rieure du corps. Il est entouré de la cuticule nauplienne *cn* qui présente en avant deux paires de prolongements latéraux où sont engagées les antennes. Les antennes supérieures très-petites sont cachées par les inférieures a^2. L'embryon est vu du côté du ventre.

Fig. 33. — Appendice foliacé, montrant de petits espaces remplis d'un liquide assez réfringent, au milieu de la masse cellulaire qui les constitue; *ll,* lame cellulaire recouvrant la masse nutritive dont la limite est indiquée par la ligne *d.*

Fig. 34. — Le même organe complétement développé. Les espaces qui sont encore isolés dans la figure 33 se sont fondus l'un dans l'autre, de sorte qu'à ce moment les appendices sont véritablement excavés. A la paroi on reconnaît la cuticule nauplienne qui s'accuse par un contour foncé, et immédiatement sous elle on distingue la couche cellulaire. Dans le liquide qui remplit la cavité de l'organe, on distingue des cellules parfaitement libres. Dans la tige d'insertion de l'appendice on observe des gouttelettes réfringentes, provenant de la masse nutritive centrale de l'œuf.

Note sur quelques théorèmes généraux de géométrie supérieure; par M. F. Folie, docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'école industrielle de Liége.

Dans la dernière séance de l'Académie, M. Catalan a eu l'obligeance de communiquer à la classe des sciences l'énoncé d'un théorème général sur les sections coniques, auquel nous sommes arrivé par une voie purement analytique.

Notre méthode nous a tout naturellement conduit à la démonstration des principaux théorèmes qui sont développés par M. Chasles dans son beau *Traité des sections coniques*, et à la généralisation de plusieurs d'entre eux.

Le défaut de temps nous met dans l'impossibilité absolue de développer aujourd'hui cette méthode; nous nous bornerons donc, dans ce travail, à donner la démonstration du théorème général énoncé dans la dernière séance, et de son corrélatif, en les déduisant comme simples corollaires des théorèmes démontrés par M. Chasles, sous le nom de *Théorème de Pappus* et *Théorème corrélatif de celui de Pappus*.

On verra combien cette déduction ou cette généralisation paraît naturelle, et l'on s'étonnera peut-être qu'aucun géomètre, depuis Pappus, n'ait songé à généraliser son théorème; mais bien souvent une vérité ne frappe par son évidence qu'après qu'elle été démontrée, et l'on se demande alors comment il se fait qu'on n'y ait pas pensé plus tôt.

Il en est ainsi de cette généralisation qui aurait pu rester inaperçue pendant quelque temps encore, si nous n'y avions été conduit d'abord par la voie analytique (*).

Avant que nous abordions la démonstration de nos théorèmes, nous indiquerons quelques notations qui auront pour but de la simplifier considérablement; à ces notations pourraient correspondre dans la langue géométrique quelques expressions nouvelles, que nous ne proposons toute-

(*) Nous ne croyons pas manquer au respect que nous professons pour un savant illustre, en faisant remarquer, à l'appui de ces considérations, que, quoique M. Chasles regarde, avec raison, le théorème de Desargues comme n'étant que celui de Pappus mis sous une autre forme (*Aperçu historique*, p. 339), et quoiqu'il ait étendu le premier de ces théorèmes au quadrilatère complet, il omet cependant de le faire pour le second, qui précède immédiatement le théorème de Desargues dans le dernier ouvrage de l'éminent géomètre (*Traité des sections coniques,* pp. 16 et 18).

fois qu'avec la plus grande réserve, bien qu'elles abrégent singulièrement le discours.

Les théorèmes dont il s'agit sont relatifs l'un aux distances d'un point quelconque d'une conique aux côtés d'un polygone inscrit, l'autre aux distances d'une tangente aux sommets d'un polygone circonscrit. On devrait dire plutôt, comme cela ressortira clairement de la généralisation de ces théorèmes, que l'un est relatif aux points d'une conique, l'autre à ses tangentes; ou, si l'on veut traduire une dénomination heureuse proposée par Steiner, dans cette langue allemande qui se prête si merveilleusement à la formation des mots composés, on dira que le premier théorème est relatif aux distances d'un point de la conique aux côtés d'un *polygone* inscrit, le second aux distances d'une tangente aux sommets d'un *plurilatère* circonscrit (*).

Dans un polygone (nous sous-entendrons le mot complet), de n sommets $0, 1, 2 \ldots n-1$, nous appellerons côtés du premier ordre ceux qui unissent deux points dont les

(*) Steiner exprime par le mot composé n (*Seit*) l'ensemble de n côtés, et par le mot n (*Eck*) l'ensemble de n sommets; il nous semble que ces mots pourraient se traduire, le premier par *plurilatère de n côtés,* le second par *polygone de n sommets*. Pour bien en fixer le sens, nous énoncerons les deux propriétés suivantes données par Steiner (*Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten van einander,* Erster Theil, § 20, p. 73) :

« L'ensemble de n droites situées dans un même plan constitue un plurilatère complet de n côtés; les $\frac{n(n-1)}{n}$ intersections des côtés s'appellent sommets du plurilatère; il se compose de $\frac{1.2.3.4\ldots(n-1)}{2}$ plurilatères ou polygones simples de n côtés ou de n sommets. »

« L'ensemble de n points situés dans un même plan constitue un polygone complet de n sommets; les $\frac{n(n-1)}{2}$ droites déterminées par ces sommets s'appellent côtés du polygone; il se compose de $\frac{1.2.3.4\ldots(n-1)}{2}$ polygones ou plurilatères simples de n sommets ou de n côtés. »

rangs diffèrent d'une unité; côtés du second ordre ceux qui unissent deux points dont les rangs diffèrent de deux unités, etc.

De même, dans un plurilatère de n côtés $0,1,2.....n-1$, nous appellerons sommets de premier ordre les intersections de deux côtés dont les rangs diffèrent d'une unité; sommets du second ordre les intersections de deux côtés dont les rangs diffèrent de deux unités, etc.

Soient donc d'abord sur une conique n points successifs (polygone de n sommets) se succédant dans l'ordre naturel depuis 0 jusqu'à $n-1$.

Nous désignerons les distances d'un point quelconque de la conique *aux côtés du premier ordre* :

$$0,1;\ 1,2;\ 2,3 \ldots\ n-1,0; \qquad \text{par :}$$
$$1_0;\ 1_1;\ 1_2\ \ldots\ 1_{n-1}$$

les distances du même point *aux côtés du second ordre*

$$0,2;\ 1,3;\ 2,4 \ldots\ldots\ n-1,1; \quad \text{par :}$$
$$2_0;\ 2_1;\ 2_2 \ldots\ldots\ 2_{n-1};$$

généralement les distances du même point aux *côtés du m^{me} ordre*

$$0,m;\ 1,m+1;\ 2,m+2 \ldots\ldots \ \text{par :}$$
$$m_0;\ m_1;\ m_2 \ldots\ldots$$

Il est à remarquer que quand la somme des nombres qui marquent le rang et l'indice sera supérieure à n, l'on devra en retrancher n; ainsi, en supposant $m=n-3$, au lieu de m_4 on écrirait m_1, etc.

Toutes ces distances sont évidemment des variables qui dépendent de la position du point choisi sur la conique.

Soient en second lieu n tangentes successives à une conique (plurilatère de n côtés), se suivant dans l'ordre naturel depuis 0 jusqu'à $n-1$.

Nous désignerons les distances d'une tangente quelconque aux points d'intersection (sommets du premier ordre du plurilatère)

$$0,1;\ 1,2;\ 2,3 \ldots\ n-1,0; \ \text{par :}$$
$${}_0 1;\ {}_1 1;\ \ {}_2 1 \ldots\ {}_{n-1}1;$$

les distances de la même tangente aux points d'intersection (sommets du second ordre)

$$0,2;\ 1,3;\ 2,4 \ldots\ n-1,1; \ \text{par :}$$
$${}_0 2;\ {}_1 2;\ {}_2 2 \ldots\ldots\ {}_{n-1}2;$$

généralement les distances de la même tangente aux points d'intersection (*sommets du m^{me} ordre*)

$$0,m;\ 1,m+1;\ 2,m+2 \ldots \ \text{par :}$$
$${}_0 m;\ {}_1 m;\ \ {}_2 m \ldots\ldots$$

Ces notations sont tout à fait identiques aux précédentes, et donnent lieu à la même remarque.

Toutes ces distances sont des fonctions des coordonnées du point de contact de la tangente choisie.

Lorsque deux fonctions de certaines variables (les coordonnées d'un point quelconque d'une conique, par exemple,) seront telles que pour toutes les valeurs des variables, les différentes valeurs de ces fonctions soient entre elles dans un rapport constant, nous emploierons, pour indiquer l'existence de cette relation, le signe $\div$; ainsi la relation

$$F_1 f_1 \div F_2 f_2$$

indique que pour toutes les valeurs possibles des variables, le produit des fonctions F_1 et f_1 de ces variables est dans un rapport constant avec le produit des fonctions F_2 et f_2.

Pour abréger le discours, nous proposerons d'appeler cette relation une *analogie*, et de l'énoncer en disant que le premier produit est *analogique* au second, ou que les deux produits sont *analogiques* (*).

Quant au rapport constant qui existe entre eux, on pourrait l'appeler *raison d'analogie;* mais nous verrons que la connaissance de ce rapport est généralement peu intéressante, et c'est ce motif qui nous a déterminé à l'omettre dans la notation comme dans le discours.

Il va de soi qu'on peut multiplier et diviser entre elles des analogies et les élever à des puissances entières ou fractionnaires.

Nous pouvons maintenant aborder notre démonstration en commençant par généraliser le théorème de Pappus et le théorème corrélatif énoncés par M. Chasles en ces termes (*Traité des sections coniques*, pp. 16 et 24) :

« Théorème de Pappus. — *Quand un quadrilatère est inscrit dans une conique, le produit des distances de chaque point de la courbe à deux côtés opposés est au produit des distances du même point aux deux autres côtés, dans une raison constante.* »

« Théorème corrélatif de celui de Pappus. — *Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, le produit des distances d'une tangente quelconque à deux sommets*

(*) Ces mots dérivent de αναλογοσ, proportionnel, et celui d'analogie n'est usité en mathématiques que dans un cas tellement restreint (*Analogies de Neper*) que la confusion est impossible.

opposés et le produit des distances de la même tangente aux deux autres sommets, sont en raison constante. »

Nous aurons à démontrer que ces théorèmes sont susceptibles de la généralisation suivante :

Théorème de Pappus généralisé. — *Quand un tétragone est inscrit dans une conique, les produits des distances d'un point quelconque de la courbe à deux côtés non adjacents à un même sommet sont analogiques;*

ou bien, en employant la terminologie ordinaire :

Quand un quadrilatère COMPLET *est inscrit dans une conique, les produits des distances d'un point quelconque de la courbe à chaque couple de côtés opposés et aux deux diagonales sont entre eux en raison constante.*

Théorème corrélatif de celui de Pappus généralisé. — *Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, les produits des distances d'une tangente quelconque à deux sommets non adjacents à un même côté sont analogiques;*

ou bien, en employant la terminologie ordinaire :

Quand un quadrilatère COMPLET *est circonscrit à une conique, les produits des distances d'une tangente quelconque à deux sommets opposés (c'est-à-dire non situés sur un même côté) sont entre eux en raison constante.*

Pour démontrer ces théorèmes généralisés, nous partirons des corollaires suivants, déduits par M. Chasles (*l. c.* pp. 38 et 56) des théorèmes particuliers énoncés plus haut :

« *Quand un angle est circonscrit à une conique, les* *produits des distances de chaque point de la courbe aux deux côtés de l'angle, et le carré de la distanee du même point à la corde qui joint les points de contact de ces deux côtés, sont en raison constante.* »

« *Quand un angle* DAB *est circonscrit à une conique, le produit des distances de chaque tangente aux deux points de contact* D, B *de côtés de l'angle, et le carré de la distance de la même tangente au sommet* A, *sont en raison constante.* »

Soient d'abord pris sur une conique quatre points 0, 1, 2, 3; menons en ces points des tangentes; si nous employons les notations indiquées plus haut, et que de plus nous représentions par $1'_0$; $1'_1$; $1'_2$; $1'_3$ les distances d'un point de la conique à ces tangentes successives, nous aurons, en vertu du premier corollaire, les analogies suivantes :

$$1'_0 \cdot 1'_1 \div 1^2_0$$
$$1'_1 \cdot 1'_2 \div 1^2_1$$
$$1'_2 \cdot 1'_3 \div 1^2_2$$
$$1'_3 \cdot 1'_0 \div 1^2_3$$
$$1'_0 \cdot 1'_2 \div 2^2_0$$
$$1'_1 \cdot 1'_3 \div 2^2_1$$

Multipliant la 1re par la 3me, la 2me par la 4me, la 5me par la 6me, on obtient :

$$1'_0 \cdot 1'_1 \cdot 1'_2 \cdot 1'_3 \div 1^2_0 \cdot 1^2_2 \div 1^2_1 \cdot 1^2_3 \div 2^2_0 \cdot 2^2_1;$$

d'où :

$$1_0 \cdot 1_2 \div 1_1 \cdot 1_3 \div 2_0 \cdot 2_1.$$

On voit, en outre, que les carrés des trois produits sont analogiques au produit des distances du point considéré aux tangentes menées aux quatre sommets du tétragone.

Soient actuellement quatre tangentes 0, 1, 2, 3 à une conique; si nous faisons usage des notations indiquées plus haut, et que nous représentions, en outre, par ${}_01'$; ${}_11'$; ${}_21'$; ${}_31'$ les distances d'une tangente quelconque aux points de contact des quatre tangentes précédentes, nous aurons, en vertu du second corollaire, les analogies :

$${}_01' \cdot {}_11' \div {}_11^2$$
$${}_11' \cdot {}_21' \div {}_21^2$$
$${}_21' \cdot {}_31' \div {}_31^2$$
$${}_31' \cdot {}_01' \div {}_01^2$$
$${}_11' \cdot {}_31' \div {}_02^2$$
$${}_21' \cdot {}_01' \div {}_12^2$$

Multipliant la 1re par la 3me, la 2me par la 4me, la 5me par la 6me, on obtient :

$${}_01' \cdot {}_11' \cdot {}_21' \, {}_31' \div {}_11^2 \cdot {}_31^2 \div {}_01^2 \cdot {}_21^2 \div {}_02^2 \cdot {}_12^2;$$

d'où

$${}_01 \cdot {}_21 \div {}_11 \cdot {}_31 \div {}_02 \cdot {}_12.$$

On voit, en outre, que les carrés de ces trois produits sont analogiques au produit des distances de la tangente considérée aux quatre points de contact des côtés du quadrilatère.

Nous ferons remarquer dès à présent que, grâce à la parfaite identité des notations que nous avons employées pour le tétragone inscrit et pour le quadrilatère circonscrit, les théorèmes généraux que nous allons déduire pour un polygone inscrit de n sommets, de la propriété du tétragone inscrit, pourront s'étendre, sans autre démonstration, au plurilatère circonscrit de n côtés; nous nous bornerons donc à l'énoncé seul, pour les théorèmes corrélatifs.

Théorème général relatif a n points d'une conique. — *Quand un polygone de* n *sommets est inscrit dans une conique, les produits des distances d'un point de la conique aux côtés de chaque ordre sont analogiques* (*).

Théorème général corrélatif. — *Quand un plurilatère de* n *côtés est circonscrit à une conique, les produits des distances d'une tangente quelconque aux sommets de chaque ordre sont analogiques.*

Considérons en premier lieu un polygone d'un nombre impair $2n+1$ de sommets; et démontrons d'abord que si le théorème est vrai pour ce polygone, il le sera pour celui de $2n+3$ sommets; ensuite, que le théorème subsiste encore dans quelque ordre que les points se succèdent sur la conique, c'est-à-dire pour tous les polygones simples qu'on peut former avec ces mêmes sommets.

(*) Si n est pair il y a, pour chacun des polygones simples, $\frac{n}{2}$ ordres différents de côtés; si n est impair, il y a $\frac{n-1}{2}$ ordres. En effet, soient donnés $2n$ sommets; on pourra joindre le point 0 aux points successifs . . . . $1, 2, \ldots n-1, n$;
le point 1 aux points successifs. . . . $2, 3, \ldots n, n+1$; etc.
le point n . . . . $n+1, n+2, \ldots 2n-1, 0$;
le point $n+1$. . . . . $n+2, n+3, \ldots 0, 1$;
d'où l'on voit que si l'on joignait le point 0 au point $n+1$, au lieu d'avoir un côté du $(n+1)^{me}$ ordre, on retomberait simplement sur le côté qui joint $n+1$ à 0, et qui est du $(n-1)^{me}$ ordre; de même le côté $0, n+2$ serait du $(n-2)^{me}$ ordre, et ainsi de suite.

Une démonstration analogue s'appliquerait à un polygone d'un nombre impair de sommets.

La propriété corrélative existe naturellement pour les sommets d'un plurilatère.

En effet, aux $2n+1$ points successifs $0; 1; 2 \ldots 2n$ ajoutons, entre $2n$ et 0, les points $2n+1$ et $2n+2$, et adoptons les notations relatives au polygone de $2n+3$ sommets; nous remarquerons que la distance d'un point de la conique au dernier côté du premier ordre du polygone de $2n+1$ sommets $0; 1; 2 \ldots 2n$ devra se représenter par 3_{2n}, puisque c'est la distance au côté $(2n, 0)$ du troisième ordre du polygone de $2n+3$ sommets; de même les distances aux deux derniers côtés du deuxième ordre du même polygone de $2n+1$ sommets devront se représenter par 4_{2n-1} et 4_{2n}; les distances aux trois derniers côtés du troisième ordre par 5_{2n-2}, 5_{2n-1}, 5_{2n}, et ainsi de suite.

Les polygones des $2n+1$ sommets $0; 1; \ldots 2n$, donnent par hypothèse :

$$1_0 \ldots 1_{2n-1}.3_{2n} \div 2_0 \ldots 2_{2n-2} 4_{2n-1}.4_{2n} \div 3_0 \ldots 3_{2n-3}.5_{2n-2}.5_{2n-1}.5_{2n} \div \ldots$$
$$\div (n-1)_0 \ldots (n-1)_{n+1} (n+1)_{n+2} \ldots (n+1)_{2n} \div n_0 \ldots n_n (n+2)_{n+1} \ldots (n+2)_{2n}.$$

Pour appliquer ces relations aux polygones $(1; 2 \ldots 2n+1)$, $(2; 3 \ldots 2n+2)$, ... $(2n+1; 2n+2; 0 \ldots 2n-2)$, $(2n+2; 0; 1 \ldots 2n-1)$, il suffira d'ajouter à chaque indice une, deux... $2n+1$, $2n+2$ unités.

Nous aurons ainsi $2n+3$ analogies, et si nous les multiplions entre elles, nous obtiendrons, en désignant en général par P_n le produit des distances d'un point de la conique aux côtés du n^{me} ordre :

$$P_1^{2n}.P_3 \div P_2^{2n-1}. \div P_4^2 P_3^{2n-2}.P_5^3 \div \ldots \div P_{n-1}^{n+2}.P_{n+1}^{n-1} \div P_n^{n+1}.P_{n+2}^{n};$$

mais

$$(n+2)_{n+1} = (n+1)_0; \text{ donc } P_{n+2} = P_{n+1}.$$

Comme chacun des membres de ces analogies a un terme commun avec celui qui le suit de deux rangs, on en conclut :

$$P_1 \div P_2 \div P_3 \div \ldots \div Pn + 1.$$

Démontrons maintenant que ce théorème est vrai, dans quelque ordre que se succèdent les sommets.

Pour cela, il suffit de prouver qu'on peut intervertir entre eux deux sommets quelconques; par exemple, que dans un polygone de sommets successifs $0; 1 \ldots n-1; n; n+1 \ldots m$, on peut intervertir les sommets n et $n+1$ et que le théorème subsistera pour le polygone de sommets successifs $0; 1 \ldots n-1; n+1; n; n+2 \ldots m$.

Pour celui-ci on a, en appliquant le théorème qui précède :

$$1_0 \ldots 1_{2n-1} \cdot 2_{n-1} \cdot 1_n \cdot 2_n \cdot 1_{n+2} \cdot 1_{n+3} \ldots 1_m \div$$
$$\div\, 2_0 \ldots 2_{n-3} \cdot 3_{n-2} \cdot 1_{n-1} \cdot 1_{n+1} \cdot 3_n \cdot 2_{n+2} \cdot 2_{n+3} \ldots 2_m;$$

et il s'agit de prouver que l'on a également :

$$1_0 \ldots 1_m \div 2_0 \ldots 2_m.$$

De ces deux analogies résulte la suivante :

$$\frac{1_{n-1} \cdot 2_n}{1_{n-1} \cdot 1_{n+1}} \div \frac{3_{n-2} \cdot 3^n \cdot 1_{n-1} \cdot 1_{n+1}}{2_{n-1} \cdot 2_n \cdot 2_{n-1} \cdot 2_{n+1}}$$

Si cette dernière est vraie, le théorème sera démontré.

Or, dans le quadrilatère $(n-1,\ n,\ n+1,\ n+2)$ on a :

$$1_{n-1} \cdot 1_{n+1} \div 1_n \cdot 3_{n-1} \div 2_{n-1}\, 2_n.$$

(*) Car dans un polygone de $2n+3$ côtés, le côté qui joint le sommet $n+1$ à celui qui le suit de $n+2$ rangs aboutit au sommet $2n+3$ ou 0.

Changeant n successivement en $n-1$ et en $n+1$, on aura

$$1_{n-1} \cdot 3_{n-2} \div 2_{n-2} \cdot 2_{n-1}.$$
$$1_{n+1} \cdot 3_n \div 2_n \cdot 2_{n+1};$$

d'où résulte l'analogie à démontrer.

Donc, si ce théorème est vrai pour un polygone de $2n+1$ sommets, il le sera pour un polygone de deux sommets de plus; or il est vrai pour le pentagone (nous supprimons la démonstration qui se déduit très-simplement de la propriété du quadrilatère); donc il l'est pour l'heptagone; etc.

La démonstration se ferait absolument de la même manière pour un polygone d'un nombre pair de côtés, et nous croyons superflu de nous y arrêter.

Mais il se présente, en outre, pour ces polygones, une particularité remarquable : les côtés d'ordre impair, dans ces polygones, sont en nombre pair, et de là résulte, comme nous allons voir, la propriété suivante.

Théorème général relatif a $2n$ points d'une conique. — *Quand un polygone de $2n$ sommets est inscrit dans une conique, si l'on considère tous ses côtés d'ordre impair, les produits des distances d'un point de la conique à ceux de ces côtés du même ordre qui sont de rang pair et à ceux qui sont de rang impair sont analogiques.*

Théorème général corrélatif. — *Quand un plurilatère de $2n$ côtés est circonscrit à une conique, si l'on considère tous ses sommets d'ordre impair, les produits des distances d'une tangente quelconque à ceux de ces sommets du même ordre qui sont de rang pair et à ceux qui sont de rang impair sont analogiques.*

En effet, passons, comme nous l'avons fait dans la démonstration précédente, d'un polygone de $2n$ sommets à celui de $2n+2$ sommets, en nous servant des notations relatives à ce dernier; les $2n+2$ polygones de $2n$ sommets que nous pourrons former nous donneront des relations de la forme :

$$1_0 \dots 1_{2n-2} \,.\, 3_{2n-1} \div 2_0 \,..\, 2_{2n-3} \,.\, 4_{2n-2} \,.\, 4_{2n-1} \div \dots\dots$$
$$1_1 \dots 1_{2n-1} \,.\, 3_{2n} \div 2_1 \dots 2_{2n-2} \,.\, 4_{2n-2} \,.\, 4_{2n} \div \dots\dots$$
$$1_2 \dots 1_{2n} \,.\, 3_{2n+1} \div 2_2 \dots 2_{2n-1} \,.\, 4_{2n} \,.\, 4_{2n+1} \div \dots\dots$$

D'où l'on déduit aisément en multipliant entre elles les analogies de rang pair, puis celles de rang impair, et en appelant respectivement P' et P'' les produits des distances d'un point de la conique aux côtés de rang impair et aux côtés de rang pair :

$$P_1^{n+1} . P''_3 \div P_2^n . P_4$$
$$P_1^{n+1} . P'_3 \div P_2^n . P_4;$$

d'où

$$P'_3 \div P''_3 .$$

De même on aura : $P'_1 \div P''_1$.

Pour le démontrer, il suffit de faire suivre le sommet 0 immédiatement du sommet 3, de sorte que le polygone (0; 1; 2; 3 ... $2n+1$) devient (0; 3; 2; 5 ... $2n+1$; $2n$; 1). Dans celui-ci la propriété précédente est, comme on voit, relative aux côtés du premier ordre.

On le démontrerait de même pour les côtés du cinquième, septième, etc. ordre.

On peut également, pour ceux-ci, partir d'un polygone de $2n-2$, $2n-4$ etc. sommets. On aura alors des analogies de la forme :

$$1_0 \dots 1_{2n-4} \,.\, 5_{2n-3} \div 2_0 \dots 2_{2n-5} \,.\, 6_{2n-4} \,.\, 6_{2n-3} \div \dots\dots$$
$$1_1 \dots 1_{2n-3} \,.\, 5_{2n-2} \div 2_0 \dots 2_{2n-4} \,.\, 6_{2n-3} \,.\, 6_{2n-2} \div \dots\dots, \text{ etc.}$$

D'où comme plus haut, en multipliant les analogies de rang pair, puis celles de rang impair :

$$P_1^{n+1} . P''_5 \div P_2^n . P_6$$
$$P_1^{n+1} . P'_5 \div P_2^n . P_6;$$

et par suite :

$$P''_5 \div P'_5; \text{ etc.}$$

Enfin de la comparaison de ces analogies entre elles et avec

$$P_1 \div P_2 \div P_3 \div \dots\dots \div P_{2n+1}$$

on déduit

$$P'_1 \div P''_1 \div P'_3 \div P''_3 \div P'_5 \div P''_5 \div \dots \div \sqrt{P_{n+1}} \text{ (*)};$$

Ce qui démontre le théorème.

Il est clair que ce théorème, qui a été déduit du précédent, subsiste, comme celui-ci, dans quelque ordre que se suivent les sommets du polygone.

Les théorèmes que nous venons de démontrer renferment naturellement, comme cas particuliers, les théorèmes analogues déduits par M. Chasles du théorème de Pappus et de son corrélatif; ils donnent lieu, en outre, à un grand nombre de corollaires qu'il n'entre pas dans notre plan de développer. Il nous suffira de dire que l'on arrivera à ces corollaires en considérant un sommet quel-

(*) Nous écrivons $\sqrt{P_{n+1}}$ parce que, dans un polygone de $2n+2$ côtés, les côtés du $(n+1)$ me ordre sont doubles, de sorte que

$$P'_{n+1} = P''_{n+1} = \sqrt{P_{n+1}}.$$

conque d'un polygone inscrit comme formant un côté infiniment petit dirigé suivant la tangente menée à la courbe à ce sommet; de même qu'on peut considérer un point de contact d'un plurilatère circonscrit comme un nouveau sommet d'un plurilatère qui a un côté de plus.

Ces théorèmes se simplifient considérablement dans le cas du cercle, et davantage encore pour les polygones réguliers; ils conduisent immédiatement à la détermination du côté de ces polygones en fonction du rayon.

De la présence de chlorures alcalins dans les eaux et les roches du bassin houiller de Liége; par M. Renier Malherbe, ingénieur, attaché au service spécial de la carte générale des mines de Belgique.

Parmi les questions de géogénie qui fournissent encore matière à controverse, figure l'origine de la houille.

Si l'on admet la théorie, généralement adoptée, sur le mode de formation des dépôts houillers par voie d'abaissement et d'exhaussement alternatifs de la croûte terrestre herbacée au-dessous et au-dessus du niveau général des eaux, les probabilités naturelles laissent supposer dans une égale mesure, que ces dernières appartenaient à l'océan, ou bien aux eaux douces résultant de l'évaporation et de la condensation des liquides originaires sur des lambeaux de terre ferme.

Les déductions géogéniques seules ne peuvent fournir la solution du problème; des faits directs d'observation