LES VÉRITABLES EXPRESSIONS

DE LA

NUTATION EULÉRIENNE

ET DE LA

VARIATION DES LATITUDES

---

1. Depuis que nous avons terminé nos recherches sur la nutation diurne, dont la détermination paraîtra *in extenso* dans le tome VII des *Annales astronomiques de l'Observatoire royal*, en cours d'impression, nous nous sommes attaché surtout à élucider la question de la variation des latitudes.

On se rappellera peut-être que je l'ai rattachée, dès sa naissance, à la nutation eulérienne (*), et que ma note a été suivie d'une assez longue discussion (**) qui a pris fin par la publication du *Traité de mécanique céleste* de M. Tisserand, dans lequel est adopté le point de vue de Laplace, qui est le

(*) *Comptes rendus*, août 1890.

(**) Voir *B. A.*, 1889-1890.

mien, sur le caractère diurne de cette nutation (rapportée à l'axe d'inertie de la Terre).

Postérieurement, j'ai annoncé le premier (*) que la période eulérienne de 305 jours serait trouvée trop courte, à raison de la fluidité intérieure du globe, démontrée par l'existence de la nutation diurne; et j'ai déterminé une période de 336 jours.

Mes recherches sur les variations de latitude m'ont conduit à penser qu'outre la variation eulérienne il existait une variation annuelle provenant de l'accumulation des neiges hivernales sur le continent (**).

Lorsque Chandler, par ses innombrables discussions de latitudes, fut arrivé à constater une période de 425, puis de 431 jours, qui m'a toujours paru inadmissible, j'ai cherché à expliquer cette période par un mouvement rétrograde du pôle instantané, qui ramènerait ce pôle aux mêmes positions que celles assignées par Chandler, après une période de 320 jours environ, tout à fait compatible avec la théorie (***).

J'ai même démontré mathématiquement que si la période de 430 jours était correcte, il en résulterait une nutation diurne de plus de 4″ même pour une Terre solide (IV).

La formule de Chandler renferme un autre terme absolument inexplicable : c'est son terme annuel, dans l'argument duquel intervient, outre la longitude du Soleil, celle de l'Observatoire.

(*) *Annuaire* pour 1890, page 299, et pour 1891, page 272.

(**) *Ibidem* pour 1894, page 312.

(***) *Ibidem* pour 1894, page 395, et pour 1895, page 262.

(IV) *Ibidem* pour 1895, page 266.

Les concordances de sa formule avec les observations étaient telles cependant qu'elle a été admise par un grand nombre d'astronomes.

J'ai fait voir récemment que cette concordance si belle en apparence n'est qu'illusoire, et que sa formule ne résiste pas à l'examen (*). Il s'agissait cependant d'expliquer comment il peut se faire que, quoique incorrecte, elle s'accomode si bien aux observations.

Et je me suis demandé si le meilleur moyen de résoudre la question n'était pas d'en revenir à la formule complète de Laplace relative à la nutation eulérienne.

2. De cette formule on déduit, pour la variation eulérienne de la latitude, une expression de la forme

$$\Delta\varphi = \mu \cos(\beta_0 + \mathrm{L} + u) - \nu \cos(-\beta_0 + \mathrm{L} + u).$$

Si l'argument u a, comme je le pense, une période de 320 jours environ, on pourra poser, dans le premier terme, $u = \odot_0 + \odot + 0^\circ.12t$, le jour étant pris pour unité, et l'on aura

$$\Delta\varphi = -\nu \cos(-\beta_0 + \mathrm{L} + u) + \mu \cos(\beta_1 + \mathrm{L} + \odot + 0^\circ.12t)$$

formule identique à celle de Chandler, si l'on y néglige $0^\circ.12t$.

Telle est, pour moi, l'explication de la formule de Chandler, explication purement rationnelle, puisque cette formule n'est autre que celle de Laplace, et puisque la période de 320 jours est parfaitement compatible avec la

(*) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, mars 1895.

théorie, du moment où l'on admet la fluidité intérieure du globe.

Toutefois, dans cette formule théorique, l'un des coefficients doit être notablement plus petit que l'autre, ce qui n'est pas le cas dans les formules de Chandler.

Si le premier est de la forme $a' + b'$, le second sera, en effet, $a' - b'$, dans la formule théorique, a' et b' représentant respectivement les produits d'une même constante arbitraire par $\sqrt{\mathrm{A(C-A)}}$ et par $\sqrt{\mathrm{B(C-B)}}$.

Nous estimons donc que le terme proprement annuel dont nous avons parlé existe également, et que la formule complète des variations de latitude (réduites au préalable de la nutation diurne) sera

$$\Delta\varphi = -\nu \cos(-\beta_0 + \mathrm{L} + u) + \mu \cos(\beta_0 + \mathrm{L} + u) + h \cos(\mathrm{A} + \odot).$$

C'est dans ce sens que nous avons commencé à étudier la question. Mais il y avait tout d'abord une difficulté pratique à surmonter.

5. Il va de soi que la seule étude des variations de latitude ne permet absolument pas de déterminer les quatre inconnues μ, ν, β_0, L de la nutation eulérienne, puisque, relativement à ces inconnues, leur équation est de la forme

$$x \sin u + y \cos u,$$

et ne permet la détermination que de deux inconnues seulement.

A l'équation précédente il fallait donc en joindre une seconde; or, la nutation eulérienne existe en Æ pour des observations faites dans le méridien géographique. Malheureusement les bonnes observations modernes ont toutes été faites dans le méridien *astronomique*, en sorte que la nutation eulérienne en serait absolument éliminée si ce méridien pouvait être chaque jour déterminé tout à fait correctement. Nous devions donc recourir aux observations anciennes, celles de Dorpat, qui, ayant été faites dans un méridien fixe, sont influencées par la nutation eulérienne. Nous avons démontré qu'à raison de cette nutation, il existe, entre une Æ supérieure et l'Æ inferieure consécutive une différence

$$\Delta^2\alpha = 2\,\mathrm{tang}\,\delta\,\{\mu\sin(\beta_0 + \mathrm{L} + \iota t) + \nu\sin(-\beta_0 + \mathrm{L} + \iota t)\}.$$

Les équations en $\Delta\varphi$ et $\Delta^2\alpha$ permettent de déterminer les quatre inconnues β_0, L, μ et ν, pourvu que ces équations puissent être rapportées à une même origine du temps.

4. Il s'agissait de trouver des observations de latitude faites vers la même époque que les observations en Æ de Dorpat, c'est-à-dire de 1825 à 1838. Nous les avons rencontrées dans les travaux de Chandler (*), qui a formé de 60 en 60 jours le tableau des latitudes déterminées par Pond de 1825 à 1835.

Nous avons partagé les unes et les autres en deux séries, dont la première a pour origine le 5 mai 1825, la seconde, le 27 janvier 1832, et nous les avons traitées d'abord en supposant nulle la variation annuelle du pôle.

(*) *Astronomical Journal*, n° 315; 14 avril 1894.

Voici les résultats qu'elles nous ont fournis :

1re série : L = 138°10′ E. de Greenwich,
β_0 = 184°45′ Greenwich. 5 avril 1825.

2e série : L = 124°35′ E. de Greenwich,
β_0 = 90°28′ Greenwich. 27 janv. 1832.

Il est permis de trouver la concordance des deux valeurs de L d'autant plus remarquable qu'il n'a été tenu nul compte de la variation annuelle.

Ces valeurs ne diffèrent pas non plus bien sensiblement de celle que nous avons déterminée par la nutation diurne, quoique le premier méridien, pour celle-ci, ne doive pas nécessairement être absolument le même que pour la nutation eulérienne, à cause des positions différentes que peuvent avoir les axes de A et B dans l'un et l'autre cas.

Quant aux deux valeurs de β_0, entre les origines desquelles il s'est écoulé 2520 jours, elles devraient différer entre elles de 303° d'après la période de Chandler, de 308° d'après la nôtre ; et la différence est de 266°.

Elle se rapproche un peu moins de la nôtre que de celle de Chandler. Mais le hasard des dates nous a mal servi, et nous devons chercher à déterminer par un autre procédé laquelle des deux périodes est la bonne. Or, du calcul des observations de Struve que nous avons fait en prenant pour origine le 5 mai, nous avons déduit, en comparant le résultat à celui que nous a donné l'origine du 3 avril, un accroissement $\Delta\beta$ = 34°10′ pour 30 jours, soit 1°13 par jour, correspondant à une période de 318.5 jours.

Il n'est donc nullement douteux que la période ne soit de

520 jours environ, et non de 430, comme je l'ai toujours affirmé depuis cinq ans.

Je me propose d'appliquer ma formule des variations de latitude aux observations de Gyldén, et d'examiner si elle résiste aux critiques que j'ai faites de celle de Chandler.

5. On a vu, par l'analyse qui précède, que la question de la variation des latitudes, et, plus spécialement, celle de la nutation eulérienne, ne peut être résolue par les seules observations de latitude, même si elles sont faites en trois lieux dont le moyen est à 6^h de longitude des deux autres. Ce procédé sera très propre à démontrer cette impossibilité, en même temps que l'existence de la nutation diurne. A ce titre, on peut l'expérimenter pendant une couple d'années

Mais la solution définitive ne peut se trouver que par la combinaison d'observations poursuivies, à d'excellents instruments, sur quelques étoiles seulement, en déclinaison et en Æ, ces dernières dans un méridien *fixe;* la méthode de Horrebow-Talcott tourne, en effet, dans un cercle vicieux: elle suppose la connaissance des déclinaisons absolues, et cette dernière, celle des lois complètes de leurs variations, c'est-à-dire précisément ce que l'on cherche. Il est vrai que l'on peut *espérer* des compensations d'erreurs, et que l'on croit même pouvoir éliminer ces dernières en combinant les observations de la manière indiquée ci-dessus; mais cette élimination suppose une connaissance exacte des formules de réduction quant aux trois mouvements à courte période (y compris la variation annuelle). Or ce n'est le cas ni quant à la nutation eulérienne, qui renferme quatre inconnues au lieu des deux que l'on suppose, ni quant à la nutation diurne, qu'on se borne à nier, ni peut-être quant à la variation annuelle.

La solution du problème des variations de latitude que nous venons d'exposer est purement théorique, elle part de la formule complète de la nutation eulérienne d'après Laplace et de celle de la variation annuelle du pôle d'inertie; elle suppose une période eulérienne de 520 jours environ, très admissible en théorie.

De ces deux variations de latitude, la première (l'eulérienne) n'est réelle que si l'on rapporte les observations au pôle instantané, cas pour lequel on n'a pas de formules absolument correctes (*); elle est fictive, c'est-à-dire qu'elle provient de la négligence de la nutation eulérienne en déclinaison, si l'on rapporte les observations au pôle d'inertie; la seconde variation (l'annuelle) est réelle, puisque le pôle d'inertie, auquel sont rapportées les formules, se déplace avec les saisons. Nous avons exposé antérieurement qu'en prenant pour point de référence la position moyenne du pôle d'inertie, on obtient une latitude moyenne constante (**).

La variation annuelle est nulle sur le méridien perpendiculaire à celui du mouvement annuel du pôle d'inertie: maximum sur ce dernier méridien.

L'inverse se produit relativement aux variations annuelles en Æ.

Quant à la nutation eulérienne, elle existe en Æ si l'on observe dans un *méridien fixe.*

Elle n'existera naturellement pas si l'on observe dans le méridien instantané Mais comment le déterminer? Comment déterminer dans ce cas les différences de longitude? Comment enfin déterminer l'heure?

(*) Voir sur ce sujet la notice précédente : *Sur la supériorité de la méthode de Laplace, etc.*

(**) *Essai sur les variations de latitude*, dans l'*Annuaire* pour 1894.

Ajoutons encore : Comment déterminer les quatre constantes de la nutation eulérienne, si l'on n'a pas à sa disposition, outre une série de latitudes, une série d'Æ déterminées dans un *méridien fixe?*

C'est en vain que depuis six ans nous luttons pour ramener l'astronomie dans la voie que lui ont ouverte, à la suite de Laplace, les Bessel, Poisson, Peters, Serret. Le seul souci de la vérité nous a guidé dans ce combat, non celui d'une vaine renommée ; nous l'aurions atteinte plus sûrement en nous consacrant exclusivement à nos recherches sur la nutation diurne, que nous avons abandonnées après en avoir déterminé les constantes avec une approximation que nous jugeons très suffisante.

Serons-nous enfin suivi? Nous osons à peine l'espérer. Quelques-uns seulement sont compétents en la matière, et la plupart, imbus de cette idée que, puisque la Terre tourne autour de l'axe instantané, c'est à celui-ci que doivent se rapporter les formules ainsi que les observations, auront bien de la peine à se débarrasser de cette prévention

L'école de Laplace est cependant encore vivante. Ne relèvera-t-elle pas le glorieux drapeau du maître, qu'elle semble avoir abandonné dans la théorie du mouvement de rotation de la Terre, après l'époque des Leverrier, des Serret et des Delaunay, pour suivre la théorie nouvelle en dépit de ses erreurs et de ses inconséquences?

6. Nous ne pouvons appliquer sûrement notre formule qu'à des observations dont la nutation diurne puisse être éliminée, ce qui n'est pas le cas, très généralement, pour celles qui ont été faites suivant le procédé Horrebow Talcott.

Il se rencontre, dans ce procédé, une autre source d'erreur qui n'a pas été soupçonnée.

Parmi les variations de latitude, apparentes ou réelles, les plus importantes sont bien certainement celles qui proviennent de la nutation eulérienne, de la nutation diurne et du déplacement annuel du pôle d'inertie à la surface de l'écorce terrestre.

Peut-être en existe-t-il une quatrième dont la théorie nous dévoile la cause, mais sans qu'il soit possible d'en donner des formules utilisables en pratique, à raison de notre ignorance absolue sur la masse et la forme interne de l'écorce terrestre.

Cette variation, tout à fait apparente, comme les deux premières, de la latitude géographique, existe théoriquement, et sera peut-être un jour vérifiée expérimentalement, lorsque des observations suivies et très précises d'une même étoile, réduites d'une manière absolument correcte, permettront de déterminer tous les coefficients des variations réelles ou apparentes de la latitude.

Il ne sera pas inutile d'exposer, en quelques lignes, la cause de cette quatrième variation, purement apparente, dont nous soupçonnons l'existence.

On peut admettre *a priori* qu'à raison de l'inégale répartition des continents, particulièrement sur les hémisphères Nord et Sud, le centre d'attraction de l'écorce ne coïncide pas avec celui du noyau. La verticale en un point est la direction de la résultante des attractions de ces deux masses sur ce point. Or, l'axe de la première, en vertu de la nutation diurne, effectue, en un demi-jour, une révolution autour de l'axe de la seconde. Et de plus, le point attiré tourne en un jour autour de ce dernier axe.

Il s'ensuit, pour la direction de la résultante des attractions des deux masses sur ce point, c'est-à-dire de la verticale, un double mouvement périodique, l'un de 12 heures, l'autre d'un jour.

Le premier de ces deux mouvements introduira, dans l'expression de la latitude, des termes de même forme que ceux de la nutation diurne ; le second, des termes qui seront égaux et de signes contraires, à de minimes quantités près, pour deux passages (s et i) consécutifs de la même étoile.

Aussi longtemps que nous ne posséderons pas des données expérimentales précises sur l'étendue de ce mouvement, il sera bien difficile de trouver une formule empirique qui rende exactement compte des variations de latitude.

Plusieurs observateurs déjà, parmi lesquels M. Plantamour et M. A. d'Abbadie, ont cherché à déterminer expérimentalement les déviations de la verticale, sans en avoir toutefois soupçonné la cause que nous venons d'indiquer. Ces expériences mériteraient d'être reprises avec une très grande précision, dans les meilleures conditions de stabilité et d'uniformité de température (*).

En attendant, nous ne voyons qu'un moyen de nous mettre complètement à l'abri de la variation présumée et de la nutation diurne : c'est de ne calculer que les latitudes obtenues par la moyenne de deux passages (s et i) consécutifs d'une même étoile. Une couple d'étoiles, au Nord et au Sud du zénith, ne conduirait au même résultat que si elles étaient, de part et d'autre, à la même distance du zénith apparent.

(*) Les essais que nous avons faits à Uccle, en installant des niveaux très sensibles dans l'intérieur du massif de béton sur lequel sont établis les instruments méridiens, semblent accuser un mouvement du massif, dû peut-être au drainage du sous-sol par les galeries qui servent à la distribution d'eau de Bruxelles. Nous ne sommes donc pas à même d'y faire des expériences sur les déviations periodiques de la verticale.

Aussi rechercherons-nous la loi de la variation des latitudes dans les observations si précises de Gyldén.

7. La demi-somme des latitudes obtenues par deux passages (s et i) consécutifs est la latitude *astronomique*

$$\varphi = \Phi + \mu \cos(\beta_0 + L + ut) \\ - \nu \cos(-\beta_0 + L + ut) + h \cos(\odot - A),$$

que nous écrirons

$$\Delta\varphi = ax - by + cu + sv,$$

en désignant par c et s le cosinus et le sinus de $\odot$, par a et b ceux de ut, u étant égal à 1°.12 par jour; par u et v les produits de h par cos A et sin A, par x et y les constantes

$$\mu' \cos L - \nu' \sin L \qquad \text{et} \qquad \mu' \sin L + \nu' \cos L,$$

μ' et ν' représentant respectivement

$$(\mu - \nu) \cos \beta_0 \qquad \text{et} \qquad (\mu + \nu) \sin \beta_0.$$

Nous avons appliqué l'équation qui précède à la première série des observations de Gyldén; elle ne renferme que trente-deux couples, s'étendant du 16 novembre 1863 au 30 septembre 1865; nous avons pris pour origine le 14 octobre 1864, date de l'observation qui se rapproche le plus du milieu de l'intervalle, et pour la latitude de Poulkova

$$\Phi = 59^\circ\, 46'\, 18'',67.$$

La résolution des équations par la méthode des moindres carrés a donné

$$x = -0.0747, \qquad y = -0.0248, \qquad u = -0.165,$$
$$v = -0.0422, \qquad w = -0.0025.$$

La latitude *géographique moyenne* de Poulkova est donc, d'après les observations de Gyldén,

$$\Phi = 59^\circ\, 46'\, 18'',67$$

à moins de $0'',01$ près (*).

Des valeurs de u et v on déduit

$$h = 0''.17 \text{ pour Poulkova, 1864; } A = 211^\circ.$$

Les observations de Greenwich nous avaient donné (**)

$$h = 0''.20 \text{ pour Greenwich, 1885; } A = 28.^\circ,$$

A est une constante pour toute la Terre; mais cette quantité peut varier d'une année à l'autre par suite de l'inégale répartition des neiges.

Comme

$$x^2 + y^2 = \mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu(\cos\beta_0 - \sin\beta_0),$$

si l'on veut admettre que ν est insignifiant vis-à-vis de μ, on aura simplement

$$x = \mu\cos(\beta_0 + L), \qquad y = \mu\sin(\beta_0 + L).$$

(*) Le temps nous a manqué pour calculer les erreurs probables.

(**) *Catéchisme correct d'astronomie sphérique* (MEMORIA DELLA PONTIFICIA ACCADEMIA DEI NUOVI LINCEI, vol. XI, p. 19).

Dans cette hypothèse, les observations de Gyldén donneraient :

$$\mu = 0''.098,\ \beta_0 + L = 162^\circ, \text{ Poulkova, 14 oct. 1864.}$$

Mais, comme nous l'avons dit, la seule étude de la variation des latitudes ne permet pas de déterminer les quatre inconnues μ, ν, β_0 et L. Faisons observer toutefois que notre constante μ concorde avec toutes les valeurs que Peters, Downing et moi-même avons déterminées antérieurement, et non avec celle de Chandler (*).

8. Après avoir lu ces lignes, les astronomes ne manqueront pas de faire cette objection, que nous nous sommes posée nous-même : si la période eulérienne est de 320 jours, et si la seconde période de la variation des latitudes est annuelle, comment peut-il se faire que les intervalles de temps, compris entre les maxima et les minima consécutifs, varient généralement, dans toutes les observations, entre 380 et 390 jours, fait qui s'explique fort bien par la combinaison de la période de Chandler et de la période annuelle, dont la moyenne est de 398 jours ?

La réponse est assez simple :

La seule affirmation que j'ai opposée à celle de Chandler est la suivante : la période eulérienne est de 320, et non de 430 jours; ou bien, le mouvement du pôle instantané est de $1^\circ.12$, et non de $0^\circ.84$ par jour.

Mais ceci n'implique nullement que la période de Chandler n'est pas celle de la variation eulérienne des latitudes. On a vu, en effet, que l'expression de la nutation eulérienne ren-

(*) *Annuaire de l'Observatoire* pour 1894, page 356.

ferme deux termes, l'un en $+u$, l'autre en $-u$. Si ce dernier est prépondérant, le mouvement du pôle instantané, à raison de $1^\circ.12$ par jour, sera de $-410^\circ = +510^\circ$ par an : ce dernier nombre correspond à la période de Chandler. Or, le mouvement du pôle instantané est direct ou rétrograde selon que C est plus grand ou plus petit que A et B. Pour la Terre solide, comme pour le noyau, c'est le premier cas qui se présente; pour l'écorce, c'est bien probablement le second : sa formation, en effet, a commencé par les régions polaires, et elle doit y avoir acquis une épaisseur bien plus considérable que dans les régions équatoriales; cette épaisseur compense certainement, et au delà, l'aplatissement qui n'est que de $\frac{1}{300}$. Il en résulte que, pour l'écorce, C est plus petit que A et B, et que ι ou $+n\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}$ est négatif.

S'il en est ainsi, tout s'explique.

Quoique la période soit de 320 jours, et non de 430, c'est-à-dire quoique $\iota = 1^\circ.12$ et non $0^\circ.84$, la période de Chandler n'en est pas moins la période correcte de la variation eulérienne des latitudes, puisque, ι étant négatif, u est égal à $-410^\circ = +510^\circ$ par an.

Et l'exactitude même de cette période est pour nous une preuve manifeste de la prédominance du terme rétrograde de la nutation eulérienne, et, par suite, de la supériorité des moments A et B sur le moment C de l'écorce.

9. Les résultats de notre analyse sont les suivants :

1° La formule de la variation des latitudes (abstraction faite de la nutation diurne et de la variation périodique de la verticale) renferme trois termes, l'un en $L+\beta+u$, l'autre en $L+\beta-u$, le troisième en $A+\odot$.

2° Si la période de Chandler est bien, comme nous l'avons expliqué, celle de la variation eulérienne des latitudes, sa formule n'en est pas moins incorrecte : *a*) en ce qu'elle suppose $\iota = 0^\circ.84$ au lieu de $1^\circ.12$; *b*) en ce qu'elle n'emploie qu'un seul des deux termes eulériens (*); *c*) en ce qu'elle fait entrer L dans l'argument du terme annuel, qui est simplement $A+\odot$, A étant une constante pour tous les lieux de la Terre.

3° L'expression complète de la nutation eulérienne ne pourra s'obtenir que par la combinaison d'observations en déclinaison avec des observations en Æ faites dans un méridien *fixe*.

4° En ce qui concerne les variations de la latitude, il y a lieu de rechercher si une petite partie n'en est pas due à des déviations périodiques de la verticale.

Si nous sommes arrivé à établir les véritables lois de la variation des latitudes, nous tenons à déclarer que c'est surtout grâce aux énergiques et persévérants travaux de l'illustre astronome américain; quoiqu'il arrive, ils n'auront pas été perdus pour la science, et auront, plus qu'aucuns, contribué à élucider cette question qui est, depuis six ans surtout, l'objet des plus vives préoccupations dans le monde astronomique et géodésique.

(*) Si l'on fait l'observation que je n'ai employé, au fond, qu'un seul terme également dans le calcul des observations de Gyldén, je répondrai que, dans ma formule, le coefficient de ce terme renferme implicitement L, et, par conséquent, n'est pas une constante pour tous les Observatoires, comme dans la formule de Chandler.