ou

$$\delta_3\rho' = (-1'',68\,\beta^3\beta'^6 - 3'',28\,\beta^3\beta'^4 - 0,21\,\beta\beta'^6 - 1,34\,\beta^3\beta'^2 - 1,46\,\beta\beta'^4) \times \sin(5\,l' - 2\lambda - \omega - 2\varpi').$$

Pendant très longtemps β et β' différant très peu de l'unité, on voit que le coefficient du terme précédent sera, à notre époque et dans les premiers siècles qui suivront, d'environ $8''$.

Il existe un grand nombre de combinaisons fournissant des termes du troisième ordre comparables en grandeur à celui que nous venons de calculer, et nous avons pu constater que tous ceux qui, dépendant d'un même argument, ont une valeur sensible, sont de même signe, et que, par conséquent, leur somme atteint souvent une valeur considérable.

Nous avons négligé ici, comme nous l'avions annoncé, le calcul des termes dépendant des produits des variations des grands axes; nous nous sommes d'ailleurs assuré qu'il n'atteint pas $0'',01$.

NOTE SUR LES FORMULES DE M. FABRITIUS;

PAR M. FOLIE.

Les derniers articles qui ont paru dans le *Bulletin astronomique,* au sujet des formules de M. Fabritius, m'engagent à revenir également sur ce point.

Dans une Note [1] que j'ai publiée un peu avant d'avoir reçu le numéro du *Bulletin* qui renfermait la réponse de M. Fabritius à mes critiques (et c'est pourquoi elle ne fait pas mention de cette réponse), j'ai d'abord donné une démonstration indirecte, mais astronomique, de l'inexactitude des formules de l'astronome russe.

Cette démonstration consiste simplement à prendre l'écliptique, au lieu de l'équateur, pour plan de référence. Qu'on applique alors, mot pour mot, soit la démonstration donnée par Oppolzer, soit celle que M. Fabritius a exposée dans le numéro de mai du *Bulletin,* on arrivera à la formule

$$\operatorname{tang}(\lambda - \lambda_0) = \frac{\Delta\lambda_0}{1 - \operatorname{tang}\beta_0\,\Delta\beta_0},$$

---

[1] *Sur les formules de réduction des circompolaires.* Bruxelles, Hayez. (Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique,* juin et août 1888.)

correspondant à leur formule

$$\operatorname{tang}(\alpha - \alpha_0) = \frac{\Delta\alpha_0}{1 - \operatorname{tang}\delta_0\,\Delta\delta_0}.$$

Les astronomes verront, du premier coup d'œil, que ces deux formules ne concordent pas entre elles, c'est-à-dire qu'elles sont aussi peu exactes l'une que l'autre.

Mais ce n'est qu'incidemment que je reviens, dans cette Note, sur la question théorique.

L'objet essentiel en est de faire connaître aux astronomes des formules pratiques plus correctes que celles de M. Fabritius.

J'ai recherché, dans mon *Traité des réductions stellaires,* les formules exactes. Dans ma Note, je les ai comparées à la formule de Fabritius-Oppolzer en Æ; et j'ai trouvé que, pour obtenir ma formule, il faut ajouter à celle-ci le terme $+ \mathrm{F}\operatorname{tang}\delta$, l'expression de F étant, en arc,

$$\begin{aligned} \mathrm{F} = &- \frac{1}{4}\sin 2\varepsilon \cos\alpha (\Delta\psi)^2 \\ &+ \frac{1}{4}\cos\varepsilon \sin\alpha \mathrm{N}\mathrm{N}'\sin 2\Omega \\ &+ \cos\varepsilon \sin\alpha \frac{\mathrm{N}}{-\omega_1}\left(\mathrm{P}\sin\Omega - \frac{1}{2}\mathrm{N}'\omega_1^2 t\right), \end{aligned}$$

ε désignant l'obliquité de l'écliptique;

P la constante de la précession générale, 50,24;

N celle de la nutation, 9,22;

N' la constante 17,26;

ω_1 la vitesse du nœud, $\log(-\omega_1) = 9,52837$;

$-\Delta\psi$ la nutation en longitude, $\mathrm{P}t - \mathrm{N}'\sin\Omega - 1'',27\sin 2\odot$.

La formule par laquelle j'exprime les termes du second ordre est toutefois, plus exactement encore, en Æ, suivant la notation bessélienne,

$$\begin{aligned} \Delta^2\alpha = &\operatorname{tang}\delta(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \mathrm{D}d)(\mathrm{A}a' + \mathrm{B}b' + \mathrm{C}c' + \mathrm{D}d') \\ &+ \mathrm{F}\operatorname{tang}\delta + \cot\delta(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \mathrm{D}d)(\mathrm{C}c' + \mathrm{D}d'). \end{aligned}$$

Examinons d'abord si les différences entre cette formule et celle de M. Gaillot sont inférieures à celles que M. Boquet a trouvées en comparant, pour λ *Urs. min.*, les données de la *Connaissance* *des Temps* (ou Fabritius-Oppolzer) à celles que fournit la formule trigonométrique de M. Gaillot.

Voici les résultats de cette comparaison, calculés par M. Wouters, astronome à l'observatoire royal; G — C est la différence Gaillot — *C. d. T.*, G — F la différence Gaillot — Folie :

	G — C.	G — F.		G — C.	G — F.
Aout 7.......	0	—2	Oct. 26.......	—1	—3
17.......	+3	+1	Nov. 5.......	+1	—1
27.......	3	1	15.......	2	0
Sept. 6.......	3	1	25.......	2	0
16.......	2	0	Déc. 5.......	3	+1
26.......	4	+2	15.......	4	2
Oct. 6.......	0	—2	25.......	0	—2
16.......	—1	—3			

« En somme, dit en terminant M. Boquet, les résultats qui précèdent montrent clairement que, toutes les fois qu'on ne veut pas pousser jusqu'aux millièmes de seconde de temps les valeurs des Æ apparentes des circompolaires, la méthode de M. Fabritius donne des résultats d'une précision suffisante. » Si M. Boquet n'a pas écrit par inadvertance *millièmes* au lieu de *centièmes,* sa conclusion est certes hasardée; les chiffres qui précèdent corroborent même ce que j'ai dit de l'inexactitude des formules de M. Fabritius. Des erreurs qui peuvent s'élever à $0^s,04$, et au delà, pour λ *Urs. min.,* ne sont pas de celles que la *Connaissance des Temps* peut négliger.

Et j'ose me flatter de l'espoir que les astronomes qui la rédigent ajouteront aux termes de M. Fabritius en Æ ceux que je viens d'indiquer.

Car, quoi qu'en dise M. Boquet (¹), peu se résoudront, je pense, à faire usage des formules trigonométriques de M. Gaillot, qui exigeraient une réforme complète des procédés usités par les astronomes et par les calculateurs.

Quant aux termes du second ordre en déclinaison, que j'ai donnés dans mon *Traité des réductions stellaires* (p. 64 pour la précession et la nutation, p. 78 pour l'aberration, p. 79 pour la combinaison de la nutation et de l'aberration), j'ai cherché à les ramener également à la forme proposée par M. Fabritius, et voici

(¹) *B.A.*, t. V, p. 138 et 237.

ce que j'ai trouvé, en négligeant des termes qui ne renferment pas tangδ comme facteur,

$$\Delta^2\delta = -\tfrac{1}{4}\sin 2\delta[(\Delta\alpha)^2 + \cot^2\delta(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b)^2]$$
$$= -\tfrac{1}{4}\sin 2\delta[(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \mathrm{D}d)^2 + \cot^2\delta(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b)^2].$$

Je ferai observer enfin que les formules de mon Traité, réduites en nombres [1], concordent avec celles du *Berl. Jahrb.* (p. 184),

---

[1] Je prends un exemple :

Parmi les termes du *B. J.* (p. 15), figure le suivant :

$$-[0{,}001535\cos\alpha\operatorname{tang}\delta + 0{,}000677\sin 2\alpha(\operatorname{tang}^2\delta + \tfrac{1}{2})]\tau\sin\Omega.$$

Si l'on calcule pour 1850 le terme correspondant donné dans mon Traité, page 64, on trouve identiquement la même expression, à part que les coefficients numériques sont 1529 et 663.

Cette minime différence disparaîtrait, sans doute, si les deux calculs étaient rapportés à la même époque.

Or les termes F tangδ, qu'il faut ajouter à l'expression de M. Fabritius pour obtenir la mienne, renferment $-\frac{1}{4}\sin 2\varepsilon\cos\alpha\operatorname{tang}\delta(\Delta\psi)^2$. Si l'on remplace $-\Delta\psi$ par $\mathrm{P}\tau - \mathrm{N}'\sin\Omega - \ldots$, on trouvera, dans le développement de l'expression précédente, $+\frac{1}{2}\sin 2\varepsilon\cos\alpha\operatorname{tang}\delta\,\mathrm{PN}'\tau\sin\Omega = 0{,}00153\cos\alpha\operatorname{tang}\delta\,\tau\sin\Omega$.

Telle est, pour le terme en $\tau\sin\Omega$, la différence entre l'expression de M. Fabritius et la mienne ou celle du *B. J.*

De même le *B. J.* renferme le terme $+0{,}00224\cos\alpha\operatorname{tang}\delta\,\tau^2$; ma formule, calculée pour 1850, a le même terme, avec le coefficient 0,00223. Celle de M. Fabritius en diffère par $-\frac{1}{4}\sin 2\varepsilon\cos\alpha\operatorname{tang}\delta\,\mathrm{P}^2\tau^2 = -0{,}00223\cos\alpha\operatorname{tang}\delta\,\tau^2$.

Je ne multiplierai pas davantage les exemples.

Voici, au surplus, quelle est la forme à laquelle on peut réduire l'expression (donnée dans mon Traité, p. 64) des termes du second ordre de la nutation en Æ :

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_1 = {} & \tfrac{1}{2}[\sin 2\alpha(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2\delta) + \cos\alpha\cot\varepsilon\operatorname{tang}\delta](\sin\varepsilon\Delta\psi)^2 \\ & - [\cos 2\alpha(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2\delta) - \sin\alpha\cot\varepsilon\operatorname{tang}\delta]\sin\varepsilon\,\Delta\psi\,\Delta\theta \\ & + \tfrac{1}{4}\cos\varepsilon\sin\alpha\operatorname{tang}\delta\,\mathrm{WN}'\sin 2\Omega + \tfrac{1}{4}\sin 2\alpha(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2\delta)\mathrm{N}^2\cos 2\Omega \\ & + (\cot\varepsilon\operatorname{tang}\delta - 1)\sin\varepsilon\sin\alpha\,\mathrm{N}\left(\frac{1}{2}\mathrm{N}'\omega_1\tau - \mathrm{P}\frac{\sin\Omega}{\omega_1}\right). \end{aligned}$$

Celle qui résulte de la formule de Fabritius-Oppolzer, $\operatorname{tang}\delta\,\Delta\alpha\,\Delta\delta$, peut s'écrire $-\operatorname{tang}\delta[(\cot\varepsilon + \sin\alpha\operatorname{tang}\delta)\sin\varepsilon\Delta\psi + \cos\alpha\operatorname{tang}\delta\,\Delta\theta](-\cos\alpha\sin\varepsilon\Delta\psi + \sin\alpha\Delta\theta)$.

Ces deux expressions sont loin d'être identiques; leur différence est F tangδ, comme je l'ai dit ci-dessus, abstraction faite de quelques termes qui n'ont pas tangδ en facteur.

Si l'on développe la mienne, en faisant

$$-\Delta\psi = 50{,}24\,\tau - 17.26\sin\Omega - 1{,}27\sin 2\odot,$$
$$\Delta\theta = 9{,}22\cos\Omega + 0{,}55\cos 2\odot,$$

on trouvera les termes du *B. J.*, et, de plus, quelques termes omis dans cet Annuaire; tandis que ceux de la formule de M. Fabritius s'en écartent, comme on vient dont MM. Fabritius, Herz et Schulhof ne seront certes pas disposés à contester l'exactitude. Sous la forme que je viens de leur donner ici, elles ne diffèrent de celles que j'ai développées dans mon Traité que par des termes d'une importance tout à fait secondaire, et dont aucun, au surplus, n'a $\tan\delta$ pour facteur.

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

SOUILLART. — Théorie analytique des mouvements des satellites de Jupiter.

Ire Partie, *Formules algébriques*, publiée dans les *Memoirs of the royal astronomical Society*, t. XLV. Londres, 1880.

IIe Partie, *Réduction des formules en nombres*, publiée dans les *Mémoires des Savants étrangers*, t. XXX. Paris, 1887.

(Cette seconde Partie a obtenu, à l'Académie des Sciences de Paris, le prix Damoiseau de l'année 1886.)

L'auteur de ce travail s'est proposé de reprendre, par la méthode dite *de la variation des constantes*, la détermination des inégalités principales qui affectent les mouvements des satellites de Jupiter autour de leur planète. On sait que Laplace, dans la théorie analytique de ces mouvements (tome IV de la *Mécanique céleste*), emploie au contraire la méthode dans laquelle on déduit directement, des équations différentielles du mouvement troublé, les variations du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude. On sait aussi que, au lieu de suivre purement et simplement la marche générale, Laplace y apporte un remarquable perfectionnement, qui lui permet, au moyen d'un léger changement dans les dénominateurs introduits par l'intégration, de comprendre implicitement dans la première approximation les termes les plus sensibles parmi ceux que fournirait le carré de la force perturbatrice. M. Souillart a remarqué que la méthode de la variation des constantes comporte un perfectionnement tout à fait équivalent, déjà employé par Poisson pour la théorie de la Lune, et qui consiste à avoir égard, dès le premier

de le voir. Quant aux autres termes du second ordre (provenant de l'aberration annuelle et de sa combinaison avec la nutation), ils sont, à part quelques différences minimes, les mêmes dans mes formules et dans celles de M. Fabritius, du *B. J.* et de Poulkova (*Obs.*, vol. I, p. 117).