Bessel, F. W. Struve, Argelander, faites dans un méridien *fixe*, et incorrectement réduites, puisque leurs formules de réduction ne tenaient pas compte des deux nutations à courte période, permettent de déterminer ces deux nutations en les introduisant comme inconnues dans ces formules. C'est ce que nous avons fait au moyen des observations de Dorpat (*).

Les observations des astronomes modernes, faites dans un méridien variable, ne permettent pas de déterminer la nutation eulérienne, qu'on doit considérer comme nulle pour ce méridien.

Elles sont, de plus, incorrectes quant à la détermination de l'heure.

Et il n'y a d'autre moyen d'avoir de bonnes observations en ascension droite, jusqu'à ce qu'on ait trouvé des formules correctes pour les coordonnées et pour l'heure rapportées au méridien *astronomique*, que d'en revenir au méridien *fixe* des anciens.

Quant aux observations modernes, il nous semble impossible de les ramener à un méridien fixe, à moins que l'on ne connaisse les étoiles qui ont servi, chaque jour, à la détermination de l'azimuth.

4° Voyons maintenant si le passage des axes géographi-

(*) Voir l'*Annuaire de l'Observatoire royal* pour 1891 et pour 1895.

ques n'entraîne pas à des négligences fatales également dans les formules de la précession et de la nutation.

Les calculs de l'auteur (pp. 155, 156 et 157 première moitié) sont corrects. Seulement, préoccupé uniquement de faire disparaître la nutation eulérienne, il constate que le coefficient de celle-ci, qui est de 0",09 dans les formules de Laplace, et qui y est diurne, est 300 fois plus faible dans les siennes et a une période de 305 jours (pour une Terre solide). De tels termes sont absolument négligeables, comme nous l'avons dit ci-dessus.

Mais pourquoi ne calcule-t-il pas les termes périodiques et se borne-t-il à dire : « Quant aux termes provenant des forces perturbatrices, ils s'annulent *dans les limites d'exactitude admises.* »

C'est dans ces mêmes limites qu'il a regardé ω comme constant, et négligé la différence entre les angles ψ rapportés à l'un ou l'autre système d'axes (p. 156).

Que résulte-t-il de ces négligences?

C'est que les formules d'Oppolzer, rapportées à l'axe astronomique, sont absolument identiques à celles de Laplace, Poisson, Peters, Serret, rapportées à l'axe géographique, à part qu'elles suppriment purement et simplement la nutation initiale.

Ces dernières sont absolument correctes; les siennes ne le sont donc pas.

Au fond, son procédé revient ici à considérer l'axe astronomique comme se confondant avec l'axe géographique, et il eût dû dire, avec un astronome géomètre plus perspicace : « Il résulte de ce qu'on a vu précédemment que θ_0, σ, f, et f' sont des quantités pratiquement insensibles; nous les supposerons nulles désormais.

» Nous aurons donc

$$\theta = \theta', \qquad \psi = \psi', \qquad \varphi = \varphi'.$$

» Le plan du couple résultant, le plan xy, et le plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation seront donc confondus en un seul et même plan, et l'on pourra dire que les variables ψ et θ fixent la position de l'équateur de l'époque par rapport au plan fixe XOY (*). »

Mais alors, ce seul et même plan est l'équateur géographique, car c'est à lui que sont rapportées les formules primitives, et l'équateur astronomique est confondu avec lui.

Alors aussi, plus de variation, ni de latitude, ni de longitude, ni du méridien, c'est-à-dire formules astronomiques en contradiction absolue avec des faits aujourd'hui bien établis, et dont Oppolzer a tenté de tenir compte dès 1870. Son tort a été, et c'est celui de tous les astronomes contemporains, de s'imaginer que, puisque l'axe astronomique, autour duquel tourne en réalité la Terre, ne coïncide pas avec l'axe géographique, c'est au premier que doivent se rapporter les formules (**). Comme si des formules analy-

(*) TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. II, p. 427.

(**) « Tout d'abord on doit se rappeler que, dans les observations, l'équateur est pris comme plan fondamental, et qu'il est déterminé par le plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation; les valeurs de ψ et de ε' déduites des observations, se rapportent donc proprement à l'axe de rotation et non au petit axe de l'ellipsoïde terrestre. . . . .

» Ce n'est pas la petitesse des seconds et des troisièmes termes des équations (43) (p. 149) qui est décisive — ces termes renferment même, nous l'avons prouvé, des quantités qui se trouvent tout à

tiques pouvaient être taxées *a priori* d'incorrectes parce qu'on a fait choix de tel système d'axes plutôt que de tel autre!

Non, le choix est, *a priori*, absolument arbitraire.

On a pris, avec Euler, les axes principaux.

On pourrait aussi bien prendre, dès le début, un système d'axes dont l'axe instantané serait l'axe de rotation. Le mode de calcul du couple résultant en deviendrait certainement plus compliqué; mais, du moins, aurait-on alors des formules dont on pourrait pousser l'approximation aussi loin qu'on voudrait, et, par conséquent, irréprochables, ce qui n'est nullement le cas de celles d'Oppolzer.

En admettant que cela fût fait, y aurait-il avantage au point de vue des observations?

Pour nous, certainement non.

J'abandonne ici l'argument tiré de l'inconvénient des latitudes et longitudes variables dans ce système, et j'admets que l'on ait affaire à des formules absolument correctes, qui ne sont pas, on vient de le voir, celles des astronomes, puisqu'elles sont rapportées à l'axe géographique.

La raison qui me fait réprouver ce système d'axes, c'est qu'il oblige à déterminer chaque jour le méridien au moyen d'observations dont, fussent-elles d'une précision extraordinaire, les réductions sont fatalement incorrectes, puisqu'on ne connaît exactement ni la constante de l'aberration annuelle, ni l'aberration systématique, ni la parallaxe de l'étoile, ni la

fait dans les limites d'exactitude admises dans le problème —; mais c'est que les observations des phénomènes de précession et de nutation se font par rapport à l'axe instantané de rotation. » (OPPOLZER, pp. 155 et 158.)

nutation diurne : toutes quantités, la dernière exceptée, dont la période diffère peu de celle du mouvement du méridien astronomique lui-même. Dans la détermination d'un méridien fixe, au moyen d'une multitude d'observations, faites à toutes les époques de l'année, on peut espérer que ces erreurs, presque toutes encore inévitables, se compenseront; et nous avons montré (*) qu'une trentaine seulement d'ascensions droites de la polaire, observées par *F. W.* Struve dans un méridien fixe, nous ont fourni des déterminations de la nutation eulérienne, qui auront provoqué l'incrédulité chez les astronomes ignorant et niant même le caractère *diurne* de cette nutation dans le système des coordonnées géographiques (**).

La concordance de ces trois déterminations (1823, 24, 25)

(*) *Annuaire de l'Observatoire royal* pour 1891.

(**) On me pardonnera de citer un passage de ma réplique dans une discussion qui a eu lieu sur ce même sujet au sein de l'Académie (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, août 1894) :

« L'histoire dira un jour que j'ai contribué, pour ma part, à remettre dans sa vraie lumière la question de la variation des latitudes. Plusieurs de nos confrères sont encore assez jeunes pour voir luire ce jour d'une justice qui sera sans doute tardive pour moi.

» Indépendamment de mes autres découvertes (nutation diurne, termes périodiques de l'aberration systématique), je puis dire avec quelque vérité que c'est ma note des *Comptes rendus* (27 mai 1890) qui a mis le feu aux poudres et poussé à l'étude approfondie de la nutation initiale.

» On avait imaginé tout récemment l'hypothèse de la variation des latitudes : j'ai dit, le premier, dans cette note, ce qu'on doit entendre par là, et signalé la différence entre le calcul de la latitude géographique et celui de la latitude astronomique. »

entre elles est certainement un argument très puissant en faveur, tant de la méthode de Laplace, que du choix d'un méridien fixe pour les observations. Je ne parle pas de l'objection tirée, contre le choix du méridien fixe, d'un déplacement possible de la mire, puisque la même objection s'applique au choix du méridien astronomique.

Sans doute, l'étoile ne culmine pas dans le méridien géographique, mais bien dans le méridien astronomique; et si les formules de Laplace admettaient que c'est dans le premier, elles seraient incorrectes. Mais il n'en est rien. Ces formules calculent très exactement α et δ rapportés à l'équateur géographique. Elles écriront ensuite, tout à fait correctement, $z = \varphi - \delta$ dans le méridien géographique, sans dire pour cela que z est un minimum.

Ajoutons que, si même on parvenait à déterminer très exactement chaque jour le méridien astronomique, il serait bien difficile de déduire des observations les corrections que je viens d'énumérer, puisqu'elles seraient implicitement contenues en partie dans la correction de la pendule, au moins pour les étoiles plus ou moins rapprochées, en ascension droite, de celles qui ont servi à déterminer le méridien.

Ce désavantage, qui n'existe pas pour le méridien fixe, est tellement manifeste que les déterminations des azimuts de la mire en font foi. Ces azimuts accusent une marche indéchiffrable, et dans laquelle on a bien de la peine à reconnaître le mouvement eulérien du méridien.

Il serait trop long de résumer ici les laborieuses recherches faites sur ce sujet par Wagner (Observations de Poulkova, vol. XII). Nous nous bornerons à extraire du même volume, qui renferme ses excellentes observations pendant les années 1861-1872, le tableau des azimuts de la mire pendant le mois de mars 1868; ces azimuts sont exprimés en millièmes de seconde de temps.

MARS 1868.

Date.	Azimut.	Date.	Azimut.	Date.	Azimut.
5	− 170	17	− 142	24	− 156
	− 187	18	− 54		− 162
	− 191		− 45	29	− 174
11	− 91		− 88		− 198
13	− 142	19	− 94	30	− 145
	− 281		− 111		− 120
16	− 187	21	− 70		− 329
	− 128		− 24		− 254
	− 114	23	− 160	31	− 168
	− 126		− 200		− 175
17	− 86	24	− 149		− 174
	− 166		− 156		− 155

On n'y voit nullement se manifester ce mouvement progressif que devrait avoir le méridien astronomique relativement à la mire. On y constate même, à quelques heures de distance, des variations tellement considérables qu'on est obligé de les attribuer, soit à des erreurs d'observation, peu admissibles chez Wagner, soit, bien plutôt, aux erreurs de réduction que j'ai signalées. Telles sont celles du 30 mars, où l'azimut passe, entre 9^h21^m et 19^h42^m, de − 120 à − 329, et, entre 19^h42^m et 0^h4^m, de − 329 à − 254 !

Aussi, tandis que les observations de Struve à Dorpat, faites en ascension droite sur la polaire dans un méridien

fixe, nous ont permis de déterminer, d'une manière très satisfaisante, et la nutation eulérienne (*) et la nutation diurne (**), celles de Wagner, excellentes certainement, mais incorrectement réduites, d'après nous, ne semblent pouvoir conduire à aucun résultat, à moins qu'on ne les ramène à un méridien fixe, réduction bien difficile, sinon impossible.

7. Conclusion. Comme on l'a vu, et comme le savent, du reste, les astronomes, les formules d'Oppolzer sont identiques à celles de Peters, c'est-à-dire de Laplace, et quant au calcul des coordonnées et quant à celui de l'heure, à part qu'elles suppriment purement et simplement la nutation eulérienne. Or les formules de Laplace se rapportent au pôle et au méridien géographiques. Celles d'Oppolzer se rapportent au pôle et au méridien astronomiques, quant aux coordonnées, et à un méridien fixe (non défini) quant à l'heure.

Admettons même, avec les astronomes, qu'on puisse considérer comme négligeables les incorrections que nous avons signalées dans ses calculs, leurs observations en ascension droite, faites dans le méridien astronomique, ne pourront conduire qu'à des résultats incertains quant aux corrections des formules de réduction, d'abord, parce que ces corrections sont implicitement renfermées dans celles qu'on attribue à l'azimut et à la pendule; ensuite, parce que l'heure ne peut pas être déterminée correctement dans ce méridien variable, de l'aveu même d'Oppolzer, qui la définit par un méridien fixe.

(*) *Annuaire de l'Observatoire royal* pour 1891.
(**) *Ibidem* pour 1895.

Les seules observations en ascension droite qui puissent conduire au but sont celles qui se font dans le méridien géographique. Et, dans ce cas, les formules de Peters sont correctes (pour une Terre solide); mais il y faut ajouter les termes de la nutation eulérienne et ceux de la nutation diurne, d'une période diurne quant aux premiers, semi-diurne quant aux seconds; ces caractères diurnes disparaissent dans le calcul des observations méridiennes.

En outre, pour les circompolaires, on introduira les termes du second ordre rappelés ci-dessus.

Quant à la déclinaison, il n'y aura qu'une différence inappréciable entre les résultats déduits de l'un ou de l'autre mode d'observation. La différence essentielle réside dans le calcul.

Emploie-t-on le méridien et le pôle géographiques, le calcul est rigoureux, et les variations eulériennes de latitude purement apparentes, en ce sens que c'est sur la déclinaison observée qu'elles porteront.

Fait-on usage du méridien et du pôle astronomiques, le calcul est moins correct, comme on l'a vu; et les variations eulériennes de latitude sont réelles, tandis que celles qui affectent la déclinaison sont absolument insensibles dans les meilleures observations.

Déjà nous avons exposé ces mêmes idées dans un article écrit en 1891 et inséré aux *Acta mathematica* (1892).

Personne, que nous sachions, n'y a répondu.

Depuis lors, nous avons eu la satisfaction de voir que nos critiques du procédé d'Oppolzer sont fondées, puisque ce procédé n'a pas été suivi par M. Tisserand, qui en a bien certainement reconnu l'incorrection.

Au nom de la science et de la marche assurée de ses

progrès, nous appelons sur ces pages la critique des astronomes géomètres.

Si nous avons tort (et nous ne sommes pas le seul), que quelqu'un se lève et le démontre; sans fausse honte et sans ambages, nous le proclamerons hautement.

Si nous avons raison, il n'est que temps, pour les astronomes, d'abandonner des réductions incorrectes et des procédés d'observation qui ne permettront certainement pas la détermination des petites corrections qui restent encore à trouver, et qui sont nombreuses : nutation eulérienne, nutation diurne, correction de la constante de l'aberration, aberration systématique, parallaxe.

Quant aux variations *apparentes* de latitude, nous pensons que la plus grave difficulté de leur explication provient de la négligence du second terme de la nutation eulérienne, et peut-être d'une cause jusqu'à cette heure absolument inconnue, que nous soupçonnons, mais dont nous n'avons pas encore pu déterminer la période.

Ce serait là une correction nouvelle, à ajouter à toutes les précédentes.

Il y a donc bien des inconnues encore à déterminer, même si l'on admet que les termes de Peters en $2\odot$ et $2☾$ sont exacts pour l'écorce terrestre, ce qui n'est bien certainement pas le cas, particulièrement pour les derniers.

Et ce n'est pas trop de la puissance réunie des observations les plus précises et des calculs les plus exacts, pour arriver enfin à des formules de réduction à peu près correctes.

APPENDICE.

FORMULES COMPLÈTES DE LA NUTATION.

Dans les expressions des termes de nutation en obliquité et en longitude, d'où l'on déduira aisément la nutation en ascension droite et en déclinaison, rapportée au méridien *géographique*, nous nous bornerons au premier ordre; celles des termes du second ordre ont été exposées précédemment.

Nous admettrons, avec tous les astronomes, que le second terme de la nutation eulérienne est insensible. Il serait prématuré de chercher aujourd'hui à en reconnaître l'existence dans les observations.

Nos expressions différeront légèrement de celles de Peters dans les termes solaires et lunaires, et même dans le terme nodal de la nutation en longitude.

La différence provient de ce que nous n'avons pas négligé, dans l'intégration, comme l'ont fait *tous* les géomètres, les rapports des mouvements du nœud, du Soleil et de la Lune, au mouvement diurne.

Dans les termes lunaires, nous avons transformé, comme on le fait pour le Soleil, les longitudes moyennes en longitudes vraies, ce qui a l'avantage de faire disparaître les termes en $3\text{☾} - \Gamma'$, à si peu de chose près qu'on peut se dispenser d'en tenir compte.

Toutes nos expressions sont donc données en longitudes vraies. Nous avons négligé tous les termes lunaires dont le coefficient est inférieur à 0″,01, ainsi que les petits termes en $3\odot - \Gamma$. La plupart des notations sont familières aux astronomes, et nous pouvons nous borner à rappeler que γ

est le coefficient de la nutation eulérienne, égal, d'après nous, à 0″,09 environ, φ l'heure sidérale sur le premier méridien (qui passe par l'axe principal X), $\iota\varphi$ l'argument de la nutation eulérienne, dont la période est pour nous de 320 jours environ, de 431 pour Chandler, tandis qu'elle serait de 305 pour une Terre solide; que, dans les termes de la nutation diurne, dont ν est le coefficient (*), Σ_1 et Σ_2 représentent les expressions suivantes, en longitudes vraies également :

$$\Sigma_1 = -1.155 - 0.154 \cos \text{☊} + 0.56 \cos 2\odot + 0.82 \cos 2\text{☾}$$
$$+ 0.14 \cos (2\text{☾} - \text{☊}) - 0.15 \cos (2\text{☾} - \Gamma'),$$
$$\Sigma_2 = -0.18 \sin \text{☊} + 0.59 \sin 2\odot + 0.89 \sin 2\text{☾}$$
$$+ 0.18 \sin (2\text{☾} - \text{☊}).$$

Nutation en obliquité :

$$\Delta\theta = -\gamma \sin[(1+\iota)\varphi + \beta_0] + \nu(\cos 2\varphi\Sigma_1 + \sin 2\varphi\Sigma_2)$$
$$+ 9.224 \cos \text{☊} - 0.090 \cos 2\text{☊} + 0.555 \cos 2\odot$$
$$+ 0.009 \cos (\odot + \Gamma) - 0.007 \cos (2\odot - \text{☊}).$$

Nutation en longitude :

$$\sin\theta\Delta\lambda = \gamma \cos[(1+\iota)\varphi + \beta_0] + \nu(\cos 2\varphi\Sigma_2 - \sin 2\varphi\Sigma_1)$$
$$- 6.868 \sin \text{☊} - 0.082 \sin 2\text{☊} + 0.508 \sin 2\odot$$
$$- 0.054 \sin(\odot - \Gamma) + 0.008 \sin(\odot + \Gamma) - 0.005 \sin(2\odot - \text{☊})$$
$$+ 0.088 \sin 2\text{☾} - 0.028 \sin(\text{☾} - \Gamma') + 0.0156 \sin(2\text{☾} - \text{☊}) \ (^{**}).$$

(*) Voir ci-après : *Un mot sur la nutation diurne.*

(**) Pour le développement des calculs, voir notre *Catechisme correct d'astronomie sphérique* (MEMORIE DELLA PONTIFICIA ACCADEMIA DEI NUOVI LINCEI, vol. IX, pp. 233 et suivantes).

Nous ne ferons qu'une remarque sur l'usage de ces formules; elle sera relative à la nutation eulérienne en déclinaison.

L'expression en est, si l'on fait $\varphi = l + \mathrm{L}$, $\beta_0 + \mathrm{L}(1+\iota) = \beta$ et $l - \alpha = \varkappa$:

$$\Delta\delta = -\gamma \cos(\iota t + \beta + \varkappa),$$

et montre immédiatement que cette nutation dépend de l'angle horaire, ce qui faisait dire à Laplace que « si elle était sensible, on le reconnaîtrait par les variations *journalières* de la hauteur du pôle », affirmation dont plusieurs astronomes très distingués ont nié l'exactitude, parce qu'ils entendaient par pôle, non le pôle géographique, comme Laplace, mais le pôle astronomique (¹).

Pour un passage $\left\{\begin{array}{l}\text{supérieur}\\ \text{inférieur}\end{array}\right.$ on aura :

$$\Delta\delta = \mp \gamma \cos(\iota t + \beta).$$

Soit Φ la colatitude *géographique*, z la distance zénitale de l'étoile, p sa distance polaire, de sorte que $\Delta p = -\Delta\delta$, δ sa déclinaison apparente, abstraction faite de la nutation eulérienne.

En affectant des indices 1 et 2 les distances zénitales observées aux passages supérieur et inférieur, on devra écrire, d'après ce qui précède :

$$z_1 = \Phi - (p - \Delta\delta) = \Phi - p - \gamma \cos(\iota t + \beta),$$
$$z_2 = \Phi + (p - \Delta\delta) = \Phi + p - \gamma \cos(\iota t + \beta),$$

(¹) Voir *Bulletin astronomique*, 1890.

d'où

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \Phi - \gamma \cos(\iota t + \beta) = \varphi,$$

φ désignant la colatitude astronomique.

La première Φ est constante; la seconde est variable; c'est cette dernière dont les astronomes font usage.

La formule qu'ils emploient dans le calcul de leur latitude est donc très correcte dans le méridien géographique, si toutefois la nutation diurne est insensible, comme ils le prétendent, si le second terme de la nutation eulérienne l'est également, enfin si l'axe d'inertie est fixe dans l'intérieur de la Terre.

Mais leur détermination de l'heure et de l'ascension droite est tellement entachée d'erreurs que nous devons renoncer à comparer les formules, dont ils font usage en ces points, aux formules absolument correctes que nous avons déduites de la méthode de Laplace.