

Sur les formules correctes de la nutation initiale.

Par *F. Folie*.

Le Dr. N. Herz me fait vraiment trop d'honneur en intitulant son article (No. 3041) : Zu Hrn. Folie's »tägliche Polhöenschwankung« ; le vrai titre en devrait être : »Zur Laplace'schen täglichen Polhöenschwankung«.

Ceux qui ont lu Laplace, ou qui sont au courant des écrits tout récents que j'ai publiés sur cette matière (B. A. t. VII ; M. N. v. 51 ; Ann^{re} de Brux. 1891) connaissent bien certainement la phrase du grand géomètre que j'ai reproduite à plusieurs reprises, à propos de cette nutation, dont il met l'expression en obliquité sous la forme

$$\theta = h + \frac{n(B-C) - \lambda A}{2n(n+\lambda)(B-C)} G \cos(\varphi + \lambda t + \beta) - \frac{\lambda A + n(B-C)}{2n(n-\lambda)(B-C)} G \cos(\varphi - \lambda t + \beta) :$$

»Si la valeur de G était sensible, ajoute-t-il, on le reconnaîtrait par les variations journalières de la hauteur du pôle ; et puisque les observations les plus précises n'y ont remarqué aucune variation de ce genre, il en résulte que G est insensible, et qu'ainsi l'on peut négliger les parties de θ et de ψ qui dépendent de l'état initial du mouvement de la terre.«^{*})

Plusieurs astronomes, dans ces derniers temps, ont été jusqu'à nier ce caractère diurne de la nutation initiale, si nettement affirmé par Laplace et si reconnaissable par la présence de φ dans les arguments dont elle dépend.

Et leur commune erreur provient de ce que, avec Oppolzer (p. 155) ils se sont dit que c'est l'équateur instantané qui sert aux astronomes de plan fondamental, et non l'équateur géographique, auquel cas la nutation initiale perd, en effet, son caractère diurne pour revêtir celui d'un mouvement à période presque annuelle ; et, pénétrés de cette idée, qui n'a en soi rien que de correct, quelques uns ont inconsciemment oublié que »les formules de la précession et de la nutation se rapportent à l'équateur géographique, et non à l'équateur instantané«.

Mais aucun géomètre, aucun astronome ne s'est jamais avisé de dire, comme le Dr. Herz dans les premières lignes de son article, que cette dernière proposition est fautive ; pas même Oppolzer, dont l'astronome d'Ottakring invoque l'autorité. Qu'on veuille bien relire les lignes extraites par celui-ci de l'ouvrage d'Oppolzer, on n'y trouvera rien de semblable.

Qu'on relise au contraire les pages 146-149 de cet ouvrage, et l'on verra qu'elles se rapportent au pôle géographique.

Qui donc ignore que, dans les équations d'Euler, les vitesses angulaires p , q , r ont lieu autour des axes principaux ?

Et, s'il faut encore confirmer ce point capital par l'opinion expresse du plus grand des géomètres modernes, citons ces lignes de Laplace : »on peut ainsi supposer, dans les deux dernières équations, $p = n$, n étant la

vitesse moyenne angulaire de rotation de la terre autour de son troisième axe principal.«^{*})

Plus bas, il est vrai, p. 157, Oppolzer démontre qu'on peut rapporter au pôle instantané les formules de la page 149, relatives au pôle géographique, en négligeant les termes insensibles qui proviennent de la différence des deux axes, différence qui n'a été prouvée, ajoute-t-il, que tout récemment (in neuerer Zeit).

Ce qui vient corroborer mon affirmation :

»Les formules de la précession et de la nutation donnent (correctement) les variations du pôle géographique, non celles du pôle instantané.«

Est-il nécessaire de dire aux mathématiciens que le mot correctement (que j'ajoute ici entre parenthèses) n'est pas une addition à la pensée que j'exprimais ?

On comprendra aisément, après ces explications, la fausseté de ces lignes :

Daraus folgt wieder, dass man unter der Annahme der allgemein üblichen Praecessionsformeln die instantane Polhöhe zu verwenden hat, wie dies Oppolzer ausdrücklich hervorhebt, und dass durchaus kein Grund vorliegt, um von diesem Usus abzugehen, und nach dem Vorschlage Folie's, den geographischen Meridian zu adoptiren (A. N. I. c. p. 274).

Mais il y a plus. Et je vais démontrer que les astronomes qui voudraient faire usage du méridien instantané, et non, comme on doit le faire d'après moi, du méridien géographique, se mettent tout simplement en contradiction avec l'une des définitions les plus fondamentales de l'astronomie.

Si j'appelle méridien, comme l'ont fait tous les astronomes jusqu'à Oppolzer, le plan déterminé par l'axe du monde (Laplace) et le lieu de l'observation, je puis, avec eux, définir le jour sidéral l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages supérieurs consécutifs d'une étoile fixe par ce plan, se déplaçant, avec la même précision, l'heure et l'AR.

Mais si j'appelle méridien, avec Oppolzer, le plan déterminé par l'axe instantané et le lieu de l'observation, plan qui varie d'un jour à l'autre, comme l'a déjà fait remarquer Bessel, puisque le pôle instantané se déplace à la surface de la terre, que devient le jour sidéral et l'heure, et l'AR. ?

Et qu'on ne me réponde pas que la variation d'un jour à l'autre peut être négligée comme insensible.

De négligence en négligence, quelle confiance pourrait-on avoir dans des formules dont on est en droit d'attendre la plus haute correction ?

Mais les premières définitions et les formules qui en découlent sont absolument correctes, et Oppolzer lui-même est obligé de les prendre comme point de départ de ses recherches (p. 146-149).

Ce n'est qu'ultérieurement (p. 157) que, frappé trop exclusivement par cette idée juste que la terre tourne autour de l'axe instantané, et non autour de l'axe du monde il a

voulu démontrer qu'on peut étendre, sans erreur sensible, à l'équateur astronomique les formules de la mécanique céleste qu'il avait calculées pour l'équateur géographique, oubliant qu'en se plaçant à ce point de vue, il se met en contradiction avec les définitions de l'heure et de l'AR.

Et de ce que les géomètres sont obligés d'établir le mouvement de rotation de la terre dans celui de ses axes principaux, il ne s'ensuit nullement qu'ils la considèrent comme tournant autour d'un de ces axes; l'axe instantané entre implicitement dans leurs formules, mais ils peuvent, dans l'immense majorité des applications, se dispenser de l'en déduire explicitement.

Au surplus, si le point de vue d'Oppolzer était correct, c'est-à-dire si les AR. étaient observées et devaient être calculées dans le méridien instantané, qui ne varie certes guère en 12^h que d'une quantité absolument insensible, comment donc se ferait-il que ces, sont précisément les différences d'AR., observées à 12^h d'intervalle et calculées par moi comme faites dans le méridien géographique, qui m'ont fourni les meilleures déterminations de la nutation initiale? Comment serait-il possible que mes formules en déclinaison, appliquées à un nombre très restreint d'observations (17 à 60 comme on va le voir) me conduisent au but que Peters, Nyrén et Downing ne sont parvenus à atteindre qu'au moyen de centaines d'observations des variations de la latitude astronomique?

Mon point de vue, qui est du reste celui de tous les géomètres qui se sont occupés ex professo de la question, Euler, Laplace, Bessel, Poissons, Serret, Tisserand.

Mon point de vue est donc, non seulement le plus correct, mais le seul correct, et nul géomètre n'en a, du reste, adopté un autre en traitant du mouvement de rotation de la terre, pas même Oppolzer, qui s'est borné à dire qu'on peut, sans erreur sensible, rapporter les formules de la nutation à l'axe instantané.

Et si plusieurs astronomes ont contesté le caractère diurne de la nutation initiale que j'ai affirmé de nouveau après Laplace, c'est parcequ'ils se sont placés à ce dernier point de vue, dont je viens de démontrer l'absolue fausseté.

Un criterium de l'exactitude des formules qu'on emploie, c'est la concordance des résultats qu'elles fournissent.

Or j'ai utilisé le caractère diurne de la nutation initiale pour en conclure que les AR. et les déclinaisons observées à 12^h d'intervalle doivent différer entre elles d'une quantité qui dépend presque exclusivement des constantes de cette nutation, les termes lunaires seuls pouvant varier en 12^h d'une manière un peu sensible; c'est-à-dire que j'ai employé, pour les variations de latitude, précisément les formules qui sont accusées d'incorrection dans la page 274 citée ci-dessus.

J'ai employé des formules analogues en AR.

Elles m'ont conduit, par l'ensemble des observations faites à 12^h d'intervalle par W. Struve à Dorpat en 1823, 24, 25, aux valeurs suivantes des deux constantes γ et β de la nutation initiale :

$$\gamma = 0.077 \quad \beta = 151.95$$

et à un accroissement annuel de 390.5 au lieu de celui de 428 que les astronomes avaient adopté dans la fausse hypothèse de la solidité de la terre.

Comparons d'après cela les résultats du calcul à ceux des meilleures observations.

	Obs.	Calcul	O—C
1824	151.2	—	—
1842 (Peters)	341.6	340.2	+1.4
1850 (Nyrén)	224	224.2	-0.2
1872 (Downing)	175.2	175.2	0.0

Je ne me suis pas contenté de cette concordance très remarquable; car, dans une matière aussi importante, où il ne s'agit, ni plus ni moins, que de démontrer la fluidité intérieure (superficielle) du noyau du globe, il faut imposer la conviction par des preuves multiples.

J'ai donc calculé l'angle β pour chacune des séries suivantes des observations de Peters, en partant de la formule :

$$z + gu + hv = r;$$

z est la différence entre la hauteur du pôle géographique et la latitude astronomique conclue de l'ensemble des observations; r la différence entre la latitude astronomique conclue de chaque observation et celle conclue de l'ensemble;

$$g = \cos it; \quad h = -\sin it; \quad it = 1.07 \text{ par jour moyen}; \\ u = \gamma \cos \beta; \quad v = \gamma \sin \beta.$$

Si l'on applique cette équation, non à chaque détermination isolément, mais à chaque couple de détermination de la latitude combinés de deux passages consécutifs (supérieur et inférieur), on voit aisément que le résidu r est débarrassé des erreurs de réduction, à l'exception seulement de celle qui provient de la négligence de la nutation initiale.

J'ai ainsi trouvé, l'unité étant 0.01 :

Origine	Série	v	u	pois
1842 Avril 1	Avril - Juin 1842	-488	49.2	60
» Juillet 1	Juillet - Sept. »	15.4	-35.4	51
1843 Mars 1	Mars - Avril 1843	-35.0	33.1	32
» Sept. 1	Sept. - Déc. »	-108.7	75.9	22
1844 Avril 1	Mars - Mai 1844	41.0	-15.5	17

Comme l'angle β ne varie pas suffisamment dans l'étendue d'une même série, pour qu'on puisse espérer déduire de celle-ci une valeur satisfaisante de cet angle, je combinerai la première série avec chacune des autres, de la manière déjà indiquée ci-dessus.

Afin de déduire de l'une de ces séries les valeurs de u et v ramenées à l'époque même de la première, je désignerai en général par A l'angle dont β a augmenté entre les deux époques, calculé à raison d'un accroissement annuel de 390.5 , par u_1, v_1 , les valeurs rapportées à la deuxième époque comme origine, et j'aurai :

$$u = u_1 \cos A + v_1 \sin A \\ v = v_1 \cos A - u_1 \sin A.$$

L'application de ces équations à chacune des séries 2) à 5), ramenée au 1^{er} avril 1842, donnera :

	v	u	pois
2)	33.4	19.3	51
3)	-33.8	34.2	32
4)	123.2	-48.9	22
5)	33.4	28.3	17

Et ces valeurs, combinées avec les valeurs 1), donneront enfin

	v	u	β	pois
2)	-11.3	35.48	342.7	111
3)	-43.6	44.0	315.2	92
4)	-6.66	22.9	353.4	82
5)	-30.6	44.6	325.5	77
		Moyenne	334.5	

On voit dans la concordance des différentes valeurs de β entre elles, la confirmation de l'exactitude et de la constance de la période que j'ai assignée à la nutation initiale.

J'ai à peine besoin d'ajouter que l'application de la période de 305 jours, ou de l'accroissement annuel correspondant de 428° , eût fourni des résultats absolument discordants.

Les précédents s'écartent encore assez fort de celui que Peters a déduit de l'ensemble de toutes ses observations. Mais la détermination des latitudes est beaucoup moins propre que celle des AR. à la recherche d'une quantité aussi faible que l'est la nutation initiale.

Nous voici donc en présence de deux faits :

Une théorie correcte qui conduit à des résultats concordants ; et une autre théorie qui conduit, au moyen des mêmes observations, à des résultats tout-à-fait discordants.

Pour prouver que cette dernière est la bonne, et affirmer que la discordance des résultats auxquels elle conduit doit être attribuée à des erreurs d'observation (A. N. l. c. p. 276), tandis que la première transforme cette prétendue discordance en une parfaite harmonie, il faudrait commencer par établir que celle-ci est fautive, et c'est ce qui n'a pas et ne sera pas fait.

Tout n'est pas dit encore cependant sur la nutation initiale, et je compte revenir assez prochainement sur ce sujet.

Moi-même, avec tous les astronomes, j'en ai négligé jusqu'à présent le second terme, qui dépend de $B-A$.

Si les observations prouvent que ce second terme n'est pas insignifiant, la nutation diurne sera théoriquement démontrée.

Ce qui a induit l'auteur de l'article et plusieurs astronomes à rejeter à priori ma période de 336.5 jours, c'est la valeur $\frac{A}{C-A} = 305$ jours calculée dans l'hypothèse d'une terre solide.

Déjà dans l'Annuaire de Bruxelles pour 1890 p. 300, j'ai émis des doutes au sujet de l'exactitude de la période de 305 jours ; et c'est pourquoi j'ai cherché à la déterminer par l'observation.

C'est de l'observation, et non de la théorie, que j'ai déduit la durée de ma période.

Cette durée, opposée par l'observation à celle que la

théorie avait déduite de l'hypothèse de la solidité de la terre, montre la fausseté de cette hypothèse ; elle est une preuve indirecte, mais frappante, de la probabilité de la nutation diurne. En effet, si la terre est solide, cette période est certainement comprise entre 304 et 306 jours : et la durée notablement plus longue assignée à celle-ci par les observations est incompatible avec l'hypothèse de la solidité de la terre.

J'ai un mot à dire encore des erreurs renfermées dans l'article des A. N. p. 275, sur les moments d'inertie de la terre et leur comparaison avec les constantes de la précession de la nutation et de l'action de la lune.

L'auteur a oublié ce point capital que je viens de signaler, sur lequel j'avais déjà insisté antérieurement A. N. 2986, p. 155, et au sujet duquel je crois devoir, pour cette raison, entrer encore dans quelques détails.

La résolution du problème du mouvement de rotation d'un corps solide exige la connaissance des moments d'inertie A, B, C de ce corps, ainsi que des forces qui agissent sur lui. Ce corps est, dans l'hypothèse d'une écorce solide flottant sur la partie externe fluide du noyau, l'écorce solide elle-même.

Pour les mouvements à courte période, comme la nutation diurne, M. Ronkar a démontré*) que le mouvement de l'écorce est indépendant de celui du noyau ; pour les mouvements à très longue période, comme la précession, qu'ils s'effectuent comme si l'écorce et le noyau étaient solitaires.

Ici donc, pas de doute : pour la nutation diurne, les moments A, B, C sont ceux de l'écorce ; pour la précession, et pour le terme prépondérant de la nutation peut-être les moments A, B, C sont ceux de la terre entière.

Mais quant aux termes à période intermédiaire, comme ceux qui dépendent des longitudes du soleil et de la lune, il est certain, et W. Thomson l'affirme expressément**), que le mouvement de l'écorce ne s'effectue pas comme si elle était solitaire du noyau ; autrement dit, les moments d'inertie qui entrent dans les expressions analytiques de ces mouvements doivent avoir une valeur intermédiaire entre ceux de la terre et ceux de l'écorce, quoique bien certainement plus rapprochés, pour le soleil surtout, des premiers que des seconds.

Déjà la période de 336.5 jours, que j'ai déduite des observations, au lieu de celle de 305 jours, que les astronomes avaient calculée pour une terre supposée solide, est une preuve convaincante de l'exactitude de cette conclusion.

Le mouvement relatif de l'écorce et du noyau, dû à la nutation initiale, a, en effet, une période analogue à celle des termes solaires, c'est-à-dire de 300 et des jours.

Si j'appelle A, B, C , les moments d'inertie de l'écorce, A_1, B_1, C_1 ceux de la terre entière, A_2, B_2, C_2 ceux qui conviennent aux termes à période intermédiaire dont je viens de parler, $\frac{A_2}{C_2}, \frac{B_2}{C_2}$ sont respectivement compris entre

*) Ronkar, Sur l'influence du frottement et des actions mutuelles intérieures dans les mouvements périodiques d'un système, t. II des Mémoires couronnés, publiés par l'Académie royale de Belgique, 1888.

**) Tisserand, Méc. céleste t. II p. 480.

$\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ et $\frac{A_1}{C_1}$, $\frac{B_1}{C_1}$. Les raisonnements de M. Herz, applicables à A_1 , B_1 , C_1 ne le sont pas du tout à A_2 , B_2 , C_2 .

Il n'est pas possible à la théorie de déterminer le rapport $\frac{C-A}{A}$ qu'il faut employer pour les termes solaires; et de bonnes observations seules peuvent conduire à cette détermination.

On voit qu'il y a beaucoup à faire pour les astronomes soucieux de la vérité et disposés à me suivre en abandonnant leurs anciens errements. Car, pour ne citer qu'une détermination qui les préoccupe très fort à juste titre, quelle confiance avoir dans la constante de l'aberration, lorsqu'on ne tient pas compte de la nutation initiale, qui peut s'élever environ à 0".1 et dont la période, en jours entiers, est presque annuelle, ni de la correction que devront nécessairement subir les termes solaires de la nutation, par les raisons que je viens d'exposer?

Quelle confiance dans les valeurs de l'obliquité de l'écliptique, qui sont sujettes aux mêmes erreurs, et dont les différences déterminées à deux solstices consécutifs peuvent s'élever à 0".15, en ne tenant compte que du seul premier terme de la nutation initiale?

Voici, en effet, quelle est alors l'expression théorique de cette différence. A l'obliquité moyenne calculée par les astronomes il faut ajouter, pour tenir compte de ce terme,

$$\gamma \cos \beta$$

l'origine du temps étant le solstice considéré.

Au solstice suivant, il faut ajouter, puisque β a augmenté de

$$i t = 0.502 \times 390.5 = 196^\circ$$

$$\gamma \cos (196^\circ + \beta) = -\gamma \cos (16^\circ + \beta).$$

Indépendamment de la variation séculaire, il existe donc, entre les deux obliquités, une différence égale à

$$\gamma [\cos \beta + \cos (16^\circ + \beta)] = 2\gamma \cos 8^\circ \cos (8^\circ + \beta),$$

différence qui a été négligée par les astronomes. Elle peut s'élever à 0".15, et variera avec le lieu de l'observation

puisque l'angle β augmente de 1° par degré de longitude occidentale*).

* Si un jeune astronome, ayant quelques loisirs, veut appliquer ma formule à une bonne série de déterminations de l'obliquité par des solstices estivaux et hivernaux, je ne doute pas qu'elle ne soit confirmée, comme elle l'a été par la série extraite de Peters (Num. constans nutationis) et communiquée dans l'annuaire de Bruxelles pour 1891, p. 265. La valeur de β a été donnée ci-dessus pour différentes années et pour Poulkova. Elle est, pour Paris, égale à

$$32^\circ + 390.5 t, \quad 1890.0.$$

Je répondrai ici textuellement ce que je disais dans l'article précédemment cité (A. N. No. 2986 p. 155):

« J'aurais bien des choses encore à dire sur cette nutation initiale, dont les astronomes n'ont encore tenu aucun compte dans leurs réductions, à cause sans doute de l'incertitude dans laquelle ils étaient relativement à ses constantes, et sur l'influence de cette omission dans les déterminations les plus importantes de l'astronomie, dans celle de l'obliquité de l'écliptique particulièrement. Mais ce sujet m'entraînerait trop loin. »

La détermination de l'aberration, tout spécialement, devra être reprise à nouveau, comme je l'ai dit ci-dessus, et offrira de grandes difficultés.

Et, pour le dire en passant, j'estime la précision des observations modernes supérieure à la correction des formules dont on fait usage dans leur réduction.

La révision de ces formules fait, comme je l'ai dit, l'objet essentiel de mes travaux, et l'on conçoit que je n'aie encore pu écrire sur ce sujet, qui demande tant de recherches et tant de calculs, que des notes assez brèves.

Le seul chapitre de la nutation initiale est en voie d'achèvement; c'est pourquoi j'ai pu en parler ici in extenso.

Mais on a pu juger combien la matière est difficile, et il eût été prudent de ne pas aborder, sans une préparation suffisante et sans de longues méditations, un sujet aussi délicat, où plus d'un astronome, plus d'un géomètre distingué même s'est mépris, où il est surtout vrai de dire que la critique est aisée et l'art difficile, sans vouloir rappeler un autre mot plus célèbre et plus ancien encore.

*) C'est par inadvertance que j'ai assigné une valeur double à cette différence dans l'article cité des M. N.

Bruxelles, le 17 Juin 1891.

F. Folie.

Stars having Peculiar Spectra.

New Variable Star in Sagittarius, RA. 19^h 51^m 8 Decl. -42° 7' (1900).

Communicated by *Edward C. Pickering*, Director of Harvard College Observatory.

The lines due to hydrogen are bright in the photographic spectrum of a third type star whose approximate position for 1900 is in RA. 19^h 51^m 8, Decl. -42° 7'. Measures of this star made from photographic charts taken on June 17, June 21, July 5, October 7, 1889 and May 21, 1890 give the magnitudes 9.4, 9.3, 10.0, < 12.6, and 13.1 respectively, thus confirming the variability which was

suspected from its class of spectrum. The spectrum plate on which the star appears was taken on June 6, 1889, and the magnitude derived from that plate is 9.1.

The photographic spectrum of SD. -12° 11' 72 magn. 9.2 whose approximate position for 1900 is in RA. 5^h 22^m 9, Decl. -12° 46' was obtained on March 26, 1891, and proves to be that of a planetary nebula. As the hydrogen line *F*