fort heureusement, les développements (B) de $e\sin\theta$ et de $e\cos\theta$ ne renferment pas ces diviseurs, et ces développements sont les seuls dont on ait besoin (*voir* sur ce point les pages 878 à 882 du t. I de Delaunay).

Remarque. — Si l'on pose $e\cos\theta = x$, on déduit sans peine des équations (1), en éliminant dt, que x est donné en fonction de e^2 par une équation linéaire du premier ordre. On a ensuite t en fonction de e^2 par une quadrature; il serait facile de tirer de là la forme générale des développements (2) et (3).

SUR LES DEUX NUTATIONS A PÉRIODE DIURNE;

PAR M. F. FOLIE.

Dans la Note de M. Radau sur la première de ces deux nutations, la nutation initiale, il y a, relativement à la question des variations de latitude, une erreur qu'on est d'autant plus surpris de rencontrer dans le *Bulletin astronomique* qu'elle conduit l'auteur à une fausse interprétation du passage de Laplace que j'ai maintes fois cité : « Si la nutation initiale *était sensible, on le reconnaîtrait par les variations journalières de la hauteur du pôle* », passage qu'on ne doit pas prendre au pied de la lettre, dit M. Radau.

Une exposition complète du sujet dépasserait les bornes d'une réponse. Je me contenterai donc d'en esquisser les traits principaux.

Les astronomes pourront trouver la démonstration des formules dont je ferai ici usage dans une Note que j'ai rédigée pour l'*Annuaire de l'observatoire royal de Bruxelles,* et que je me ferai un plaisir d'adresser dès à présent à ceux qui n'en auraient pas reçu, par oubli, un tiré à part, et qui voudraient bien m'en aviser.

Afin de bien préciser, j'appellerai :

Pôle ou équateur *géographique* ceux qui sont déterminés par le petit axe de la Terre;

Pôle ou équateur *astronomique* ceux qui sont déterminés par son axe instantané de rotation.

J'emploierai, dans le même sens, les termes de latitude *géogra-*

phique et *astronomique;* et j'admettrai que la première est constante, ce qui est vrai à moins de bouleversements géologiques considérables.

Cela posé, j'ai démontré, dans la Note précitée, que la différence entre la latitude astronomique Φ et la latitude géographique Φ_0 est donnée par la formule

$$\sin\Phi - \sin\Phi_0 = \gamma \cos\Phi_0 \cos(\lambda t + \beta).$$

Je l'écrirai, avec les astronomes, en posant $\Phi - \Phi_0 = \Delta\Phi_0$, et en faisant observer toutefois, circonstance qu'on ne semble pas avoir remarquée, que la formule suivante serait incorrecte pour des latitudes très élevées :

$$\Delta\Phi_0 = \gamma \cos(\lambda t + \beta).$$

La signification de cette formule est la suivante :

La latitude géographique se tire de la latitude astronomique, en retranchant de cette dernière la quantité $\Delta\Phi_0$.

Et comme c'est la latitude astronomique qu'on détermine par les observations astronomiques, et que cette latitude subit des variations d'une période $\frac{1}{\lambda}$, les astronomes ont cherché à déduire d'assez longues séries de déterminations de la latitude les constantes qui entrent dans l'expression de $\Delta\Phi$. De mon côté, j'ai déterminé les constantes de la nutation initiale (qui sont, à très peu près quant à γ, les mêmes que celles de $\Delta\Phi_0$) au moyen de séries d'ascension droite de la Polaire observées à Dorpat par W. Struve, en 1823-24-25, et par Preuss, en 1838; et j'en ai conclu qu'à la période de 305 jours admise par les astronomes il faut substituer une période de $336^j,7$; l'accord étonnant qui existe entre les valeurs que Peters, Nyrén, Downing et moi-même nous avons trouvées pour la constante β, si l'on admet ma période de $336^j,7$, prouve que cette constante au moins est bien déterminée.

Je reviendrai ci-après sur la valeur qu'il convient d'attribuer à la constante numérique γ de ces variations $\Delta\Phi_0$.

Afin de préciser davantage le sens des développements qui vont suivre, j'appellerai ces variations *variations réelles de la latitude,* parce qu'elles sont l'expression de la différence *réelle* qui existe entre la latitude *astronomique* et la latitude *géographique,* ou de la distance entre le pôle instantané et le pôle géographique.

L'expression de ces variations se tire de celles de la nutation initiale, que j'écrirai, afin de mettre mes formules d'accord avec celle que ces astronomes ont employée,

$$\Delta\theta = -\frac{\gamma}{1+\lambda}\sin[(1+\lambda)t+\beta], \qquad \sin\theta\,\Delta\lambda = -\frac{\gamma}{1+\lambda}\cos[(1+\lambda)t+\beta].$$

Ces formules se tireront, du reste, de celles dont M. Radau a fait usage, en changeant dans ces dernières la constante arbitraire β en $90^{\circ}+\beta$ et γ en $\frac{\gamma}{1+\lambda}$.

On sait qu'on tire de là

$$\Delta\delta = -\frac{\gamma}{1+\lambda}\cos[(1+\lambda)t-\alpha+\beta],$$

$$\Delta\alpha = -\frac{\gamma}{1+\lambda}\{\cot\varepsilon\cos[(1+\lambda)t+\beta]-\operatorname{tang}\delta\sin[(1+\lambda)t-\alpha+\beta]\}\text{ (1)}.$$

Or, lorsque la latitude se déduit de l'observation d'une étoile, ne faut-il pas connaître la position apparente de cette étoile, et, pour cela, ajouter à la position apparente, telle que les astronomes la calculent en négligeant la nutation initiale, les quantités précédentes $\Delta\delta$ et $\Delta\alpha$?

Ces expressions entreront donc dans celle de la latitude astronomique, et, comme elles ont une période presque exactement diurne, la latitude astronomique, déduite de la position apparente d'une étoile, dans le calcul de laquelle on n'a pas fait intervenir la nutation initiale, sera sujette à des *variations journalières* suivant l'expression de Laplace, *prise au pied de la lettre.*

Je désignerai ces nouvelles variations sous le nom de *variations apparentes,* parce que, en effet, elles n'existent pas et proviennent seulement d'une erreur commise dans la réduction au lieu apparent.

Cette période diurne est masquée dans les observations méridiennes, comme le remarque avec raison M. Radau. Mais il en

(1) M. Radau a omis, par inadvertance, dans l'expression de $\Delta\alpha$, le terme en $\cot\varepsilon$.

conclut à tort à la négation de la période diurne, et il se trompe absolument en confondant ces *variations apparentes* avec les *variations réelles* dont je viens de parler.

Les *variations apparentes* sont, en effet, des variations que l'observateur constate dans la *latitude astronomique,* faute d'avoir calculé correctement la position de l'étoile.

Les *variations réelles* sont les différences réelles entre la latitude *astronomique, exactement calculée,* et la latitude *géographique.*

Une similitude assez grande dans l'expression de ces deux variations, lorsqu'il s'agit de la latitude tirée de l'observation d'une distance zénithale méridienne, a conduit M. Radau à cette confusion.

Je dis assez grande : en pratique, je pourrais dire très grande, en théorie, non; car les coefficients de ces deux variations ne sont pas les mêmes; celui des variations réelles étant γ, celui des variations apparentes, ou de $\Delta\delta$, est $\frac{\gamma}{1+\lambda}$.

Et c'est cette même confusion qui sert de base à cet argument auquel j'avoue ne rien comprendre :

« Les deux phénomènes étant corrélatifs, il est évident *a priori* qu'il n'en peut résulter une variation de la latitude à période diurne; si Laplace parle de *variations journalières,* c'est une expression qu'il ne faut pas prendre au pied de la lettre. » Si M. Radau disait simplement que les variations *réelles* de la latitude ne sont pas diurnes, il aurait raison; mais c'est bien des variations *apparentes* qu'il parle, puisque l'expression $\Delta\delta$ dont il fait usage n'entre que dans ces dernières, et encore seulement dans le cas où la latitude se détermine par l'observation d'une hauteur; et ces variations ont bien une période diurne, qui est simplement masquée dans l'observation des hauteurs méridiennes.

Si le lecteur n'est pas convaincu encore de l'exactitude irréprochable de l'expression de Laplace prise au pied de la lettre, qu'il veuille bien examiner avec moi les corrections qu'on doit apporter aux latitudes déterminées au moyen de l'observation d'une hauteur de la Polaire, suivant le procédé exposé dans la *Connaissance des Temps.*

J'ai démontré, dans la Note précitée, que, si l'on désigne par η l'angle horaire de l'étoile, par s et c le sinus et le cosinus de la moitié de cet angle, les variations $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ qu'il faut ajouter à la position apparente, calculée par les astronomes, pour tenir compte de la nutation initiale, produisent dans la latitude *astronomique*, telle qu'ils la déterminent, une variation $\Delta\Phi$ donnée par l'équation

$$\begin{aligned}\Delta\Phi[c^2\sin(\Phi-\delta)-s^2\sin(\Phi+\delta)]\\ =\sin\eta\cos\Phi\cos\delta\,\Delta\alpha+[c^2\sin(\Phi-\delta)+s^2\sin(\Phi+\delta)]\Delta\delta.\end{aligned}$$

Tous les termes de cette expression renferment explicitement l'angle horaire; la latitude déterminée par les astronomes, qui négligent la nutation initiale, doit être corrigée de cette quantité $\Delta\Phi$; et, comme on ne l'en a jamais corrigée, il doit en résulter des variations diurnes *apparentes* dans la latitude *astronomique.*

Il va de soi qu'il en sera de même de toutes les autres déterminations de la latitude que l'on pourra faire.

Je ne discuterai la formule précédente que dans le cas particulier dont s'est occupé M. Radau.

Qu'on fasse $\eta=0$ ou $\eta=\pi$, c'est-à-dire qu'on envisage le passage supérieur ou l'inférieur, on aura $\Delta\Phi=-\frac{\gamma}{1+\lambda}\cos(\lambda t+\beta)$.

C'est-à-dire que, dans les deux cas :

Pour obtenir la *latitude astronomique correcte,* déduite d'une hauteur méridienne d'une circompolaire, il faut *ajouter à la latitude, telle que les astronomes la calculent,* la quantité

$$-\frac{\gamma}{1+\lambda}\cos(\lambda t+\beta).$$

Si donc nous appelons Φ_a la latitude astronomique telle qu'on la calcule habituellement, la latitude astronomique correcte sera

$$\Phi=\Phi_a-\frac{\gamma}{1+\lambda}\cos(\lambda t+\beta).$$

Mais nous avons vu ci-dessus que la latitude géographique Φ_0 est donnée par

$$\Phi_0=\Phi-\gamma\cos(\lambda t+\beta).$$

Si l'on fait ici abstraction de la différence minime qui existe, en pratique, entre les deux constantes, $\frac{\gamma}{1+\lambda}$ et γ, des seconds membres et qu'on ajoute ces deux équations, on trouve

$$\Phi_0 = \Phi_a - 2\gamma\cos(\lambda t + \beta),$$

et non pas $\Phi_0 = \Phi_a$, ni $\Phi_0 = \Phi_a - \gamma\cos(\lambda t + \beta)$, comme semble le croire M. Radau.

Autrement dit, si nous appelons $\Delta\Phi_a$ la *variation totale, tant réelle qu'apparente,* de la latitude déterminée suivant les formules usuelles au moyen d'une hauteur méridienne, nous aurons

$$\Delta\Phi_a = 2\gamma\cos(\lambda t + \beta).$$

C'est cette formule qu'auraient dû employer Peters et Downing, au lieu de la simple formule des *variations réelles*

$$\Delta\Phi_0 = \gamma\cos(\lambda t + \beta).$$

Le coefficient qu'ils ont trouvé, $0'',08$, n'est donc pas γ mais 2γ; c'est-à-dire que, étant admis leur chiffre, le coefficient de la nutation initiale serait égal à $0'',04$ seulement.

Quant à la nutation diurne, je ne m'en occuperai guère ici.

Je compte en apporter une preuve nouvelle, tirée des observations mêmes de W. Struve qui m'ont permis de trouver la vraie période des variations de la latitude.

Je ferai remarquer, à ce sujet, que cette période, dépendant du rapport $\frac{C-A}{A}$, serait bien exactement de 305 à 306 jours, pour une *Terre solide.* Si donc l'observation prouve qu'elle est de $336^j,7$, la Terre n'est pas solide, et nous ne pouvons plus affirmer que le rapport $\frac{B-A}{C}$ est insensible; argument indirect, sans doute, mais puissant en faveur de l'existence de la nutation diurne, dont le coefficient renferme ce facteur $\frac{B-A}{C}$.

N'ayant pas eu le loisir encore de publier les formules dont on fait usage à Bruxelles pour la détermination des constantes de cette nutation, je conçois que M. Radau n'ait pas pu vérifier les résultats de M. Niesten qui l'avaient frappé; et j'espère que ce dernier édifiera complètement M. Radau sur ce point.

Il en est un dernier auquel je me bornerai à répondre assez brièvement.

M. Radau nie que je puisse conclure les ascensions droites d'une étoile très voisine du pôle de deux azimuts observés à deux instants séparés par un intervalle de cinq à six heures.

Pour répondre, il me suffirait, peut-être, de faire remarquer que ce même procédé d'observation de deux azimuts d'une étoile est très fréquemment employé par les astronomes pour trouver sa déclinaison, et que l'observation des passages dans le premier vertical n'est pas autre chose. Que les azimuts observés ici soient $\pm 90°$, qu'importe? La méthode, au fond, est identiquement la même; toutefois, comme la variation des coordonnées produites par la nutation diurne (je ferai abstraction ici de la nutation initiale, dont on tiendrait compte de la même façon) pourrait laisser subsister quelque doute dans l'esprit des astronomes, j'ajouterai une brève explication à ce sujet.

Pour simplifier la discussion, je supposerai la première observation faite dans le méridien; ce qui donne α.

En comptant les azimuts du Nord vers l'Ouest, la seconde observation donne, t étant le temps écoulé depuis la première,

$$\tan\delta \cos\Phi = \sin\Phi \cos t + \sin t \cot A,$$

si l'on néglige la nutation diurne. De cette équation on tirera pour δ une valeur qui ne peut être incorrecte que de la très petite quantité dont elle peut être affectée par la nutation diurne.

M. Radau a donc tort de poser, quant à $\Delta\alpha$, des hypothèses qui le conduisent à des distances polaires variant entre $3'12'',37$ et $2'58'',71$.

Posons maintenant l'équation correcte

$$\tan(\delta + \Delta\delta)\cos\Phi = \sin\Phi \cos(t - \Delta\alpha) + \sin(t - \Delta\alpha)\cot A,$$

où je donne à δ la valeur déterminée ci-dessus.

Les quantités $\Delta\delta$ et $\Delta\alpha$ s'exprimant en fonction de quantités connues et des constantes de la nutation diurne, cette dernière équation me fournit entre ces constantes la relation cherchée.