Nouvelle recherche des termes du second ordre dans les formules de réduction des circompolaires en ascension droite et déclinaison; par F. Folie, membre de l'Académie.

Dans le volume des observations de Kiew qui vient de paraître, M. Fabritius reconnaît l'inexactitude, que j'ai signalée en 1888 (*), de l'expression de ses termes du second ordre en déclinaison. Mais il maintient que celle qu'il a donnée en Æ est correcte, et il cherche à en donner une démonstration différente de celle qu'Oppolzer avait reproduite, et que j'ai également critiquée.

Mon intention n'est pas de réfuter ici cette démonstration, mais plutôt d'exposer un nouveau procédé de recherche de ces termes du second ordre, qui conduit à une forme à la fois correcte, élégante et indépendante, en grande partie, de celle des termes du premier ordre.

L'idée de M. Fabritius était ingénieuse; il a cherché à exprimer directement les termes du second ordre en Æ et déclinaison en fonction de ceux du premier, et ses formules, sans être absolument correctes, approchent cependant d'assez près de l'exactitude pour qu'il soit utile de les compléter de manière qu'elles ne laissent absolument rien à désirer à cet égard.

C'est là l'objet de la présente note.

La recherche de ces termes est triple : celle des termes du second ordre tant de la nutation que de l'aberration, et celle des termes qui proviennent de la combinaison de la nutation et de l'aberration. La première ne peut s'effectuer qu'en partant des formules différentielles, seules

(*) *Bull. astr.*, numéros de février et suivants.

absolument correctes; dans la dernière, il suffit, comme l'ont généralement fait les astronomes, de substituer le lieu vrai de l'étoile à son lieu moyen dans l'expression de l'aberration.

L'importance que j'attache aux observations de M. Fabritius, qui sont des plus propres à la détermination, non seulement des constantes des deux nutations à courte période, mais bien probablement d'autres constantes mal connues jusqu'ici (je citerai tout particulièrement celle de l'aberration), m'a engagé à traiter de leur réduction *in extenso*.

§ 1. — *Termes du second ordre de la nutation.*

Les variations en Æ et déclinaison s'expriment en fonction des variations en obliquité et longitude par

$$(1) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt} - \cot\theta \frac{d\mu}{dt} = \operatorname{tg}\delta\left(\sin\alpha\frac{d\mu}{dt} - \cos\alpha\frac{d\theta}{dt}\right), \\ &\frac{d\delta}{dt} = \cos\alpha\frac{d\mu}{dt} + \sin\alpha\frac{d\theta}{dt}, \end{aligned} \right.$$

$\frac{d\mu}{dt}$ représentant $\sin\theta\,\frac{d\lambda}{dt}$, α et δ les coordonnées vraies de l'étoile.

Les termes du premier ordre $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ s'obtiennent en prenant pour α et δ l'Æ et la déclinaison moyenne, α_m et δ_m:

$$(2) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta\alpha - \cot\theta\Delta\mu = \operatorname{tg}\delta_m(\sin\alpha_m\Delta\mu - \cos\alpha_m\Delta\theta); \\ &\Delta\delta = \cos\alpha_m\Delta\mu + \sin\alpha_m\Delta\theta. \text{ (*)} \end{aligned} \right.$$

(*) Nous avons tenu compte ailleurs (*Traité des réd. stell.*, pp. 60 et suivantes) des termes que la variabilité de θ introduit dans les expressions de $\Delta\mu$ et $\Delta\theta$. Nous n'y reviendrons pas ici, et nous admettrons que ces dernières quantités ont été calculées correctement.

Nous allons rechercher ceux du second ordre qui proviennent de la substitution de l'Æ vraie à l'Æ moyenne.

Nous désignerons ultérieurement les coordonnées moyennes par α et δ, les termes du premier ordre de leurs variations dues à la nutation par $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$, et par $\delta\Delta\alpha$, $\delta\Delta\delta$ les termes du second ordre qu'il s'agit de trouver.

Pour cette recherche, nous pourrons écrire correctement :

$$\delta\frac{d\alpha}{dt}=\mathrm{tg}(\delta+\Delta\delta)\left\{\sin(\alpha+\Delta\alpha)\frac{d\mu}{dt}-\cos(\alpha+\Delta\alpha)\frac{d\theta}{dt}\right\}-\mathrm{tg}\delta\left\{\sin\alpha\frac{d\mu}{dt}-\cos\alpha\frac{d\theta}{dt}\right\};$$

d'où

$$(5)\qquad \delta\frac{d\alpha}{dt}=\sec^2\delta.\Delta\delta\left\{\sin\alpha\frac{d\mu}{dt}-\cos\alpha\frac{d\theta}{dt}\right\}+\mathrm{tg}\delta.\Delta\alpha\left\{\cos\alpha\frac{d\mu}{dt}+\sin\alpha\frac{d\theta}{dt}\right\},$$

si l'on néglige les termes du troisième ordre. De même

$$(5')\qquad \ldots\ \delta\frac{d\delta}{dt}=\Delta\alpha\left\{-\sin\alpha\frac{d\mu}{dt}+\cos\alpha\frac{d\theta}{dt}\right\}.$$

Si nous remplaçons les symboles $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ par leurs expressions, il vient

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}\delta\frac{d\alpha}{dt}&=\sec^2\delta\{\cos\alpha\Delta\mu+\sin\alpha\Delta\theta\}\left\{\sin\alpha\frac{d\mu}{dt}-\cos\alpha\frac{d\theta}{dt}\right\}\\&+\mathrm{tg}^2\delta\{\sin\alpha\Delta\mu-\cos\alpha\Delta\theta\}\left\{\cos\alpha\frac{d\mu}{dt}+\sin\alpha\frac{d\theta}{dt}\right\}\\&+\mathrm{tg}\delta\cot\theta\Delta\mu\left(\cos\alpha\frac{d\mu}{dt}+\sin\alpha\frac{d\theta}{dt}\right);\end{aligned}\right.$$

et

$$(4')\qquad \delta\frac{d\delta}{dt}=\{\cot\theta\Delta\mu+\mathrm{tg}\delta(\sin\alpha\Delta\mu-\cos\alpha\Delta\theta)\}\left\{-\sin\alpha\frac{d\mu}{dt}+\cos\alpha\frac{d\theta}{dt}\right\}.$$

Intégrant, on obtient, en négligeant $\frac{1}{2}\int(\Delta\theta d\mu-\Delta\mu d\theta)$, qui n'est pas multiplié par $tg\,\delta$:

$$\delta\Delta\alpha=\left(\mathrm{tg}^2\delta+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{1}{2}\sin 2\alpha\left[(\Delta\mu)^2-(\Delta\theta)^2\right]-\cos 2\alpha\Delta\mu\Delta\theta\right\}$$

$$+\ \mathrm{tg}\,\delta\cot\theta\left[\frac{1}{2}\cos\alpha(\Delta\mu)^2+\sin\alpha\int\Delta\mu\frac{d\theta}{dt}dt\right]$$

$$\delta\Delta\delta=-\,\mathrm{tg}\,\delta\left\{\frac{1}{2}\sin^2\alpha(\Delta\mu)^2+\frac{1}{2}\cos^2\alpha(\Delta\theta)^2-\sin\alpha\cos\alpha\Delta\mu\Delta\theta\right\}$$

$$-\cot\theta\left\{\frac{1}{2}\sin\alpha(\Delta\mu)^2-\cos\alpha\int\Delta\mu\frac{d\theta}{dt}dt\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\delta\left[\sin\alpha\Delta\mu-\cos\alpha\Delta\theta\right]^2-\cot\theta\left\{\frac{1}{2}\sin\alpha(\Delta\mu)^2-\cos\alpha\int\Delta\mu\frac{d\theta}{dt}dt\right\}$$

$$(5')\qquad \delta\Delta\delta=-\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\delta}\left[\Delta\alpha-\cot\theta\Delta\mu\right]^2-\cot\theta\left\{\frac{1}{2}\sin\alpha(\Delta\mu)^2-\cos\alpha\int\Delta\mu\frac{d\theta}{dt}dt\right\}.$$

L'expression $\delta\Delta\alpha$ peut se simplifier également.

On remarquera que

$$\frac{1}{2}\sin 2\alpha\left[(\Delta\mu)^2-(\Delta\theta)^2\right]-\cos 2\alpha\Delta\mu\Delta\theta=\cot\delta\left[\Delta\alpha-\cot\theta\Delta\mu\right]\Delta\delta;$$

de sorte que $\delta\Delta\alpha$ peut s'écrire :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}\delta\Delta\alpha&=\left(\mathrm{tg}\,\delta+\frac{1}{2}\cot\delta\right)(\Delta\alpha-\cot\theta\Delta\mu)\Delta\delta\\&+\mathrm{tg}\,\delta\cot\theta\left[\frac{1}{2}\cos\alpha(\Delta\mu)^2+\sin\alpha\int\Delta\mu\frac{d\theta}{dt}dt\right].\end{aligned}\right.$$

On voit que les termes du second ordre des variations en Æ et déclinaison ne s'expriment pas exclusivement en fonction de ceux du premier ordre, même si l'on se borne aux termes prépondérants, du moins en Æ.

Car, en déclinaison, on pourrait s'en tenir, dans la majorité des cas, à l'expression

$$\delta\Delta\delta = -\frac{1}{2\operatorname{tg}\delta}(\Delta\alpha)^2.$$

Mais, en Æ, on voit qu'il ne suffit pas d'avoir égard au premier terme de $\delta\Delta\alpha$:

$$\left(\operatorname{tg}\delta + \frac{1}{2}\cot\delta\right)(\Delta\alpha - \cot\theta\,\Delta\mu)\,\Delta\delta.$$

On doit y ajouter :

$$\operatorname{tg}\delta\cot\theta\left[\frac{1}{2}\cos\alpha(\Delta\mu)^2 + \sin\alpha\int\Delta\mu\,\frac{d\theta}{dt}dt\right].$$

Pour le calcul de ces termes nous prendrons :

$$\frac{d\theta}{dt} = a_0\sin\Omega - a_2\sin 2\odot$$

$$\Delta\mu = p_0 t - \frac{a_0'}{\omega_1}\sin\Omega - \frac{a_2'}{2m_1}\sin 2\odot,$$

en appelant $-\omega_1$ et m_1 les moyens mouvements du nœud et du soleil. D'où nous tirons, en faisant abstraction des termes en $4\odot$:

$$\Delta\mu\frac{d\theta}{dt} = p_0 t\left[a_0\sin\Omega - a_2\sin 2\odot\right] - \frac{1}{2}\frac{a_0a_0'}{\omega_1}(1-\cos 2\Omega)$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{a_0'a_2}{\omega_1} - \frac{a_0a_2'}{2m_1}\right]\left[\cos(2\odot-\Omega) - \cos(2\odot+\Omega)\right] + \frac{1}{2}\frac{a_2a_2'}{2m_1}.$$

On aura ensuite :

$$(\Delta\mu)^2 = p_0^2t^2 - 2p_0t\left[\frac{a_0'}{\omega_1}\sin\Omega + \frac{a_2'}{2m_1}\sin 2\odot\right] + \frac{1}{2}\frac{a_0'^2}{\omega_1^2}(1-\cos 2\Omega)$$
$$+ \frac{a_0'a_2'}{2\omega_1m_1}\left[\cos(2\odot-\Omega) - \cos(2\odot+\Omega)\right] + \frac{1}{4}\frac{a_2'^2}{2m_1^2}.$$

Puis

$$\int\Delta\mu\frac{d\theta}{dt}dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{a_0a_0'}{\omega_1} + \frac{a_2a_2'}{2m_1}\right]t + p_0t\left[\frac{a_0}{\omega_1}\cos\Omega + \frac{a_2}{2m_1}\cos 2\odot\right]$$
$$+ p_0\left[\frac{a_0}{\omega_1^2}\sin\Omega - \frac{a_2}{4m_1^2}\sin 2\odot\right] - \frac{1}{4}\frac{a_0a_0'}{\omega_1^2}\sin 2\Omega$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{a_0'a_2}{\omega_1} - \frac{a_0a_2'}{2m_1}\right]\left[\frac{1}{2m_1+\omega_1}\sin(2\odot-\Omega)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2m_1-\omega_1}\sin(2\odot+\Omega)\right].$$

On réduira en nombres, sachant que, si l'on appelle s_1 le sinus de l'obliquité moyenne pour 1850 :

$$p_0 = 50{,}57\,s_1;\ \frac{a_0}{-\omega_1} = 9{,}24;\ \frac{a_0'}{-\omega_1} = 17{,}27\,s_1$$

$$\frac{a_2}{2m_1} = 0{,}55;\ \frac{a_2'}{2m_1} = 1{,}26\,s_1;\ \lg(-\omega_1) = 9{,}5284,\ \lg m_1 = 0{,}7982.$$

Tous les termes devront être multipliés par

$$\sin 1'' = \frac{1}{206\,265}$$

On trouvera ainsi, en omettant les termes inférieurs au dix millième de second d'arc :

$$(\Delta\mu)^2 = 0'',00195\, t^2 + 0,0015\, t \sin\Omega - 0'',0001\, t \sin 2\odot$$
$$- 0'',0001 \cos 2\Omega + 0'',0001$$
$$\int \Delta\mu \frac{d\theta}{dt} dt = 0'',0000_6\, t - 0'',0009\, t \cos\Omega + 0'',0000_5\, t \cos 2\odot$$
$$+ 0'',0026_6 \sin\Omega - 0,0001 \sin 2\Omega.$$

L'expression du terme considéré sera donc

$$\text{(C)}\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tg}\delta \cot\theta \Big\{ \frac{1}{2}\cos\alpha (0''0019_5\, t^2 + 0'',0013_4\, t \sin\Omega - 0'',0001\, t \sin 2\odot \\ &\qquad - 0'',0001 \cos 2\Omega + 0'',0001) \\ &+ \sin\alpha (0'',00006\, t - 0'',0009\, t \cos\Omega + 0'',00005\, t \cos 2\odot \\ &\qquad + 0'',00266 \sin\Omega - 0,0001 \sin 2\Omega) \Big\}. \end{aligned}\right.$$

Nous l'écrirons simplement

$$\text{(C')}\qquad \operatorname{tg}\delta \cot\theta . F.$$

Les termes du second ordre de la nutation seront donc, en Æ :

$$\text{(A)}\qquad \left(\operatorname{tg}\delta + \frac{1}{2}\cot\delta\right)(\Delta\alpha - \cot\theta\Delta\mu)\Delta\delta + \operatorname{tg}\delta \cot\theta . F,$$

et en déclinaison, si l'on s'en tient aux termes qui ont $\operatorname{tg}\delta$ pour facteur :

$$\text{(B)}\qquad -\frac{1}{2\operatorname{tg}\delta}(\Delta\alpha - \cot\theta\Delta\mu)^2\ (^*).$$

(*) C'est à tort que M. Fabritius a rejeté, dans l'Introduction au tome III des observations de M. Kiew, une forme analogue qu'il avait trouvée précédemment, parce que, dit-il, elle conduit à une valeur infinie pour $\delta = 0$. On voit, au contraire, qu'elle donne une valeur nulle dans ce cas, puisque $\Delta\alpha - \cot\theta\Delta\mu$ a $\operatorname{tg}\delta$ pour facteur. La formule de M. Fabritius ne renfermait pas, il est vrai, le terme $\cot\theta\Delta\mu$; mais c'est en cela justement qu'elle péchait.

§ II. — *Termes du second ordre de l'aberration.*

Les termes du second ordre de l'aberration *annuelle* peuvent se mettre sous la forme suivante, si l'on représente ceux du premier en ascension droite et en déclinaison respectivement par A_α et A_δ : en ascension droite

$$\text{(A')}\qquad + \frac{2}{\sin 2\delta} A_\alpha A_\delta.$$

En déclinaison :

$$\text{(B')}\qquad -\frac{1}{4}\sin 2\delta (A_\alpha)^2 - \frac{2}{\sin 2\delta}(A_\delta)^2\ (^*).$$

§ III. — *Termes du second ordre provenant de la combinaison de la nutation et de l'aberration.*

Le calcul des termes du second ordre, provenant de la combinaison de la nutation annuelle et de l'aberration, a déjà été effectué très simplement par Wagner (observations de Poulkova, vol. I, p. 117) (**).

Si nous y revenons un instant, c'est surtout pour montrer la différence essentielle qui existe entre ce calcul et le précédent, ce dernier exigeant que l'on parte des formules différentielles en Æ et déclinaison, l'autre non.

L'aberration s'exprime par les formules suivantes, abstraction faite ici des termes du second ordre :

$$A_\alpha = \sec\delta (C\cos\alpha + D\sin\alpha),$$
$$A_\delta = C(\operatorname{tg}\theta\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta) + D\cos\alpha\sin\delta,$$

(*) Ces formes se déduisent aisément de celles que nous avons données dans notre *Traite des réductians stellaires*, p. 74, si l'on fait abstraction des termes qui proviennent de la combinaison de l'aberration annuelle et de l'aberration systématique.

(**) Voir aussi *Traité des réductions stellaires*, p. 79.

dans lesquelles α et δ représentent les coordonnées vraies de l'étoile, c'est-à-dire $\alpha_m + \Delta\alpha$ et $\delta_m + \Delta\delta$; nous écrirons de nouveau simplement, dans les formules suivantes, α et δ au lieu de α_m et δ_m. On aura ainsi pour les termes cherchés :

$$\Delta A_\alpha = \mathrm{tg}\,\delta . A_\alpha \Delta\delta + \sec\delta(-\mathrm{C}\sin\alpha + \mathrm{D}\cos\alpha)\Delta\alpha.$$
$$\Delta A_\delta = \left[\mathrm{C}(-\mathrm{tg}\,\theta\sin\delta - \sin\alpha\cos\delta) + \mathrm{D}\cos\alpha\cos\delta\right]\Delta\delta - (\mathrm{C}\cos\alpha + \mathrm{D}\sin\alpha)\sin\delta\Delta\alpha.$$

Si nous ne nous occupons que des étoiles voisines du pôle, pour lesquelles seules ces termes du second ordre doivent être calculés, nous pourrons, dans ce calcul, admettre que $\cos\delta$ est négligeable, et n'écrire que les termes renfermant $\mathrm{tg}\,\delta$ comme facteur explicite ou implicite, ce qui simplifiera très considérablement les expressions.

Alors, en effet, nous pourrons écrire

(A'') $$\Delta A_\alpha = \mathrm{tg}\,\delta A_\alpha \Delta\delta + \frac{2A\delta}{\sin 2\delta}\Delta\alpha$$

(B'') $$\Delta A_\delta = -\frac{1}{2}\sin 2\delta A_\alpha \Delta\alpha.$$

Il va de soi qu'on peut remplacer, dans ces formules, $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ par les termes du premier ordre seulement de la réduction au lieu vrai.

§ IV. — *Expression complète des termes du second ordre.*

L'ensemble des termes du second ordre, à ajouter à la réduction habituelle au lieu apparent, pour les circompolaires, est donc, en Æ,

$$(A) + (A') + (A''),$$

ou

$$\left(\mathrm{tg}\,\delta + \frac{1}{2}\cot\delta\right)(\Delta\alpha - \cot\theta\Delta\mu)\Delta\delta + \mathrm{tg}\,\delta\cot\theta . \mathrm{F} + \mathrm{tg}\,\delta A_\alpha \Delta\delta + \frac{2A\delta}{\sin 2\delta}(\Delta\alpha + A_\alpha),$$

qu'on peut écrire, en négligeant un terme absolument insensible :

(I) $$(\Delta\alpha + A_\alpha)\left(\mathrm{tg}\,\delta\Delta\delta + \frac{2}{\sin 2\delta}A_\delta\right) + \frac{1}{2}\cot\delta\Delta\alpha\Delta\delta + \mathrm{tg}\,\delta\cot\theta(\mathrm{F} - \Delta\mu\Delta\delta).$$

La formule de M. Fabritius est, en employant nos notations :

(I') $$\mathrm{tg}\,\delta(\Delta\alpha + A_\alpha)(\Delta\delta + A_\delta).$$

Pour les étoiles très voisines du pôle, on peut considérer $\frac{2}{\sin 2\delta}$ comme équivalent à $\mathrm{tg}\,\delta$; ceci même admis, les termes à ajouter à la formule de l'astronome russe seraient encore

$$\frac{1}{2}\cot\delta\Delta\alpha\Delta\delta + \mathrm{tg}\,\delta\cot\theta(\mathrm{F} - \Delta\mu\Delta\delta).$$

Le dernier terme de cette expression renferme $\mathrm{tg}\,\delta$ comme facteur; il n'est donc nullement négligeable; on peut faire abstraction du premier.

Si donc on veut faire usage de la formule très commode de M. Fabritius en Æ, en appelant maintenant, avec lui, $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ la réduction au lieu apparent, et en posant $\mathrm{F} - \Delta\mu\Delta\delta = \mathrm{G}$, les termes du second ordre seront :

$$\mathrm{tg}\,\delta(\Delta\alpha\Delta\delta + \cot\theta . \mathrm{G})$$

Or,

$$\Delta\mu\Delta\delta = \Delta\mu(\cos\alpha\Delta\mu + \sin\alpha\Delta\theta).$$

L'expression de $\Delta\theta$ est

$$\Delta\theta = \frac{a_0}{\omega_1}\cos \Omega + \frac{a_2}{2m_1}\cos 2\odot.$$

En se reportant à la valeur F (voir les formules (C) et (C')), on trouve :

$$G = -\frac{1}{2}\cos\alpha(0'',0019_5 t^2 + 0'',0015\, t\sin\Omega - 0'',0001\, t\sin 2\odot$$
$$- 0'',0001\cos 2\Omega + 0'',0001)$$
$$+ \sin\alpha(0''\,00006\, t + 0'',0026_6\sin\Omega + 0,0001\sin 2\Omega),$$

qu'on peut réduire à

$$G = -\frac{1}{2}\cos\alpha(0,002\, t^2 + 0,0015\, t\sin\Omega) + 0,0027\sin\alpha\sin\Omega\ (^*).$$

En déclinaison, l'ensemble des termes du second ordre sera

$$(B) + (B') + (B''),$$

ou

$$\text{(II)}\qquad -\frac{1}{2}\cot\delta(\Delta\alpha)^2 - \frac{1}{4}\sin 2\delta(A_\alpha)^2 - \frac{2}{\sin 2\delta}(A_\delta)^2 - \frac{1}{2}\sin 2\delta A_\alpha \Delta\alpha,$$

si l'on fait abstraction, pour les étoiles très voisines du pôle, du terme $\cot\theta\Delta\mu$ vis-à-vis de $\Delta\alpha$.

M. Fabritius a donné, dans le tome II des observations de Kiew, l'expression

$$(1)\qquad -\frac{1}{2}\cot\delta(\Delta\alpha)^2,$$

(*) En reprenant la formule (5), on trouvera qu'elle peut se réduire à

$$\delta\Delta\alpha = \operatorname{tg}\alpha\,\Delta\alpha\,\Delta\delta - \operatorname{tg}\delta\cot\theta\left[\tfrac{1}{2}\cos\alpha(\Delta\mu)^2 + \sin\alpha\int\Delta\theta\delta\mu\right],$$

ce qui simplifie le calcul de G.

et dans le tome III,

$$(2)\qquad -\frac{1}{4}\sin 2\delta(\Delta\alpha)^2,$$

dans lesquelles $\Delta\alpha$ représente la variation totale du premier ordre que nous représentons par $\Delta\alpha + A_\alpha$ (*).

Dans cette dernière notation, l'expression (1) deviendrait

$$-\frac{1}{2}\cot\delta(\Delta\alpha)^2 - \cot\delta A_\alpha\Delta\alpha - \frac{1}{2}\cot\delta(A_\alpha)^2.$$

Elle s'écarte assez peu de la nôtre, puisque

$$\cot\delta - \frac{1}{2}\sin 2\delta = \cot\delta\cos^2\delta,$$

qui est très petit pour les étoiles fort voisines du pôle. L'expression (1) de M. Fabritius ne renferme cependant pas notre terme

$$-\frac{2}{\sin 2\delta}(A_\delta)^2.$$

Sa formule (2) peut s'écrire

$$-\frac{1}{4}\sin 2\delta(\Delta\alpha)^2 - \frac{1}{2}\sin 2\delta A_\alpha\Delta\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\delta(A_\alpha)^2.$$

On peut dire de celle-ci ce qui a été dit de la première, puisque la différence entre $\frac{1}{4}\sin 2\delta$ et $\frac{1}{2}\cot\delta$, qui entre dans notre expression, est $-\frac{1}{2}\cot\delta\cos^2\delta$, différence très petite pour les étoiles considérées.

(*) On remarquera que les deux facteurs par lesquels ces formules diffèrent l'une de l'autre, et qui sont équivalents entre eux pour des étoiles très voisines du pôle, se présentent tous deux dans nos formules (voir la note précédente).

Reste toujours en moins le dernier terme $-\frac{2}{\sin 2\delta}(A_\delta)^2$, comme dans l'autre formule, à la petite différence près des facteurs $\frac{1}{2}\cot\delta$ et $\frac{1}{4}\sin 2\delta$.

Or, ce dernier terme n'est pas négligeable, puisqu'il renferme le facteur $\sec\delta$.

Les formules de M. Fabritius ne peuvent donc pas être regardées comme suffisamment correctes.

La forme en est, toutefois, tellement commode, que les astronomes n'hésiteront pas, je pense, à les employer, en y ajoutant les termes de correction que nous venons de trouver (*).

Sur les agrandissements des photographies lunaires de de Lick Observatory exécutés par M. Prinz, assistant à l'Observatoire royal; par F. Folie, membre de l'Académie.

J'ai l'honneur de présenter à la Classe plusieurs agrandissements photographiques de régions lunaires, exécutés par M. Prinz, d'après des clichés que M. Holden, le savant directeur de Lick Observatory, a bien voulu envoyer à l'Obervatoire de Belgique.

Le problème qui avait été posé était de rechercher quelles modifications subissent les détails d'un cliché lorsqu'on pousse l'agrandissement à des limites dépassant celles auxquelles on s'arrête généralement.

Une première image, sur verre, représentant l'ensemble de la Mer de Nectar, et qui avait déjà été amplifiée au double par les astronomes américains, fut agrandie cinq

---

(*) Le *Nautical Almanac,* ainsi que la *Connaissance des temps,* font usage des formules de M. Fabritius sans y ajouter aucune correction.