THÉORIE NOUVELLE

DU

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE,

PAR

M. F. FOLIE,

Docteur en sciences physiques et mathématiques, répétiteur à l'École des mines
et professeur à l'École industrielle de Liége, membre de la Société
royale des sciences de cette ville.

IIme PARTIE.

MOUVEMENT D'UN CORPS LIBRE DANS LA SUITE DU TEMPS.

IIIme PARTIE.

MOUVEMENT D'UN CORPS GÊNÉ.

Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2me série, tome XXIV, nos 9 et 10; 1867.

La pagination du *Bulletin* se trouve entre parenthèses.

Bruxelles, impr. de M. Hayez.

THÉORIE NOUVELLE

DU

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE.

DEUXIÈME PARTIE : *Mouvement d'un corps libre dans toute la suite du temps.*

1. Dans une première partie (*), nous avons déterminé le mouvement initial d'un corps libre soumis à un système quelconque de forces. Nous nous proposons d'étendre les résultats que nous avons obtenus au mouvement du corps à un instant quelconque, soit que l'inertie seule le sollicite, soit que des forces continues agissent sur lui.

(*) *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2me série, tome XX, no 8.

Pour cela, il suffira que nous connaissions toutes les forces qui sollicitent le corps à un instant quelconque.

Or, outre les forces extérieures qui peuvent agir sur lui, nous aurons à considérer celles qui pourraient communiquer instantanément à chaque point du corps la vitesse qui lui a été imprimée, et que l'inertie tend à lui conserver.

Ces dernières se déterminent d'une manière très-simple au moyen de cette remarque, que si un point matériel de dm est animé d'une vitesse v, il peut être considéré comme étant sollicité par une force vdm, de même sens que cette vitesse, et qui serait capable de la lui imprimer instantanément.

Ces forces, appliquées à tous les éléments du corps, et agissant seules si celui-ci est abandonné à son inertie, ou jointes aux forces extérieures qui le sollicitent au même instant, imprimeront à ce corps un mouvement que l'on déterminera de la même manière que si le corps était au repos.

Le problème du mouvement d'un corps libre à un instant quelconque se trouve ainsi ramené à celui de la détermination de son mouvement initial.

Nous ferons remarquer, dès à présent, que dans cette solution la force centrifuge n'interviendra pas d'une manière explicite. C'est qu'en effet nous décomposerons toujours les forces élémentaires vdm suivant les axes, et non suivant la tangente et la normale à l'arc élémentaire décrit, afin de conserver à notre méthode toute son uniformité. Loin de nous toutefois la prétention de vouloir nous passer en mécanique de cette idée lumineuse de la force centrifuge, l'une de celles qui ont fait faire le plus de progrès à la science, et qui font pénétrer le plus intimement

la raison des phénomènes du mouvement. Mais, pour le dire en passant, c'est surtout dans le cas du mouvement d'un corps gêné, dont nous nous occuperons par la suite, que la considération de cette force est le plus féconde en résultats.

Afin de conserver l'ordre que nous avons adopté dans la première partie, nous envisagerons le mouvement dans toute la suite du temps :

1° D'un système matériel plan sollicité par des forces situées dans son plan ;

2° D'un corps libre sollicité par des forces quelconques.

Et nous distinguerons dans chacun de ces problèmes deux cas :

A. Celui du mouvement du système abandonné à son inertie.

B. Le cas où le système serait sollicité par des forces continues.

1° *Mouvement d'un système matériel plan dans toute la suite du temps.*

A. *Système abandonné à son inertie.*

2. Supposons un système matériel plan, parfaitement libre, animé à un instant quelconque t d'une vitesse angulaire ω autour d'un axe instantané perpendiculaire à son plan.

Soient, à cet instant, x_0, y_0 les coordonnées du centre instantané, x, y celles d'un point quelconque du système, rapportées à deux axes rectangulaires fixes. Désignons comme dans la première partie, n^os 7 et 8, par X, Y celles du centre de gravité; par R sa distance au centre instantané; par r_0 celle du point x, y à ce centre. — Il est clair qu'après un instant dt le point x, y aura décrit autour du centre instantané un arc $\omega r_0 dt$, et que les projections de cet arc sur les axes seront :

$$dx = \omega (y - y_0)\, dt; \quad dy = - \omega (x - x_0)\, dt,$$

en supposant que la rotation positive ait lieu des Y vers les X.

Les nouvelles coordonnées x', y' du point x, y après $t + dt$ seront donc :

$$x' = x + \omega (y - y_0)\, dt. \quad y' = y - \omega (x - x_0)\, dt.$$

En vertu de l'inertie, ce point conserverait, s'il était libre, suivant les axes des X et des Y les vitesses respectives.

$$v_x = \omega (y - y_0), \quad v_y = - (x - x_0).$$

Il peut donc être considéré (n° 1) comme sollicité par les forces :

$$dP'_x = \omega (y - y_0)\, dm; \quad dP'_y = - \omega (x - x_0)\, dm,$$

dont les résultantes pour tout le système sont :

$$(1) \qquad P'_x = \omega \int (y - y_0)\, dm = \omega M (Y - y_0).$$
$$(2) \qquad P'_y = - \omega \int (x - x_0)\, dm = - \omega M (X - x_0).$$

Ces dernières seront appliquées à des distances respectives y_1', et x_1', des axes, données par :

$$\begin{aligned} y_1' P_x' &= \int y' dP_x' = \omega \int [y - \omega (x - x_0)\, dt] (y - y_0)\, dm \\ &= \omega \int y^2 dm - \omega y_0 YM - \omega^2 dt \int (x - x_0)(y - y_0)\, dm. \\ x_1' P_y' &= \int x' dPy' = - \omega \int [x + \omega (y - y_0)\, dt] (x - x_0)\, dm \\ &= - \omega \int x^2 dm + \omega x_0 XM - \omega^2 dt \int (y - y_0)(x - x_0)\, dm. \end{aligned}$$

D'où le moment résultant :

$$(3). \quad \begin{aligned} y_1' P_x' - x_1' P_y' &= \omega \int (x^2 + y^2)\, dm - \omega M (y_0 Y + x_0 X) \\ &= \omega I_1 - \omega M (y_0 Y + x_0 X), \end{aligned}$$

I_1 désignant le moment d'inertie du système au temps t autour de l'origine fixe, tandis que I continuera à représenter le moment d'inertie autour du centre de gravité.

Le système peut donc être considéré comme sollicité, après $t + dt$, par une force unique P′, dont la ligne d'action a pour équation :

$$(y - y_1')(Y - y_0) + (x - x_1')(X - x_0) = o.$$

3. Déterminons maintenant au moyen des formules de la première partie, n^{os} 7 et 8, le mouvement que cette force va imprimer au système.

A cet effet, commençons par chercher la distance du centre de gravité à la ligne d'action de la force.

Après $t + dt$ les coordonnées du centre de gravité seront :

$$X' = X + \omega (Y - y_0)\, dt \ . \ Y' = Y - \omega (X - x_0)\, dt.$$

La distance cherchée sera donc :

$$r_1' = \frac{(Y' - y_1')(Y - y_0) + (X' - x_1')(X - x_0)}{R}.$$

En effectuant les réductions on trouvera :

$$r_1' = \frac{I}{M \cdot R} = \textit{constante}.$$

Si nous appliquons les formules des n^{os} 7 et 8 de la première partie, nous obtiendrons pour la distance du centre de gravité au centre instantané après $t + dt$:

$$R' = \frac{I}{Mr_1'} = R = constante;$$

et pour la vitesse angulaire après $t + dt$:

$$\omega' = \frac{P'r_1'}{I} = \frac{r_1'\sqrt{P_x'^2 + P_y'^2}}{I} = \frac{\omega MR}{I} \cdot \frac{I}{MR}.$$

ou :

$$\omega' = \omega = constante.$$

4. La vitesse angulaire, ainsi que les distances respectives du centre de gravité au centre instantané et à la force étant constantes dans toute la suite du temps, on en conclut aisément :

1° Que *la force qui serait capable d'imprimer à chaque instant, au système en repos, le mouvement qu'il possède en vertu de l'inertie se conserve en grandeur, en direction et en position dans toute la suite du temps ;*

2° Que *le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme ;*

3° Que *le lieu géométrique des positions du centre instantané dans le plan matériel est un cercle qui a son centre au centre de gravité du système, et dont le rayon est* $R = \frac{M\omega}{P}$.

4° Que *le lieu géométrique des positions du centre instantané dans l'espace absolu est une droite parallèle à la trajectoire du centre de gravité.*

B. *Système matériel plan sollicité par des forces continues agissant dans son plan.*

5. Si le système matériel plan, au lieu d'être abandonné à son inertie, est sollicité à chaque instant par une

force Q située dans son plan, et qui peut être fonction du temps, de la vitesse et de la position du système, il suffira (n° 1) que nous ajoutions aux composantes totales de l'inertie, celles de la force donnée, pour obtenir toutes les forces qui sollicitent le système.

Nous pourrons alors appliquer de nouveau les formules de la première partie (n^os^ 7 et 8).

Conservons les notations précédentes, et désignons en outre par x_1, y_1, les coordonnées au temps t d'un point quelconque, rapportées à deux axes menés parallèlement aux axes fixes par le centre de gravité, de sorte que :

$$x = x_1 + X; \quad y = y_1 + Y.$$

soient $Q_x\, dt$ et $Q_y\, dt$, les composantes suivant les axes fixes de la force unique extérieure qui sollicite le système pendant l'instant dt, qui suit le temps t; Mdt son moment autour du centre de gravité.

Les composantes de la force totale que sollicite le système après $t + dt$, seront (n° 2) :

$$(1') \quad \ldots \quad R_x = \omega M(Y - y_0) + Q_x dt.$$

$$(2') \quad \ldots \quad R_y = -\omega M(X - x_0) + Q_y dt.$$

Et son moment autour du centre de gravité :

$$(3') \quad \ldots \quad M' = \omega I + M_1 dt.$$

6. Nous aurons donc pour déterminer la vitesse angulaire et la position du centre instantané après $t + dt$ les formules (1^re^ partie, n° 7) :

$$\omega' M(Y' - y_0') = \omega M(Y - y_0) + Q_x dt,$$
$$-\omega' M(X' - x_0') = -\omega M(X - x_0) + Q_y dt,$$
$$\omega' I = \omega I + M_1 dt,$$

d'où nous déduirons :

$$\mathrm{M}\,\frac{d\{\omega\,(\mathrm{Y}-y_0)\}}{dt}=\mathrm{Q}_x.$$

$$-\,\mathrm{M}\,\frac{d\{\omega\,(\mathrm{X}-x_0)\}}{dt}=\mathrm{Q}_y.$$

$$\mathrm{I}\,\frac{d\omega}{dt}=\mathrm{M}_\mathrm{I}.$$

Or, nous savons que $\omega(\mathrm{Y}-y_0)$ et $-\,\omega\,(\mathrm{X}-x_0)$ sont les composantes de la vitesse du centre de gravité ; donc :

L'accélération du centre de gravité est la même que si toutes les forces motrices y étaient appliquées et toute la masse concentrée.

L'accélération angulaire est égale au moment des forces motrices, pris par rapport au centre de gravité, divisé par le moment d'inertie autour de ce centre.

7. Des deux premières équations précédentes, mises sous la forme :

$$\mathrm{M}\,\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2}=\mathrm{Q}_x;\quad \mathrm{M}\,\frac{d^2\mathrm{Y}}{dt^2}=\mathrm{Q}_y,$$

nous pourrons déduire X et Y en fonction de Q et de t. Ces valeurs étant connues, la troisième équation nous donnera celle de ω. En effet, si nous nommons M le moment de la force par rapport à l'origine fixe, comme :

$$\mathrm{M}_\mathrm{I}=\mathrm{M}-(\mathrm{YQ}_x-\mathrm{XQ}_y),$$

nous connaîtrons M_I, et par suite ω en fonction de Q et de t.

Enfin, substituant les valeurs de ω, X et Y dans les deux premières formules, nous aurons celles de x_0, y_0, coordonnées du centre instantané.

Pour obtenir le lieu géométrique de ses positions, il suffira d'éliminer t entre les équations qui expriment ces coordonnées.

8. Enfin, si l'on veut trouver le lieu géométrique des positions du centre instantané dans le plan matériel lui-même, en désignant par ξ, η, ses coordonnées rapportées à deux axes du centre de gravité fixes dans le plan et mobiles avec lui, et par $\Omega=\int_0^t \omega dt$ l'angle dont le système aura tourné après le temps t, on aura :

$$x_0-\mathrm{X}=\xi\cos\Omega-\eta\sin\Omega;\quad y_0-\mathrm{Y}=\xi\sin\Omega+\eta\cos\Omega.$$

Remplaçant dans ces équations x_0, y_0, X, Y et Ω par leurs valeurs en fonction de t, et éliminant cette variable, on obtiendra le lieu cherché.

2° *Mouvement d'un corps solide libre dans toute la suite du temps.*

A. *Système abandonné à son inertie.*

9. Nous avons vu (*) que sous l'influence d'un système de forces réduites aux trois composantes P_x, P_y, P_z, estimées suivant les axes principaux au centre de gravité, et dont les moments estimés perpendiculairement à ces axes sont M_3, M_2, M_1, un corps libre prend au premier

(*) Première partie, nos 22-30. Nous ferons désormais la masse du corps égale à l'unité pour simplifier les formules ; ou, ce qui revient au même, nous rapporterons les forces, leurs moments et les moments d'inertie à l'unité de masse.

instant une vitesse angulaire $\omega = \sqrt{h^2 + l^2 + k^2}$ autour d'un axe dont les inclinaisons sur les axes principaux ont des cosinus proportionnels à h, l, k; que

$$h = \frac{M_3}{A};\quad l = \frac{M_2}{B};\quad k = \frac{M_1}{C},$$

A, B, C désignant les moments de l'inertie principaux;

Que le corps se transporte en outre le long de l'axe comme si toutes les forces étaient projetées sur sa direction;

Que les composantes de la vitesse d'un point quelconque, en vertu de ce double mouvement, sont :

$$V_x = P_x + lz - ky;\quad V_y = P_y + kx - hz;\quad V_z = P_z + hy - lx.$$

Enfin que l'axe instantané a pour équations :

$$\frac{P_x + lz - ky}{h} = \frac{P_y + kx - hz}{l} = \frac{P_z + hy - lx}{k}.$$

10. Si donc nous supposons ce corps libre animé à un instant quelconque t de la même vitesse angulaire ω autour du même axe, et de la même vitesse de translation le long de cet axe, nous pourrons le considérer comme sollicité à cet instant par les mêmes forces P_x, P_y, P_z de moments respectifs M_3, M_2, M_1.

Cherchons maintenant quelles seront les forces qui l'animeront après $t + dt$, en le supposant abandonné à son inertie.

En vertu de celle-ci, chaque point, s'il était libre, continuerait à se mouvoir avec les vitesses respectives V_x, V_y, V_z, estimées suivant les trois axes principaux dans la position qu'ils occupent à l'instant t; il peut donc être regardé comme sollicité par les forces $V_x dm$, $V_y dm$, $V_z dm$, estimées suivant les mêmes axes.

Mais, afin de pouvoir appliquer à ces forces les théorèmes énoncés au n° 9, il faut qu'elles soient rapportées aux trois axes principaux dans la nouvelle position qu'ils occupent après $t + dt$.

Nous devrons donc déterminer la direction des axes principaux, dans cette nouvelle position, par rapport aux axes primitifs regardés comme fixes dans l'espace. Il est clair que, dans cette détermination, nous pouvons nous dispenser de tenir compte du déplacement du corps le long de l'axe instantané, puisque ce déplacement est commun à tous les points du corps, et n'influe que sur la position de la nouvelle origine.

11. En ne considérant donc que le déplacement dû à la rotation, et en prenant un point du corps situé sur l'axe des Z à une distance z_0 de l'origine, ses coordonnées après $t + dt$ seront devenues, en vertu de ce déplacement seul :

$$dx = lz_0 dt;\quad dy = -hz_0 dt;\quad z_0 + dz = z_0.$$

Ce point, joint à la position que prendra le centre de gravité après $t + dt$, en vertu de ce même déplacement, déterminera la nouvelle direction de l'axe principal Z; les cosinus des inclinaisons de cette direction sur les axes primitifs seront donc :

$$a_1 = ldt;\quad b_1 = -hdt;\quad c_1 = 1.$$

On trouvera de même pour les cosinus des inclinaisons des axes principaux Y et X, après $t + dt$, sur les axes primitifs :

$$a_2 = -kdt;\quad b_2 = 1;\quad c_2 = hdt,\ \text{pour Y},$$
$$a_3 = 1;\quad b_3 = kdt;\quad c_3 = -ldt,\ \text{pour X}.$$

12. Les vitesses du point x, y, z, regardé comme libre, estimées suivant ces nouveaux axes, après $t + dt$, seront donc :

$$\begin{aligned}
V_x' &= a_3V_x + b_3V_y + c_3V_z = V_x + kV_ydt - lV_zdt \\
&= P_x + lz - ky + k(P_y + kx - hz)\,dt - l(P_z + hy - lx)\,dt. \\
V_y' &= a_2V_x + b_2V_y + c_2V_z = V_y - kV_xdt + hV_zdt \\
&= P_y + kx - hz - k(P_x + lz - ky)\,dt + h(P_z + hy - lx)\,dt. \\
V_z' &= a_1V_x + b_1V_y + c_1V_z = V_z + lV_xdt - hV_ydt \\
&= P_z + hy - lx + l(P_x + lz - ky)\,dt - h(P_y + kx - hz)\,dt.
\end{aligned}$$

Ce point peut donc être considéré comme sollicité, après $t + dt$, par les forces :

$$dP_x' = V_x'dm; \quad dP_y' = V_y'dm; \quad dP_z' = V_z'dm,$$

estimées suivant les axes principaux, dans la position qu'ils occupent à cet instant.

Leurs résultantes pour tout le système, seront :

$$(1).\ \left\{\begin{aligned}
P_x' &= \int V_x'dm = P_x + (kP_y - lP_z)\,dt;\ \text{d'où :}\ \frac{dP_x}{dt} = kP_y - lP_z. \\
P_y' &= \int V_y'dm = P_y + (hP_z - kP_x)\,dt;\ \text{d'où :}\ \frac{dP_y}{dt} = hP_z - kP_x. \\
P_z' &= \int V_z'dm = P_z + (lP_x - hP_y)\,dt;\ \text{d'où :}\ \frac{dP_z}{dt} = lP_x - hP_y.
\end{aligned}\right.$$

Les distances de ces forces aux plans principaux, distances que nous désignerons par :

$$y_3', z_3' \text{ pour } P_x'; \quad z_2', x_2' \text{ pour } P_y; \quad x_1', y_1' \text{ pour } P_z',$$

seront, en vertu de la composition des forces parallèles :

$$\begin{aligned}
y_3'P_x' &= \int y dP_x' = -(k + hldt)\int y^2dm; \\
z_3'P_x' &= \int z dP_x' = \quad (l - hkdt)\int z^2dm. \\
x_2'P_y' &= \int x dP_y' = \quad (k - hldt)\int x^2dm; \\
z_2'P_y' &= \int z dP_y' = -(h + lkdt)\int z^2dm. \\
x_1'P_z' &= \int x dP_z' = -(l + hkdt)\int x^2dm; \\
y_1'P_z' &= \int y dP_z' = \quad (h - lkdt)\int y^2dm;
\end{aligned}$$

tous les autres termes disparaissant, parce que les coordonnées sont rapportées aux trois axes principaux du centre de gravité.

De là nous déduirons les moments de ces forces, après $t + dt$, autour des axes principaux :

$$(2).\ \left\{\begin{aligned}
M_3' &= y_1'P_z' - z_2'P_y' = h\int(z^2 + y^2)\,dm + kldt\int(z^2 - y^2)\,dm \\
&= Ah + (B - C)\,lkdt. \\
M_2' &= z_3'P_x' - x_1'P_z' = l\int(x^2 + z^2)\,dm + khdt\int(x^2 - z^2)\,dm \\
&= Bl + (C - A)\,khdt. \\
M_1' &= x_2'P_y' - y_3'P_x' = k\int(y^2 + x^2)\,dm + hldt\int(y^2 - x^2)\,dm \\
&= Ck + (A - B)\,hldt\ (*).
\end{aligned}\right.$$

13. Si nous appliquons à ces forces les résultats établis dans la première partie et rappelés au n° 9, nous en con-

---

(*) Des formules (1) et (2) nous pourrions déduire ce principe que *le système des forces qui seraient capables d'imprimer, à chaque instant, au corps libre en repos, le mouvement qui l'anime en vertu de l'inertie, reste identique à lui-même dans toute la suite du temps ;* principe qui n'est au fond que celui de la conservation du mouvement du centre de gravité et du moment des quantités de mouvement. Mais, dans notre méthode, il résulte avec une telle évidence de celui de l'inertie, que nous aurions plutôt à le vérifier qu'à le démontrer.

clurons que le corps prendra, après $t+dt$, une vitesse angulaire déterminée par ses trois composantes :

$$h' = \frac{M'_3}{A};\quad l' = \frac{M_2'}{B};\quad k' = \frac{M_1'}{C};$$

ou :

$$(5).\quad \begin{cases} h'=h+\dfrac{B-C}{A}\,lkdt;\ l'=l+\dfrac{C-A}{B}\,khdt;\ k'=k+\dfrac{A-B}{C}\,hldt. \\ \text{d'où : } \dfrac{dh}{dt}=\dfrac{B-C}{A}\,lk;\ \dfrac{dl}{dt}=\dfrac{C-A}{B}\,kh;\ \dfrac{dk}{dt}=\dfrac{A-B}{C}\,hl. \end{cases}$$

Les cosinus des inclinaisons de l'axe, autour duquel s'effectue cette rotation, sur les axes principaux, seront :

$$\frac{h'}{\omega'};\ \frac{l'}{\omega'};\ \frac{k'}{\omega'};\quad \omega' = \sqrt{h'^2+l'^2+k'^2}.$$

Or, si nous formons les carrés des vitesses composantes :

$$(5').\ \ldots\ \begin{cases} h'^2 = h^2 + 2\dfrac{B-C}{C}\,hlkdt; \\ l'^2 = l^2 + 2\dfrac{C-A}{B}\,hlkdt; \\ k'^2 = k^2 + 2\dfrac{A-B}{C}\,hlkdt; \end{cases}$$

nous trouverons, en chassant les dénominateurs et faisant la somme :

$$(4)\quad Ah'^2 + Bl'^2 + Ck'^2 = Ah^2 + Bl^2 + Ck^2 = constante = F;$$

équation que l'on peut interpréter de cette manière :

La vitesse angulaire, estimée autour de l'axe invariable du moment résultant, est constante dans toute la suite du temps.

Si nous multiplions les formules (5') respectivement par A^2, B^2, C^2, et si nous faisons la somme, nous obtiendrons :

$$(5)\quad A^2h'^2+B^2l'^2+C^2k'^2=A^2h^2+B^2l^2+C^2k^2=constante=G^2;$$

ce qui nous fournit une vérification de la constance du moment résultant.

14. Il serait aisé de déduire de ces formules, en suivant la même marche que dans la première partie, le théorème suivant :

A chaque instant la rotation s'effectue autour d'un axe spontané parallèle au diamètre conjugué au plan du moment résultant dans l'ellipsoïde central, avec une vitesse angulaire proportionnelle à la longueur de ce diamètre; et le corps se transporte le long de cet axe, comme si toutes les forces étaient projetées sur sa direction.

On arriverait également à étendre au mouvement à un instant quelconque, les théorèmes démontrés pour le mouvement initial (nos 25, 26, 28, 29, 1re partie).

Il nous paraît superflu de nous y arrêter. Mais il est d'autres conséquences assez curieuses, et peut-être entièrement neuves, qui peuvent se déduire de nos formules.

Si nous multiplions respectivement par h', l', k', les trois formules (1), nous trouverons en faisant la somme :

$$h'P_x' + l'P_y' + k'P_z' = h'P_x + l'P_y + k'P_z,$$

c'est-à-dire :

Dans le passage d'un instant quelconque au suivant, la projection de la force sur l'axe spontané s'effectue comme si ses composantes, estimées suivant les axes principaux à *ce premier instant, s'inclinaient avec ceux-ci, pendant l'instant suivant, sans changer de grandeur.*

En remplaçant, dans l'égalité précédente, P_x', h', etc., par leurs valeurs tirées de (1) et de (3), on trouve :

$$A(AF - G^2)hP_x + B(BF - G^2)lP_y + C(CF - G^2)kP = o,$$

ou :

$$(6) \qquad AA'hP_x + BB'lP_y + CC'kP_z = o,$$

en posant :

$$AF - G^2 = A'; \quad BF - G^2 = B'; \quad CF - G^2 = C'.$$

Des formules (2) nous déduirons de même :

$$h'M_3' + l'M_2' + k'M_1' = k'M_3 + l'M_2 + k'M_1;$$

c'est-à-dire :

Dans le passage d'un instant quelconque au suivant, la projection du moment résultant sur un plan perpendiculaire à l'axe spontané s'effectue comme si ses composantes, estimées perpendiculairement aux axes principaux à ce premier instant, s'inclinaient avec ceux-ci, pendant l'instant suivant, sans changer de grandeur.

Il est assez remarquable que si l'on remplace dans cette formule M_3, M_3', etc., par leurs valeurs Ah, $A(h+dh)$, etc., on retombe sur l'équation connue (4) :

$$Ahdh + Bldl + Ckdk = o,$$

dont on n'a pas donné, que nous sachions, cette interprétation géométrique.

Les formules (1) donnent aussi :

$$(7). \quad P_x'^2 + P_y'^2 + P_z'^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = constante.$$

ce qui vérifie la constance de la force résultante.

Enfin, de la combinaison des formules (1) et (2), nous tirons :

$$M_3'P_x' + M_2'P_y' + M'P_z' = M_3P_x + M_2P_y + M_1P_z = constante.$$

En désignant cette constante par Q, la formule qui précède pourra s'écrire :

$$(8). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad AhP_x + BlP_y + CkP_z = Q.$$

On voit qu'elle résulte simplement de l'invariabilité de la force et du moment résultants.

15. L'analyse précédente nous a donc conduit immédiatement aux équations d'Euler (3), à toutes les propriétés démontrées par Poinsot, ainsi qu'à d'autres que nous croyons nouvelles, sans que nous ayons eu besoin de nous appuyer sur les notions accessoires qui servent généralement de base à la théorie du mouvement d'un corps solide, savoir : celle des moments ou des couples, celle de la composition des rotations, et celle des forces centrifuges.

C'est qu'en effet notre méthode consiste simplement à rechercher les composantes, suivant les axes principaux, de toutes les forces qui sollicitent le corps à un instant quelconque; ces composantes étant connues en grandeur, en direction et en position, les théorèmes établis dans la première partie leur sont applicables, et fournissent à chaque instant la position de l'axe spontané glissant, la translation le long de cet axe, et la rotation autour de ce même axe.

B. *Système sollicité par des forces continues.*

16. Pour déterminer, dans ce cas, la loi du mouvement du corps, nous n'avons qu'à ajouter aux composantes des forces qui l'animent à un instant quelconque, en vertu de

l'inertie, les composantes des forces continues qui le sollicitent à cet instant; nous connaîtrons ainsi les composantes totales des forces qui agissent sur lui, et nous déterminerons son mouvement de la même manière que nous avons déterminé son mouvement initial.

Or, si nous appelons ω la vitesse angulaire autour de l'axe spontané glissant après le temps t;

$$\frac{h}{\omega}, \quad \frac{l}{\omega}, \quad \frac{k}{\omega}$$

les cosinus de ses inclinaisons sur les axes principaux; si nous nous donnons également la position de cet axe, et la translation du corps suivant sa direction; ou bien, ce qui revient au même, la vitesse de son centre de gravité en grandeur et en direction; vitesse dont nous appellerons les composantes V_x, V_y, V_z; enfin, si Q_x, Q_y, Q_z désignent les composantes de la force accélératrice; L, M, N celles de son moment; il résultera des formules du n° 12, que les composantes totales des forces qui sollicitent le corps, après $t + dt$, seront :

$$(a). \quad \begin{cases} V_x' = V_x + (kV_y - lV_z)\,dt + Q_x dt. \\ V_y' = V_y + etc. \\ V_z' = V_z + etc. \end{cases}$$

et leurs moments :

$$(b). \quad N' = Ndt + Ck + (A - B)\,hldt, \quad etc.$$

d'où nous déduirons, puisque $N' = C\,(k + dk)$:

$$(c). \quad \frac{Cdk}{dt} = N + (A - B)\,hl, \quad etc.$$

En intégrant ces équations (c), nous pourrons déterminer la vitesse angulaire à un instant quelconque, ainsi que la direction de l'axe spontané à cet instant.

17. Les équations de cet axe après $t + dt$ se détermineront comme précédemment; et l'on trouvera, par la considération des lieux géométriques des positions de cet axe dans le corps et dans l'espace absolu, que le mouvement le plus général d'un corps solide, sollicité par des forces quelconques, peut se réduire à celui d'une certaine surface gauche, qui glisserait et roulerait en même temps sur une autre surface gauche.

Cette propriété a été énoncée pour la première fois par Poncelet, et n'a été démontrée jusqu'aujourd'hui qu'à l'aide de toutes les ressources de la cinématique. A notre connaissance, les équations de ces surfaces n'ont encore été données par aucun géomètre. Nous y reviendrons dans un prochain travail.

18. Nous venons de déduire cette propriété, ainsi que quelques théorèmes, que nous croyons nouveaux, sur le mouvement d'un corps libre, des seuls principes de la mesure et de la composition des forces, et de ce simple lemme dont nous avons entrevu l'importance au point de vue de cette théorie, à savoir :

Que le chemin élémentaire décrit par un point matériel peut être considéré comme l'élément d'un arc qui serait tangent à ce chemin.

Des esprits philosophiques se demanderont peut-être comment il se fait qu'en introduisant un élément curviligne au lieu d'un élément rectiligne, c'est-à-dire en procédant à l'inverse du calcul différentiel, notre méthode ait pu gagner en simplicité.

C'est, nous semble-t-il, parce que ces éléments curvilignes qu'elle fait décrire aux différents points matériels d'un système rigide, sont compatibles entre eux, et se réduisent aisément à un mouvement unique; tandis que des éléments rectilignes sont incompatibles entre eux, à moins qu'on n'ait un pur mouvement de translation.

Aussi avons-nous déterminé immédiatement le centre ou l'axe spontané de rotation, tandis que les théories ordinaires ne déterminent immédiatement que le mouvement du centre de gravité.

Dans les pages qui suivent, nous appliquerons la même méthode au mouvement d'un corps gêné par des obstacles fixes.

TROISIÈME PARTIE. — *Théorie du mouvement d'un corps gêné.*

1. Un corps solide peut être gêné dans son mouvement, soit parce qu'il renferme un point ou un axe fixe, soit parce qu'un ou plusieurs de ses points sont assujettis à se mouvoir sur des surfaces ou sur des lignes données.

Dans ce cas, la méthode généralement adoptée consiste à rendre le corps libre, en remplaçant ces points, ces lignes ou ces surfaces par les réactions qu'ils exercent; après quoi l'on écrit les six équations connues de l'équilibre ou du mouvement du corps, en y faisant entrer toutes les forces qui agissent sur lui, y compris ces réactions; et l'on cherche celles-ci au moyen des équations qui sont superflues pour déterminer, soit la position d'équilibre, soit le mouvement.

Cette méthode est entièrement rigoureuse, et nous pourrions l'employer à notre tour; mais nous préférons procéder ici comme nous l'avons fait dans le mouvement

d'un corps libre : d'un côté, afin de suivre partout une marche uniforme; d'un autre côté, afin de contrôler l'exactitude des deux solutions par l'identité des résultats.

Or, le mouvement d'un corps gêné devant être compatible avec les liaisons, nous rechercherons, comme nous l'avons fait dans les deux mémoires précédents, les composantes des forces qui donneraient au corps, s'il était libre, un mouvement *spontané* compatible avec les liaisons.

S'agit-il du mouvement initial, il suffira que nous écrivions que les forces extérieures se décomposent dans les forces ainsi déterminées et dans les percussions subies par les points, surfaces ou lignes fixes.

S'agit-il du mouvement à un instant quelconque, nous joindrons aux composantes des forces extérieures qui agissent à cet instant sur le corps, celles des forces qui l'animent en vertu de l'inertie; et nous écrirons que toutes ces forces sont équivalentes à celles qui animeraient le corps à l'instant suivant dans son mouvement spontané compatible avec les liaisons, et aux pressions subies par les points, surfaces ou lignes fixes.

Nous n'insisterons pas sur ce procédé, qui consiste à regarder toutes les forces qui agissent sur le corps pendant un instant, y compris celles de l'inertie, comme produisant les pressions pendant cet instant, ainsi que le mouvement du corps au commencement de l'instant suivant, vérité qui nous semble de la dernière évidence.

Nous envisagerons particulièrement le mouvement d'un corps solide :

1° Autour d'un axe fixe;

2° Autour d'un point fixe;

et nous étudierons successivement dans chaque cas :

A. Le mouvement initial;

B. Le mouvement du corps abandonné à son inertie à un instant quelconque;

C. Le mouvement du corps sollicité par des forces continues.

3° Nous indiquerons enfin la manière dont notre méthode peut s'étendre au cas où l'on voudrait tenir compte du frottement.

1° *Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe.*

A. *Mouvement initial.*

2. Soit pris l'axe, fixé par deux de ses points, pour axe des z; l'un de ces points pour origine; l'autre à une distance z' de celle-ci.

Décomposons toutes les forces données en trois forces uniques parallèles aux trois axes, et dont nous connaîtrons les lignes d'action par deux de leurs coordonnés :

$$R_x,\ (y_3, z_3);\quad R_y,\ (x_2, z_2);\quad R_z,\ (x_1, y_1).$$

Nous aurons à séparer ces forces en deux classes : celles qui produiraient un mouvement spontané autour de l'axe des z; et celles qui produiront les percussions sur les points fixes.

Désignons les composantes de ces dernières par p_x, p_y, p_z; p_x', p_y', p_z'; et la vitesse angulaire que prendra le corps par ω; et cherchons les composantes des forces qui donneraient au corps un mouvement spontané d'une vitesse ω autour de l'axe des z. Or, par la *Théorie du mouvement d'un corps libre* (1[re] partie, n° 13) (*), nous savons que ce

(*) Voir les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2[me] série, tome XX, n° 8.

mouvement sera produit par les deux forces $P_x (Y_1, Z_1'')$; $P_y (X_1, Z_1')$, si elles satisfont aux conditions :

$$P_y = \omega \int x dm. \qquad P_x = -\omega \int y dm.$$
$$Z_1' P_y = \omega \int xz dm. \qquad Z_1'' P_x = -\omega \int yz dm.$$
$$X_1 P_y = \omega \int x^2 dm. \qquad Y_1 P_x = -\omega \int y^2 dm.$$

En suivant donc la règle que nous venons d'énoncer, nous écrirons :

$$(1)\quad R_x = P_x + p_x + p_x' = -\omega \int y dm + p_x + p_x'.$$
$$(2)\quad R_y = P_y + p_y + p_y' = \omega \int x dm + p_y + p_y'.$$
$$(3)\quad R_z = p_z + p_z'.$$
$$(4)\quad x_3 R_y - y_3 R_x = X_1 P_y - Y_1 P_x = \omega \int r^2 dm; \text{ ou } N = \omega I.$$
$$(5)\quad z_3 R_x - x_1 R_z = Z_1'' P_x + z' p_y'; \qquad \text{ou : } M = -\omega \int yz dm + z' p_x';$$
$$(6)\quad y_1 R_z - z_2 R_y = -Z_1' P_y - z' p_y'; \qquad \text{ou : } L = -\omega \int xz dm - z' p_y'.$$

en désignant par L, M, N les moments des forces données autour des trois axes.

On déduira :

de (4) : $\omega = \dfrac{N}{I}$.

de (3) : $p_z + p_z' = R_z$.

de (1), (2), (5) et (6) : $\cancel{p_x}, p_x'$; p_y, p_y'.

2[bis]. Pour qu'il y ait une percussion unique à l'origine, il faut que p_x' et p_y' soient nuls, et par suite que :

$$M + \omega \int yz dm = 0. \quad L + \omega \int xz dm = 0.$$

Si l'axe des z est principal pour l'origine, il faudra que :

$$L = 0. \quad M = 0;$$

ce qui aura lieu, entre autres cas, si

$$R_z = 0; \quad z_2 = 0; \quad z_3 = 0;$$

c'est-à-dire si les forces données se réduisent à un système situé dans le plan des x, y.

Quant aux conditions qui doivent être satisfaites pour que l'axe fixe n'éprouve aucune percussion, elles sont naturellement données par les équations mêmes du mouvement spontané, que nous venons de rappeler. Nous n'y reviendrons pas, si ce n'est pour faire remarquer que ce mouvement spontané ne peut être produit par un couple que pour autant que celui-ci soit perpendiculaire à un axe principal du centre de gravité. On aurait donc tort de vouloir attribuer à un couple un mouvement de rotation autour d'un axe quelconque, et l'on s'exposerait ainsi à de longs détours (*).

3. Examinons en effet le cas où les forces sollicitantes se réuniraient à un couple. Des six formules précédentes, les trois premières deviennent alors :

$$\begin{aligned} p_x + p_x' &= \omega \int y\,dm. \\ p_y + p_y' &= -\omega \int x\,dm. \\ p_z + p_z' &= o; \end{aligned}$$

les trois autres ne changent pas.

On voit que, dans ce cas, il n'y aura pas de percussion longitudinale, mais que les autres subsisteront généralement.

Si l'axe passe par le centre de gravité, les percussions

(*) Nous prierons le lecteur de comparer entre eux, dans la *Théorie de la rotation des corps*, 1re partie, chap. II, les deux alinéas des nos 61 et 64 qui commencent par : *ainsi*... Il verra que la recherche des conditions du mouvement spontané conduit bien plus sûrement aux résultats que la décomposition des forces, *à priori*, en une résultante unique, un couple perpendiculaire à l'axe, et un couple passant par cet axe.

se réduisent à un couple, ou à deux percussions normales à l'axe, égales et contraires.

Comme dans le cas général, on verra qu'il y aura une percussion unique à l'origine, entre autres cas dans celui où l'axe est principal pour cette origine et où le couple unique est perpendiculaire à cet axe.

Enfin, si ces deux conditions étaient remplies et que l'origine fût le centre de gravité, l'axe ne subirait aucune percussion.

3bis. Afin d'être complétement édifié sur la percussion qu'un couple produit toujours sur le point fixe (à moins que ce point ne soit le centre de gravité), cherchons à déterminer, d'une manière nette et précise, la raison de cette percussion, dans le cas même où le couple agirait dans un plan perpendiculaire à l'un des axes principaux du point fixe.

Les équations du mouvement spontané autour de cet axe, pris pour une des z, se réduiront dans ce cas (voir no 2) à :

$$P_y = \omega \int x\,dm = \omega M x_0; \quad P_x = -\omega \int y\,dm = -\omega M y_0.$$
$$Z_1' P_y = o; \quad Z_1'' P_z = o; \quad X_1 P_y - Y_1 P_x = N = \omega \int r^2 dm = \omega I.$$

D'où il résulte que le corps prendra un mouvement spontané autour de cet axe, s'il est sollicité par une force unique $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \omega M r_0$, située dans le plan principal XY ($Z_1' = Z_1'' = o$), à une distance du point fixe, pris pour origine, égale à $p = \frac{I}{Mr_0}$; (puisque $N = \omega I = Pp = \omega M r_0 p$); r_0 désignant la projection sur XY de la distance du centre de gravité à l'origine. Ce mouvement spontané n'est donc pas produit par un couple.

Or, si un couple N agit sur le corps perpendiculairement à l'axe principal, et que nous le transformions en un autre équivalent, composé de deux forces, l'une P, égale à la précédente en grandeur et en position, l'autre —P, appliquée au point fixe, la première produira le mouvement spontané du corps autour de l'axe, la seconde la percussion sur le point fixe; et cette percussion est évidemment égale et contraire à la quantité de mouvement du corps, supposé concentré en son centre de gravité ($P = \omega M r_0$).

Ce fait de la transformation du couple en deux forces égales et contraires, l'une produisant le mouvement spontané de rotation du corps autour de l'axe, l'autre passant par le point fixe, ne donne-t-il pas la véritable raison de la percussion subie par ce point? Et ne vient-il pas corroborer ce que nous disions (n° 2, fin), qu'on aurait tort de vouloir attribuer au couple le mouvement de rotation autour de l'axe, si celui-ci ne passe pas par le centre de gravité?

B. *Mouvement autour d'un axe, à un instant quelconque, du corps abandonné à son inertie.*

4. L'axe de rotation étant encore pris pour axe des Z, si nous désignons par ω la vitesse angulaire du corps à un instant quelconque t, chacun de ses points décrira pendant l'instant dt un arc $\omega r dt$ dont les projections sur les axes X et Y seront :

$$dx = -\omega y dt. \quad dy = \omega x dt.$$

De sorte que les coordonnées x, y de ce point seront devenues :

$$x' = x - \omega y dt. \quad y' = y + \omega x dt.$$

La force dont ce point, de masse dm, est animé en vertu de l'inertie, après $t+dt$, a pour composantes :

$$dP_y' = -\omega y dm. \quad dP_y' = \omega x dm;$$

dont les résultantes pour tout le système seront :

$$P_x' = -\omega M y_0. \quad P_y' = \omega M x_0,$$

M désignant la masse du corps, x_0, y_0 les coordonnées de son centre de gravité.

Les lignes d'action de ces résultantes (x_1, z_1' pour P_y'; y_1, z_1'' pour P_z') seront déterminées par :

$$\begin{aligned}
x_1 P_y' &= \omega \int x' x dm = \omega \int x^2 dm - \omega^2 dt \int xy dm. \\
z_1' P_y' &= \omega \int zx dm. \\
y' P_x &= -\omega \int y' y dm = -\omega \int y^2 dm - \omega^2 dt \int xy dm. \\
z'' P_x &= -\omega \int zy dm.
\end{aligned}$$

Or, nous savons (n° 2) que les forces nécessaires pour faire tourner spontanément le corps avec une vitesse ω', dans sa nouvelle position après $t+dt$, sont déterminées par :

$$\begin{aligned}
P_y &= -\omega \int x' dm = P_y' - \omega'^2 dt \int y dm. \\
P_x &= -\omega \int y' dm = P_x' - \omega'^2 dt \int x dm. \\
Z_1' P_y &= \omega \int x' z dm = z_1' P_y' - \omega'^2 dt \int yz dm. \\
X_1 P_y &= \omega \int x'^2 dm = x_1 P_y' - \omega'^2 dt \int xy dm. \\
Z_1'' P_x &= -\omega \int y' z dm = z_1'' P_x' - \omega'^2 dt \int xz dm. \\
Y_1 P_x &= -\omega \int y'^2 dm = y_1 P_x' - \omega'^2 dt \int xy dm.
\end{aligned}$$

Écrivons que les forces, dont le corps est animé en vertu de l'inertie, sont équivalentes aux précédentes, augmentées des pressions produites par l'axe fixe pendant dt; désignons ces pressions par $p_x dt$, $p_y dt$ appliquées à l'origine,

$p'_x dt$, $p'_y dt$ appliquées au point z' sur l'axe (p_z et p'_z seront évidemment nuls puisqu'aucune des forces n'est dirigée suivant l'axe); nous aurons :

$$(1, 2)\quad P_x' = P_x + (p_x' + p_x)\,dt;\quad P_y' = P_y + (P_y + p_y)\,dt.$$
$$(3)\qquad x_1P_y' - y_1P_x' = Y_1P_x - X_1P_y.$$
$$(4, 5)\quad z_1'P_y' = Z_1'P_y + z'p_y'dt.\quad z_1''P_x' = Z_1''P_x + z'p_x'dt.$$

D'où nous déduirons en vertu des équations précédentes :

1° $\omega' = \omega$ en vertu de la relation (3).

Donc :

La vitesse angulaire reste constante.

2° En vertu des relations (1, 2), (4, 5) :

$$p_x + p_x' = \omega^2 \int xdm;\quad p_y + p_y' = \omega^2 \int ydm.$$
$$z'p_x' = \omega^2 \int xzdm.\qquad z'p_y' = \omega^2 \int yzdm.$$

L'inspection seule de ces formules fait voir que les pressions supportées par l'axe fixe proviennent des forces centrifuges développées par la rotation.

On voit en outre que :

Pour qu'il y ait une pression unique à l'origine, il faut que l'axe soit principal pour cette origine.

Pour que l'axe ne subisse aucune pression, il faut qu'il soit un des axes principaux du centre de gravité.

C. *Mouvement autour d'un axe, à un instant quelconque, du corps sollicité par des forces continues.*

5. On vient de voir que, si le corps était abandonné à son inertie, sa vitesse angulaire serait constante, et que les pressions éprouvées par l'axe fixe se réduiraient à celles qui proviennent des forces centrifuges.

Si le corps est en outre sollicité par des forces continues, dont nous représentons les composantes, pour tout le système, par P_x, P_y, P_z, et les moments par L, M, N (*), ces forces continues produiront pendant dt un accroissement de vitesse $d\omega$ et des accroissements de pression $\varpi_x\,dt$, etc., que nous déterminerons par les formules du mouvement initial (n° 2, formules 1-6).

Nous aurons ainsi :

$$N = \frac{d\omega}{dt}\int r^2 dm = I\,\frac{d\omega}{dt}.$$
$$M = -\frac{d\omega}{dt}\int yzdm + z'\varpi_x'.$$
$$L = -\frac{d\omega}{dt}\int xzdm - z'\varpi_y'.$$
$$P_x = -\frac{d\omega}{dt}\int ydm + \varpi_x + \varpi_x'.$$
$$P_y = \frac{d\omega}{dt}\int xdm + \varpi_y + \varpi_y'.$$
$$P_z = \varpi_z + \varpi_z'.$$

La première de ces formules détermine $\frac{d\omega}{dt}$, d'où l'on déduira ω par l'intégration.

Les autres feront connaître les pressions longitudinales et normales supportées par l'axe fixe, en vertu des forces continues qui sollicitent le système. Veut-on avoir les pressions totales, on y ajoutera celles qui proviennent du mouvement du corps et que nous venons de déterminer;

(*) Nous n'employons cette expression de *moments* que pour abréger le discours; on a vu (1re partie) que nous n'y attachons aucun sens mécanique.

en appelant p_{1x}, etc., les composantes des pressions totales, on aurait ainsi :

$$p_{1x} + p_{1x}' = \mathrm{P}_x + \frac{d\omega}{dt}\int ydm + \omega^2\int xdm.$$

$$p_{1y} + p_{1y}' = \mathrm{P}_y - \frac{d\omega}{dt}\int xdm + \omega^2\int ydm.$$

$$p_{1z} + p_{1z}' = \mathrm{P}_z.$$

$$z_1'p_{1x}' = \mathrm{M} + \frac{d\omega}{dt}\int yzdm + \omega^2\int xzdm.$$

$$z_1'p_{1y}' = \mathrm{L} + \frac{d\omega}{dt}\int xzdm - \omega^2\int yzdm.$$

Ces formules déterminent complétement la pression longitudinale, ainsi que les pressions normales supportées par l'axe aux deux points où il est fixé.

Nous croyons inutile de nous arrêter à leur discussion.

2° *Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.*

A. ***Mouvement initial.***

6. Prenons pour origine le point fixe, et pour axes des coordonnées les trois axes principaux du corps pour ce point. Supposons les forces données réduites à trois forces respectivement parallèles à ces axes :

$$\mathrm{Z}(x_1, y_1);\quad \mathrm{Y}(x_2, z_2);\quad \mathrm{X}(y_3, z_3),$$

les coordonnées entre parenthèses indiquant les lignes d'action ou points d'application de ces forces.

Afin de pouvoir appliquer la méthode que nous avons suivie précédemment, rappelons le théorème établi n° 2^{bis}, à savoir : que lorsqu'une force agit sur un corps, fixé par un seul de ses points, dans l'un des trois plans principaux

pour ce point, elle le fait tourner spontanément au premier instant, autour de l'axe principal perpendiculaire à ce plan, comme si cet axe était fixe.

Réduisons donc nos forces X, Y, Z à trois forces respectivement situées dans les trois plans principaux, et appliquées dans ces plans aux mêmes points que les précédentes. Les conditions d'équivalence de ces deux systèmes seront, en appelant P_1, P_2, P_3 les nouvelles forces dans les plans XY, XZ, YZ; α_1, β_1; α_2, γ_2, β_3, γ_3 les angles qu'elles font avec les axes; et p_1, p_2, p_3 leurs distances à l'origine :

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} &= \mathrm{P}_1\cos\alpha_1 + \mathrm{P}_2\cos\alpha_2.\\
\mathrm{Y} &= \mathrm{P}_1\cos\beta_1 + \mathrm{P}_3\cos\beta_3.\\
\mathrm{Z} &= \mathrm{P}_2\cos\gamma_1 + \mathrm{P}_3\cos\gamma.\\
\mathrm{N} &= \mathrm{Y}x_2 - \mathrm{X}y_3 = \mathrm{P}_1p_1.\\
\mathrm{M} &= \mathrm{X}z_3 - \mathrm{Z}x_1 = \mathrm{P}_2p_2.\\
\mathrm{L} &= \mathrm{Z}y_1 - \mathrm{Y}z_2 = \mathrm{P}_3p_3.
\end{aligned}$$

D'après les n^{os} 2 et 2^{bis} la force P_1 produit autour de l'axe des Z une vitesse angulaire

$$k = \frac{\mathrm{P}_1p_1}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}};$$

et à l'origine des percussions :

$$p_x' = \mathrm{P}_1\cos\alpha_1 + k\int ydm;\quad p_y' = \mathrm{P}_1\cos\beta_1 - k\int xdm.$$

De même la force P_2 produira autour de Y une vitesse angulaire :

$$l = \frac{\mathrm{P}_3p_3}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{B}};$$

et à l'origine des percussions :

$$p_x'' = \mathrm{P}_2\cos\alpha_2 - l\int zdm;\quad p_z'' = \mathrm{P}_2\cos\gamma_2 + l\int xdm.$$

Enfin, la force P_3 produira autour de X une vitesse angulaire :

$$h = \frac{P_3 p_3}{A} = \frac{L}{A};$$

et à l'origine des percussions :

$$p_y''' = P_3 \cos\beta_3 + h\int z dm; \quad p_z''' = P_3 \cos\gamma_3 - h\int y dm.$$

Nous aurons donc autour des trois axes les vitesses angulaires respectives :

$$(1). \quad \ldots \quad h = \frac{L}{A}. \quad l = \frac{M}{B}. \quad k = \frac{N}{C};$$

A, B, C continuant à désigner les moments d'inertie principaux; et suivant ces mêmes axes les percussions :

$$(2). \begin{cases} p_x = X + k\int y dm - l\int z dm = X + M(ky_0 - lz_0). \\ p_y = Y + h\int z dm - k\int x dm = Y + M(hz_0 - kx_0). \\ p_z = Z + l\int x dm - h\int y dm = Z + M(lx_0 - hy_0). \end{cases}$$

7. Afin de nous faire, du mouvement du corps, une idée plus simple que celle qui résulte de la considération simultanée de ces mouvements autour des trois axes, cherchons à déterminer la vitesse linéaire de l'un quelconque de ses points.

En nommant r_x, r_y, r_z les distances respectives de ce point aux trois axes, nous pourrons dire qu'il est animé des trois vitesses hr_x, lr_y, kr_z respectivement parallèles aux plans ZY, XZ, YX, et perpendiculaires aux droites r_x, r_y, r_z.

Si donc nous projetons la vitesse kr_z sur des parallèles à X et Y, nous aurons, en désignant par α l'angle que fait r_z avec X :

$$kr_z \cos(90° + \alpha) = - kr_z \sin\alpha = - ky$$

pour la projection de cette vitesse sur X; et :

$$kr_z \cos\alpha = kx$$

pour sa projection sur Y.

De même la vitesse hr_x nous donnera pour ses projections

$$\text{sur Z} : hy; \qquad \text{sur Y} : - hz;$$

et la vitesse lr_y pour ses projections

$$\text{sur X} : lz; \qquad \text{sur Z} : - lx.$$

D'où résultent pour les vitesses composantes du point suivant les trois axes :

$$(3). \quad V_x = lz - ky. \quad V_y = kx - hz. \quad V_z = hy - lx.$$

Or, il est manifeste que ces composantes sont nulles pour tous les points qui satisfont aux relations :

$$\frac{x}{h} = \frac{y}{l} = \frac{z}{k},$$

qui sont les équations d'une droite passant par l'origine; donc :

Dans le mouvement d'un corps autour d'un point fixe il existe une droite immobile pendant le premier instant; cette droite est l'axe instantané.

Nous avons démontré dans la première partie (n° 27) que le mouvement d'un point quelconque du corps est un mouvement de rotation autour de cet axe, et que la vitesse de ce mouvement est :

$$\omega = \sqrt{h^2 + l^2 + k^2}.$$

Quant aux inclinaisons de cet axe sur ceux coordonnées, on voit, par ses équations, que leurs cosinus sont :

$$\frac{h}{\omega},\quad \frac{l}{\omega},\quad \frac{k}{\omega}.$$

8. Nous ferons observer que nous arrivons ainsi aux mêmes résultats que dans le cas d'un corps libre sollicité par un système de forces réductible à un couple unique (*), à cela près que dans ce dernier cas l'axe instantané passe par le centre de gravité, ce qui n'a pas généralement lieu dans le mouvement autour d'un point fixe; et que, en outre, celui-ci subit en général des percussions.

Pour analyser ces dernières, remarquons que les composantes de la vitesse du centre de gravité peuvent s'écrire, d'après les formules (3) du n° 7 :

$$V_x' = lz_0 - ky_0.\ V_y' = kx_0 - hz_0.\ V_z' = hy_0 - lx_0;$$

et que, par suite, les percussions deviendront : (form. (2), n° 6)

$$p_x = X - MV_x'.\ p_y = Y - MV_y'.\ p_z = Z - MV_z'.$$

On voit par là que *les forces données sont équivalentes à la quantité de mouvement du centre de gravité et aux percussions subies par le point fixe.* Ces dernières pourront être nulles, comme on voit, dans le cas particulier où les composantes de la vitesse du centre de gravité seraient précisément égales à celles des forces données, ou, ce qui revient au même, dans le cas où la résultante de celles-ci serait perpendiculaire à la direction de l'axe.

Ce résultat provient de ce que, dans ce cas, le système des forces données ferait tourner spontanément le corps,

(*) Voir première partie, n° 30.

supposé libre, autour du même axe, et de ce qu'en outre le glissement du corps le long de l'axe spontané serait nul, la résultante des forces lui étant perpendiculaire (*).

9. Si le système des forces qui sollicitent le corps se réduisait à un couple unique, on décomposerait celui-ci en trois couples perpendiculaires aux trois axes principaux du point fixe; chacun de ceux-ci, en vertu du théorème du n° 3, ferait tourner spontanément le corps autour de l'axe principal qui lui est perpendiculaire.

Nous obtiendrions alors, de même que dans le cas général, les trois vitesses angulaires

$$h = \frac{L}{A};\quad l = \frac{M}{B};\quad k = \frac{N}{C};$$

d'où nous déduirions de même une rotation unique

$$\omega = \sqrt{h^2 + l^2 + k^2}$$

autour d'un axe instantané dont les inclinaisons sur les trois axes ont pour cosinus

$$\frac{h}{\omega},\quad \frac{l}{\omega},\quad \frac{k}{\omega}.$$

Et, quant aux percussions subies par le point fixe, elles seraient également données par les formules :

$$p_x = -MV_x';\quad p_y = -MV_y';\quad p_z = -MV_z',$$

V'_x, V'_y, V'_z continuant à désigner les vitesses composantes du centre de gravité.

Ainsi *dans le cas d'un corps sollicité par un couple unique à se mouvoir autour d'un point fixe, celui-ci subit*

(*) Voir première partie, n^{os} 25 et suivants.

toujours une percussion égale et contraire à la quantité de mouvement du corps. Cette percussion ne pourra donc être nulle que si l'axe instantané passe par le centre de gravité, ce qui ne peut avoir lieu que si la droite qui unit ce point au centre fixe est un axe principal, et si le couple unique lui est perpendiculaire.

Nous nous expliquons difficilement que Poinsot, après avoir parlé de la percussion due à la résultante des forces transportée à l'origine, oublie de mentionner explicitement celle qui serait produite par le couple (*).

B. ***Mouvement autour d'un point fixe, d'un corps solide abandonné à son inertie.***

10. Le corps ayant, à un instant quelconque t, une vitesse angulaire dont les composantes autour des trois axes principaux, mobiles avec lui, sont h, l, k, nous pourrons, comme dans la deuxième partie (n^os^ 16 et suivants) déterminer les forces dont il est animé, en vertu de l'inertie, après $t + dt$, et nous trouverons que leurs composantes suivant les axes principaux, dans la position qu'ils occupent à ce second instant, seront :

$$P_\xi = \int V_\xi dm. \quad P_\eta = \int V_\eta dm. \quad P_\zeta = \int V_\zeta dm;$$

V_ξ, V_η, V_ζ désignant les composantes de la vitesse d'un point quelconque suivant les axes mobiles à cet instant, composantes qui ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} V_\xi &= l\zeta - k\eta - k(k\xi - h\zeta)\,dt + l(h\eta - l\xi)\,dt. \\ V_\eta &= k\xi - h\zeta - h(h\eta - l\xi)\,dt + k(l\zeta - k\eta)\,dt. \\ V_\zeta &= h\eta - l\xi - l(l\zeta - k\eta)\,dt + h(k\xi - h\zeta)\,dt. \end{aligned}$$

(*) Voir *Théorie de la rotation des corps*, 2^me^ partie, n° 5.

Remplaçant dans les expressions précédentes, et appelant ξ_0, η_0, ζ_0 les coordonnées du centre de gravité rapportées aux axes mobiles, nous aurons :

$$(1).\quad \begin{cases} P_\xi = M\{l\zeta_0 - k\eta_0 - \omega^2\xi_0 dt + h(h\xi_0 + l\eta_0 + k\zeta_0)\,dt\}. \\ P_\eta = M\{k\xi_0 - h\zeta_0 - \omega^2\eta_0 dt + l(h\xi_0 + l\eta_0 + k\zeta_0)\,dt\}. \\ P_\zeta = M\{h\eta_0 - l\xi_0 - \omega^2\zeta_0 dt + k(h\xi_0 + l\eta_0 + k\zeta_0)\,dt\}. \end{cases}$$

Pour les moments de ces forces autour des axes principaux, nous trouverons les mêmes expressions que dans la deuxième partie (n° 19), c'est-à-dire :

$$(2).\ \ldots\ \begin{cases} M_1' = Ck + (A - B)\,hldt. \\ M_2' = Bl + (C - A)\,hkdt. \\ M_3' = Ah + (B - C)\,kldt. \end{cases}$$

11. Nous pouvons actuellement considérer le corps comme étant sollicité, dans sa position actuelle et à l'état de repos, par ces forces; et par suite, appliquer les formules du mouvement initial (n° 6).

Nous aurons ainsi les vitesses angulaires :

$$(1).\ \ldots\ h' = \frac{M_3'}{A};\quad l' = \frac{M_2'}{B};\quad k' = \frac{M_1'}{C};$$

d'où résulte que h, l, k auront reçu des accroissements :

$$(2)\quad dh = \frac{B - C}{A}\,hldt;\ dl = \frac{C - A}{B}\,hkdt;\ dk = \frac{A - B}{C}\,hldt.$$

Nous arrivons donc aux formules mêmes du mouvement d'un corps libre abandonné à son inertie. Seulement, dans le cas qui nous occupe, l'axe instantané passe toujours par le point fixe : les lieux géométriques de ses positions dans le corps et dans l'espace sont en conséquence des cônes;

et la représentation géométrique du mouvement se fera tout naturellement dans ce cas au moyen des cônes roulants de Poinsot; théorie bien connue et à laquelle nous ne nous arrêterons pas.

12. Déterminons enfin les pressions subies par le point fixe, et qui seront en vertu des formules (2) du n° 6 :

$$p_\xi dt = P_\xi + M(k'\eta_0 - l'\zeta_0).$$
$$p_\eta dt = P_\eta + M(h'\zeta_0 - k'\xi_0).$$
$$p_\zeta dt = P_\zeta + M(l'\xi_0 - h'\eta_0).$$

En vertu des formules (1) et (2) des n^{os} (10) et (11), ces expressions deviendront :

$$p_\xi = M\left\{ -\omega^2\xi_0 + h(h\xi_0 + l\eta_0 + k\zeta_0) + h\left(\frac{A-B}{C}\, l\eta_0 - \frac{C-A}{B}\, k\zeta_0\right)\right\}.$$
$$p_\eta = M\left\{ -\omega^2\eta_0 + l(h\xi_0 + l\eta_0 + k\zeta_0) + l\left(\frac{B-C}{A}\, k\zeta_0 - \frac{A-B}{C}\, h\xi_0\right)\right\}.$$
$$p_\zeta = M\left\{ -\omega^2\zeta_0 + k(h\xi_0 + l\eta_0 + k\zeta_0) + k\left(\frac{C-A}{B}\, h\xi_0 - \frac{B-C}{A}\, l\eta_0\right)\right\}.$$

Chacune de ces trois forces se décompose en deux parties susceptibles d'une interprétation fort simple.

Si nous désignons par r_0 la distance du centre de gravité à l'origine; par α_0, β_0, γ_0 les cosinus des inclinaisons de cette droite sur les axes, par α, β, γ ceux des inclinaisons de l'axe instantané, par ε l'angle de ces deux droites, et enfin par δ_0 la distance du centre de gravité à l'axe, les deux premiers termes de chaque composante pourront s'écrire :

$$M\omega^2 r_0(-\alpha_0 + \alpha\cos\varepsilon);$$
$$M\omega^2 r_0(-\beta_0 + \beta\cos\varepsilon);$$
$$M\omega^2 r_0(-\gamma_0 + \gamma\cos\varepsilon);$$

d'où faisant la somme des carrés :

$$M^2\omega^4 r_0^2(1 - \cos^2\varepsilon) = M^2\omega^4 r_0^2 \sin^2\varepsilon = M^2\omega^4\delta_0^2.$$

Ainsi les deux premiers termes de chaque composante proviennent d'une force $M\omega^2\delta_0$, c'est-à-dire de la force centrifuge de la masse entière supposée concentrée en son centre de gravité.

Quant aux derniers termes de chaque composante, ils sont évidemment égaux et de signes contraires aux composantes de l'accélération du centre de gravité, multipliées par la masse.

Les pressions supportées par le point fixe seront donc toujours nulles, si ce point est le centre de gravité.

Les premiers termes de ces pressions seront encore nuls dans le cas où l'axe instantané passerait par le centre de gravité, sans que celui-ci fût le centre fixe.

Les seconds, enfin, le seront aussi dans le cas où l'axe de la nouvelle rotation introduit après dt passerait par le centre de gravité.

Veut-on retrouver les mêmes termes au moyen de la théorie de Poinsot, on dira que les premiers proviennent du transport des forces centrifuges à l'origine, et les seconds du couple centrifuge; nous savons en effet (n° 9) qu'un couple qui agit sur un corps doué d'un point fixe produit sur ce point une percussion égale à la quantité de mouvement qu'il communique au corps supposé concentré en son centre de gravité.

Ici encore, nous ferons remarquer que Poinsot mentionne explicitement la pression produite par les forces centrifuges transportées au point fixe, mais passe sous silence celle qui est due au couple accélérateur (*).

(*) Voir *Rotation des corps*, 2^{me} partie, n° 12.

C. *Mouvement autour d'un point fixe, d'un corps sollicité par des forces continues.*

13. Dans ce cas, il suffira évidemment que nous joignions aux forces qui animent le corps à un instant quelconque en vertu de l'inertie, les forces extérieures qui agissent sur lui à cet instant.

Si nous désignons par $Q_\xi dt$, $Q_\eta dt$, $Q_\zeta dt$; $N_1 dt$, $N_2 dt$, $N_3 dt$ les composantes et les moments des forces extérieures rapportés aux trois axes principaux du point fixe à l'instant considéré, nous aurons pour les sommes des composantes des forces et des moments, par les formules (1) et (2) du nº 10 :

$$P_\xi + Q_\xi dt;\quad P_\eta + Q_\eta dt;\quad P_\zeta + Q_\zeta dt.$$

$$M_1' + N_1 dt;\quad M_2' + N_2 dt;\quad M_3' + N_3 dt.$$

D'où résulteront, en nous rapportant aux mêmes formules, des accroissements de vitesse angulaire :

$$dh = N_3 dt + \frac{B - C}{A} kldt.$$

$$dl = N_2 dt + \frac{C - A}{B} hkdt.$$

$$dk = N_1 dt + \frac{A - B}{C} hldt.$$

et des pressions suivant les trois axes :

$$p_\xi = Q_\xi + M\left\{-\omega^2\xi_0 + h(h\xi_0 + l\eta_0 + k\zeta_0)\right\} + \left(\eta_0 \frac{dk}{dt} - \xi_0 \frac{dl}{dt}\right)\Big\}$$
$$p_\eta = Q_\eta + \text{etc.}$$
$$p_\xi = Q_\xi + \text{etc.}$$

On voit immédiatement que ces pressions résultent :

1º Des forces motrices extérieures;

2º De la force centrifuge de la masse concentrée en son centre de gravité;

3º De l'accélération de ce dernier point.

Dans la théorie des couples cette dernière est due au couple accélérateur des forces centrifuges et à celui des forces extérieures. On voit de nouveau que ces deux couples produisent des pressions sur le point fixe, excepté dans quelques cas tout particuliers auxquels nous nous sommes suffisamment arrêté dans ce qui précède.

14. Nous venons de signaler, dans cette *Théorie*, si classique, *de la rotation des corps*, quelques imperfections que notre méthode nous a fait remarquer; nous pourrions en indiquer d'autres encore.

Est-ce à dire que nous en rendions la théorie des couples responsable? Non sans doute. Elle est rigoureuse, lucide, élégante; et, bien appliquée, elle conduira aux résultats que nous venons d'exposer, et auxquels on arrive du reste par l'application directe du principe de d'Alembert.

Comment se fait-il donc que Poinsot ait commis, en l'appliquant, non pas des erreurs, mais des négligences? C'est, pensons-nous, parce que, préoccupé du cas le plus simple pour sa théorie, il a étendu, au mouvement d'un corps autour d'un point fixe, les résultats qu'il n'avait établis que pour le mouvement de rotation d'un corps autour de son centre de gravité (*); de sorte qu'un lecteur peu

(*) En veut-on une preuve irrécusable? Le principe, invoqué par Poinsot dans la seconde partie, nº 5, § 2, où il s'occupe aussi bien de la rotation autour d'un point fixe, que de la rotation autour du centre de gravité; ce principe ne peut être que le corollaire II, nº 46, de la première partie, qui attentif s'imaginerait qu'un couple produit dans les deux cas un pur mouvement de rotation, sans percussions sur le point fixe, et que celles-ci ne sont jamais dues qu'au transport des forces en ce point.

Aussi est-ce dans le but d'éviter, à ceux qui étudient la mécanique, des erreurs ou des doutes, que nous nous sommes permis ces remarques sur un ouvrage qui n'en reste pas moins, à part quelques lacunes qu'on supplée facilement quand on l'a bien compris, un chef-d'œuvre de netteté, de précision et de profondeur.

3° *Application de la méthode aux problèmes dans lesquels on tient compte du frottement.*

15. Il n'entre pas dans notre intention de traiter, dans ce travail, des questions de mécanique appliquée. Nous voudrions montrer seulement de quelle manière notre méthode doit être appliquée aux cas où l'on voudrait avoir égard au frottement, en considérant celui-ci comme une force qui s'exerce au contact, proportionnellement à la pression normale, et en sens contraire du mouvement que le corps tend à prendre sur la surface sur laquelle il s'appuie. Rien n'empêche de traiter le problème, dans ces conditions, comme un problème de mécanique rationnelle.

---

n'est applicable qu'au mouvement autour du centre de gravité. En vain en chercherait-on un autre analogue. Et c'est là ce qui pourrait faire croire qu'un couple ne produit pas plus de percussion sur un point fixe que sur le centre de gravité, quoique l'on puisse aisément découvrir le contraire dans Poinsot lui-même, entre autres passages, au n° 59 de la première partie.

Ici se présente tout d'abord une question qui a été controversée, et que nous allons chercher à résoudre : les pressions normales doivent-elles toujours se déterminer de la même manière, qu'il y ait, ou non, frottement? Et dans la négative, comment se trouvera-t-on dans chaque cas?

La première partie de la question doit évidemment se résoudre négativement, en envisageant le frottement dans les termes posés plus haut; cette force, en effet, quoique purement passive, influe, en détruisant une partie des forces actives, sur les pressions que celles-ci peuvent exercer sur des surfaces fixes.

Prenons pour exemple le cas d'une échelle sollicitée par la pesanteur, et s'appuyant contre deux murs, l'un horizontal, et l'autre vertical; elle exercera sur eux des pressions d'où naîtront des frottements $-f$ et $-f'$; détruisons ceux-ci par l'introduction de deux nouvelles forces f et f', qui leur soient égales et directement contraires. N'est-il pas clair qu'alors les pressions seront les mêmes que si, tout d'abord, il n'y avait pas eu de frottement, puisque les forces P, $-f$, $-f'$, f, f', qui agissent sur la barre, se réduisent à la seule force P. Or, si l'on prétendait que cette force P exerce les mêmes pressions, qu'il y ait frottement ou non, il s'ensuivrait que les forces introduites f et f' n'auraient aucune influence sur les pressions, ce qui est faux en général.

En admettant donc qu'il faille déterminer les pressions d'une manière différente, si l'on fait abstraction du frottement ou si l'on en tient compte, cherchons par notre méthode comment devront se faire ces déterminations.

16. Dans le premier cas, on commencera par chercher quel est le système de forces capable de donner au corps un mouvement spontané compatible avec les liaisons; on

décomposera ensuite le système des forces données en deux autres : le premier, équivalent au précédent, et le second, auquel seront dues les pressions supportées par les surfaces fixes. Les deux systèmes d'équations ainsi obtenues, jointes à celles des liaisons, détermineront le mouvement du corps, et les pressions cherchées.

Ainsi, pour reprendre l'exemple précédent, supposons une barre cylindrique homogène, placée entre deux murs et sollicitée par son poids; cherchons le mouvement qu'elle prendra, et les pressions qu'elle exercera sur les murs, en supposant qu'il n'y ait pas de frottement, et que la barre ne soit pas en mouvement à l'instant considéré.

Le mouvement compatible avec les liaisons est ici une rotation de la barre, autour du point d'intersection des normales, élevées aux deux murs, aux points d'appui. On trouvera aisément qu'une force F capable de donner à la barre cylindrique homogène le mouvement spontané, serait perpendiculaire à la droite qui unit le centre instantané au milieu de celle-ci, et appliquée en un point de droite distant du centre instantané d'une quantité égale aux deux tiers de la longueur de la barre.

Pour résoudre le problème, on décomposera le poids P en deux forces, l'une agissant suivant F, l'autre passant par le centre instantané; cette dernière, décomposée suivant les perpendiculaires aux murs, donnera les pressions normales; la composante suivant F fera mouvoir spontanément la barre avec une vitesse angulaire égale au moment de cette composante ou de la force P, autour du centre instantané, divisé par le moment d'inertie de la barre autour du même centre.

17. Dans le second cas, c'est-à-dire, si l'on tient compte du frottement, il est évident que les forces extérieures, qui

agissent sur le corps, jointes aux frottements, doivent, hormis le cas de l'équilibre, produire un mouvement spontané compatible avec les liaisons.

On déterminera donc encore le système des forces capables de ce mouvement spontané; et, en écrivant que les frottements sont égaux aux pressions normales inconnues, multipliées par les coefficients de frottement, on décomposera le système des forces données et des frottements en deux autres : l'un, équivalent au premier, l'autre, qui se décomposera exclusivement dans les pressions normales. On connaîtra donc celles-ci, ainsi que les grandeurs des forces capables d'imprimer au système un mouvement spontané compatible avec les liaisons, et par suite la vitesse de ce mouvement.

Pour qu'il y ait équilibre strict, il suffira de poser la vitesse égale à zéro.

Appliquons cette méthode à l'exemple précédent.

Désignons par b, h, l les trois côtés du triangle rectangle formé par la barre, et les intersections des murs par un plan vertical passant par celle-ci; par α l'angle opposé à la hauteur h; par P le poids de la barre appliqué en son milieu; par Y′ et —X′ les pressions supportées par le mur horizontal et le mur vertical; par KY′ et K′X′ les frottements contre ces murs; enfin, prenons pour unité de masse celle de l'unité de longueur de la barre.

La force qui est capable de lui donner un mouvement spontané, d'une vitesse angulaire ω, autour du centre instantané, sera déterminée, au moyen de ses composantes X et Y et de son moment N autour de ce centre, par les équations :

$$X = -\frac{1}{2}\omega l^2 \sin\alpha. \quad Y = \frac{1}{2}\omega l^2 \cos\alpha. \quad N = \frac{1}{3}\omega l^3.$$

Écrivons maintenant que le poids et les frottements produisent, sur la barre, ce même mouvement spontané, et sur les murs les pressions Y' et — X'; il faudra, pour cela, que nous ayons :

$$\begin{aligned} P - k'X' &= Y + Y'. \\ - kY' &= X - X'. \\ \frac{1}{2} bP - k'X'b - kY'h &= N. \end{aligned}$$

Ces trois équations déterminent X', Y' et ω.

Si l'on veut connaître la position de l'équilibre strict, on fera $\omega = o$, et l'on pourra déterminer, au moyen des mêmes équations, X', Y' et $tg\alpha$

18. Nous ne nous arrêterons pas à la discussion des résultats, qui sont les mêmes que ceux que l'on obtient par la méthode ordinaire, ni aux applications de la nôtre à d'autres cas particuliers.

Il nous suffit d'avoir indiqué le procédé général, que nous croyons devoir être suivi dans l'application de notre méthode aux problèmes où l'on tient compte du frottement; et nous ne pensons pas que ce soit ici le lieu d'examiner les critiques qui ont été adressées au procédé ordinaire, dans son principe ou dans ses résultats; peut-être les discuterons-nous ailleurs (*).

Toujours est-il que, après avoir cherché, sans parti pris, une solution fondée exclusivement sur notre méthode, nous sommes arrivé aux mêmes conclusions que la méthode généralement adoptée.

(*) Voir *Annales du génie civil*, année 1867, n° 8.