Note sur la transformation des coordonnées et sur les signes des angles et des distances en géométrie analytique plane; par M. F. Folie, membre de l'Académie.

Nous nous proposons d'exposer dans ces pages une méthode exclusivement analytique pour la transformation des coordonnées.

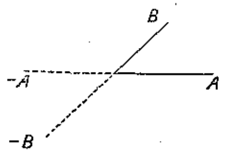
Cette méthode est une application des coefficients indéterminés que nous avons annoncée dans nos *Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne* (*). On verra qu'elle nous conduit à fixer d'une manière rigoureuse le signe des angles et des distances en géométrie analytique plane.

Une première cause du manque de netteté dans ces signes est le peu de rigueur avec lequel beaucoup d'auteurs ont établi leurs conventions primitives; une seconde cause est l'emploi abusif qu'ils font en géométrie analytique de considérations de géométrie pure, dans lesquelles ils oublient tout naturellement les signes, puisque celle-ci ne les connaît pas. Aussi est-ce en reprenant la recherche des formules de transformation des coordonnées par l'analyse pure, c'est-à-dire sans recourir pour cette recherche à aucune figure, que nous avons découvert et corrigé le vice dont nous parlons.

1. *Conventions.* Une droite a deux directions opposées à partir d'un quelconque de ses points. Si deux droites se

(*) Voir pages 3 et 4 de l'ouvrage.

coupent en un point, chaque partie de l'une fera un certain angle avec l'une des parties de l'autre. Nous conviendrons que *tous ces angles se comptent en tournant de droite à gauche;* de sorte que si nous les considérons comme *positifs étant comptés dans ce sens*, ils seront naturellement *négatifs étant comptés en sens contraire.*



C'est ainsi que si B fait avec A l'angle α, c'est-à-dire si une droite mobile a tourné de droite à gauche à partir de la direction A d'un angle α pour arriver à la direction B, A fera avec B un angle $2\pi - \alpha$, ou simplement $-\alpha$, ce qui revient au même;

— A fera avec B l'angle $\pi - \alpha$, et
B fera avec — A l'angle $\pi + \alpha$, ou $\alpha - \pi$, ce qui revient au même.
— B fera avec — A l'angle α égal à celui de B avec A, et
— A fera avec — B l'angle $2\pi - \alpha$ ou $-\alpha$, comme A avec B;
— B fera avec A l'angle $\pi - \alpha$, comme B avec — A, et
A fera avec — B l'angle $\pi - \alpha$, comme — A avec B.

A la vérité ces conventions sont celles de tous les auteurs, et nous n'inventons rien, mais nous précisons.

On a toujours dit en effet l'angle de deux droites, l'angle des axes, au lieu de dire, comme nous le faisons, l'angle de Y avec X ou de — Y avec — X, lequel est égal et de signe contraire à l'angle de X avec Y ou de — X avec — Y.

Lorsqu'une droite sera donnée, nous regarderons comme *positive la partie de cette droite qui se dirige vers la moitié du plan située au-dessus de l'axe des* X; et par suite comme négative la partie qui se dirige vers la moitié inférieure de ce plan. Une droite parallèle à l'axe des X aura sa partie positive dirigée dans le même sens que celle de cet axe.

La *direction positive de la perpendiculaire à une droite* sera celle qui fait *avec la partie positive* de cette droite *un angle droit*, la rotation s'effectuant toujours de droite à gauche.

Nous allons rencontrer dans l'article suivant un avantage frappant de ces conventions.

2. *Équation de la droite.* Commençons par déterminer, conformément aux conventions précédentes, la signification des paramètres dans l'équation de la droite

$$ax + by + c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

D'abord, si la distance p de l'origine à la droite est nulle, on a $c = 0$; donc p doit être de la forme kc, et l'équation (1) pourra s'écrire

$$kax + kby + p = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ensuite, la projection sur une direction arbitraire du périmètre formé par les coordonnées x, y d'un point quelconque de la droite et par le rayon vecteur mené de ce point à l'origine est nulle. Projetons ces trois longueurs sur la direction de la perpendiculaire menée à la partie positive de la droite. Appelons p la projection du rayon vecteur qui va de l'origine au point x, y sur cette direction, le signe de p étant implicite; celle du rayon considéré, qui est de sens contraire, sera $-p$; et les angles que la partie positive de la droite fait avec les parties positives des axes étant

désignés par α et β, nous aurons

$$x \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + y \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) - p = 0, \qquad (*)$$

ou

$$x \sin\alpha + y \sin\beta + p = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

De la comparaison des équations (2) et (2') il résulte

$$ka = \sin\alpha, \quad kb = \sin\beta; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

et comme $p = kc$, on voit que les périmètres a, b, c sont respectivement proportionnels à $\sin\alpha$, $\sin\beta$ et p.

Pour que α, β et p soient connus, il nous reste à déter-

(*) Mais, dira-t-on peut-être, l'équation de la droite restera-t-elle la même pour sa partie négative? Cette question, dont la solution ne saurait être douteuse, mérite cependant d'être examinée.

Si l'on considère la partie négative de la droite

1° les angles que cette partie fait avec les parties positives des axes seront $\pi + \alpha$, $\pi + \beta$;

2° la direction de la perpendiculaire menée à cette partie de la droite sera évidemment de sens contraire à celle de la perpendiculaire menée à la partie positive; de sorte que, la projection du rayon considéré sur cette dernière direction étant désignée par p, sa projection sur la direction nouvelle sera représentée par $-p$.

En introduisant dans l'équation ci-dessus les modifications indiquées dans 1° et 2°, on aura :

$$x \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + y \cos\left(\beta + \frac{3\pi}{2}\right) + p = 0$$

ou

$$x \sin\alpha + y \sin\beta + p = 0$$

ce qui conduit au même résultat que plus haut, comme on devait s'y attendre.

miner k. Or si l'on tient compte de $\alpha=\beta+\theta$, θ désignant l'angle de Y avec X, on en déduira

$$\frac{\sin\alpha}{k}=\frac{\sin\beta}{k}\cos\theta+\frac{\cos\beta}{k}\sin\theta,$$

égalité qui s'écrira, au moyen des relations (3) :

$$a=b\cos\theta+\sqrt{\frac{1}{k^2}-b^2}\,.\sin\theta,$$

On tire de là

$$a^2+b^2-2ab\cos\theta=\frac{1}{k^2}\sin^2\theta,$$

et, en posant le premier membre égal à e^2 :

$$e^2=\frac{1}{k^2}\sin^2\theta,\quad \text{d'où}\quad k=\frac{\sin\theta}{e},$$

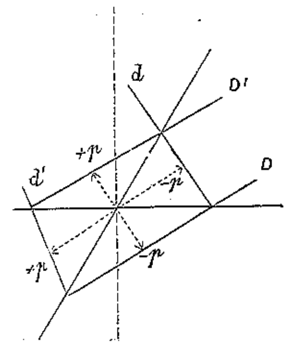
expression dans laquelle nous considérons e comme affecté du signe + seulement, ce qui est permis, puisque *tous* les termes de l'équation (1) ont été multipliés par k.

On aura ainsi

$$\sin\alpha=\frac{a}{e}\sin\theta;\quad \sin\beta=\frac{b}{e}\sin\theta;\quad p=\frac{c}{e}\sin\theta. \quad . \quad (4)$$

L'équation (2') détermine non-seulement en grandeur, mais encore en direction, la perpendiculaire p abaissée de l'origine sur la droite. Lorsqu'elle sera *positive*, cela voudra dire, d'après nos conventions, qu'elle est à *gauche* d'une perpendiculaire menée par l'origine à l'axe des X,

et vice versâ; en effet, la perpendiculaire aux droites parallèles D et D', ou d et d' a sa partie positive dirigée à gauche d'une perpendiculaire à l'axe des X.



N. B. Comme α, et par suite $\sin\alpha$, est censé positif, il faut donner le signe + au terme en x dans l'équation de la droite.

Il suffit donc que nous connaissions le *signe de la distance de l'origine à une droite* pour pouvoir affirmer que le *pied de cette distance se trouve à droite ou à gauche de cette origine.*

Nous ne nous arrêterons pas à montrer que l'on arriverait, pour la distance d'un point à une droite, au même résultat simple et précis que nous venons d'obtenir relativement à l'origine.

3. *Angle d'une droite avec une autre.* Soit proposé de déterminer, sans ambiguïté, l'angle Θ de la droite D' avec la droite D, ces deux droites étant données par leurs équations :

$$\begin{aligned} ax+by+c&=0 \quad \text{D.}\\ a'x+b'y+c'&=0 \quad \text{D'.}\end{aligned}$$

Conservons les notations précédentes quant aux angles, avec ou sans accent, selon qu'il s'agit de D ou de D'.

Comme la recherche de l'angle Θ par son cosinus ne peut pas déterminer son signe, nous rechercherons son sinus.

De $\Theta=\alpha'-\alpha$ on tirera

$$\sin\Theta=\sin\alpha'\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha';\ \text{d'où}$$

$$\begin{aligned}\sin\theta\sin\Theta&=\sin\alpha'(\sin\theta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\theta)\\ &+\sin\alpha(\sin\alpha'\cos\theta-\sin\theta\cos\alpha')=\sin\alpha'\sin(\theta-\alpha)\\ &+\sin\alpha\sin(\alpha'-\theta)=\sin\beta'\sin\alpha-\sin\alpha'\sin\beta;\end{aligned}$$

et par suite, en remplaçant les sinus par leurs valeurs données dans les formules (4) :

$$\sin \Theta = \sin \theta \, \frac{b'a - a'b}{e\,e'}.$$

Comme nous l'avons dit en commençant, nous avons été amené logiquement aux résultats qui précèdent par l'interprétation de ceux que nous a fournis notre méthode de recherche des formules de transformation des coordonnées.

Qu'on essaye en effet de ramener les formules de l'article suivant, dans lesquelles n'entre explicitement aucun angle, aux formules connues, et surtout d'expliquer à priori la différence des signes de λ et λ', et l'on se verra conduit à adopter nécessairement la convention que nous avons établie relativement à l'angle d'une droite avec une autre.

4. *Transformation des coordonnées.* Abordons maintenant le problème qui fait l'objet principal de cette note, et que nous énoncerons en ces termes : soient x et y deux axes des coordonnées ; θ l'angle du second avec le premier ; soient

$$a\,x + b\,y + c = 0$$
$$a'x + b'y + c' = 0$$

les équations de deux droites qui doivent être prises pour nouveaux axes des ξ et des η respectivement ;
exprimer ξ et η en fonction de x et y, et vice versâ.

Notre solution repose sur cette simple remarque :

Puisque, pour tout point pris sur la droite

$$ax + by + c = 0, \text{ on a } \eta = 0,$$

il faudra que pour un point quelconque on ait

$$\left.\begin{array}{l} a\,x + \;by + c = \lambda\,\eta, \\ a'x + b'y + c' = \lambda'\xi, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

et de même

les coefficients λ et λ' étant des constantes ; car sans quoi à un seul et même point x, y répondraient plusieurs points ξ, η et vice versâ.

Parmi les différents procédés qui conduisent à la détermination de ces constantes, nous choisirons d'abord le plus complétement analytique ; nous en indiquerons ensuite un plus rapide.

Désignons par α et β les angles de la droite ξ, par α' et β' ceux de la droite η avec les axes des x et des y.

On sait que λ et λ' sont indépendants de c et c' ; nous pourrons donc, dans leur détermination, supposer que ces dernières quantités sont nulles, ou que la nouvelle origine se confond avec l'ancienne, et écrire par suite

$$\lambda = \frac{ax + by}{\eta}, \quad \lambda' = \frac{a'x + b'y}{\xi}. \quad \ldots \quad (2)$$

Choisissons, pour déterminer λ, le point x, y de telle sorte que ses nouvelles coordonnées soient $\xi = 0$, $\eta = \eta_0$; et, pour évaluer cette dernière quantité, écrivons qu'elle est égale à la somme des projections de x et y sur la direction η (censée passer par l'origine primitive). Nous aurons d'après cela

$$\begin{array}{l} 0 = a'x + b'y \\ \eta_0 = x \cos\alpha' + y \cos\beta' \end{array} \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{l} \dfrac{x}{\eta_0} = \dfrac{b'}{b'\cos\alpha' - a'\cos\beta'}, \\[2ex] \dfrac{y}{\eta_0} = -\dfrac{a'}{b'\cos\alpha' - a'\cos\beta'}. \end{array}$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de λ on trouve

$$\lambda = a\frac{x}{\eta_0} + b\frac{y}{\eta_0} = \frac{b'a - a'b}{b'\cos\alpha' - a'\cos\beta'}.$$

On obtiendrait d'une manière analogue

$$\lambda' = a'\frac{x}{\xi_0} + b'\frac{y}{\xi_0} = \frac{ba' - ab'}{b\cos\alpha - a\cos\beta}.$$

Éliminons des expressions de λ et λ' les cosinus qui y entrent.

Par les formules (4) de l'art. 1, nous pourrons écrire :

$$b'\cos\alpha' - a'\cos\beta' = \frac{e'}{\sin\theta}\left\{\sin\beta'\cos\alpha' - \sin\alpha'\cos\beta'\right\} = \frac{e'}{\sin\theta}\sin(\beta' - \alpha') = -e';$$

d'où

$$\lambda = -\frac{b'a - a'b}{e'};$$

et de même

$$\lambda' = \frac{b'a - a'b}{e}.$$

La substitution de ces valeurs dans les formules (1) donnera

$$\left.\begin{aligned} -\eta &= (ax + by + c)\frac{e'}{b'a - a'b} \\ \xi &= (a'x + b'x + c')\frac{e}{b'a - a'b} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

d'où l'on déduira

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{a}{e}\xi + \frac{a'}{e'}\eta + \frac{a'c - c'a}{b'a - a'b} \\ -x &= \frac{b}{e}\xi + \frac{b'}{e'}\eta + \frac{b'c - c'b}{b'a - a'b} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3')$$

5. *Méthode plus directe.* Ces formules de transformation peuvent s'obtenir d'une manière plus rapide.

Il est aisé en effet de déduire de la dernière formule de l'art. 2, par un changement d'origine, que la distance du point x, y à la droite $ax + by + c = 0$, prise pour axe des ξ, est

$$\delta = \frac{ax + by + c}{e}\sin\theta. \quad \ldots \quad (1)$$

Projetons le contour formé de ξ, de η et du rayon qui va du point ξ, η ou x, y à la nouvelle origine, sur une perpendiculaire à ξ; la projection de ξ sera nulle; celle de η sera $\eta\cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right)$; celle du rayon considéré sera δ; et comme la somme de ces projections est nulle, nous aurons

$$\eta\cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) + \delta = 0, \quad \text{d'où} \quad \delta = -\eta\sin\Theta. \quad . \quad (2)$$

De la comparaison des égalités (1) et (2) on déduit l'une des formules cherchées :

$$-\eta = \frac{1}{e}\frac{\sin\theta}{\sin\Theta}(ax + by + c) \quad \ldots \quad (3)$$

La seconde se trouvera d'une manière analogue : on écrira, *mutatis mutandis*,

$$\delta' = \frac{a'x + b'y + c'}{e'}\sin\theta; \quad \ldots \quad (1')$$

et en projetant le contour précédent sur une perpendiculaire à η :

$$\xi\cos\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right) + \delta' = 0, \quad \text{d'où} \quad \delta' = \xi\sin\Theta. \quad . \quad (2')$$

Comparant (1′) et (2′ on aura

$$\xi = \frac{1}{e'} \frac{\sin \theta}{\sin \Theta} (a'x + b'y + c') \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3')$$

Il suffira de remplacer sin Θ par sa valeur donnée dans l'article 3 pour transformer les formules (3) et (3′) en celles de l'article précédent.

La méthode que nous venons d'appliquer à la recherche des formules de transformation des coordonnées rectilignes planes peut s'employer également dans la géométrie à trois dimensions.

C'est là un exercice très-intéressant que nous recommandons aux jeunes géomètres.

Nous n'avons pas, dans ce qui précède, attiré l'attention du lecteur sur la signification géométrique des constantes k, e, λ, etc., parce qu'elle est très-aisée à découvrir; mais nous engageons vivement ceux qui voudraient employer notre méthode dans la géométrie à trois dimensions, à rechercher avec soin les analogies qui existent, au point de vue de la signification géométrique, entre les constantes k, e, λ, etc., dans le plan, et les mêmes constantes dans l'espace; ils en découvriront de très-curieuses.