COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Essai sur les variations de latitude; par F. Folie, membre de l'Académie.

CHAPITRE PREMIER.

EXPRESSION COMPLÈTE DES VARIATIONS DE LATITUDE.

Durant la première moitié du siècle, on ne connaissait à l'axe du monde qu'un mouvement, celui de précession et de nutation, ou du moins ce mouvement était le seul qu'on fît entrer dans les formules de réduction de la position des astres à leur lieu moyen.

Les formules de Laplace renfermaient bien les expressions de deux autres mouvements de cet axe : celles de la nutation initiale ou eulérienne, et celles de la nutation diurne.

Mais, quant à la première, le grand géomètre avait dit : « Si elle était sensible, on le reconnaîtrait par les variations *journalières* de la hauteur du pôle; et, puisque les observations les plus précises n'y font reconnaître aucune variation de ce genre, il en résulte qu'elle est insensible (*) »; et, quant à la seconde : « Nous pouvons négliger les deux premiers termes de cette expression (c'est-à-dire la nutation diurne), parce qu'ils sont insensibles en

(*) *Méc. cél.*, 1re partie, liv. V, art. 4.

eux-mêmes, et que d'ailleurs ils n'augmentent point par l'intégration (*). »

Bessel a voulu rechercher si la nutation initiale n'était pas sensible; W. Struve également. Mais c'est Peters qui, le premier, est parvenu à en démontrer l'existence au moyen des variations apparentes de la hauteur du pôle, qu'il avait observées à Poulkova, quoiqu'il n'énonce lui-même qu'avec beaucoup de réserve le résultat qu'il avait obtenu (**).

Nyrén l'a suivi dans cette voie, mais il a été peu satisfait de la concordance entre ses résultats et celui de Peters (***).

D'autres astronomes également, Downing (IV), van de Sande-Bakhuysen (V), etc., se sont occupés de cette recherche; enfin elle a suscité des travaux très remarquables de la part des astronomes américains, parmi lesquels nous aurons à citer en première ligne Chandler, Comstock, Gould et Newcomb (VI).

Aujourd'hui encore, la question fait l'objet d'études poursuivies depuis plusieurs années suivant un plan et dans un but déterminés, et peut-être n'est-elle pas encore sur le point d'être résolue.

Quant à la seconde nutation, négligée par Laplace, nul astronome ne s'en est occupé; tous ont pensé qu'elle est, en réalité, absolument insensible, et l'un des géomètres modernes les plus éminents a même démontré tout

---

(*) *Méc. cél.*, 1re partie, liv. V, art. 4.

(**) *Bull. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg*, 1844.

(***) *Mém. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg*, t. XIX, 1871.

(IV) *Monthly Notices*, vol. XL.

(V) *Astr. Nachr.*, 1891.

(VI) Voir surtout *Astronomical Journal*, 1890-1893.

récemment qu'il en est ainsi pour une Terre solide (*), ce que j'avais, du reste, déclaré moi-même depuis très longtemps (**).

Aussi, l'existence de la nutation diurne étant pour moi amplement démontrée (***), j'en ai conclu à la fluidité du globe sous son écorce solide; et, par suite, à l'inexactitude de la période de 305 jours, attribuée par les astronomes à la nutation initiale, période qui ne serait correcte que si la Terre était solide.

J'ai, le premier, cherché la longueur réelle de cette période, en m'aidant des déterminations faites par Peters, par Nyrén, par Downing et par moi-même, de l'angle compris, à un moment donné, entre le méridien de l'axe instantané et celui du lieu d'observation (IV); et j'avais trouvé, au lieu de la période de 305 jours, une période de 337 jours, qui faisait très bien concorder entre eux ces différents angles (V).

Cette période, cependant, était encore beaucoup trop courte. Chandler en a déterminé une de 427 jours, et je pense que cette détermination est la plus certaine que nous possédions jusqu'à présent. C'est elle qui, appliquée aux observations de Peters, m'a fourni les meilleurs résultats, supérieurs même de beaucoup à ceux que Chandler a

---

(*) Tisserand, *Méc. cél.*, t. II, p. 425.

(**) *Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du Monde.* Mém. de l'Acad. roy. de Belgique, t. XLV, 1884.

(***) *Annuaire* pour 1890, p. 292. *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1893.

(IV) *Annuaire* pour 1892.

(V) Il est vrai que la détermination, faite par Downing, de l'angle β est entachée d'une erreur de 180°, comme me l'a fait remarquer M. Niesten, l'astronome anglais ayant appliqué par mégarde aux colatitudes de Greenwich la formule des latitudes.

déduits de sa formule, dans laquelle il a introduit un terme annuel de variation de la latitude (*).

La longueur de cette période de 427 jours, comparée à celle de 305 jours qui serait exacte pour une Terre solide, est un argument décisif en faveur de la fluidité intérieure de celle-ci, comme en faveur de l'existence de la nutation diurne (**).

Fait surprenant, lorsque je voulus réduire les excellentes observations de latitude faites à Honolulu, une période de 398 jours parut cependant y satisfaire mieux que la période de 427 jours de Chandler, comme on le verra dans un travail de M. Niesten, qui a calculé avec le plus grand soin ces observations.

Lorsque je publiai la réduction des observations de Honolulu (***), ma conviction relativement à la période de Chandler n'était pas encore faite; elle ne l'a été que quand, dans le courant de la présente année, j'appliquai aux observations de Peters l'une et l'autre période successivement.

Pourquoi donc la période de 398 jours donnait-elle de meilleurs résultats que celle de 427 dans la réduction des observations de Honolulu?

Voici, je pense, l'explication de ce fait.

Comme on le verra dans la suite de cet essai, j'avais toujours cru, jusqu'à présent, à l'invariabilité de la hauteur du pôle d'inertie (IV), ne pouvant soupçonner aucune raison théorique d'une variation annuelle de cette hauteur,

(*) *Annuaire* pour 1891, p. 271.

(**) *Annuaire* pour 1891, p. 272.

(***) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique,* décembre 1892, *Annuaire* pour 1893, p. 515.

(IV) *Ibid.* et *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1893.

affirmée depuis plusieurs années par Comstock et Chandler, lorsqu'un travail récent du premier de ces astronomes sur la latitude de Washburn Observatory (Madison) m'obligea à reconnaître cette variation annuelle, qui s'y manifeste de la façon la plus indiscutable.

C'est encore au moyen de la fluidité intérieure du globe que je parvins à m'expliquer théoriquement cette variation.

M. Helmert avait déjà recherché l'effet que produirait, sur le déplacement du pôle d'inertie, l'accumulation d'une grande quantité de neige sur les continents de l'hémisphère boréal, et avait trouvé que cet effet était absolument insensible, mais toujours dans l'hypothèse d'une Terre solide (*).

J'ai trouvé que, même si l'on suppose à l'écorce terrestre une épaisseur égale à la dixième partie du rayon de la Terre, l'accumulation d'une masse de neige représentant 30 centimètres de hauteur d'eau sur la partie du continent boréal comprise entre les parallèles de 55° et de 70°, produirait une déviation du pôle d'inertie de 0".06 vers l'Amérique du Nord.

Peut-être ai-je supposé une masse de neige un peu trop considérable; mais, d'autre part, j'ai donné également une épaisseur beaucoup trop grande à l'écorce et négligé la neige qui tombe entre 55° et 60° de latitude.

La démonstration de ce dernier point ne sera peut-être pas superflue.

Admettons que les neiges qui tombent en Amérique, entre les méridiens de 235° et de 285° de longitude E de Greenwich, sont équilibrées par celles qui tombent en Europe et en Sibérie entre les méridiens de 55° et de 105°.

(*) *Höhere Geodäsie,* B. II, 3, 425.

Il restera à considérer les quantités de neige accumulées en Sibérie, entre les méridiens de 105° et de 135°, et, en Europe, entre ceux de 15° et de 55°, celles qui tombent au delà du parallèle de 135° étant censées équilibrées par celles qui tombent sur le Groenland.

On ne commettra pas d'erreur bien sensible en supposant que la quantité de neige qui s'accumule dans ces deux régions est la même; car si cette quantité est, d'une part, plus considérable en Europe à raison de son étendue et de la hauteur probablement plus grande de la neige, d'autre part, le climat y est plus doux, et l'on doit faire abstraction de la Baltique et des mers avoisinantes.

Le centre de gravité des neiges qui tombent en Sibérie est sur le méridien de 120°; en Europe, sur celui de 35°.

Le centre de gravité de la masse totale tomberait donc vers le septante-septième degré de longitude E de Greenwich; mais ce calcul approximatif ne nous servira qu'à fixer les idées, et c'est à l'astronomie qu'incombera la recherche de ce dernier méridien.

Calculons cette masse de neige N, en supposant que celle qui s'acccumule depuis le commencement de l'automne jusqu'au cœur de l'hiver équivaut à une hauteur d'eau de $0^m,30$.

La superficie sur laquelle elle tombe comprend 70° en longitude, soit les $\frac{7}{36}$ de la zone comprise entre 55° et 70° de latitude, ou $0.0434\pi R^2$, R désignant le rayon de la Terre; d'où la masse $N = \frac{0.013}{6.367.500}\,\pi\,R^3$.

Prenons l'épaisseur de l'écorce égale à $\frac{R}{10}$, valeur certainement exagérée, et sa densité égale à 3.

La mécanique démontre que l'addition d'une masse N de latitude Φ sur un sphéroïde de moments d'inertie C, A, a pour effet de déplacer le pôle d'inertie d'un angle $\Delta\,\Phi = \frac{1}{2}\,\frac{NR^2}{C-A}\,\sin 2\,\Phi$, sur l'antiméridien de N.

A défaut de données plus précises, admettons que, pour l'écorce comme pour la Terre, $\frac{C-A}{C} = 0.003$; la valeur de l'angle deviendra

$$\frac{1000}{6}\,\frac{NR^2}{C}\sin 2\Phi = 136.5\,\frac{NR^2}{C}.$$

Or

$$C = 3\int r^2 dv = 3\int r^4 dr d\omega = \frac{12\pi}{5}\,R^5(1 - 0.9^5) = 0.98\pi R^5.$$

La valeur de l'angle est donc $\frac{1.77}{0.98 \times 6.367.500}$, laquelle, réduite en secondes, donnera

$$\Delta\Phi = 0''.0585.$$

Le pôle d'inertie, qui est le point de référence dans nos formules rappelées ci-dessus, s'avancerait donc, depuis l'été jusqu'en hiver, de 0″.06 vers l'Amérique du Nord, selon les données précédentes, et il reculerait d'autant, en sens inverse, du cœur de l'hiver au cœur de l'été. L'amplitude de ce mouvement est probablement bien plus considérable; car nous avons attribué à l'écorce une épaisseur exagérée.

Sans pouvoir préciser aucunement l'effet de l'accumulation des neiges en Sibérie pendant l'hiver, il ne semble donc pas douteux que cet effet ne soit appréciable.

Admettons, en conséquence, que le pôle d'inertie de la Terre s'avance, pendant l'hiver, vers l'Amérique du Nord sur le méridien de 100° environ de longitude W. de Greenwich.

Il en résultera qu'en hiver les hauteurs du pôle (d'inertie) vont augmenter, en tous les points de l'hémisphère boréal situés sur ce méridien, d'une quantité précisément égale à ce déplacement du pôle, et diminuer de la même quantité dans l'hémisphère austral (relativement au pôle austral, bien entendu); qu'en été, cette augmentation ou cette diminution de la hauteur du pôle sera remplacée par une diminution ou une augmentation; que les phénomènes inverses se passeront sur le méridien de 280° de longitude W de Greenwich;

Que, sur les autres méridiens, les variations de la hauteur du pôle auront lieu dans le même sens, mais seront amoindries en raison du cosinus de l'angle compris entre ces méridiens et celui des pôles d'inertie;

Qu'elles seront nulles, par conséquent, sur le méridien perpendiculaire à ce dernier.

Il serait extrêmement difficile, à cause du peu de données certaines que nous possédons relativement aux quantités de neige qui tombent dans les latitudes un peu élevées, d'en déterminer le centre de gravité. C'est à l'astronomie de rechercher quelle peut-être la position de ces deux méridiens sur lesquels les variations de la hauteur du pôle (d'inertie) sont, ou un maximum (positif ou négatif), ou absolument nulles.

Il existe donc une cause annuelle de variations *réelles* de la hauteur du pôle (d'inertie), qui produira ses plus grands effets sur le méridien suivant lequel a lieu le déplacement annuel de ce pôle (méridien d'inertie), et n'en produira aucun sur le méridien perpendiculaire. Et pour pouvoir déterminer, d'une manière un peu précise, les effets de cette cause, il est indispensable que des déterminations de latitude soient effectuées, non seulement en des points distants en longitude de 180°, mais en d'autres points encore, à 90° de distance surtout, et dans les deux hémisphères.

Retournons maintenant à notre point de départ, et recherchons pour quelle raison une période de la nutation initiale estimée égale à 398 jours a donné de meilleurs

résultats dans la réduction des observations de Honolulu que la période plus exacte de Chandler, qui est de 427 jours.

Indépendamment des variations *apparentes* de latitude occasionnées par la nutation initiale, il peut y avoir à Honolulu des variations *réelles* dues au déplacement du pôle d'inertie.

Et ces variations, les apparentes aussi bien que les réelles, se produiront en sens inverse à Berlin, comme les observations l'ont parfaitement confirmé. Or, les variations apparentes ayant une période de 427 jours, les réelles une période de 365, la combinaison des deux semblera donner une période unique de 396 jours, approchant très fort de la période de 398 jours qui m'avait paru vérifier, mieux que celle de Chandler, les déterminations de la nutation initiale faites (*) par différents astronomes.

M. Preston a trouvé, pour les variations de latitude qu'il a observées à Waïkiki (Iles Sandwich), une période de 386 jours, intermédiaire également entre la période de Chandler et l'année (**).

Ces résultats semblent confirmer l'existence de variations annuelles de latitude, révélées déjà, pour plusieurs astronomes, et particulièrement pour Comstock, Gould et Chandler, par un grand nombre d'observations, mais dont nous avions douté jusqu'à ce jour, parce qu'on ne leur assignait aucune cause bien plausible.

Cette cause, nous l'avons trouvée dans l'accumulation des neiges hivernales, combinée avec l'hypothèse de la fluidité intérieure du globe.

(*) On a vu que l'une de ces déterminations est erronée de 180°.
(**) *Astronomical Journal*, n° 506, p. 157.

Si, comme cela ne nous semble pas douteux, telle est bien la source des variations *réelles* de la latitude, voilà un nouvel argument en faveur de la fluidité intérieure du globe et de l'existence de la nutation diurne.

Aux trois mouvements de l'axe du monde établis par Laplace (précession et nutation bradléenne, nutation initiale, nutation diurne), mais dont il a négligé les deux derniers, comme insensibles, dans le développement de ses formules, il est donc opportun d'en ajouter un quatrième, le mouvement annuel du pôle d'inertie.

Les expressions des variations $\Delta\theta$ et $\Delta\lambda$ du plan de l'équateur (perpendiculaire à l'axe d'inertie), provenant des trois mouvements considérés par Laplace, peuvent s'écrire

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{aligned} \Delta\theta &= N_\theta - \gamma \sin(\varphi + nt + \beta) + \nu(\Sigma_2 \sin 2\varphi + \Sigma_1 \cos 2\varphi), \\ \sin\theta\Delta\lambda &= N_\lambda - \gamma \cos(\varphi + nt + \beta) - \nu(\Sigma_1 \sin 2\varphi - \Sigma_2 \cos 2\varphi), \end{aligned}\right.$$

si nous désignons par N_θ la nutation en obliquité, N_λ la précession et la nutation en longitude, par γ et β les constantes de la nutation initiale (en supposant nul son second terme, qui a $B - A$ pour facteur), par ν le coefficient de la nutation diurne. Σ_1 et Σ_2 sont des fonctions dont on trouvera plus loin les expressions.

Ces formules prennent le *pôle d'inertie* comme point de référence.

Parmi tous les géomètres qui ont traité du mouvement de rotation de la Terre, un seul a cru devoir préférer le pôle instantané, afin d'éliminer les termes de la nutation initiale.

J'ai démontré la double incorrection de ce procédé : incorrection analytique d'abord, incorrection astronomique

plus grave surtout ; car le pôle instantané, variant à la surface de la Terre, ne permet plus de définir le méridien, ni, par conséquent, l'heure, dont la notion est fondée sur celle d'un plan absolument fixe à la surface de la Terre (*).

Montrons jusqu'où peut aller cette dernière incorrection, dont les astronomes ne semblent pas encore avoir reconnu l'importance.

Le coefficient de la nutation initiale approche de 0''.1 ; celui de la variation annuelle de latitude est peut-être plus considérable pour certains observatoires ; admettons qu'il soit égal aussi à 0''.1 au maximum, c'est-à-dire que la distance du pôle d'inertie au pôle géographique soit égale, en hiver par exemple, à 0''.1. Il arrivera un moment où, sur le même méridien, le pôle instantané sera distant du pôle d'inertie de 0''.1 dans le même sens et à la même saison ; en sorte que le pôle instantané ou *astronomique* s'écartera de 0''.2 du pôle géographique.

Pour un observatoire situé à une latitude Φ sur le méridien perpendiculaire à celui qui passe par ces trois pôles, l'azimuth ΔA du méridien *astronomique* sera donné par $\Delta A = 0''.2 \sec\Phi$, c'est-à-dire à 0''.32 déjà sous la latitude de 51°, quantité qui n'est certes pas négligeable.

Or, six mois après, l'azimut du méridien *astronomique* sera à peu près égal et de signe contraire, car la demi-période de la nutation initiale, qui est de 212 jours environ, ne diffère pas beaucoup de la moitié de l'année.

(*) *Acta Mathematica*, 1892. *Annuaire*, 1893. Voir aussi : W. Foerster, *Ueber die Ragen-Aenderungen der Erdaxe.* (Mitteil. der Verein. von Freuden der Astronomie, Heft 8 u. 9, s. 151.)

Entre les deux méridiens *astronomiques* déterminés à ces deux époques, il y a donc un écart de 0".6; et l'on constatera, entre les Æ d'une même étoile, observées dans le méridien astronomique à ces deux époques, une différence correspondant à cet écart azimutal, et qui n'est certes pas assez peu sensible pour pouvoir être négligée.

Mais, afin de pouvoir en tenir compte dans la réduction des observations, il faut en revenir aux formules qui prennent un pôle *fixe* comme point de référence.

La question, du reste, est bien tranchée aujourd'hui. Dans le tome II de sa *Mécanique céleste*, M. Tisserand (quoiqu'il ait adopté la définition de la latitude relativement au pôle instantané (*), ce qui me semble une inconséquence) a donné les formules de la nutation en les rapportant, comme Laplace, au pôle d'inertie.

S'il avait jugé que le choix du pôle instantané fût préférable, il n'eût certes pas manqué d'adopter ce dernier comme point de référence, et serait resté conséquent avec sa définition de la latitude.

Aux trois mouvements précédents, nous avons à ajouter celui du pôle d'inertie à la surface de la Terre.

Afin de pouvoir représenter ce mouvement, nous prendrons pour point de référence le *pôle géographique*, point fixe, servant à déterminer le méridien et l'heure, et qui est le lieu moyen des *pôles d'inertie*.

Et nous pourrons nous borner à calculer ce mouvement le long du méridien d'inertie même, puisque, comme nous l'avons vu, il suffira, en obliquité, de le projeter sur un autre méridien quelconque pour en connaître la valeur sur celui-ci, en obliquité également.

(*) Page 580, fin.

Il n'est pas douteux que le premier méridien (celui qui passe par l'axe principal X) ne se déplace également en vertu de la même cause.

Mais, dans cette étude sur les variations de latitude, nous ne nous occuperons nullement, n'ayant aucune donnée numérique sur laquelle nous puissions nous appuyer, du mouvement annuel des axes principaux autres que l'axe polaire.

Dès lors, il n'y aura aucune modification à faire subir aux formules précédentes, qui représentent tous les mouvements du pôle d'inertie, à l'exclusion de son mouvement annuel, et ce dernier s'introduira par la variation annuelle de latitude qu'il occasionne.

C'est seulement quand, par l'étude suivie de ces variations, combinée avec celle de la répartition des neiges sur l'hémisphère boréal, on sera parvenu à se faire une idée un peu exacte de la masse de ces neiges et de la position de leur centre d'inertie, que l'on pourra aborder avec succès l'étude des variations annuelles des trois axes principaux d'inertie de l'écorce terrestre.

Mais elle n'est nullement indispensable dans un travail sur les variations de latitude.

Il ne nous reste donc qu'à faire entrer dans nos formules l'expression de ces variations, réservant pour la suite de ce travail l'étude de l'influence qu'elles peuvent exercer sur la position apparente des astres.

Désignons par ρ' la valeur maxima (positive ou négative) du déplacement du pôle d'inertie relativement au pôle géographique, sur un méridien dont nous désignerons par M la longitude occidentale par rapport au méridien de Greenwich, pour le cas du maximum, par $180° + M$ pour le cas du minimum; de sorte que cette dernière longitude est celle du demi-méridien sur lequel tombe le centre de gravité des neiges accumulées pendant l'hiver sur l'hémisphère boréal.

Au cœur de l'hiver, c'est-à-dire au moment où cette accumulation est le plus considérable, on doit donc avoir, sur le méridien M, $\Delta\Phi = \rho'$, et, au cœur de l'été, $\Delta\Phi = -\rho'$, en appelant $\Delta\Phi$ la variation *réelle* de latitude sur ce méridien.

Cette variation n'est probablement pas une fonction continue du temps; elle doit être à peu près nulle pendant quelques semaines, en hiver comme en été. Il n'est pas possible cependant de la représenter autrement que par une fonction continue dont la période est l'année, et dont la forme sera $\rho' \cos(-A + \odot)$, forme qu'ont déjà employée Comstock et Chandler dans leurs formules empiriques; A ne nous semble pas devoir s'écarter beaucoup de 300° sur notre hémisphère, de 120° sur l'hémisphère opposé.

Pour un lieu de longitude occidentale G par rapport à Greenwich, la formule serait :

$$\rho' \cos(M - G) \cos(-A + \odot) \quad \text{ou} \quad \rho \cos(-A + \odot).$$

Si l'on trouve une valeur de A voisine de 300° et ρ positif sur notre hémisphère, c'est que le pôle (d'inertie) se trouvera, en hiver, à moins de 90° de longitude (E ou W) de Greenwich; si la valeur de ρ est négative dans les mêmes conditions, c'est qu'il sera à plus de 90° de ce point.

Le coefficient ρ sera nul, comme il a déjà été dit, pour $G = M \pm 90°$.

Lorsque les observations de latitude, faites sur un grand nombre de méridiens différents, seront de nature à nous indiquer approximativement sur lequel de ces méridiens

les variations annuelles sont nulles, nous connaîtrons approximativement la valeur de M, qu'il serait difficile d'établir à priori.

Occupons-nous maintenant de la recherche des formules propres à déterminer ces variations, en négligeant toujours les mouvements annuels des axes principaux x et y, et dans le cas des observations méridiennes seulement; et considérons en premier lieu le passage supérieur.

Il importe d'abord de remarquer que les formules (I) sont celles du mouvement du *pôle d'inertie*, que nous appellerons simplement pôle, comme nous appellerons équateur le grand cercle perpendiculaire à l'axe d'inertie; lorsqu'il s'agira de leurs positions moyennes, nous y ajouterons le qualificatif *géographique*.

Soit Φ la hauteur (constante) du pôle géographique en un certain lieu; la hauteur du pôle (d'inertie) y sera, d'après ce que nous venons de voir, $\Phi + \rho \cos(-A + \odot)$.

Pour un passage supérieur, nous aurons

$$z = \Phi + \rho \cos(-A + \odot) - \delta,$$

δ étant la déclinaison apparente de l'étoile rapportée à l'équateur (perpendiculaire à l'axe d'inertie), comme nous venons de le faire remarquer au sujet des formules (I).

Si δ_a est la déclinaison apparente calculée par les astronomes, qui ne tiennent compte, dans leur calcul, que des termes N_θ et N_λ de ces formules, nous aurons à écrire

$$\delta = \delta_a + \Delta\delta,$$

$\Delta\delta$ étant la variation en déclinaison qui provient de la nutation initiale et de la nutation diurne, et qui est égale, en général, à

$$\Delta\delta = -\gamma\cos(\mathrm{I}t + \beta_0 - \alpha)$$
$$+ \nu\{\cos\alpha(\cos 2\varphi\Sigma_2 - \sin 2\varphi\Sigma_1) + \sin\alpha(\sin 2\varphi\Sigma_2 + \cos 2\varphi\Sigma_1)\} \text{ (*)}.$$

Pour les réductions d'une seule étoile, cette formule s'écrit plus simplement

$$\Delta\delta = -\gamma\cos(\mathrm{I}t + \beta - \alpha) + \nu\cos(2\varphi - \alpha)\Sigma_2 - \nu\sin(2\varphi - \alpha)\Sigma_1;$$

et, dans le méridien, selon qu'il s'agit d'un passage supérieur ou inférieur,

$$\Delta\delta = \mp\gamma\cos(\iota t + \beta) + \nu\cos(2\mathrm{L} + \alpha)\Sigma_2 - \nu\sin(2\mathrm{L} + \alpha)\Sigma_1.$$

Rappelons que, dans ces formules,
$\mathrm{I}t$ représente $\varphi + \iota t$, $\varphi = t + \mathrm{L}$, $\beta = \beta_0 + \mathrm{L}$,
$t = 308°$ par an (période de Chandler) (*);
γ et ν sont les coefficients numériques de la nutation initiale et de la nutation diurne; Σ_1 et Σ_2 désignant les fonctions suivantes, exprimées en longitudes vraies :

$$\Sigma_1 = -1.155 - 0.134\cos☊ + 0.558\cos 2\odot$$
$$+ 0.82\cos 2☾ + 0.14\cos(2☾ - ☊) - 0.15\cos(☾ - \Gamma').$$
$$\Sigma_2 = -0.180\sin☊ + 0.590\sin^2\odot$$
$$+ 0.888\sin 2☾ + 0.18\sin(2☾ - ☊),$$

en négligeant les termes inférieurs à 0.1 (**).

Pour un passage supérieur, nous aurons donc, en appelant Φ_a la latitude astronomique égale à $z + \delta_a$:

$$\Phi_a = \Phi + \rho\cos(-\mathrm{A} + \odot) + \gamma\cos(\iota t + \beta)$$
$$+ \nu\sin(2\mathrm{L} + \alpha)\Sigma_1 - \nu\cos(2\mathrm{L} + \alpha)\Sigma_2,$$

(*) *Annuaire de l'Observatoire de Belgique*, 1893, p. 280.
(**) *Loc. cit.*, p. 312, où ces expressions sont plus complètes.

ou, en faisant

$$\rho\sin\mathrm{A} = r,\quad \rho\cos\mathrm{A} = s,\quad \gamma\sin\beta = u,\quad \gamma\cos\beta = \nu,$$
$$\nu\sin(2\mathrm{L} + \alpha) = \xi,\quad \nu\cos(2\mathrm{L} + \alpha) = \eta :$$
$$\Phi_a = \Phi + s\cos\odot + r\sin\odot + v\cos\iota t - u\sin\iota t + \xi\Sigma_1 - \eta\Sigma_2.$$

Soit Φ_m la moyenne des latitudes astronomiques observées,

$$\Phi_a - \Phi_m = n,\quad \Phi - \Phi_m = z,$$

on aura enfin

$$n = z + s\cos\odot + r\sin\odot + v\cos\iota t - u\sin\iota t + \xi\Sigma_1 - \eta\Sigma_2.$$

Pour un passage inférieur, on s'assurerait aisément qu'il suffit de changer les signes de ξ et de η.

C'est au moyen de cette simple remarque que j'ai pu déterminer la nutation initiale indépendamment de toute erreur de réduction (*), comme Chandler l'a fait également (**).

Il est à remarquer que, pour la réduction de la déclinaison d'une étoile, on aurait des équations absolument analogues.

Cette équation renferme déjà 7 inconnues; elle est cependant encore fort incomplète : elle devrait renfermer, en effet, surtout quand il s'agit de calculer un terme annuel, la correction de la constante de l'aberration ainsi que la parallaxe; puis, s'il s'agit d'une étoile de très forte déclinaison, les termes du second ordre de l'aberration systématique, qui deviennent sensibles dans ce cas (***);

(*) *Annuaire* pour 1892.
(**) *Astronomical Journal*, n° 287, 1893.
(***) Au moyen de ces termes, nous avons, le premier, déduit des observations de Gyldén, par un calcul direct, la direction et la

enfin, si l'on voulait en faire usage pour le calcul de la nutation diurne, la correction des termes en $2\odot$ de la formule de Peters, termes dont le coefficient n'est certainement pas le même pour l'écorce que pour la Terre solide.

Il faut donc arriver à réduire le nombre des inconnues.

Tout d'abord, on laissera de côté la dernière ainsi que les deux inconnues relatives à la nutation diurne, et enfin la parallaxe et l'aberration systématique.

Restent encore six inconnues.

Nous pensons qu'il est possible de les réduire à cinq dès aujourd'hui, et à quatre dans un avenir assez rapproché.

Quant à la nutation initiale, les deux inconnues $u = \gamma \sin \beta$ et $v = \gamma \cos \beta$ se réduisent à une seule γ, en admettant que l'angle β est connu, ce que l'on verra confirmé ci-dessous.

Et quant au terme annuel, les inconnues $r = \rho \cos A$, $s = \rho \cos A$ pourront bientôt être réduites à la seule inconnue ρ, car A ne tardera pas à être connu avec une approximation suffisante.

Cherchons à déterminer *a priori* la valeur de l'angle β.

Dans ce but, nous recourrons à un certain nombre de déterminations qui en ont été faites en employant la période de Chandler.

vitesse du mouvement systématique. Nous avons trouvé, pour l'ascension droite de l'Apex, 277°, valeur qui concorde parfaitement avec celle que l'on a déduite des mouvements propres des étoiles; et, pour la vitesse projetée sur l'équateur, une valeur égale au double de celle de la Terre. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1893.)

1° Nous avons donné (*) les valeurs suivantes de la constante de la nutation initiale et de l'angle β, déduites des Æ de la polaire observées par Struve à Dorpat, l'origine étant le 1er avril de chaque année :

Années. . . .	1823	1824	1825
γ.	0.080	0.075	0.083
β.	237°	247°	254°

On en déduit, pour le 1er avril 1824, $\beta = 246°$; et pour le 1er janvier, en adoptant la période de Chandler, 169°; valeur qui, ramenée à Poulkova, devient :

$$\beta = 165°.5 \qquad \text{Poulkova } 1824.0.$$

2° Des observations de Peters, en y appliquant la période de Chandler, j'ai déduit :

$$\beta = 1°.5 \qquad \text{Poulkova } 1842.0.$$

3° Nyrén a trouvé, mais en appliquant la période de 305 jours, ce qui rend la détermination beaucoup moins sûre, et en faisant usage des observations de W. Struve dans le premier vertical :

$$\beta = 224° \qquad \text{Poulkova } 1850.0.$$

4° Newcomb a donné $\beta = 0$ pour 1864.94 Washington; d'où

$$\beta = 18°.5 \text{ pour } 1865.0 \text{ Washington}$$
$$\text{et } \beta = 271° \quad \text{pour } 1865.0 \text{ Poulkova.}$$

(*) *Annuaire de l'Obs. de Belg.*, 1891, pp. 246 et suivantes et p. 271. Nous ferons remarquer que les observations portant seulement sur un intervalle de temps de trois mois, l'erreur provenant de l'inexactitude de notre période est insignifiante.

5° Des dix années d'observation de la latitude de Greenwich, résumées par Downing, j'ai déduit :

1868.0 $\beta = 278°.3$ Greenwich $= 248°.3$ Poulkova
1873.0 $\beta = 351°.8$ — $= 321°.5$ —

6° Des observations de Honolulu, M. Niesten a déduit :

1891 0 $\beta = 303°$ Honolulu $= 153°.2$ Poulkova.

Comme les deux déterminations résultant des observations de Downing ne concordent entre elles qu'à 13° près, si l'on admet l'accroissement annuel de 308°, concordance déjà fort belle cependant, nous en prendrons la moyenne, soit

$\beta = 285°$ 1870.5 Poulkova
ou $\beta = 131°$ 1870.0 — (*).

Nous voici en présence de cinq résultats qui peuvent nous inspirer confiance. Ils sont tous rapportés à Poulkova.

	N° 1	N° 2	N° 3	N° 4	N° 5
Années	1824.0	1842.0	1865.0	1870.0	1891.0
	165°.5	1°.5	271°	131°	153°

Pour vérifier jusqu'à quel point ils concordent entre eux, nous passerons de l'un à l'autre en supposant un accroissement de $300° + x$.

(*) On en déduirait 27° pour 1872.0, tandis que Downing donne 175°. Si la différence n'est pas de 180°, cela tient à ce que Downing avait fait usage de la période de 303 jours. (Voir la note antérieure sur ce sujet.)

Les différentes combinaisons nous donneront, par

1 et 2 :	$165.5 + 18\,x = 561.5,$	$x = 10°.9$
1 et 3 :	$165.5 + 41\,x = 571.0,$	$x = 9°.9$
1 et 4 :	$165.5 + 46\,x = 631.0,$	$x = 10°.0$
1 et 5 :	$165.5 + 67\,x = 747.5,$	$x = 11°.1$
2 et 3 :	$1.5 + 23\,x = 211.0,$	$x = 9°.2$
2 et 4 :	$1.5 + 28\,x = 371.0,$	$x = 13°.2$
2 et 5 :	$1.5 + 49\,x = 553.0,$	$x = 11°.3$
3 et 4 :	$271\,0 + 5\,x = 431.0,$	$x = 32°.0$
3 et 5 :	$271.0 + 26\,x = 613.0,$	$x = 13°.1$
4 et 5 :	$131.0 + 21\,x = 313.0,$	$x = 8°.7.$

L'une de ces valeurs est absolument à rejeter, si l'on admet que la période de Chandler approche de l'exactitude : c'est celle de 32° résultant de la combinaison des détermination 3 et 4.

Mais il n'est guère possible de décider d'après ce tableau si c'est 3 ou 4 qu'il faut rejeter.

Si on les rejette toutes deux, il ne restera que les valeurs

$$x = 10°.9, \quad 11°.1, \quad 11°.3; \quad \text{moyenne : } 11°.1.$$

Si l'on ne rejette que la combinaison des déterminations 3 et 4, qui sont séparées entre elles d'un intervalle de cinq ans seulement, on a :

$$x = 10°.9,\ 9°.9,\ 10°.0,\ 11°.1,\ 9°.2,\ 13°.2,\ 11°.3,\ 13°.1,\ 8°.7;$$
$$\text{moyenne : } x = 10°.9.$$

Si l'on rejette enfin la détermination 4 seule, qui semble la moins sûre, comme nous le verrons, on trouve $x = 10°.9$.

On peut donc considérer avec confiance la valeur de

311° (au lieu de 308°, Chandler) comme celle de l'accroissement annuel de l'angle β ; ce qui répond à une période de 423 jours (au lieu de 427) que Chandler lui-même et d'autres astronomes avaient considérée comme la véritable.

Si maintenant on cherche à déterminer l'angle β pour Poulkova 1890.0 au moyen de chacune des déterminations précédentes et de l'accroissement annuel de 311°, on trouve que la valeur déduite de la quatrième détermination est en discordance complète avec les autres. Ces dernières donnent

122°.5, 169°.5, 125° et 182°; moyenne 150° (*).

Et pour Greenwich, 1890.0, $\beta = 120°$.

Cette valeur paraît exacte à une vingtaine de degrés près et pourra servir à éliminer l'inconnue β de l'équation pour une époque et un lieu quelconques, en employant l'accroissement annuel de 311°, et celui de 1° par degré de longitude occidentale par rapport à Greenwich.

Un fait important et très satisfaisant ressort de cette discussion : c'est que la période de la nutation initiale est bien constante, quoi qu'en aient pu dire quelques astronomes et physiciens des plus éminents, puisqu'elle nous a fourni des résultats concordants depuis 1824 jusqu'en 1891.

La recherche de la nutation initiale n'est toutefois pas terminée encore; la constante angulaire n'en est pas suffisamment connue, la constante numérique moins encore.

Le second terme de la nutation initiale, qui entre dans

(*) En partant de la valeur de Nyrén, $\beta = 224°$ Poulkova 1850.0, on trouverait, pour 1890, 84° qui diffèrent de 66° de notre moyenne.

les formules de Laplace et que nous avons provisoirement négligé parce qu'il a B — A pour facteur, est-il insensible ?

Sa recherche serait, en tous cas, actuellement prématurée.

Indépendamment de la variation *apparente* de latitude qui en provient, et de la variation *réelle* produite par le déplacement annuel du pôle d'inertie à la surface de la Terre, existe-t-il des variations séculaires, comme Fergola croit l'avoir démontré (*) ?

Cette importante question encore ne sera pas résolue avant longtemps. Pour pouvoir l'aborder avec succès, il faudra avoir obtenu des déterminations de latitude exemptes des deux grandes causes d'erreur que nous venons de citer, et de celle qui réside dans l'inexactitude probable de la constante de l'aberration (**).

Je laisse de côté la nutation diurne, dont la période la plus importante est semestrielle, qui n'a qu'un coefficient numérique $\nu = 0''.05$ environ, et qu'on pourrait introduire dans le calcul en prenant, de plus, la longitude orientale du premier méridien L égale à 0 ou 12 heures pour Greenwich.

(*) *Determinazione della latitudine di Capo del Monte.*

(**) Comme la période de l'aberration est également annuelle, afin d'éviter que les coefficients de sa correction ne soient à peu près les mêmes que ceux de la variation *réelle* de la latitude, ce qui conduirait à une quasi-indétermination, il sera très utile de faire porter les observations sur des étoiles dont l'ascension droite est voisine de celle qui résulte de la formule $\cos(\odot + P) = \pm \sin(\odot - A)$, dans laquelle $\cos(\odot + P)$ représente symboliquement le facteur périodique de l'aberration en déclinaison.

CHAPITRE II.

Expressions complètes des variations de coordonnées des astres par rapport a l'équateur géographique.

Nous avons démontré précédemment que l'on ne peut pas, sans se mettre en contradiction avec la définition capitale de l'heure, prendre pour point de référence, dans les formules astronomiques, le pôle *instantané* de rotation de la Terre, puisque ce pôle déterminerait un méridien qui se transporterait, en deux cents jours environ, de sa position extrême orientale à sa position extrême occidentale, ou vice versâ, et que l'amplitude de ce mouvement dépendrait, pour chaque observatoire, de la latitude de celui-ci.

En admettant l'invariabilité du pôle géographique à la surface de la Terre, nous avons donné les formules complètes de la nutation de ce pôle, que nous supposions être le pôle d'inertie.

Depuis lors, comme on l'a vu, nous avons été amené à reconnaître une variation *réelle* du pôle d'inertie, que nous avons expliquée par l'accumulation des neiges, pendant l'hiver, sur les continents de l'hémisphère boréal, combinée avec l'hypothèse, bien démontrée aujourd'hui, de la fluidité intérieure du globe au-dessous de son écorce solide.

Les preuves astronomiques de cette fluidité intérieure sont les suivantes :

a. C'est en partant de cette hypothèse que nous avons démontré l'existence et déterminé les constantes de la nutation diurne :

b. Comme conséquence de cette existence, nous avons, le premier, conclu que la période de la nutation initiale, évaluée correctement à 305 jours pour une Terre solide, devrait être trop courte ;

c. Nous avons enfin déduit de la fluidité intérieure du globe que l'accumulation des neiges hivernales sur notre hémisphère a pour effet de déplacer le pôle d'inertie vers l'Amérique du Nord, et expliqué ainsi ces variations *annuelles* de latitude que Comstock, Gould et Chandler avaient introduites empiriquement dans leurs formules.

Nous nous proposons d'exposer ici, aussi complètement que possible, les formules des variations de coordonnées des étoiles, en tenant compte des trois nutations de l'axe d'inertie (nutation bradléenne, nutation eulérienne et nutation diurne) ainsi que du mouvement du pôle d'inertie dont nous avons démontré l'existence.

Nous appellerons *pôle géographique* la position *moyenne* occupée par le pôle d'inertie entre ces deux positions extrêmes.

Les observations témoignent que la distance du pôle d'inertie au pôle géographique ne doit guère excéder 0''.2.

Il en résulte que nos précédentes formules, qui se rapportent, en toute rigueur, au pôle d'inertie, sont applicables au cas où le pôle géographique est pris comme point de référence, à la condition d'y faire entrer la variation que nous venons de prouver.

A la vérité, la cause qui produit cette variation a également pour effet de déplacer les axes des moments d'inertie A et B; mais elle n'altérerait la valeur de ceux-ci que dans une proportion minime.

La seule conséquence appréciable qui en résulterait serait un déplacement périodique du premier méridien et s'accuserait seulement dans les formules qui renferment sa longitude, c'est-à-dire surtout dans celles de la nutation diurne. C'est là, pour cette théorie, une source nouvelle de difficultés que nous chercherons à éliminer dans les applications.

Ici nous pourrons, vu la petitesse des termes que nous cherchons, supposer $B = A$ pour l'écorce, en sorte que la position de l'axe X est indifférente.

Soit I l'angle que fait, à un instant quelconque, avec le premier méridien passant par cet axe, *le méridien d'inertie,* dans le sens duquel s'avance le pôle d'inertie de l'été à l'hiver; les projections de la vitesse de rotation n de la Terre autour des trois nouveaux axes z, x, y, seront

$$n\cos\Delta\Phi = n,\quad n\cos \mathrm{I}\Delta\Phi,\quad n\sin \mathrm{I}\Delta\Phi,$$

$\Delta\Phi$ représentant, à cet instant, la distance du pôle d'inertie au pôle géographique.

Les composantes l et m de la vitesse de rotation autour des axes primitifs principaux des X et des Y étant très petites, leurs projections autour des nouveaux axes x et y, qui ne s'écartent des premiers que d'une quantité de l'ordre $\Delta\Phi$, resteront égales à ces composantes mêmes.

Les trois vitesses angulaires l, m, n se conservent donc sans altération autour des nouveaux axes qui ont pour pôle le pôle géographique.

Et nos formules précédentes, dans lesquelles nous considérions le pôle géographique comme un pôle d'inertie invariable, sont applicables au nouveau cas que nous considérons; mais nous avons à y ajouter les termes provenant des deux vitesses nouvelles que nous venons de trouver.

Celles-ci produisent des variations en obliquité et en longitude données, comme on sait, par

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= n\Delta\Phi\,(-\cos \mathrm{I}\cos\varphi + \sin \mathrm{I}\sin\varphi) \\ &= -n\cos(\mathrm{I}+\varphi)\Delta\Phi. \\ -\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} &= n\Delta\Phi\,(\cos \mathrm{I}\sin\varphi + \sin \mathrm{I}\cos\varphi) \\ &= n\sin(\mathrm{I}+\varphi)\Delta\Phi. \end{aligned}\right.$$

$\Delta\Phi$ pourra se représenter par $i\cos(-\mathrm{A}+\odot)$. Du moins n'est-il pas possible de représenter autrement cette fonction, quoiqu'elle soit peut-être discontinue, en ce sens qu'elle pourrait ne pas varier durant un certain temps, au cœur de l'été comme au cœur de l'hiver.

La substitution de cette valeur et celle d'une somme de cosinus à leur produit, dans les formules précédentes, donneront :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{ni}{2}\left\{\cos\frac{\varphi+\mathrm{I}-\mathrm{A}+\odot}{2} + \cos\frac{\varphi+\mathrm{I}+\mathrm{A}-\odot}{2}\right\}, \\ -\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} &= \frac{ni}{2}\left\{\sin\frac{\varphi+\mathrm{I}-\mathrm{A}+\odot}{2} + \sin\frac{\varphi+\mathrm{I}+\mathrm{A}-\odot}{2}\right\}. \end{aligned}\right.$$

L'intégration donnerait lieu, comme on le voit immédiatement, à des termes d'une période bidiurne.

Mais ces termes sont tellement faibles que l'astronomie ne pourrait les déterminer séparément.

Nous devrons donc ici négliger, comme l'a fait Laplace, le mouvement du soleil vis-à-vis du mouvement diurne; et nous pourrons admettre de plus, pour la même raison, que le premier de ces mouvements a une vitesse uniforme.

L'intégration donnera alors simplement

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}\Delta\theta &= -\frac{i}{4}\left\{\sin\frac{\varphi+\mathrm{I}-\mathrm{A}+\odot}{2}+\sin\frac{\varphi+\mathrm{I}+\mathrm{A}-\odot}{2}\right\}\\ &= -\frac{i}{2}\sin(\varphi+\mathrm{I})\cos(-\mathrm{A}+\odot);\ \text{et, de même,}\\ -\sin\theta\Delta\psi &= -\frac{i}{2}\cos(\varphi+\mathrm{I})\cos(-\mathrm{A}+\odot).\end{aligned}\right.$$

D'où l'on tire, en appelant η l'angle horaire de l'astre, égal à $t-\alpha$, et en faisant $=\mathrm{L}+t$, $\mathrm{L}+\mathrm{I}=\mathrm{M}$:

$$(4)\ \ldots\quad\left\{\begin{aligned}\Delta\delta &= -\frac{i}{2}\cos(-\mathrm{A}+\odot)\cos(\mathrm{M}+\eta),\\ \cot\delta\Delta\alpha &= \frac{i}{2}\cos(-\mathrm{A}+\odot)\sin(\mathrm{M}+\eta)\ (^*).\end{aligned}\right.$$

Dans le méridien, selon qu'il s'agit d'un passage supérieur ou d'un passage inférieur, on a $\eta=0$ ou $\eta=12$ heures ; et, par conséquent,

$$(5)\ \ldots\quad\left\{\begin{aligned}\Delta\delta &= \mp\frac{i}{2}\cos\mathrm{M}\cos(-\mathrm{A}+\odot),\\ \cot\delta\Delta\alpha &= \pm\frac{i}{2}\sin\mathrm{M}\cos(-\mathrm{A}+\odot),\end{aligned}\right.$$

les signes supérieurs et inférieurs se rapportent aux passages de même nom.

Lorsque les latitudes sont déterminées au moyen des déclinaisons observées, on voit qu'on pourra éliminer les variations *annuelles* de latitude par la combinaison :

1° De deux observations pour lesquelles les longitudes du Soleil diffèrent entre elles de 180° ;

(*) L'omission au terme indépendant de tg δ est voulue, comme nous l'avons dit. (*Annuaire* pour 1893, p. 540.)

2° De deux observations faites à la même date en deux lieux dont les longitudes diffèrent entre elles de 180°.

Cette variation *annuelle* de la latitude produit donc des effets analogues à ceux de la nutation initiale, ce qui résulte de ce que sa période est diurne, comme celle de cette dernière.

Mais elle a, sur la nutation initiale, cet avantage précieux que, sa période étant exactement connue, on peut éliminer cette variation par la combinaison de deux observations faites à six mois de distance.

Les termes qui précèdent sont à ajouter à ceux que nous avons développés dans une notice antérieure (*).

Dans le résumé qui suit, nous commencerons par reproduire les formules qui résultent de celles de Peters, si l'on y substitue, comme nous avons démontré qu'il faut le faire dans une intégration rigoureuse, au facteur $\frac{\mu-\varpi}{1-\varpi}$, employé uniformément dans tous ses termes, le facteur

$$\frac{\mu-\varpi\pm\nu_2\mu}{(1\pm\nu_2)^2-\varpi};$$

et comme $-\sin\theta\Delta\Phi$ intervient dans les formules de réduction plutôt que $-\Delta\psi$, c'est cette première expression dont nous donnerons la valeur numérique.

Indépendamment de cette modification exigée par la rigueur, nous en introduirons une autre, fort avantageuse en pratique : nous convertirons les longitudes moyennes de la Lune, dont Peters a fait usage, en longitudes vraies, en nous bornant à écrire

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,☾_m=\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,2☾+0.11\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,(☾+\Gamma')-0.11\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,(3☾-\Gamma').$$

(*) *Annuaire* pour 1893.

Nous nous sommes assuré que les termes en $\cos(3☾_m - \Gamma')$, qui ne sont pas négligeables dans les formules de Peters, disparaissent ainsi presque entièrement, comme le font, du reste, ceux en $(3\odot_m - \Gamma)$.

Les formules de Peters, ainsi modifiées, seront (1900)

$$
(6)\left\{\begin{aligned}
\Delta\theta &= 9.224\cos☊ - 0.090\cos 2☊ + 0.553\cos 2\odot \\
&\quad + 0.009\cos(\odot + \Gamma) - 0.007\cos(2\odot - ☊) \\
&\quad + 0.005\cos(3\odot - \Gamma) + 0.092\cos 2☾ \\
&\quad + 0.018\cos(2☾ - ☊). \\
-\sin\theta\Delta\psi &= nt + 6.868\sin☊ - 0.082\sin 2☊ + 0.508\sin 2\odot \\
&\quad - 0.051\sin(\odot - \Gamma) + 0.008\sin(\odot + \Gamma) \\
&\quad - 0.005\sin(2\odot - ☊) + 0.002_4\sin(3\odot - \Gamma) \\
&\quad + 0.088\sin 2☾ - 0.028\sin(☾ - \Gamma') \\
&\quad + 0.0136\sin(2☾ - ☊) + 0.005\sin(☾ + \Gamma')
\end{aligned}\right.
$$

A ces formules, qui se rapportent au pôle ou à l'équateur *géographique*, nous avons encore à ajouter celles de la nutation initiale, de la nutation diurne et de la variation annuelle de la latitude.

Nous donnerons ces dernières directement en Æ et en déclinaison (*) :

$$
(7)\left\{\begin{aligned}
\Delta\delta &= -\gamma\cos(\iota t + \beta + \eta) - \nu\sin(L' + 2\eta)\Sigma_1 + \nu\cos(L' + 2\eta)\Sigma_2 \\
&\quad - \frac{i}{2}\cos(M + \eta)\cos(-A + \odot). \\
\cot\delta\Delta\alpha &= \gamma\sin(\iota t + \beta + \eta) - \nu\sin(L' + 2\eta)\Sigma_2 - \nu\cos(L' + 2\eta)\Sigma_1 \\
&\quad + \frac{i}{2}\sin(M + \eta)\cos(-A + \odot).
\end{aligned}\right.
$$

(*) Pour le calcul des deux premiers termes, voir l'*Annuaire* pour 1893, pp. 309-311.

Dans ces formules, γ, ν et i sont les coefficients respectifs de la nutation initiale, de la nutation diurne et de la variation annuelle de latitude, $\beta = \beta_0 + L$, β_0 étant une constante arbitraire, L la longitude orientale du premier méridien par rapport au lieu d'observation; $L' = 2L + \alpha$; $\eta = t - \alpha$, t désignant l'heure sidérale; M et A sont des constantes; $M = I + L$ variera, comme β, avec la longitude de l'observatoire; Σ_1 et Σ_2 sont des fonctions dont nous avons donné antérieurement les expressions en longitudes vraies.

A ces termes, nous ajouterons encore les expressions que nous avons trouvées de ceux du second ordre, provenant, soit de la nutation, soit de l'aberration, soit de leur combinaison, soit enfin de la combinaison de l'aberration annuelle et de l'aberration systématique (*).

Au moyen de ce dernier terme, nous avons pu déduire des hauteurs du pôle observées par Gyldén à Poulkova, la direction (Æ = 277°) et la vitesse (double de celle de la Terre) du système solaire (**).

C'est la première fois que ces quantités sont déterminées directement par le calcul.

Nous représentons par $\Delta_n\alpha$, $\Delta_n\delta$ la réduction au lieu vrai, par A_α, A_δ les coefficients périodiques de la réduction au lieu apparent due à l'aberration annuelle, par $\Delta\alpha = \Delta_n\alpha + kA_\alpha$, $\Delta\delta = \Delta_n\delta + kA_\delta$ les termes du premier ordre dela réduction complète au lieu apparent; ceux du second ordre

(*) Nous avons donné ces expressions dans notre *Traité des réductions stellaires*, et sommes parvenu depuis lors à les mettre sous une forme plus simple.

(**) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1895.

seront

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta^2\delta &= -\tfrac{1}{2}\cot\delta(\Delta\alpha)^2 + k\frac{\sin\theta}{\sin\delta}\cos\odot A_\delta - \tfrac{1}{4}\sin 2\delta\cos^2\delta(\Delta_n\alpha)^2.\\
\Delta^2\alpha &= \frac{2}{\sin 2\delta}(1-\tfrac{1}{2}\cos^2\delta)\Delta\alpha\Delta\delta - \operatorname{tg}\delta\cot\theta\Delta\mu.
\end{aligned}
\right.
$$

Les termes périodiques de l'aberration systématique sont, si l'on désigne par k' sa constante *réduite* (à l'équateur), par A′ l'Æ de l'Apex :

$$
(8^{\text{bis}})\quad \left\{
\begin{aligned}
A'_\delta &= k'\sin\delta\sin(A'-\alpha)A_\alpha.\\
A'_\alpha &= k'\sec\delta\left[\cos(A'-\alpha)A - \frac{2}{\sin 2\delta}\sin(A'-\alpha)A_\delta\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Les formules (6), (7), (8) représentent, comme nous l'avons fait remarquer dans l'article cité (*), le *mouvement du ciel* par rapport à l'*équateur géographique* considéré comme fixe; et leur application à de bonnes observations confirmera cette fixité.

Maintenant que nous avons prouvé la variabilité même du pôle d'inertie, qui était considéré comme le centre du mouvement du pôle instantané, nous pouvons répéter, avec plus de confiance encore, les lignes qui terminent cet article; nous y substituerons seulement le nombre *trois* au nombre deux, dans la mention des nutations à courte période, en considérant comme telle dans les formules, conformément à la remarque que nous en avons faite, la variation annuelle du pôle d'inertie :

« On a vu que la théorie rigoureuse de la nutation

(*) *Annuaire* pour 1893, p. 307.

» exige impérieusement que l'on prenne le pôle géographique comme point de référence, et que, par suite, on
» ajoute aux formules habituellement employées par les
» astronomes les *trois* nutations à courte période.

» Après avoir lu ces quelques pages, les astronomes-
» géomètres se demanderont, non sans un certain éton-
» nement, comment ils ont pu se laisser entraîner, par
» Oppolzer, à perdre de vue la saine interprétation que
» nous venons de donner des formules d'Euler et de
» Laplace, et à substituer en conséquence la notion com-
» pliquée du pôle astronomique, dont on n'est pas en
» mesure de fixer la position, à la notion simple et bien
» définie du pôle géographique. »

Il y a dans les formules (7) et (8) bien des inconnues, sans nous occuper de celles qu'il y aurait à introduire dans les formules (6), où les coefficients des termes dépendant des longitudes du Soleil et de la Lune devront être modifiés à raison de la fluidité intérieure du globe, ni de la correction inévitable de la constante de l'aberration, dans le calcul de laquelle il n'a pas encore été tenu compte ni des trois nutations à courte période (7), ni de l'aberration systématique (8).

Quant à la nutation initiale et à la variation annuelle du pôle d'inertie, nous répéterons ce que nous avons dit de la première et confirmé par les applications : c'est qu'on les déterminera, en éliminant toutes les autres corrections, par l'observation de passages supérieurs et inférieurs consécutifs.

Pour la nutation diurne, il faudrait surtout pouvoir observer, à six heures d'intervalle, des étoiles distantes de quelques minutes seulement du pôle.

Nous laisserons celle-ci provisoirement de côté; elle est, pensons-nous, moins considérable que les deux autres, et, surtout, elle touche de beaucoup moins près à la grande question à l'ordre du jour : celle des variations de latitude.

Occupons-nous donc spécialement des termes suivants de la formule (7) :

$$(9)\qquad \Delta\delta = -\gamma\cos(\iota t+\beta+n) - \frac{i}{2}\cos(M+n)\cos(A+\odot),$$

$$(10)\qquad \cot\delta\Delta\alpha = \gamma\sin(\iota t+\beta+n) + \frac{i}{2}\sin(M+n)\cos(A+\odot),$$

et plus particulièrement de la formule (9), qui se rapporte au mode d'observation le plus usité pour la détermination des latitudes, et qui s'écrira pour le passage supérieur, observé dans ce mode :

$$(11)\qquad \Delta\delta = -\gamma\cos(\iota t+\beta) - \frac{i}{2}\cos M\cos(-A+\odot).$$

Cette formule renferme cinq inconnues, γ, ν, ι, β, $i\cos M$ et A; γ, ι et A sont constantes pour tous les observatoires, à la condition de faire varier A de 180° pour l'hémisphère austral; β augmentera de 1° par degré de longitude occidentale; M de même, et, par suite, $i\cos M$ variera d'un observatoire à l'autre.

ι est égal à $\frac{2\pi}{T}$, T étant la période de la nutation initiale.

Nous venons de la déterminer aussi exactement que possible par les observations, de même que l'angle β; le nombre des inconnues se réduirait ainsi à trois, parmi lesquelles l'une, A, ne tardera pas à être connue. Il ne restera plus alors que les inconnues γ et $i\cos M$. Encore

pourra-t-on éliminer cette dernière par la combinaison de couples d'observations faites à six mois d'intervalle.

Il sera intéressant toutefois de la déterminer dans plusieurs observatoires différant entre eux en longitude de une à six heures, ou davantage; on pourra ainsi fixer approximativement la position du *méridien d'inertie*, sur lequel les variations annuelles de latitude seront un maximum (positif ou négatif), tandis qu'elles seront nulles sur le méridien perpendiculaire à ce dernier.

Il va de soi, comme nous l'avons fait remarquer, que ces variations annuelles, comme celles qui proviennent de la nutation initiale, sont égales et de signes contraires sur deux méridiens opposés, puisque β et $M\eta$ diffèrent de 180°; cette déduction a été, on le sait, parfaitement confirmée par les déterminations simultanées de latitude qui ont été effectuées à Berlin et à Honolulu.

Cherchons la formule complète de réduction de ces observations, abstraction faite toutefois des erreurs probables que nous avons signalées dans la réduction au lieu apparent, que nous supposerons correcte.

La formule (11) s'écrira, en appelant Φ la hauteur du pôle *géographique*, z la distance zénithale observée, et en posant $\gamma\sin\beta = u$, $\gamma\cos\beta = v$, $\frac{i}{2}\cos M\sin A = r$, $\frac{i}{2}\cos M\cos A = s$, $z+\delta = \Phi_a$ qu'on appelle la *latitude astronomique* :

$$(12)\qquad \Phi = \Phi_a + u\sin\iota t - v\cos\iota t - r\sin\odot - s\cos\odot.$$

Si nous faisons $\Phi_a = \Phi_o + n$, $\Phi = \Phi_o + z$, nous obtiendrons

$$o = n + u\sin\iota t - v\cos\iota t - r\sin\odot - s\cos\odot - z,$$

équation à cinq inconnues, en admettant que ι soit connu.

Si β l'est aussi, le nombre des inconnues se réduira à quatre, et l'on aura (11)

$$(13) \qquad o = n - \gamma \cos(\alpha + \beta) - r \sin \odot - s \cos \odot - z.$$

Quand A sera aussi connu, en posant $\frac{i}{2} \cos M = h$, on aura simplement

$$(14) \qquad o = n - \gamma \cos(\alpha + \beta) - h \cos(-A + \odot).$$

Telle est la forme simple que l'on pourra bientôt donner à l'expression des variations de latitude.

Comme il a été dit, toutes nos formules se rapportent au pôle ou à l'équateur géographique.

On aura remarqué l'importance que nous attachons à ce point.

Et on la comprendra aisément si l'on songe que, seul, le pôle *géographique* permet de définir un *méridien fixe*, et que de cette *fixité* dépend la détermination correcte de l'heure et de l'ascension droite.

Aussi l'une des premières nécessités d'un observatoire où l'on veut déterminer avec précision les Æ, est-elle une bonne mire très stable, dont on puisse considérer l'azimut comme absolument constant.

Ce procédé est beaucoup plus sûr que celui qui consiste à déterminer l'azimut de la mire par des observations de la polaire, puisqu'on ne possède pas de formules correctes pour leur réduction : la variation annuelle du pôle, la nutation diurne, l'aberration systématique, la correction indubitable de la constante de l'aberration, autant de quantités qui n'entrent pas dans ces formules et qui doivent y entrer, comme nous venons de le démontrer.

Nous ne parlons pas de la nutation initiale, puisque les astronomes prennent le pôle astronomique pour point de référence. Mais à quel prix, nous l'avons dit : au prix d'une détermination incorrecte de l'heure, puisque le pôle instantané ne détermine pas un méridien fixe.

Aussi, tandis que nous avons pu effectuer une détermination très exacte de la nutation initiale en utilisant les observations de la polaire à Dorpat, où F.-W. Struve a certainement fait usage d'un méridien fixe, n'avons-nous rien pu tirer à cet égard des observations de Poulkova, où l'on déduit l'azimut de la mire des observations journalières, en négligeant la nutation initiale, c'est-à-dire en prenant pour point de référence le pôle instantané.

CONCLUSION.

Pour déterminer exactement l'heure et pour avoir des formules de réduction absolument correctes, il faut en revenir au pôle géographique et aux formules de Laplace, qui sont aussi celles de Poisson, Peters, Serret et Tisserand, complétées par les termes dont nous avons donné ci-dessus les expressions (7) et (8).

Et le premier soin de l'astronome doit être la détermination des constantes qui entrent dans celles-ci.

C'est seulement quand ces constantes seront assez exactement connues qu'on pourra décider si le pôle *géographique* est sujet à des variations séculaires, comme croit l'avoir établi Fergila, l'un des promoteurs des recherches sur les variations de latitude, et si l'écorce terrestre est plastique, comme le pensent W. Thomson et G. Darwin.