MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR LES FORMULES DE M. FABRITIUS.

Réplique aux Notes de MM. Gonnessiat et Herz;

PAR M. FOLIE.

J'ai signalé, dans le *Bulletin* de février dernier, l'erreur de principe des formules de réduction de M. Fabritius, et l'ai attribuée, non sans raison, à l'introduction tout à fait superflue des coordonnées rectilignes, que j'ai qualifiée de *trompe-l'œil*.

Sans cette introduction, MM. Fabritius et Oppolzer se seraient, en effet, immédiatement rendu compte de l'incorrection radicale du procédé préconisé par eux, incorrection que je croyais avoir fait ressortir avec une netteté suffisante.

Mais puisque des astronomes qui sont en même temps de bons analystes, comme MM. Gonnessiat et N. Herz, et j'en pourrais citer d'autres, croient que ma critique n'est pas fondée, je me vois obligé, bien à regret, de revenir sur ce point.

Je ne réfuterai pas les observations ou les arguments de mes honorables contradicteurs, parce que j'avoue ne pas bien les comprendre; et, puisqu'ils pensent que ce sont les coordonnées rectangulaires qui jouent le grand rôle dans cette question, je vais reprendre pas à pas la démonstration d'Oppolzer ([1]) (traduction Pasquier, p. 263), fondée sur elles, et en montrer le vice.

Je pars de ses formules (14), qu'on peut écrire *a priori*

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha\cos\delta &= \cos\alpha_0\cos\delta_0 + \Delta x_0,\\ \sin\alpha\cos\delta &= \sin\alpha_0\cos\delta_0 + \Delta y_0;\end{aligned}\right.$$

d'où je tire, comme lui,

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\delta\,\sin(\alpha-\alpha_0) &= -\sin\alpha_0\,\Delta x_0 + \cos\alpha_0\,\Delta y_0,\\ \cos\delta\,\cos(\alpha-\alpha_0) &= \cos\delta_0 + \cos\alpha_0\,\Delta x_0 + \sin\alpha_0\,\Delta y_0.\end{aligned}\right.$$

([1]) Je ferai observer seulement que je n'ai donné comme *exacte* que la seule formule

$$\operatorname{tang}(\alpha-\alpha_0) = \Delta\alpha_0\left(1+\frac{\Delta\alpha_0^2}{3}\right).$$

C'est de là qu'Oppolzer déduit la formule de M. Fabritius

$$\tag{16} \operatorname{tang}(\alpha-\alpha_0)=\frac{\Delta\alpha_0}{1-\operatorname{tang}\delta_0\,\Delta\delta_0},$$

en substituant à Δx_0 et Δy_0 les expressions

$$\tag{13} \left\{\begin{aligned} \Delta x_0 &= -\sin\alpha_0\cos\delta_0\,\Delta\alpha_0-\cos\alpha_0\sin\delta_0\,\Delta\delta_0,\\ \Delta y_0 &= +\cos\alpha_0\cos\delta_0\,\Delta\alpha_0-\sin\alpha_0\sin\delta_0\,\Delta\delta_0. \end{aligned}\right.$$

Or l'emploi de ces expressions est incorrect, puisqu'elles s'arrêtent aux termes du premier ordre et que l'on veut conserver ceux du second dans la formule (16) *qu'on en déduit.*

Employons donc, au lieu de ces formules incorrectes (13), les formules correctes jusqu'au second ordre seulement; nous aurons à ajouter aux expressions Δx_0 et Δy_0 d'Oppolzer respectivement

$$\tag{13 bis} \left\{\begin{aligned} &-\cos\alpha_0\cos\delta_0\,\frac{\Delta\alpha_0^2+\Delta\delta_0^2}{2}+\sin\alpha_0\sin\delta_0\,\Delta\alpha_0\,\Delta\delta_0\\ &\text{et}\\ &-\sin\alpha_0\cos\delta_0\,\frac{\Delta\alpha_0^2+\Delta\delta_0^2}{2}-\cos\alpha_0\sin\delta_0\,\Delta\alpha_0\,\Delta\delta_0. \end{aligned}\right.$$

Sa formule (16) devient par là

$$\tag{16 bis} \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}(\alpha-\alpha_0) &= \frac{\Delta\alpha_0-\operatorname{tang}\delta_0\,\Delta\alpha_0\,\Delta\delta_0}{1-\operatorname{tang}\delta_0\,\Delta\delta_0-\dfrac{\Delta\alpha_0^2+\Delta\delta_0^2}{2}}\\ &= \frac{\Delta\alpha_0}{1-\dfrac{\Delta\alpha_0^2+\Delta\delta_0^2}{2(1-\operatorname{tang}\delta_0\,\Delta\delta_0)}}. \end{aligned}\right.$$

Cette formule, moins incorrecte que celle d'Oppolzer, n'est cependant pas encore exacte. En effet, pour obtenir les termes d'ordre supérieur dans le développement d'une expression de la forme $\frac{\sin\Delta\alpha}{\cos\Delta\alpha}$, on doit, puisqu'il ne renferme pas de termes du second ordre, calculer le numérateur jusqu'au troisième *inclusivement*, tandis que je me suis arrêté au second, n'ayant d'autre objet que de montrer le vice de la formule (16) et de sa démonstration. Le lecteur suppléera aisément à ce point.

Il est inutile, je pense, d'insister davantage. Ceci n'est pas une question d'Astronomie, mais simplement de Calcul différentiel. Et si mes deux honorables contradicteurs ont l'intention de me répondre de nouveau, je les prierai de vouloir bien, pour que nous puissions nous entendre, se borner à réfuter la preuve que je viens de faire, sur la propre démonstration des auteurs, de l'incorrection du procédé de M. Fabritius, adopté par Oppolzer.

Note de la Rédaction. — Les formules de M. Folie, qui supposent que $\Delta\alpha_0 = \alpha - \alpha_0$, $\Delta\delta_0 = \delta - \delta_0$, ne nous paraissent avoir aucun rapport avec celles de M. Fabritius, où $\Delta\alpha_0$, $\Delta\delta_0$ représentent les premiers termes des différences $\alpha - \alpha_0$, $\delta - \delta_0$, développées suivant les puissances de $d\lambda$, $d\varepsilon$, ... On a, par exemple,

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{d\alpha}{d\lambda}\, d\lambda + \ldots + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\, d\lambda^2 + \ldots = \Delta\alpha_0 + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\, d\lambda^2 + \ldots,$$

de sorte que $\alpha - \alpha_0$ diffère de $\Delta\alpha_0$ par les termes qui dépendent de $d\lambda^2$, $d\lambda\, d\varepsilon$, ... Il y a là un moyen de vérifier directement les formules de M. Fabritius. Le malentendu vient évidemment de l'insuffisance de la démonstration d'Oppolzer, qui exprime par Δx_0, Δy_0 d'abord les variations réduites aux termes du premier ordre (formules 13), ensuite les différences totales $x - x_0$, $y - y_0$ (formules 14), en négligeant de prouver que les termes du second ordre sont ici sans influence. Mais, de ce que la démonstration laisse à désirer, il ne s'ensuit pas que les formules soient inexactes. R.

SUR LE CALCUL DES LIEUX APPARENTS DES ÉTOILES.
Réponse à M. F. Folie;

PAR M. W. FABRITIUS.

Dans le numéro de février dernier du *Bulletin astronomique*, M. Folie attaque les formules pour la réduction des étoiles, que j'ai publiées dans le n° 2073 des *Astronomische Nachrichten*.

D'après M. Folie, mes formules ne seraient que des approximations insuffisantes et qui « ne pourraient que très désavantageusement remplacer les procédés en usage ».

Il est toutefois aisé de voir que M. Folie se trompe complètement sur la nature de mes formules, qui sont *rigoureusement vraies*, si l'on attribue aux quantités $\Delta\alpha_0$ et $\Delta\delta_0$ des significations que nous expliquons plus bas. Mais comme M. Folie regrette que mes formules soient établies à l'aide des coordonnées rectilignes,