TRAITÉ

DES

RÉDUCTIONS STELLAIRES

PAR

F. FOLIE,

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE ROYAL DE BRUXELLES.

PRÉFACE.

En écrivant les leçons que nous faisons depuis quelques années à l'Université de Liége sur les réductions stellaires, notre but a été d'en démontrer les formules aussi rigoureusement qu'il nous sera possible, et de les mettre à l'abri des erreurs ou des négligences qui se rencontrent dans les formules usuelles, avant d'en faire usage pour la détermination des constantes de la nutation diurne, et la revision de celles de la précession, de la nutation et de l'aberration annuelles. Ces erreurs approchent du dizième de seconde d'arc, et l'on conçoit, dès lors, l'impossibilité de déterminer une parallaxe d'étoile au moyen de ses positions absolues, en se servant des formules usuelles. Si parfois des astronomes ont trouvé une parallaxe positive, on ne peut guère compter sur son exactitude, à moins que cette parallaxe ne soit très forte.

On conçoit aussi que l'astronomie ne soit pas encore parvenue, pour le même motif, à déterminer la position de l'axe instantané de rotation de la Terre à un moment donné, ni l'ouverture du cône qu'il décrit, dans une période de 305 jours environ, autour de l'axe des pôles, ouverture qui ne dépasse probablement pas quelques centièmes de secondes.

De toutes ces erreurs, la plus considérable est certainement celle qui avait cours relativement à la valeur absolument insensible, affirmait-on, de la *nutation diurne;* nous estimons que son coefficient n'est pas loin d'égaler 0.05″. Les premières déterminations assez nombreuses que M. Niesten en a faites d'après les formules exposées dans ma *Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde* (*), lui assigneraient même une valeur plus considérable (**).

Et déjà, grâce à l'introduction de cet élément dans les formules de réduction, et malgré le vague de sa détermination et de celle du premier méridien, le même astronome (***) est parvenu à trouver une parallaxe de 0.011″ pour γ Drac. d'après les observations de May, qui n'avaient donné, de même que les autres observations de cette étoile, qu'une parallaxe négative aux astronomes anglais.

(*) Dans les renvois à cet ouvrage (Bruxelles, Hayez, 1884), nous le désignerons simplement par *Théorie*, etc.

(**) Voir une notice sur ce sujet dans l'*Annuaire de l'Observatoire royal* pour 1888. De toutes les déterminations qui y sont rapportées, il semblerait résulter que ce coefficient serait supérieur à 0.1″; et c'est pourquoi nous avons admis 0.15″ pour sa valeur dans les deux exemples de l'article **26** de ce Traité.

Mais l'application de nos formules (62) à une série assez nombreuse des observations de la Polaire faites par Wagner à Pulkowa assignerait à ce coefficient une valeur plus faible.

(***) Voir également, dans l'*Annuaire* pour 1888, la notice de M. Niesten.

La nutation diurne résulte d'un mouvement de l'écorce solide du globe sur son noyau fluide. Et la même cause qui produit cette nutation en obliquité et en longitude, produit également une *libration* de l'écorce terrestre, qui peut s'élever à 0.02^s en 6 heures, si le coefficient de la nutation diurne est de 0.05″.

La négation de cette libration, ou, ce qui revient au même, l'affirmation de la parfaite uniformité du mouvement de rotation de la Terre, est une seconde erreur qui a eu cours jusqu'aujourd'hui en astronomie.

Une troisième erreur de théorie, moins importante dans le calcul de la position moyenne des étoiles, est celle qui régnait relativement à l'influence constante, croyait-on, et par conséquent non perceptible aux observations, du mouvement de transport du système solaire sur les positions apparentes des étoiles. Je ne doute pas que mes formules relatives à l'aberration et à la parallaxe *systématiques* ne conduisent à déterminer la vitesse de ce mouvement.

Une quatrième erreur, non négligeable, porte sur la valeur numérique de certains coefficients des formules de la nutation, qui ont été déterminés inexactement à cause de l'insuffisance du procédé d'intégration suivi par tous les géomètres. On verra que certains termes, importants surtout dans la recherche de la constante de la nutation (p. 33), sont omis dans les formules usuelles ; que les coefficients de ceux qui dépendent de la double longitude du Soleil sont fautifs (p. 70), enfin que les astronomes ont commis une grave erreur théorique en croyant pouvoir déterminer, d'après les observations du pendule, la valeur des termes dépendants du périgée de la Lune (p. 37).

Certes, si Laplace avait pensé que l'astronomie pût prétendre, peu de temps après lui, à évaluer jusqu'à des centièmes de seconde d'arc, ce grand géomètre n'eût pas commis, de propos délibéré, des négligences qu'il considérait comme étant absolument sans conséquence pratique, mais qui auraient dû être évitées avec soin par ceux qui l'ont suivi dans la Théorie du mouvement de rotation de la Terre.

Une dernière erreur enfin, considérable en théorie, mais dont la pratique aura, je pense, bien de la peine à vérifier avant longtemps l'existence, est l'affirmation de l'invariabilité du jour moyen à travers les siècles. On verra qu'abstraction faite même des frottements des marées extérieures et intérieures, cette prétendue invariabilité n'existe pas, si le mouvement de rotation de l'écorce est indépendant de celui du noyau dans les grandes périodes, comme il l'est dans les petites.

Les erreurs ou négligences que nous venons de signaler dans les formules usuelles sur lesquelles repose la détermination des constantes fondamentales, nécessiteront une détermination nouvelle de ces constantes, indépendamment de la détermination des constantes qui entrent dans les expressions de la nutation diurne et de la nutation décimensuelle.

Ces déterminations feront l'objet de travaux assidus à l'Observatoire de Bruxelles, dont plusieurs astronomes m'ont prêté un concours empressé dans la vérification et les calculs numériques de mes formules (*).

(*) MM. C. Lagrange, Niesten et Wouters, astronomes, Byl, assistant.

En résumé, les observations de l'astronomie de position sont arrivées de nos jours, pensons-nous, à un degré de perfection notablement supérieur à celui qu'a atteint la théorie, et cette dernière devra aujourd'hui, plus qu'elle ne l'a fait assez généralement dans l'école moderne, fixer l'attention et occuper les veilles des astronomes. La jeune école est déjà entrée dans cette voie, et il y a lieu de s'en féliciter.

C'est surtout au fronton des temples consacrés à l'astronomie qu'il faudrait graver l'inscription de Platon : Que nul n'entre s'il n'est géomètre.

Bruxelles, décembre 1887.

TRAITÉ

DES

RÉDUCTIONS STELLAIRES.

CHAPITRE I.

DE LA PRÉCESSION ET DE LA NUTATION.

§ 1. *Formules générales.*

Si le lieu d'une étoile pouvait être rapporté à un plan fixe et à une origine et une droite fixes de ce plan, ses coordonnées vraies seraient absolument constantes, dans le cas où l'étoile ne serait pas animée d'un mouvement propre.

Mais l'astronomie ne peut fournir de ces axes fixes.

Les axes auxquels elle rapporte le plus généralement la position d'une étoile sont l'axe du monde et la ligne des équinoxes, axes soumis à des mouvements que nous aurons à étudier.

L'origine des coordonnées est habituellement le centre de la Terre; mais afin de rapporter le lieu de l'étoile à une origine plus fixe, on pourra choisir pour telle le centre du Soleil; et, comme celui-ci même n'est probablement pas immobile, on rapportera ce lieu à une origine fixe, qui sera la position occupée à un instant déterminé par ce centre.

Le *lieu vrai géocentrique* d'une étoile est rapporté à l'équateur et à l'équinoxe vrais et au centre de la Terre. Rapporté au centre du Soleil, il est le *lieu vrai héliocentrique.*

On verra que le mouvement de l'équateur se décompose en deux parties, l'une *uniforme* appelée *précession,* l'autre *périodique* appelée *nutation.*

L'équateur et l'équinoxe supposés affectés de la précession seule sont nommés *équateur et équinoxe moyens;* et le lieu de l'étoile, rapporté à ces derniers, est le *lieu moyen.*

Ce dernier n'est évidemment pas donné par l'observation.

Mais le lieu vrai lui-même ne l'est pas non plus, à cause de l'aberration, qui modifie dans notre œil la direction du rayon lumineux émis par l'étoile.

L'aberration nous fait voir l'étoile dans son *lieu apparent,* non affecté de la réfraction atmosphérique, dont nous ne nous occuperons pas. Le problème que nous avons à résoudre est celui de la *réduction du lieu apparent au lieu moyen* et vice versâ. Il est clair que le procédé le plus simple à suivre dans la résolution de ce problème est de convertir d'abord le lieu moyen en lieu vrai, et celui-ci en lieu apparent, puisque c'est le lieu vrai qui est affecté de l'aberration.

1. α, δ désigneront les coordonnées équatoriales moyennes à l'origine du temps, c'est-à-dire celles du lieu soustrait aux circonstances énumérées ci-dessus; α_n, δ_n les coordonnées affectées de la précession et de la nutation; $\Delta_n\alpha$ et $\Delta_n\delta$ les différences $\alpha_n - \alpha$, $\delta_n - \delta$, qu'il s'agit d'abord de calculer.

Ces variations proviennent des perturbations que le Soleil et la Lune produisent dans le mouvement de rotation de notre planète.

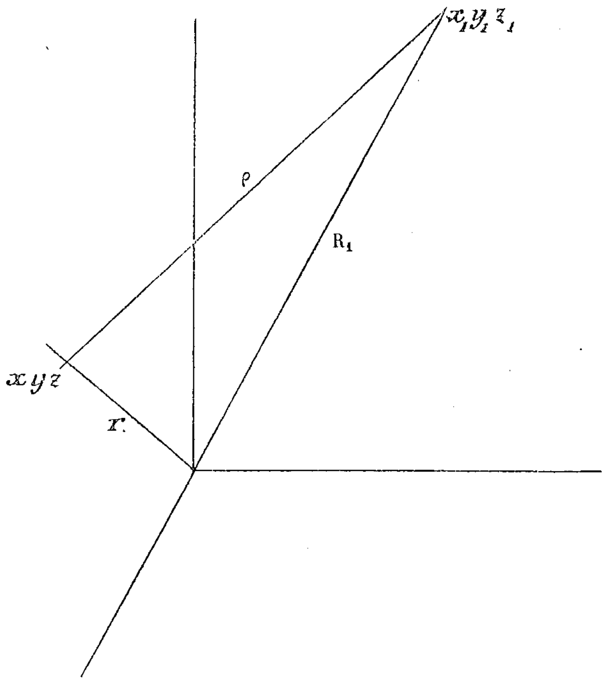
Dans l'étude des attractions de ces deux astres, nous pourrons regarder ceux-ci comme concentrés en leurs centres de gravité.

Quant à notre planète, nous la considérerons comme formée de deux parties dont les mouvements de rotation sont indépendants entre eux : une croûte solide (en faisant abstraction des marées) et un noyau fluide, tout au moins à sa surface.

La théorie, du reste, s'appliquera indifféremment à l'une ou à l'autre de ces parties, si l'on fait abstraction des marées, tant de l'océan que du noyau, ainsi que du frottement de celui-ci contre l'écorce.

2. Commençons par chercher les moments de la force perturbatrice.

Rapportons le corps attiré (noyau ou écorce) à ses trois axes principaux, x, y, z; soient A, B, C ses moments d'inertie autour de ces axes respectifs; r la distance d'un élément dm du



corps au centre de gravité pris pour origine; x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre d'attraction de masse M_1, rapporté aux mêmes axes; R_1 et ρ ses distances à l'origine et à l'élément considéré.

Le potentiel du centre d'attraction sur l'élément dm sera

$$dV = M_1 \frac{dm}{\rho},$$

et sur le corps attiré

$$V = M_1 \sum \frac{dm}{\rho},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dV}{dx} = -M_1 \sum \frac{x_1 - x}{\rho^3} dm = -M_1 \sum \frac{dm}{\rho^2} \frac{x_1 - x}{\rho} = -X, \quad (1)$$

puisque la force attractive de M_1 sur l'élément dm est $M_1 \frac{dm}{\rho^2}$, et que $\frac{x_1 - x}{\rho}$ est le cosinus de l'angle que sa direction fait avec l'axe des x; en sorte que

$$M_1 \sum \frac{dm}{\rho^2} \frac{x_1 - x}{\rho}$$

est la composante X de la force attractive suivant l'axe des x.

Il en est de même relativement aux axes coordonnés y et z.

Les moments P, Q, R de la force attractive seront donc

$$\left.\begin{aligned} P &= \Sigma(yZ - zY) = z\frac{dV}{dy} - y\frac{dV}{dz} \\ Q &= \Sigma(zX - xZ) = x\frac{dV}{dz} - z\frac{dV}{dx} \\ R &= \Sigma(xY - yX) = y\frac{dV}{dx} - x\frac{dV}{dy}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Or, en vertu des propriétés des axes principaux, on a :

$$\Sigma x\, dm = 0, \quad \Sigma xy\, dm = 0, \text{ etc.} \quad (3)$$

On a aussi :

$$M = \Sigma\, dm; \quad A = \Sigma(y^2 + z^2)dm,$$
$$B = \Sigma(z^2 + x^2)dm, \quad C = \Sigma(x^2 + y^2)dm,$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} \Sigma x^2 dm &= \frac{B + C - A}{2} \\ \Sigma y^2 dm &= \frac{C + A - B}{2} \\ \Sigma z^2 dm &= \frac{A + B - C}{2} \\ \Sigma r^2 dm &= \frac{A + B + C}{2} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

En remplaçant $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ par R_1^2, on pourra écrire :

$$\left.\begin{aligned}
&\rho^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = R_1^2 + r^2 - 2(xx_1 + yy_1 + zz_1),\\
&\text{d'où}\\
&\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1}\left\{1 - \frac{2}{R_1^2}(xx_1 + yy_1 + zz_1) + \left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\quad = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1^3}(xx_1 + yy_1 + zz_1) + \frac{3}{2}\frac{1}{R_1^5}(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2\\
&\quad - \frac{1}{2R_1}\left(\frac{r}{R_1}\right)^2 + \frac{5}{2}\frac{1}{R_1^7}(xx_1 + yy_1 + zz_1)^3\\
&\quad - \frac{3}{2}\frac{r^2}{R_1^5}(xx_1 + yy_1 + zz_1) + \cdots;
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

et, en substituant cette expression dans celle de

$$V = M_1 \sum \frac{dm}{\rho},$$

on trouvera, si l'on tient compte des égalités (3) et (4) :

$$\left.\begin{aligned}
V = \frac{MM_1}{R_1} + 0 + \frac{3}{4}\frac{M_1}{R_1^5}\big[x_1^2(B + C - A) + y_1^2(C + A - B)\\
+ z_1^2(A + B - C)\big] - \frac{1}{4}\frac{M_1}{R_1^3}(A + B + C) + \delta V;
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

δV représente la partie du potentiel qui provient des termes restants de l'expression de $\frac{1}{\rho}$, à partir du troisième ordre, et dont il sera opportun de ne calculer l'influence qu'après que celle des termes prépondérants écrits ci-dessus aura été déterminée.

Bornons-nous d'abord à ceux-ci, et remarquons que, si D_1 représente le demi-grand axe de l'orbite terrestre, m_1 le moyen mouvement du Soleil, on a, en vertu de la troisième loi de Kepler, $\frac{M_1}{D_1^3} = m_1^2$; que, pour la Lune, $\frac{M_1}{D_1^3}$ sera f fois plus grand que pour le Soleil, f désignant le rapport des actions des deux astres; nous pourrons écrire, en représentant en général par D_1

la moyenne distance du centre attirant au centre de la Terre,

$$\frac{M_1}{R_1} = \frac{M_1}{D_1}\frac{D_1}{R_1} \quad \text{et} \quad \frac{M_1}{D_1^3} = fm_1^2,$$

f étant égal à l'unité pour le Soleil.

Faisons enfin abstraction du premier terme du potentiel, qui n'est pas relatif aux forces perturbatrices; l'expression de ce dernier, *abstraction faite de* δV, sera, si l'on supprime les indices 1 des variables :

$$\left.\begin{aligned} V = \frac{3}{4} fm_1^2 \Big[(B + C - A)\left(\frac{x}{R_1}\right)^2 + (C + A - B)\left(\frac{y}{R_1}\right)^2 \\ + (A + B - C)\left(\frac{z}{R_1}\right)^2 \Big] \left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3 - \frac{1}{4} fm_1^2 (A + B + C)\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

De cette expression on tire, en appliquant les égalités (2) :

$$\left.\begin{aligned} P &= 3fm_1^2(C - B)\frac{zy}{R_1^2}\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3 \\ Q &= 3fm_1^2(A - C)\frac{zx}{R_1^2}\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3 \\ R &= 3fm_1^2(B - A)\frac{xy}{R_1^2}\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

3. Les équations d'Euler sont, l, m, n représentant les composantes de la vitesse angulaire du corps autour des axes principaux :

$$\begin{aligned} A dl + (C - B) mn dt &= P dt \\ B dm + (A - C)\, ln dt &= Q dt \\ C dn + (B - A)\, lm dt &= R dt; \end{aligned}$$

si l'on y fait

$$\left.\begin{aligned} C - A = a;\quad C - B = b;\quad B - A = d; \\ -3f\frac{m_1^2}{n} = h;\quad P = -bnq;\quad Q = anp;\quad R = dnr; \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

d'où

$$q = h\,\frac{yz}{R_1^2}\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3, \quad p = h\,\frac{xz}{R_1^2}\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3, \quad r = h\,\frac{xy}{R_1^2}\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3,$$

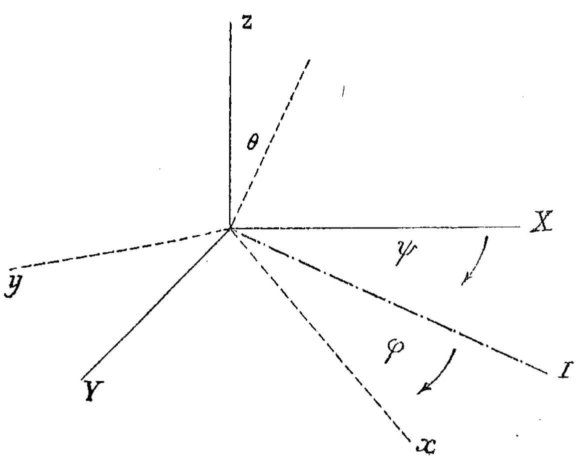
elles s'écriront :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= -\frac{b}{A}\,n(m+q) \\ \frac{dm}{dt} &= \frac{a}{B}\,n(l+p) \\ \frac{dn}{dt} &= -\frac{d}{C}(lm+nr); \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

sur quoi l'on peut remarquer que q se tire de p par le simple changement de x en y.

Sans admettre, comme l'ont fait tous les géomètres, que $A = B$, d'où $n =$ constante, nous supposerons que ces deux moments diffèrent très peu entre eux, pour l'écorce comme pour le noyau, et nous commencerons par intégrer les équations (10) dans l'hypothèse de $n =$ constante; en sorte que nous n'aurons à envisager actuellement que les deux premières d'entre elles.

4. Avant de les intégrer, il faut passer du système des coor-



données x, y, z mobiles avec le corps, à un système de coordonnées fixes X, Y, Z. Nous déterminerons celles-ci de telle sorte que le plan des XY soit l'écliptique d'une époque donnée, que l'axe des X passe par l'équinoxe moyen du printemps de cette époque, et l'axe des Z par le pôle boréal de cette écliptique.

Soient θ l'inclinaison de l'équateur (x, y) sur l'écliptique fixe (X, Y); I l'intersection de ces deux plans, ψ l'angle qu'elle fait avec l'axe des X, φ l'angle que l'axe des x fait avec elle, ces *deux angles* étant comptés *dans le sens du mouvement* de rotation.

Les formules de transformation des coordonnées donnent :

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\theta \sin\varphi(\mathrm{Y}\cos\psi - \mathrm{X}\sin\psi) \\ &\quad + \cos\varphi(\mathrm{X}\cos\psi + \mathrm{Y}\sin\psi) - \mathrm{Z}\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= \sin\theta(\mathrm{Y}\cos\psi - \mathrm{X}\sin\psi) + \mathrm{Z}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Il est superflu d'écrire l'expression de y, qui se tire de celle de x par le simple changement de φ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Lorsque les coordonnées X, Y, Z seront exprimées en fonction de t, les moments P et Q, ou p et q, qui les remplacent, (8) et (9), pourront l'être également en fonction de θ, ψ et t, parce que nous supposons provisoirement $\frac{d\varphi}{dt} = n = \text{const.}$; et l'intégration des deux premières équations (10) fournira les expressions de l et de m en fonction de ces mêmes variables; or les formules de transformation donnent aussi :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -l\cos\varphi + m\sin\varphi \\ -\sin\theta\frac{d\psi}{dt} &= l\sin\varphi + m\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

et nous connaîtrons ainsi les expressions de $\frac{d\theta}{dt}$ et de $\frac{d\psi}{dt}$.

Leur intégration donnera la solution du problème.

Cela fait, nous aurons à revenir à la troisième des équations (10), qui n'intervient pas dans l'analyse dont nous venons de donner l'aperçu.

On peut en faire abstraction dans l'étude du mouvement de rotation du noyau fluide, pour lequel $\frac{B-A}{C}$ a certainement une valeur insensible, comme pour la Terre entière. Mais le fait de la nutation diurne, qui est établie par les observations (*), et dont le coefficient renferme $\frac{B-A}{C}$ comme facteur, prouve que cette quantité a une valeur appréciable pour l'écorce solide.

La troisième des équations (10), qui, appliquée à la Terre entière ou au noyau, donne $n =$ constante, nous montrera que pour l'écorce, au contraire, cette vitesse de rotation est variable.

5. Occupons-nous donc de la recherche des expressions des coordonnées X, Y, Z. Comme il a été dit, nous ne la ferons que pour la Lune; les résultats que nous trouverons seront applicables au Soleil, en égalant à zéro l'inclinaison du plan de l'orbite lunaire à l'écliptique, ainsi que le facteur m' qui affecte les termes provenant des inégalités de la Lune.

Soit i la tangente de cette inclinaison, ε celle de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{L}$ la latitude et la longitude de la Lune rapportée à l'écliptique fixe. On a d'abord :

$$\frac{Z}{R_1} = \sin \mathfrak{B}, \quad \frac{Y}{R_1} = \cos \mathfrak{B} \sin \mathfrak{L}, \quad \frac{X}{R_1} = \cos \mathfrak{B} \cos \mathfrak{L}.$$

Ces expressions, substituées dans les formules (11), donneront, si l'on pose

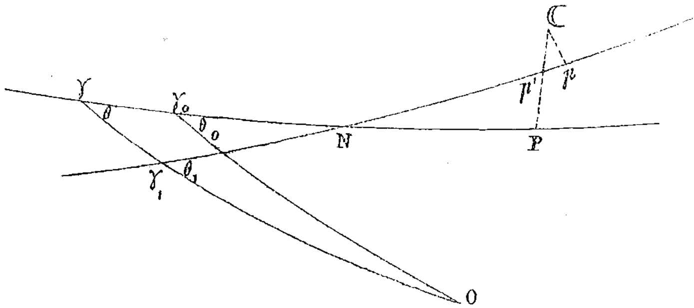
$$\sin \theta = s_1, \quad \cos \theta = c_1, \quad \sin 2\theta = s_2, \quad \cos 2\theta = c_2, \quad \cot \theta = c_1' : \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{2x}{R_1} &= \cos \mathfrak{B}\left[(1+c_1)\cos(\mathfrak{L}-\psi-\varphi)+(1-c_1)\cos(\mathfrak{L}-\psi+\varphi)\right] \\ &\quad - 2s_1 \sin \mathfrak{B} \sin \varphi. \\ \frac{z}{R_1} &= s_1 \cos \mathfrak{B} \sin(\mathfrak{L}-\psi) + c_1 \sin \mathfrak{B}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Or, si λ et β désignent la longitude et la latitude de la Lune rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe vrais, ☊ la longitude de

(*) *C. R.*, 13 déc. 1886; *A. N.*, n° 2768; *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 3e série, t. XIII, pp. 398 et suiv., et *Ann*re *de l'Obs. roy. de Bruxelles* pour 1888.

son nœud ascendant, Λ celle du nœud ascendant de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe, rapportée à l'équinoxe fixe, Λ_1 cette



longitude rapportée à l'équinoxe vrai, $\mathfrak{B}_0$ la partie $p'P$ de $\mathfrak{B}$ comprise entre celle-ci et l'écliptique fixe, on peut, vu la petitesse de ε, poser

$$\mathfrak{B} = \beta + \mathfrak{B}_0$$

et même

$$\operatorname{tg} \mathfrak{B} = \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \mathfrak{B}_0,$$

d'où l'on tire, en écrivant simplement i au lieu de $\operatorname{tg} i$, négligeant εi^2 et ε^2, et remplaçant $\operatorname{tg} \beta$ par $i \sin(\lambda - \Omega)$, $\operatorname{tg} \mathfrak{B}_0$ par $\varepsilon \sin(\mathfrak{L} - \Lambda)$:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg} \mathfrak{B} &= i \sin(\lambda - \Omega) + \varepsilon \sin(\mathfrak{L} - \Lambda). \\
\sin \mathfrak{B} &= i\left(1 - \frac{3}{8} i^2\right) \sin(\lambda - \Omega) + \frac{1}{8} i^3 \sin 3(\lambda - \Omega) + \varepsilon \sin(\mathfrak{L} - \Lambda). \\
\cos \mathfrak{B} &= 1 - \frac{i^2}{4} + \frac{9}{64} i^4 + \frac{i^2}{4} \cos 2(\lambda - \Omega) \\
&\quad - \frac{3}{16} i^4 \cos 2(\lambda - \Omega) + \frac{3}{64} i^4 \cos 4(\lambda - \Omega) \\
&\quad + \frac{1}{2} i\varepsilon \left\{ \cos(2\lambda - \Omega - \Lambda) - \cos(\Omega - \Lambda \right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Il reste encore à exprimer $\mathfrak{L}$ en fonction de λ, Ω, Λ. Or, dans la figure ci-contre, on a, en négligeant le carré de ε :

$$NP = Np' = Np - pp',$$

ou

$$\mathfrak{L} - \Lambda = \lambda - \Lambda_1 - pp'.$$

Et

$$pp' = \operatorname{tg}\beta \cot p' = \operatorname{tg}\beta \sin B_0 \cot(\mathfrak{L} - \Lambda) = i \sin\varepsilon \sin(\lambda - \Omega)\cos(\lambda - \Lambda).$$

Pour déterminer Λ_1, nous aurons dans le triangle $N\gamma\gamma_1$, en négligeant ε^2 :

$$\cot\Lambda_1 \sin(\Lambda - \psi) = \cos(\Lambda - \psi) + \varepsilon\cot\theta,$$

d'où l'on tire :

$$\Lambda_1 = \Lambda - \psi - \varepsilon\cot\theta\sin(\Lambda - \psi),$$

ou plus simplement, puisque

$$\varepsilon\sin(\Lambda - \psi) = \sin\chi\sin\theta_1, \tag{16}$$

qu'on peut écrire $\sin\chi\sin\theta$:

$$\Lambda_1 = \Lambda - \psi - c_1\chi,$$

χ représentant $\sin\chi$, c'est-à-dire $\sin\gamma\gamma_1$.

De là :

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{L} - \psi = \lambda + c_1\chi - \dfrac{1}{2}\varepsilon i\left[\sin(2\lambda - \Omega - \Lambda) - \sin(\Omega - \Lambda)\right]. \\
\sin(\mathfrak{L} - \psi) = \sin(\lambda + c_1\chi) \\
\quad - \dfrac{1}{4}\varepsilon i\left\{\begin{array}{l}
\sin(3\lambda + \psi - c_1\chi - \Omega - \Lambda) \\
+ \sin(\lambda - \psi + c_1\chi - \Omega - \Lambda) \\
- \sin(\lambda + \psi - c_1\chi + \Omega - \Lambda) \\
+ \sin(\lambda + \psi - c_1\chi - \Omega - \Lambda).
\end{array}\right\} \\
\cos(\mathfrak{L} - \psi) = \cos(\lambda + c_1\chi) \\
\quad - \dfrac{1}{4}\varepsilon i\left\{\begin{array}{l}
\cos(3\lambda + \psi - c_1\chi - \Omega - \Lambda) \\
- \cos(\lambda - \psi + c_1\chi - \Omega - \Lambda) \\
- \cos(\lambda + \psi - c_1\chi + \Omega - \Lambda) \\
+ \cos(\lambda + \psi - c_1\chi - \Omega + \Lambda).
\end{array}\right\}
\end{array}\right\} \tag{17}$$

Enfin, dans l'expression de $\sin\mathfrak{B}$ nous remplacerons ultérieurement $☾ - \Lambda$ par $☾ - \psi - (\Lambda - \psi)$, et nous écrirons $\Lambda - \psi = \Lambda'$, en sorte que Λ' sera la longitude du nœud ascendant de l'écliptique rapportée au point γ, intersection de l'écliptique fixe de 1850 avec l'équateur de 1850 + t.

§ 2. *Formules usuelles de la précession et de la nutation annuelle et formules de la nutation diurne.*

6. Mais afin de ne pas trop compliquer la suite des développements, nous commencerons par faire abstraction des termes en ε, sur lesquels nous reviendrons dans le § 4, et par conséquent de $c_1\chi$, qui a ε en facteur.

Il ne sera donc question actuellement que de la précession et de la nutation, tant annuelle que diurne, abstraction faite des variations séculaires.

Avec cette restriction, les formules (14) deviendront :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2x}{R_1} &= \left(1 - \frac{i^2}{4} + \frac{9}{64}i^4\right)\left[(1+c_1)\cos(\lambda-\varphi)+(1-c_1)\cos(\lambda+\varphi)\right] \\
&\quad - is_1\left(1 - \frac{3}{8}i^2\right)\left[\cos(\lambda - ☊ - \varphi) - \cos(\lambda - ☊ + \varphi)\right] \\
&\quad + \frac{i^2}{8}\left(1 - \frac{3i^2}{4}\right)\left\{\begin{aligned} &(1+c_1)\cos(3\lambda - 2☊ - \varphi) \\ &+(1-c_1)\cos(3\lambda - 2☊ + \varphi) \\ &+(1-c_1)\cos(\lambda - 2☊ - \varphi) \\ &+(1+c_1)\cos(\lambda - 2☊ + \varphi)\end{aligned}\right\} \\
&\quad + \frac{i^3}{8}s_1\left[\cos(3\lambda - 3☊ - \varphi) - \cos(3\lambda - 3☊ + \varphi)\right] \\
&\quad + \frac{3i^4}{128}\left[(1-c_1)\cos(3\lambda-4☊-\varphi)+(1+c_1)\cos(3\lambda-4☊+\varphi)\right]. \\
\frac{z}{R_1} &= \left(1 - \frac{i^2}{4} + \frac{9}{64}i^4\right)s_1\sin\lambda + i\left(1 - \frac{3}{8}i^2\right)c_1\sin(\lambda - ☊) \\
&\quad + \frac{i^2}{8}\left(1 - \frac{3}{4}i^2\right)s_1\left[\sin(3\lambda - 2☊) - \sin(\lambda - 2☊)\right] \\
&\quad + \frac{i^3}{8}c_1\sin(3\lambda - 3☊) - \frac{3i^4}{128}s_1\sin(3\lambda - 4☊).
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

7. Le produit de ces deux expressions, qui entre dans celle de p ou du moment Q, deviendra, après qu'on aura ordonné et fait abstraction des termes en 4λ, etc. :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{4xz}{R_1^2} = & \left(1 - \frac{3}{2}i^2 + \frac{9}{8}i^4\right) s_2 \sin\varphi \\
& - i\left(1 - \frac{3}{4}i^2\right)\left[(c_1 + c_2)\sin(\Omega - \varphi) + (c - c_2)\sin(\Omega + \varphi)\right] \\
& + \frac{i^2}{4}(1 - i^2)s_1\left[(1 + c_1)\sin(2\Omega - \varphi) + (1 - c_1)\sin(2\Omega + \varphi)\right] \\
& + \left(1 - \frac{i^2}{2} + \frac{3}{8}i^4\right)s_1\left[(1 + c_1)\sin(2\lambda - \varphi) + (1 - c_1)\sin(2\lambda + \varphi)\right] \\
& + i\left(1 - \frac{3}{4}i^2\right)\left[(c_1 + c_2)\sin(2\lambda - \Omega - \varphi) + (c_1 - c_2)\sin(2\lambda - \Omega + \varphi)\right] \\
& - \frac{3}{2}i^2(1 - i^2)s_1 c_1\left[\sin(2\lambda - 2\Omega - \varphi) - \sin(2\lambda - 2\Omega + \varphi)\right] \\
& + \frac{i^3}{4}\left[(c_1 - c_2)\sin(2\lambda - 3\Omega - \varphi) + (c_1 + c_2)\sin(2\lambda - 3\Omega + \varphi)\right] \\
& - \frac{1}{16}s_1 i^4\left[(1 - c_1)\sin(2\lambda - 4\Omega - \varphi) + (1 + c_1)\sin(2\lambda - 4\Omega + \varphi)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Il reste encore, pour obtenir Q ou p (9), à multiplier le produit précédent par $\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3$.

8. Or, si v représente l'anomalie vraie de l'astre, e l'excentricité de son orbite, on a

$$\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3 = \frac{(1 + e\cos v)^3}{(1 - e^2)^3}$$

$$= 1 + \frac{9}{2}e^2 + \frac{21}{2}e^4 + 3e\left(1 + \frac{13}{4}e^2\right)\cos v + \frac{3}{2}e^2\cos 2v + \frac{e^3}{4}\cos 3v;$$

mais on a aussi :

$$v = \lambda - \Gamma + \frac{i^2}{4}\sin 2(\lambda - \Omega) + \frac{i^4}{32}\sin 4(\lambda - \Omega),$$

Γ désignant la longitude du périgée dans l'orbite ; d'où

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3 = 1 + \frac{9}{2}e^2 + \frac{21}{2}e^4 + 3e\left(1 + \frac{13}{4}e^2\right)\cos(\lambda - \Gamma)\\ + \frac{3}{2}e^2(1 + 3e^2)\cos 2(\lambda - \Gamma) + \frac{1}{4}e^3\cos 3(\lambda - \Gamma)\\ + \frac{3}{8}ei^2\left[\cos(3\lambda - \Gamma - 2\Omega) - \cos(\lambda + \Gamma - 2\Omega)\right]\\ + \frac{3}{8}e^2i^2\left[\cos(4\lambda - 2\Gamma - 2\Omega) - \cos 2(\Gamma - \Omega)\right] + \cdots\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

Dans ce développement, nous nous arrêterons toutefois aux termes du troisième ordre, de même que dans le produit des expressions (19) et (20), les termes des ordres supérieurs étant véritablement insignifiants. Dans les coefficients des termes les plus importants nous conserverons néanmoins i^4 et e^4 pour plus de rigueur.

9. Effectuant donc le produit des expressions (19) et (20), on trouve, en s'arrêtant aux termes du troisième ordre et aux triples longitudes :

$$\left.\begin{aligned}\frac{4xz}{R_1^2}\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3 = \left(1 - \frac{3}{2}i^2 + \frac{9}{2}e^2 + \frac{9}{8}i^4 - \frac{27}{4}i^2e^2 + \frac{21}{2}e^4\right)s_2\sin\varphi\\ - i\left(1 - \frac{3}{4}i^2 + \frac{9}{2}e^2\right)\left[(c_1 + c_2)\sin(\Omega - \varphi) + (c_1 - c_2)\sin(\Omega + \varphi)\right]\\ + \frac{i^2}{4}\left(1 - i^2 + \frac{15}{4}e^2\right)\left[(1 + c_1)\sin(2\Omega - \varphi) + (1 - c_1)\sin(2\Omega + \varphi)\right]\\ + \frac{3}{4}e^2\left(1 - \frac{i^2}{2} + 3e^2\right)s_1\left[(1 + c_1)\sin(2\Gamma - \varphi) + (1 - c_1)\sin(2\Gamma + \varphi)\right]\\ + \frac{3}{4}ie^2\left[(c_1 + c_2)\sin(2\Gamma - \Omega - \varphi) + (c_1 - c_2)\sin(2\Gamma - \Omega + \varphi)\right]\\ - \frac{3}{4}e\left(1 - \frac{3}{2}i^2 + \frac{13}{4}e^2\right)s_2\left[\sin(\lambda - \Gamma - \varphi) - \sin(\lambda - \Gamma + \varphi)\right]\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

$$\left.\begin{aligned}
&+\frac{3}{2}e\left(1-\frac{1}{2}i^2+\frac{13}{4}e^2\right)s_1\left[(1+c_1)\sin(\lambda+\Gamma-\varphi)+(1-c_1)\sin(\lambda+\Gamma+\varphi)\right]\\
&+\left(1-\frac{i^2}{2}+\frac{9}{2}e^2+\frac{5}{8}i^4-\frac{9}{4}i^2e^2+\frac{21}{2}e^4\right)s_1\left[(1+c_1)\sin(2\lambda-\varphi)+(1-c_1)\sin(2\lambda+\varphi)\right]\\
&+i\left(1-\frac{3}{4}i^2+\frac{9}{2}e^2\right)\left[(c_1+c_2)\sin(2\lambda-\Omega-\varphi)+(c_1-c_2)\sin(2\lambda-\Omega+\varphi)\right]\\
&-\frac{3}{4}i^2\left(1-i^2+\frac{17}{4}e^2\right)s_2\left[\sin(2\lambda-2\Omega-\varphi)-\sin(2\lambda-2\Omega+\varphi)\right]\\
&+\frac{3}{2}e\left(1-\frac{1}{2}i^2+\frac{13}{4}e^2\right)s_1\left[(1+c_1)\sin(3\lambda-\Gamma-\varphi)+(1-c_1)\sin(3\lambda-\Gamma+\varphi)\right]\\
&+\frac{3}{2}ei\left(1-\frac{i^2}{2}+\frac{13}{4}e^2\right)\left[(c_1+c_2)\sin(\lambda+\Gamma-\Omega-\varphi)+(c_1-c_2)\sin(\lambda+\Gamma-\Omega+\varphi)\right]\\
&-\frac{3}{2}ei\left(1-\frac{i^2}{2}+\frac{13}{4}e^2\right)\left[(c_1+c_2)\sin(\lambda-\Gamma+\Omega-\varphi)+(c_1-c_2)\sin(\lambda-\Gamma+\Omega+\varphi)\right]\\
&+\frac{3}{2}ei\left(1-\frac{7}{8}i^2+\frac{13}{4}e^2\right)\left[(c_1-c_2)\sin(\lambda-\Gamma-\Omega-\varphi)+(c_1+c_2)\sin(\lambda-\Gamma-\Omega+\varphi)\right]\\
&+\frac{3}{2}ei\left(1-\frac{7}{8}i^2+\frac{13}{4}e^2\right)\left[(c_1+c_2)\sin(3\lambda-\Gamma-\Omega-\varphi)+(c_1-c_2)\sin(3\lambda-\Gamma-\Omega+\varphi)\right]\\
&-\frac{1}{8}ei\left[(c_1+c_2)\sin(3\lambda-3\Gamma+\Omega-\varphi)+(c_1-c_2)\sin(3\lambda-3\Gamma+\Omega+\varphi)\right]\\
&-\frac{1}{8}ei\left[(c_1-c_2)\sin(\lambda-3\Gamma+\Omega-\varphi)+(c_1+c_2)\sin(\lambda-3\Gamma+\Omega+\varphi)\right]\\
&-\frac{3}{4}e^2\left(1-\frac{3}{2}i^2+3e^2\right)s_2\left[\sin(2\lambda-2\Gamma-\varphi)-\sin(2\lambda-2\Gamma+\varphi)\right]\\
&-\frac{3}{4}ei^2s_2\left[\sin(\lambda+\Gamma-2\Omega-\varphi)-\sin(\lambda+\Gamma-2\Omega+\varphi)\right]\\
&-\frac{9}{16}ei^2s_1\left[(1-c_1)\sin(\lambda-\Gamma-2\Omega-\varphi)+(1+c_1)\sin(\lambda-\Gamma-2\Omega+\varphi)\right]\\
&-\frac{21}{16}ei^2s_2\left[\sin(3\lambda-\Gamma-2\Omega-\varphi)-\sin(3\lambda-\Gamma-2\Omega+\varphi)\right]\\
&-\frac{3}{16}ei^2s_2\left[\sin(\lambda-3\Gamma+2\Omega-\varphi)-\sin(\lambda-3\Gamma+2\Omega+\varphi)\right]
\end{aligned}\right\}\ \begin{matrix}(21)\\ \textit{(suite)}\end{matrix}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+\frac{3}{16}ei^2s_1\left[(1+c_1)\sin(3\lambda-3\Gamma+2\Omega-\varphi)+(1-c_1)\sin(3\lambda-3\Gamma+2\Omega+\varphi)\right]\\
&+\frac{3}{16}ei^2s_1\left[(1+c_1)\sin(\lambda+3\Gamma-2\Omega-\varphi)+(1-c_1)\sin(\lambda+3\Gamma-2\Omega+\varphi)\right]\\
&-\frac{3}{4}e^2i\left[(c_1+c_2)\sin(2\lambda-2\Gamma+\Omega-\varphi)+(c_1-c_2)\sin(2\lambda-2\Gamma+\Omega+\varphi)\right]\\
&+\frac{3}{4}e^2i\left[(c_1-c_2)\sin(2\lambda-2\Gamma-\Omega-\varphi)+(c_1+c_2)\sin(2\lambda-2\Gamma-\Omega+\varphi)\right].
\end{aligned}\right\}\ \begin{matrix}(21)\\ \textit{(suite)}\end{matrix}
$$

10. Avant de procéder à l'intégration il faut encore exprimer la longitude vraie de l'astre λ en fonction de sa longitude moyenne $☾$. Nous en emprunterons l'expression à la *Théorie de la Lune*, de DELAUNAY (*) :

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda = ☾ &+ \left(2e'-\frac{e'^3}{4}\right)\sin(☾-\Gamma')+\left(\frac{5}{4}e'^2-\frac{11}{24}e'^4\right)\sin 2(☾-\Gamma')\\
&-\frac{i^2}{4}(1-4e'^2)\sin 2(☾-\Omega)\\
&-\left(3e-\frac{27}{8}ei^2+\frac{27}{8}ee'^2+\frac{27}{8}e^3-\frac{735}{16}em'^2\right)m'\sin(\odot-\Gamma)\\
&+\left[\frac{75}{16}e'^2-\frac{3}{16}i^2+\left(\frac{11}{8}-\frac{47}{64}i^2+\frac{1101}{64}e'^2-\frac{55}{16}e^2\right)m'\right.\\
&\qquad\left.+\frac{59}{12}m'^2+\frac{893}{72}m'^3\right]m'\sin 2(☾-\odot)\\
&+\left(\frac{15}{4}e'-\frac{3}{2}e'i^2-\frac{75}{8}e'e^2+\frac{265}{16}e'm'+\frac{48217}{768}e'm'^2\right)\times\\
&\qquad\times m'\sin(☾-2\odot+\Gamma').
\end{aligned}\right\}\ (22)
$$

Dans cette formule, qui tient compte des trois grandes inégalités de la Lune, e' et Γ' désignent l'excentricité et la longitude

(*) *Mémoires de l'Institut*, t. XXIX, pp. 803 et suiv. Le lecteur, désireux de connaître la démonstration de cette formule, abstraction faite des inégalités lunaires, la trouvera dans ma *Théorie des mouvements diurne, annuel et seculaire de l'axe du monde*, nos 59 et suiv.

du périgée de l'orbite lunaire; m' le rapport de son moyen mouvement à celui de la Terre autour de son axe.

Les trois premiers termes du second membre, résultant du mouvement elliptique, s'appliquent au Soleil, en y changeant respectivement ☾, e' et Γ' en $\odot$, e et Γ.

Nous n'écrirons le développement que pour la Lune; on en tirera celui qui se rapporte au Soleil, en posant d'abord $i = 0$, $m'=0$, et en faisant ensuite les mêmes modifications précédentes.

11. Si l'on effectue cette substitution on trouve, après réduction, que tous les termes qui dépendent exclusivement du périgée, ou du périgée et du nœud, disparaissent identiquement, comme Laplace l'a affirmé.

Le résultat final sera, aux quantités près du troisième ordre, en conservant les accents de e et Γ pour indiquer que ces quantités sont relatives à la Lune :

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{4xz}{R_1^2}\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3 = &\left(1 - \frac{3}{2}i^2 + \frac{3}{2}e'^2 + \frac{3}{2}i^4 - \frac{9}{4}e'^2 i^2 + \frac{15}{8}e'^4\right) s_2 \sin\varphi & 0.\\
&- i\left(1 - i^2 + \frac{5}{2}e'^2\right)\left[(c_1+c_2)\sin(\Omega-\varphi) + (c_1-c_2)\sin(\Omega+\varphi)\right] & 1.\\
&+ \frac{1}{2}i^2\left(1 - \frac{3}{4}i^2 + \frac{5}{2}e'^2\right) s_1\left[(1+c_1)\sin(2\Omega-\varphi) + (1-c_1)\sin(2\Omega+\varphi)\right] & 2.\\
&+ \left(\begin{array}{l} 1 - \frac{i^2}{2} - \frac{5}{2}e'^2 + \frac{5}{4}e'^2 i^2 + \frac{7}{16}i^4 \\ + \frac{13}{64}e'^4 - 9e^2 m'^2 - \frac{225}{16}e'^2 m'^2 - \frac{121}{64}m'^4 \end{array}\right) s_1\left[(1+c_1)\sin(2☾-\varphi) + (1-c_1)\sin(2☾+\varphi)\right] & 3.\\
&- \frac{3}{2}e'\left(1 - \frac{3}{2}i^2 + \frac{9}{8}e'^2\right) s_2\left[\sin(☾-\Gamma'-\varphi) - \sin(☾-\Gamma'+\varphi)\right] & 4.\\
&- \frac{1}{2}e'\left(1 - \frac{i^2}{2} - \frac{e'^2}{8} + \frac{165}{16}m'^3\right) s_1\left[(1+c_1)\sin(☾+\Gamma'-\varphi) + (1-c_1)\sin(☾+\Gamma'+\varphi)\right] & 5.\\
&+ \frac{7}{2}e'\left(1 - \frac{i^2}{2} - \frac{123}{56}e'^2 - \frac{165}{112}m'^3\right) s_1\left[(1+c_1)\sin(3☾-\Gamma'-\varphi) + (1-c_1)\sin(3☾-\Gamma'+\varphi)\right] & 6.\\
&+ i\left(1 - \frac{3}{4}i^2 - \frac{5}{2}e'^2\right)\left[(c_1+c_2)\sin(2☾-\Omega-\varphi) + (c_1-c_2)\sin(2☾-\Omega+\varphi)\right] & 7.
\end{aligned}
\right\} (23)
$$

$$-\frac{1}{4}m'\left(\begin{array}{l}\frac{11}{2}m'-\frac{3}{4}i^2+\frac{59}{3}m'^2-\frac{349}{8}e'^2m'\\ -\frac{91}{16}i^2m'-\frac{55}{4}e^2m'+\frac{893}{18}m'^3\end{array}\right)s_1\Big[(1+c_1)\sin(2\odot-\varphi)+(1-c_1)\sin(2\odot+\varphi)\Big] \qquad 8.$$

$$-\frac{1}{4}im'\left(\frac{11}{2}m'+\frac{59}{3}m'^2-\frac{3}{4}i^2\right)\Big[(c_1+c_2)\sin(2\odot-\text{☊}-\varphi)+(c_1-c_2)\sin(2\odot-\text{☊}+\varphi)\Big] \qquad 9.$$

$$-\frac{9}{4}e'^2\left(1+\frac{3}{2}i^2-\frac{7}{9}e'^2\right)s_2\Big[\sin(2\text{☾}-2\Gamma'-\varphi)-\sin(2\text{☾}-2\Gamma'+\varphi)\Big] \qquad 10.$$

$$+\frac{45}{16}e'^2m'\left(1+\frac{307}{60}m'\right)s_2\Big[\sin(2\odot-2\Gamma'-\varphi)-\sin(2\odot-2\Gamma'+\varphi)\Big]\ (^*) \qquad 11.$$

$$+\frac{3}{2}e'i\left(1-i^2+\frac{9}{8}e'^2\right)\Big[(c_1-c_2)\sin(\text{☾}-\Gamma'-\text{☊}-\varphi)+(c_1+c_2)\sin(\text{☾}-\Gamma'-\text{☊}+\varphi)\Big] \qquad 12.$$

$$-\frac{3}{2}e'i\left(1-i^2+\frac{9}{8}e'^2\right)\Big[(c_1+c_2)\sin(\text{☾}-\Gamma'+\text{☊}-\varphi)+(c_1-c_2)\sin(\text{☾}-\Gamma'+\text{☊}+\varphi)\Big] \qquad 13.$$

$$-\frac{1}{2}e'i\left(1-\frac{3}{4}i^2-\frac{1}{8}e'^2\right)\Big[(c_1+c_2)\sin(\text{☾}+\Gamma'-\text{☊}-\varphi)+(c_1-c_2)\sin(\text{☾}+\Gamma'-\text{☊}+\varphi)\Big] \qquad 14.$$

$$+\frac{7}{2}e'i\left(1-\frac{3}{4}i^2-\frac{123}{56}e'^2\right)\Big[(c_1+c_2)\sin(3\text{☾}-\Gamma'-\text{☊}-\varphi)+(c_1-c_2)\sin(3\text{☾}-\Gamma'-\text{☊}+\varphi)\Big] \qquad 15.$$

$$-\frac{3}{4}i^2\left(1-i^2-\frac{5}{2}e'^2\right)s_2\Big[\sin(2\text{☾}-2\text{☊}-\varphi)-\sin(2\text{☾}-2\text{☊}+\varphi)\Big] \qquad 16.$$

$$+\frac{15}{4}e'm'\left(\begin{array}{l}-\frac{67}{80}i^2-\frac{5}{2}e^2\\ +\frac{157}{40}m'-\frac{113}{16}e'^2+\frac{4833}{320}m'^2\end{array}\right)s_1\left\{\begin{array}{l}(1+c_1)\sin(3\text{☾}-2\odot+\Gamma'-\varphi)\\ +(1-c_1)\sin(3\text{☾}-2\odot+\Gamma'+\varphi)\end{array}\right\} \qquad 17.$$

$$-\frac{15}{4}e'm'\left(\begin{array}{l}1-\frac{267}{240}i^2-\frac{3}{16}e'^2-\frac{5}{2}e^2\\ +\frac{713}{120}m'+\frac{12853}{2304}m'^2\end{array}\right)s_1\left\{\begin{array}{l}(1+c_1)\sin(\text{☾}+2\odot-\Gamma'-\varphi)\\ +(1-c_1)\sin(\text{☾}+2\odot-\Gamma'+\varphi)\end{array}\right\} \qquad 18.$$

$$-3em'\left(\begin{array}{l}1-\frac{13}{8}i^2-\frac{35}{8}e'^2\\ +\frac{9}{8}e^2-\frac{245}{16}m'^2\end{array}\right)s_1\left[\begin{array}{l}(1+c_1)\{\sin(2\text{☾}+\odot-\Gamma-\varphi)-\sin(2\text{☾}-\odot+\Gamma-\varphi)\}\\ +(1-c_1)\{\sin(2\text{☾}+\odot-\Gamma+\varphi)-\sin(2\text{☾}-\odot+\Gamma+\varphi)\}.\end{array}\right] \qquad 19.$$

(23) *(suite)*.

On ne doit pas oublier que tous les coefficients qui précèdent doivent être multipliés par f lorsqu'ils se rapportent à l'action de la Lune.

(*) Ce terme, quoique du troisième ordre, a été maintenu à cause de son importance.

Les termes relatifs à l'action du Soleil seront :

$$\left.\begin{array}{lr}
\left(1+\frac{3}{2}e^2+\frac{15}{8}e^4\right)s_2\sin\varphi & 0. \\
+\left(1-\frac{5}{2}e^2+\frac{13}{64}e^4\right)s_1\left[(1+c_1)\sin(2\odot-\varphi)+(1-c_1)\sin(2\odot+\varphi)\right] & 1. \\
-\frac{3}{2}e\left(1+\frac{9}{8}e^2\right)s_2\left[\sin(\odot-\Gamma-\varphi)-\sin(\odot-\Gamma+\varphi)\right] & 2. \\
-\frac{1}{2}e\left(1-\frac{e^2}{8}\right)s_1\left[(1+c_1)\sin(\odot+\Gamma-\varphi)+(1-c_1)\sin(\odot+\Gamma+\varphi)\right] & 3. \\
+\frac{7}{2}e\left(1-\frac{123}{56}e^2\right)s_1\left[(1+c_1)\sin(3\odot-\Gamma-\varphi)-(1-c_1)\sin(3\odot-\Gamma+\varphi)\right] & 4. \\
-\frac{9}{4}e^2\left(1-\frac{7}{9}e^2\right)s_2\left[\sin(2\odot-2\Gamma-\varphi)-\sin(2\odot-2\Gamma+\varphi)\right]. & 5.
\end{array}\right\}\ \begin{array}{c}(23)\\ (bis).\end{array}$$

Nous y ajouterons les deux termes 9. et 11. de la formule antérieure, en $2\odot-\Omega$ et en $2\odot-2\Gamma'$, dont les coefficients numériques seront désignés par N_6 et N_7; et au terme 1. nous ajouterons de même le terme analogue 8. de la formule antérieure, en sorte que N_1 représentera la somme algébrique des coefficients de ces deux termes. Nous laisserons en général f indéterminé; toutefois, dans le calcul des coefficients de 8., 9., 11., qui sont très faibles, nous le prendrons égal à 2.18.

12. Pour le calcul numérique de ces expressions, nous adopterons les données suivantes, parmi lesquelles en figurent quelques-unes dont nous aurons ultérieurement besoin, comme les moyens mouvements des astres, du nœud et du périgée.

L'unité de temps est l'année julienne ou 365.25 jours moyens; l'époque 1850.0.

	m_1	m'_1	$-\omega_1$	γ_1	γ'_1
	6.28308	83.9971	0.337572	0.0000559	0.710183
lg	0 7981723	1.9242642	9.5283666	5.74741	9.8513704
	n	m'	e	e'	i
	2π. 366.25	0.0748013	0.01677	0.054857	0.0900295
lg	3.3619576	8.873909	8.224535	8.739427	8.9543851
		m'^2	e^2	e'^2	i^2
		0.0056	0.00028	0.0030	0.0081

13. Les coefficients numériques des différents termes, non compris les facteurs s_1, s_2, c_1, c_2, seront désignés, en valeur absolue, par N_0, N_1, ...; nous ne calculerons que ceux qui seront d'une utilité pratique dans les formules. Ce sont d'abord, naturellement, les termes les plus considérables, usités dans les formules habituelles, ensuite quelques termes dont on ne fait pas usage, mais qui acquièrent de l'importance parce qu'ils interviennent dans les formules de la nutation diurne avec des coefficients qui ne sont pas insignifiants; enfin des termes dépendants de la longitude du Soleil et qui, quoique très faibles, ne doivent peut-être pas être négligés dans la détermination de la constante de l'aberration et de la parallaxe des étoiles.

Pour les actions réunies de la Lune et du Soleil, on aura d'abord

$$N_0 = (1.00042 + f.\, 0.99240);$$

puis, pour la Lune seule :

$$N'_1 = f.\, 0.08971 \quad N'_2 = f.\, 0.0040 \quad N'_3 = f.\, 0.98817$$
$$N'_4 = f.\, 0.0816 \quad N'_5 = f.\, 0.0273 \quad N'_6 = f.\, 0.1899$$
$$N'_7 = f.\, 0.0888;$$

enfin, pour le Soleil, en y comprenant les termes qui proviennent des inégalités de la Lune, énumérés ci-dessus :

$$N_1 = 0.9779 \quad N_2 = 0.0252 \quad N_3 = 0.0084 \quad N_4 = 0.0587$$
$$N_5 = 0.0006 \quad N_6 = 0.0020 \quad N_7 = 0.0019.$$

14. Le moment Q (8) dont l'expression complète est :

$$3m_1^2(A - C)\left\{\left(\frac{xz}{R_1^2}\frac{D_1^3}{R_1^3}\right)_{\odot} + f\left(\frac{xz}{R_1^2}\frac{D_1^3}{R_1^3}\right)_{☾}\right\},$$

est maintenant exprimé en fonction de t, puisque, pour tous les arguments $\odot$ etc., on a

$$\odot = \odot_0 + m_1 t, \quad ☾ = ☾_0 + m'_1 t, \quad \Omega = \Omega_0 + \omega_1 t, \quad \Gamma = \Gamma_0 + \gamma_1 t \text{ etc.};$$

toutefois θ entre encore aussi dans son expression, qui renferme s_1, s_2, c_1, c_2, c'est-à-dire $\sin\theta$, $\sin 2\theta$, $\cos\theta$, $\cos 2\theta$.

Nous commencerons par effectuer l'intégration en admettant que ces quantités sont des constantes, de même que la vitesse angulaire n, et nous calculerons ultérieurement les modifications que l'abandon de cette hypothèse introduira dans les formules.

Or si, comme nous venons de voir que c'est le cas, l'expression de

$$p = \frac{Q}{(C - A)n} = h \left\{ \left(\frac{xz}{R_1^2} \frac{D_1^3}{R_1^3} \right)_{\odot} + f \left(\frac{xz}{R_1^2} \frac{D_1^3}{R_1^3} \right)_{☾} \right\},$$

où h représente $-3\frac{m_1^2}{n}$ (9), est de la forme

$$p = \Sigma u \sin(v_1 t \pm \varphi) = \Sigma u \sin(v_2 \pm 1)\varphi,$$

v_2 désignant $\frac{v_1}{n}$, d'où il résulte (art. 3)

$$q = \Sigma \pm u \cos(v_2 \pm 1)\varphi,$$

nous avons démontré (*) que les intégrales des deux premières équations (10) sont :

$$\left.\begin{aligned} l &= \alpha_1 \sin(n_1 t + \beta_1) - \frac{b}{A} \sum \frac{u\left(1 - \frac{a}{B} \pm v_2\right)}{(1 \pm v_2)^2 - \frac{ab}{AB}} \sin(v_1 t \pm \varphi), \\ m &= -\sqrt{\frac{Aa}{Bb}}\, \alpha_1 \cos(n_1 t + \beta_1) \mp \frac{a}{B} \sum \frac{u\left(1 - \frac{b}{A} \pm v_2\right)}{(1 \pm v_2)^2 - \frac{ab}{AB}} \cos(v_1 t \pm \varphi). \end{aligned}\right\} (24)$$

Dans ces expressions, α_1 et β_1 sont les constantes arbitraires; n_1 est égal à $n\sqrt{\frac{ab}{AB}}$; et le signe sommatoire se rapporte à tous les termes de l'expression de

$$p = h \frac{xz}{R_1^2} \left(\frac{D_1}{R_1} \right)^3,$$

donnée par (23) et (23bis) pour l'un et l'autre astre.

(*) *Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde*, art. 32 et 33.

15. Si l'on porte ces valeurs dans les équations connues

$$\frac{d\theta}{dt} = -l\cos\varphi + m\sin\varphi,$$

$$-\sin\theta\frac{d\psi}{dt} = l\sin\varphi + m\cos\varphi,$$

et qu'on pose

$$\sqrt{\frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{B}b}} = 1 + r_1,$$

r_1 étant égal à $\frac{(\mathrm{B}-\mathrm{A})(2\mathrm{B}-\mathrm{C})}{\mathrm{B}(\mathrm{C}-\mathrm{B})}$ (*),

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\mathrm{B}} + \frac{b}{\mathrm{A}}\right) = \mu, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\mathrm{B}} - \frac{b}{\mathrm{A}}\right) = \nu, \quad \frac{ab}{\mathrm{AB}} = \varpi,$$

on trouve d'abord la partie suivante, commune à toutes les intégrales partielles et renfermant les constantes arbitraires :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\alpha_1\left\{\left(1 + \frac{r_1}{2}\right)\sin(n_1t + \beta_1 + \varphi) - \frac{r_1}{2}\sin(n_1t + \beta_1 - \varphi)\right\}$$

$$-\sin\theta\frac{d\psi}{dt} = -\alpha_1\left\{\left(1 + \frac{r_1}{2}\right)\cos(n_1t + \beta_1 + \varphi) + \frac{r_1}{2}\cos(n_1t + \beta_1 - \varphi)\right\}$$

que l'on peut écrire aussi, puisque $\varphi = nt$, et que $\frac{n}{n_1} = \sqrt{\frac{\mathrm{AB}}{ab}}$, que nous ferons égal à j :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\alpha_1\left\{\sin\left[n_1(1+j)t + \beta_1\right] - \frac{r_1}{2+r_1}\sin\left[n_1(1-j)t + \beta_1\right]\right\} \\ -\sin\theta\frac{d\psi}{dt} &= -\alpha_1\left\{\cos\left[n_1(1+j)t + \beta_1\right] + \frac{r_1}{2+r_1}\cos\left[n_1(1-j)t + \beta_1\right]\right\}; \end{aligned}\right\} \quad (25, \mathrm{I})$$

ensuite, selon qu'on envisage le signe supérieur ou le signe infé-

(*) Dans la pratique, on est astreint à poser $r_1 = 0$, vu l'ignorance où l'on se trouve quant à la valeur de $\mathrm{B} - \mathrm{A}$, qui est certainement très petite.

rieur de φ dans chacun des termes $u \sin(v_1 t \pm \varphi)$: *pour le cas du signe* $+$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \mu\Sigma u(1+v_2')\sin v_1 t - \nu\Sigma u(1+v_2'')\sin(v_1 t + 2\varphi) \\ -\sin\theta\frac{d\psi}{dt} &= -\mu\Sigma u(1+v_2')\cos v_1 t - \nu\Sigma u(1+v_2'')\cos(v_1 t + 2\varphi); \end{aligned}\right\}(25,\text{II})$$

pour le cas du signe $-$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \mu\Sigma u(1-v_2')\sin v_1 t - \nu\Sigma u(1-v_2'')\sin(v_1 t - 2\varphi) \\ -\sin\theta\frac{d\psi}{dt} &= \mu\Sigma u(1-v_2')\cos v_1 t + \nu\Sigma u(1-v_2'')\cos(v_1 t - 2\varphi). \end{aligned}\right\}(25,\text{II}')$$

On a fait, pour abréger, *symboliquement :*

$$\frac{1 \pm v_2 - \frac{\varpi}{\mu}}{(1 \pm v_2)^2 - \varpi} = 1 \pm v_2', \qquad \frac{1 \pm v_2}{(1 \pm v_2)^2 - \varpi} = 1 \pm v_2'',$$

les signes supérieurs allant ensemble dans ces symboles, de même que les inférieurs.

En pratique, nous devrons faire $\varpi = \mu^2$, faute de notions suffisantes sur la différence qui existe entre A et B, en sorte que $1 \pm v_2'$ se réduira à $\frac{1}{1 \pm v_2 + \mu}$.

Les termes en μ, indépendants de φ, se rapportent à la précession et à la nutation annuelle; les termes en ν à la nutation diurne. Tous les géomètres ont négligé ces termes, en admettant que $A = B$, d'où $\nu = 0$.

Ils ont, de plus, négligé partout v_2 vis-à-vis de l'unité; en sorte que notre coefficient $\mu\frac{1+v_2-\frac{\varpi}{\mu}}{(1+v_2)^2-\varpi}$ devient pour eux $\frac{\mu-\varpi}{1-\varpi}$, c'est-à-dire $\frac{2C-A-B}{2C}$. Dans les termes importants, cette négligence ne doit pas être commise.

Nous calculerons donc rigoureusement, c'est-à-dire sans négliger v_2 vis-à-vis de l'unité, les termes qui dépendent de la simple longitude du nœud, et dont l'un donne la constante de la nutation; mais dans tous les autres, on pourra, sans erreur appréciable, négliger v_2 vis-à-vis de l'unité, ce qui ramènera les expressions précédentes à la forme plus simple :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} \Sigma u \sin v_1 t - \frac{\nu}{1 - \varpi} \Sigma u \sin (v_1 t \pm 2\varphi)$$

$$-\sin\theta \frac{d\psi}{dt} = \mp \frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} \Sigma u \cos v_1 t \mp \frac{\nu}{1 - \varpi} \Sigma u \cos (v_1 t \pm 2\varphi),$$

que nous écrirons

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \mu_1 \Sigma u \sin v_1 t - \nu_1 \Sigma \sin (v_1 t \pm 2\varphi) \\ -\sin\theta \frac{d\psi}{dt} &= \mp \mu_1 \Sigma u \cos v_1 t \mp \nu_1 \Sigma \cos (v_1 t \pm 2\varphi), \end{aligned}\right\} \quad (25, \text{II}'')$$

μ_1 représentant $\frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi}$ et ν_1, $\frac{\nu}{1 - \varpi}$. Dans ces formules les signes supérieurs, répondant au cas de $\sin (v_1 t + \varphi)$, vont ensemble, de même que les inférieurs, qui correspondent à $\sin (v_1 t - \varphi)$ dans l'expression de p.

Il est utile de remarquer que, pour les termes qui présentent des sommes de la forme :

$$u \left[\sin (v_1 t - \varphi) - \sin (v_1 t + \varphi)\right],$$

la nutation annuelle en obliquité aura en facteur

$$\mu u \left[\frac{1}{1 - v_2 + \mu} - \frac{1}{1 + v_2 + \mu}\right] = \frac{2 v_2 \mu u}{(1 + \mu)^2 - v_2^2},$$

quantité tellement insignifiante que nous pourrons la négliger dans tous les cas, un seul excepté.

Pour ces mêmes termes il n'en est pas ainsi de la nutation en longitude, dans l'expression de laquelle les deux fractions précédentes s'ajoutent. De là l'existence, dans cette dernière, de termes qui manquent, ou plutôt, qui sont insensibles dans la première.

On voit immédiatement aussi que, si $v_1 = 0$, le terme correspondant ne donne pas de nutation; mais il produit la précession des équinoxes.

16. Procédons à l'intégration en considérant provisoirement, comme il a été dit, s_1, c_1, etc., comme des constantes; nous trouverons d'abord, par l'application des formules (25, I, II, II' ou II''), suivant le cas, pour *la précession et la nutation annuelle* d'abord, en obliquité :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= -\alpha_1 \sin\left[n_1(1+j)t+\beta_1\right] \\
&\quad - 2h\mu N'_1 \frac{c_1(1+\mu)+c_2\omega_2}{(1+\mu)^2-\omega_2^2}\sin \Omega \\
&\quad + 2h\mu_1 \left[\begin{aligned}
&N'_2 s_1 \sin 2\Omega + N'_3 s'_1 \sin 2☾ \\
&- N'_5 s_1 \sin(☾+\Gamma') \\
&+ N'_6 s_1 \sin(3☾-\Gamma') \\
&+ N'_7 c_1 \sin(2☾-\Omega) \\
&+ N_1 s_1 \sin 2\odot - N_3 s_1 \sin(\odot+\Gamma) \\
&+ N_4 s_1 \sin(3\odot-\Gamma) \\
&- N_6 c_1 \sin(2\odot-\Omega)
\end{aligned}\right] \\
&\quad - \frac{2h\mu(m_2-\gamma_2)}{(1+\mu)^2-(m_2-\gamma_2)^2} N_2 s_2 \sin(\odot-\Gamma);
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

en longitude :

$$\left.\begin{aligned}
-\sin\theta \frac{d\psi}{dt} &= -h\mu s_2 N_0 - \alpha_1 \cos\left[n_1(1+j)t+\beta_1\right] \\
&\quad + 2h\mu N'_1 \frac{c_2(1+\mu)+c_1\omega_2}{(1+\mu)^2-\omega_2^2}\cos \Omega \\
&\quad - 2h\mu_1 \left[\begin{aligned}
&N'_2 s_1 c_1 \cos 2\Omega + N'_3 s_1 c_1 \cos 2☾ \\
&- N'_4 s_2 \cos(☾-\Gamma') \\
&- N'_5 s_1 c_1 \cos(☾+\Gamma') \\
&+ N'_6 s_1 c_1 \cos(3☾-\Gamma') \\
&+ N'_7 c_2 \cos(2☾-\Omega) \\
&+ N_1 s_1 c_1 \cos 2\odot - N_2 s_2 \cos(\odot-\Gamma) \\
&- N_3 s_1 c_1 \cos(\odot+\Gamma) \\
&+ N_4 s_1 c_1 \cos(3\odot-\Gamma) \\
&- N_5 s_2 \cos(2\odot-2\Gamma) \\
&- N_6 c_2 \cos(2\odot-\Omega) \\
&+ N_7 s_2 \cos(2\odot-2\Gamma').
\end{aligned}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

17. On trouvera de même, *pour la nutation diurne,* si l'on néglige ici vis-à-vis de l'unité les très petites quantités représentées par v_2'' (art. 15), en obliquité :

$$\frac{d\theta}{dt} = -h\nu \left[\begin{array}{l} N_0 s_2 \sin 2\varphi - N_1' \{(c_1+c_2)\sin(\Omega - 2\varphi) + (c_1 - c_2)\sin(\Omega + 2\varphi)\} \\ + N_2' s_1 \{(1+c_1)\sin(2\Omega - 2\varphi) + (1-c_1)\sin(2\Omega + 2\varphi)\} \\ + N_3' s_1 \{(1+c_1)\sin(2☾ - 2\varphi) + (1-c_1)\sin(2☾ + 2\varphi)\} \\ - N_4' s_2 \{\sin(☾ - \Gamma' - 2\varphi) - \sin(☾ - \Gamma' + 2\varphi)\} \\ - N_5' s_1 \{(1+c_1)\sin(☾ + \Gamma' - 2\varphi) + (1-c_1)\sin(☾ + \Gamma' + 2\varphi)\} \\ + N_6' s_1 \{(1+c_1)\sin(3☾ - \Gamma' - 2\varphi) + (1-c_1)\sin(3☾ - \Gamma' + 2\varphi)\} \\ + N_7' \{(c_1+c_2)\sin(2☾ - \Omega - 2\varphi) + (c_1-c_2)\sin(2☾ - \Omega + 2\varphi)\} \\ + N_1 s_1 \{(1+c_1)\sin(2\odot - 2\varphi) + (1-c_1)\sin(2\odot + 2\varphi)\} \\ - N_2 s_2 \{\sin(\odot - \Gamma - 2\varphi) - \sin(\odot - \Gamma + 2\varphi)\} \\ - N_3 s_1 \{(1+c_1)\sin(\odot + \Gamma - 2\varphi) + (1-c_1)\sin(\odot + \Gamma + 2\varphi)\} \\ + N_4 s_1 \{(1+c_1)\sin(3\odot - \Gamma - 2\varphi) + (1-c_1)\sin(3\odot - \Gamma + 2\varphi)\}; \end{array}\right] \quad (28)$$

en longitude :

$$-\sin\theta \frac{d\psi}{dt} = -h\nu \left[\begin{array}{l} N_0 s_2 \cos 2\varphi - N_1' \{-(c_1+c_2)\cos(\Omega - 2\varphi) + (c_1 - c_2)\cos(\Omega + 2\varphi)\} \\ + N_2' s_1 \{-(1+c_1)\cos(2\Omega - 2\varphi) + (1-c_1)\cos(2\Omega + 2\varphi)\} \\ + N_3' s_1 \{-(1+c_1)\cos(2☾ - 2\varphi) + (1-c_1)\cos(2☾ + 2\varphi)\} \\ - N_4' s_2 \{-\cos(☾ - \Gamma' - 2\varphi) - \cos(☾ - \Gamma' + 2\varphi)\} \\ - N_5' s_1 \{-(1+c_1)\cos(☾ + \Gamma' - 2\varphi) + (1-c_1)\cos(☾ + \Gamma' + 2\varphi)\} \\ + N_6' s_1 \{-(1+c_1)\cos(3☾ - \Gamma' - 2\varphi) + (1-c_1)\cos(3☾ - \Gamma' + 2\varphi)\} \\ + N_7' \{-(c_1+c_2)\cos(2☾ - \Omega - 2\varphi) + (c_1-c_2)\cos(2☾ - \Omega + 2\varphi)\} \\ + N_1 s_1 \{-(1+c_1)\cos(2\odot - 2\varphi) + (1-c_1)\cos(2\odot + 2\varphi)\} \\ - N_2 s_2 \{-\cos(\odot - \Gamma - 2\varphi) - \cos(\odot - \Gamma + 2\varphi)\} \\ - N_3 s_1 \{-(1+c_1)\cos(\odot + \Gamma - 2\varphi) + (1-c_1)\cos(\odot + \Gamma + 2\varphi)\} \\ + N_4 s_1 \{-(1+c_1)\cos(3\odot - \Gamma - 2\varphi) + (1-c_1)\cos(3\odot - \Gamma + 2\varphi)\}. \end{array}\right] \quad (29)$$

18. On voit, par les expressions (26) et (28) qui précèdent, que θ ne renferme aucun terme proportionnel au temps, et que les termes périodiques qu'il contient sont très petits ; car $h\mu$ qui est facteur de la plupart d'entre eux est égal à 0.00005 environ, $h\nu$ est beaucoup plus faible, et tous les coefficients N et N' sont plus petits que l'unité. Après l'intégration, le terme le plus considérable ne dépassera guère, comme on sait, 9″. Quant à la constante arbitraire α_1, que l'observation seule peut déterminer, puisqu'elle dépend des conditions initiales du mouvement, il n'est pas douteux, comme le témoigne l'accord entre les obliquités observées et les obliquités calculées abstraction faite de cette constante, qu'elle ne soit également très faible.

C'est donc avec raison qu'on peut considérer provisoirement θ, et, par suite, s_1, c_1, c'_1, s_2, c_2, c'_2, qui sont les sinus, cosinus et cotangentes de θ et de 2θ, comme des constantes.

Ceci admis, l'intégration donnera, *pour la nutation annuelle* en obliquité :

$$\left.\begin{aligned}
\theta - \theta_0 = \Delta_1\theta = {} & \frac{\alpha_1}{n_1(1+j)}\cos\left[n_1(1+j)t + \beta_1\right] \\
& + 2\frac{h\mu}{\omega_1}N'_1\frac{c_1(1+\mu)+c_2\omega_2}{(1+\mu)^2-\omega_2^2}\cos \Omega \\
& - 2h\mu_1 s_1\left[\frac{N'_2}{2\omega_1}\cos 2\Omega + \frac{N'_3}{2m'_1}\cos 2☾ - \frac{N'_5}{m'_1+\gamma'_1}\cos(☾+\Gamma')\right. \\
& + \frac{N'_6}{3m'_1-\gamma'_1}\cos(3☾-\Gamma') + \frac{N'_7}{2m'_1-\omega_1}c'_1\cos(2☾-\Omega) \\
& + \frac{N_1}{2m_1}\cos 2\odot - \frac{N_3}{m_1+\gamma_1}\cos(\odot+\Gamma) \\
& \left. + \frac{N_4}{3m_1-\gamma_1}\cos(3\odot-\Gamma) - \frac{N_6}{2m_1-\omega_1}c'_1\cos(2\odot-\Omega)\right] \\
& + \frac{2h\mu}{(1+\mu)^2-(m_2-\gamma_2)^2}\,\frac{N_2 s_2}{n}\cos(\odot-\Gamma);
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

pour la précession et la nutation annuelle en longitude :

$$\left.\begin{aligned}
-s_1\Delta_1\psi = {} & -h\mu_1 s_2 N_0 t - \frac{\alpha_1}{n_1(1+j)}\sin\left[n_1(1+j)t+\beta_1\right] \\
& - 2\frac{h\mu}{\omega_1}N'_1\frac{c_2(1+\mu)+c_1\omega_2}{(1+\mu)^2-\omega_2^2}\sin\Omega \\
& + h\mu_1 s_2\left[\frac{N'_2}{2\omega_1}\sin 2\Omega + \frac{N'_3}{2m'_1}\sin 2☾ - \frac{2N'_4}{m'_1-\gamma'_1}\sin(☾-\Gamma')\right. \\
& - \frac{N'_5}{m'_1+\gamma'_1}\sin(☾+\Gamma') + \frac{N'_6}{3m'_1-\gamma'_1}\sin(3☾-\Gamma')
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+\frac{2N_7'}{2m_1'-\omega_1}c_2'\sin(2☾-☊)+\frac{N_1}{2m_1}\sin 2☉\\
&-\frac{2N_2}{m_1-\gamma_1}\sin(☉-\Gamma)-\frac{N_3}{m_1+\gamma_1}\sin(☉+\Gamma)\\
&+\frac{N_4}{3m_1-\gamma_1}\sin(3☉-\Gamma)-\frac{N_2}{m_1-\gamma_1}\sin(2☉-2\Gamma)\\
&-\frac{2N_6}{2m_1-\omega_1}c_2'\sin(2☉-☊)+\frac{N_7}{m_1-\gamma_1'}\sin(2☉-2\Gamma')\Bigg];
\end{aligned}\right\}\begin{array}{c}(31)\\ \textit{(Suite.)}\end{array}
$$

pour la nutation diurne en obliquité :

$$
\Delta_2\theta=-\frac{h\nu}{n}\left[\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}N_0s_2\cos 2\varphi+N_1'\left\{\frac{(c_1-c_2)}{2+\omega_2}\cos(☊+2\varphi)-\frac{(c_1+c_2)}{2-\omega_2}\cos(☊-2\varphi)\right\}\\
&-N_2's_1\left\{\frac{(1-c_1)}{2(1+\omega_2)}\cos(2☊+2\varphi)-\frac{(1+c_1)}{2(1-\omega_2)}\cos(2☊-2\varphi)\right\}\\
&-N_3's_1\left\{\frac{(1-c_1)}{2(1+m_2')}\cos(2☾+2\varphi)-\frac{(1+c_1)}{2(1-m_2')}\cos(2☾-2\varphi)\right\}\\
&-N_4's_2\left\{\frac{\cos(☾-\Gamma'+2\varphi)}{2+m_2'-\gamma_2'}+\frac{\cos(☾-\Gamma'-2\varphi)}{2-m_2'+\gamma_2'}\right\}\\
&+N_5's_1\left\{\frac{(1-c_1)}{2+m_2'+\gamma_2'}\cos(☾+\Gamma'+2\varphi)-\frac{(1+c_1)}{2-m_2'-\gamma_2'}\cos(☾+\Gamma'-2\varphi)\right\}\\
&-N_6's_1\left\{\frac{(1-c_1)}{2+3m_2'-\gamma_2'}\cos(3☾-\Gamma'+2\varphi)-\frac{(1+c_1)}{2-3m_2'+\gamma_2'}\cos(3☾-\Gamma'-2\varphi)\right\}\\
&-N_7'\left\{\frac{(c_1-c_2)}{2+2m_2'-\omega_2}\cos(2☾-☊+2\varphi)-\frac{(c_1+c_2)}{2-2m_2'+\omega_2}\cos(2☾-☊-2\varphi)\right\}\\
&-N_1s_1\left\{\frac{(1-c_1)}{2(1+m_2)}\cos(2☉+2\varphi)-\frac{(1+c_1)}{2(1-m_2)}\cos(2☉-2\varphi)\right\}\\
&-N_2s_2\left\{\frac{\cos(☉-\Gamma+2\varphi)}{2+m_2-\gamma_2}+\frac{\cos(☉-\Gamma-2\varphi)}{2-m_2+\gamma_2}\right\}\\
&+N_3s_1\left\{\frac{(1-c_1)}{2+m_2+\gamma_2}\cos(☉+\Gamma+2\varphi)-\frac{(1+c_1)}{2-m_2-\gamma_2}\cos(☉+\Gamma-2\varphi)\right\}\\
&-N_4s_1\left\{\frac{(1-c_1)}{2+3m_2-\gamma_2}\cos(3☉-\Gamma+2\varphi)-\frac{(1+c_1)}{2-3m_2+\gamma_2}\cos(3☉-\Gamma-2\varphi)\right\};
\end{aligned}\right]\quad(32)
$$

enfin *pour la nutation diurne* en longitude :

$$
-s_1\Delta_2\psi = -\frac{h\nu}{n}\left[
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{N}_0 s_2 \sin 2\varphi - \mathrm{N}'_1\left\{\frac{c_1-c_2}{2+\omega_2}\sin(\Omega+2\varphi)+\frac{c_1+c_2}{2-\omega_2}\sin(\Omega-2\varphi)\right\}\\
&+\mathrm{N}'_2 s_1\left\{\frac{1-c_1}{2(1+\omega_2)}\sin(2\Omega+2\varphi)+\frac{1+c_1}{2(1-\omega_2)}\sin(2\Omega-2\varphi)\right\}\\
&+\mathrm{N}'_3 s_1\left\{\frac{1-c_1}{2(1+m'_2)}\sin(2☾+2\varphi)+\frac{1+c_1}{2(1-m'_2)}\sin(2☾-2\varphi)\right\}\\
&+\mathrm{N}'_4 s_2\left\{\frac{\sin(☾-\Gamma'+2\varphi)}{2+m'_2-\gamma'_2}-\frac{\sin(☾-\Gamma'-2\varphi)}{2-m'_2+\gamma'_2}\right\}\\
&-\mathrm{N}'_5 s_1\left\{\frac{1-c_1}{2+m'_2+\gamma'_2}\sin(☾+\Gamma'+2\varphi)+\frac{1+c_1}{2-m'_2-\gamma'_2}\sin(☾+\Gamma'-2\varphi)\right\}\\
&+\mathrm{N}'_6 s_1\left\{\frac{1-c_1}{2+3m'_2-\gamma'_2}\sin(3☾-\Gamma'+2\varphi)+\frac{1+c_1}{2-3m'_2+\gamma'_2}\sin(3☾-\Gamma'-2\varphi)\right\}\\
&+\mathrm{N}'_7\left\{\frac{c_1-c_2}{2+2m'_2-\omega_2}\sin(2☾-\Omega+2\varphi)+\frac{c_1+c_2}{2-2m'_2+\omega_2}\sin(2☾-\Omega-2\varphi)\right\}\\
&+\mathrm{N}_1 s_1\left\{\frac{1-c_1}{2(1+m_2)}\sin(2\odot+2\varphi)+\frac{1+c_1}{2(1-m_2)}\sin(2\odot-2\varphi)\right\}\\
&+\mathrm{N}_2 s_2\left\{\frac{\sin(\odot-\Gamma+2\varphi)}{2+m_2-\gamma_2}-\frac{\sin(\odot-\Gamma-2\varphi)}{2-m_2+\gamma_2}\right\}\\
&-\mathrm{N}_3 s_1\left\{\frac{1-c_1}{2+m_2+\gamma_2}\sin(\odot+\Gamma+2\varphi)+\frac{1+c_1}{2-m_2-\gamma_2}\sin(\odot+\Gamma-2\varphi)\right\}\\
&+\mathrm{N}_4 s_1\left\{\frac{1-c_1}{2+3m_2-\gamma_2}\sin(3\odot-\Gamma+2\varphi)+\frac{1+c_1}{2-3m_2-\gamma_2}\sin(3\odot-\Gamma-2\varphi)\right\}.
\end{aligned}
\right] \quad (33)
$$

§ 3. *Termes complémentaires des formules usuelles de la précession et de la nutation.*

19. Dans l'examen des corrections qu'introduira, dans les formules de la précession et de la nutation annuelle, la variation de l'obliquité, qui ne peut pas être considérée comme constante dans les facteurs s_1, c_1, etc., où elle entre, nous pourrons nous borner à l'expression suivante de cette variation (*): $\Delta\theta = a_1 \cos \Omega$, que nous ferons égale à η, en sorte que θ devra se remplacer par $\theta_0 + \eta$, et qu'en négligeant les quantités du second ordre, s_1, c_1, s_2, c_2 deviendront respectivement $s_1 + c_1\eta$, $c_1 - s_1\eta$, $s_2 + 2c_2\eta$, $c_2 - 2s_2\eta$, expressions dans lesquelles s_1, c_1, etc., sont *actuellement* des constantes.

Recherchons ce que va donner le premier terme de l'expression $\frac{d\theta}{dt}$, qui, à n'en considérer que la partie prépondérante, est de la forme

$$\frac{d\theta}{dt} = k_1 \cos \theta \sin \Omega.$$

Remplaçons-y θ par $\theta_0 + \eta$, et continuons à désigner par s_1, c_1, s_2, c_2, s', c' les sin. et cos. de θ_0, $2\theta_0$ et $\frac{1}{2}\theta_0$.

Soit $\delta\theta$ la variation qui résulte pour θ de l'introduction de η :

$$\frac{d\delta\theta}{dt} = -k_1 s_1 \sin \Omega\eta = -\frac{k_1 a_1}{N} s_1 \sin \Omega \cos \Omega,$$

$\frac{1}{N}$ représentant sin 1″. Intégrant :

$$\delta\theta = \frac{1}{4}\frac{k_1 a_1}{N\omega_1} s_1 \cos 2\Omega = -0.000045'' \cos 2\Omega. \qquad (34)$$

Tel est le terme du second ordre de la nutation en obliquité, qui est négligé dans les formules usuelles, mais qui n'atteint du reste qu'un demi dix-millième de seconde à peine.

En longitude on a, en se bornant à la précession et à la partie prépondérante du premier terme de la nutation :

$$\sin \theta \frac{d\psi}{dt} = -a_0 \sin 2\theta + k_1 \cos 2\theta \cos \Omega;$$

(*) Il n'entre pas dans nos intentions de rechercher ici, par une méthode d'intégration absolument rigoureuse, quelles modifications la variabilité de θ produirait dans les expressions de $\Delta\theta$ et de $\Delta\psi$, si on l'introduisait dès le début, comme il conviendrait de le faire, dans les équations différentielles du mouvement de rotation. Cette recherche s'impose cependant aujourd'hui aux géomètres. M. C. Lagrange, l'un des astronomes de l'Observatoire de Bruxelles, a bien voulu s'en charger.

d'où, comme ci-dessus, en remplaçant θ par $\theta_0 + \eta$:

$$\frac{d\delta\psi}{dt} = 2a_0 s_1 \eta + k_1 \left(\frac{c_2 - 2s_2\eta}{s_1 + c_1\eta} - \frac{c_2}{s_1}\right) \cos \Omega$$

$$= \left[2a_0 s_1 - \frac{k_1}{s_1^2} c_1(2 - c_2) \cos \Omega\right] \frac{a_1}{N} \cos \Omega$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{c_1(2-c_2)}{s_1^2} \frac{k_1 a_1}{N} [1 + \cos 2\Omega] - \frac{2a_0 a_1}{N} s_1 \cos \Omega;$$

et

$$\left.\begin{aligned} \delta\psi &= -\frac{1}{2} \frac{c_1(2 - c_2)}{s_1^2} \frac{k_1 a_1}{N} t + \frac{2a_0 a_1}{N\omega_1} s_1 \sin \Omega \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{c_1(2 - c_2)}{s_1^2} \frac{k_1 a_1}{N\omega_1} \sin 2\Omega \\ &= 0.00057'' t - 0.0265'' \sin \Omega - 0.0103'' \sin 2\Omega, \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

variation dont les formules usuelles ne tiennent pas non plus compte, quoique aucun des termes n'en soit insignifiant; le premier terme et le dernier proviennent de la nutation en obliquité; le second provient du terme de la précession.

Or le premier terme, proportionnel au temps, viendra s'ajouter à l'expression de la constante de la précession luni-solaire.

La nutation en obliquité introduit donc, dans celle-ci, un terme nouveau, tandis que le terme proprement dit de la précession introduit aussi un terme nouveau dans la nutation en longitude.

A la rigueur, le terme proportionnel au temps est en réalité périodique. Sa forme actuelle provient de ce que nous avons posé $\sin \eta = \eta$. Mais sa période serait tellement longue, qu'en pratique il doit s'ajouter à l'expression de la précession luni-solaire.

20. Il nous reste maintenant encore à tenir compte des termes du potentiel que nous avons négligés (6).

En nous bornant à ceux du troisième ordre, nous aurons :

$$\delta V = -\frac{3}{2} \frac{M_1}{R_1^5} \Sigma(xx_1 + \cdots) r^2 dm + \frac{5}{2} \frac{M_1}{R_1^7} \Sigma(xx_1 + \cdots)^3 dm;$$

d'où l'on tire pour l'expression de

$$\delta Q = x_1 \frac{d\delta V}{dr_1} - z_1 \frac{d\delta V}{dx_1},$$

en remarquant que R_1 peut être regardé comme constant dans les différentiations, puisque $x_1 \frac{dR_1}{dz_1} - z_1 \frac{dR_1}{dx_1} = 0$:

$$\delta Q = -\frac{3}{2}\frac{M_1}{R_1^5}\left\{\begin{array}{l} x_1[\Sigma z^3 dm + \Sigma x^2 z dm + \Sigma y^2 z dm] \\ - z_1[\Sigma x^3 dm + \Sigma y^2 x dm + \Sigma z^2 x dm] \end{array}\right\}$$

$$+\frac{5}{2}\frac{M_1}{R_1^7}\left\{\begin{array}{l} 3x_1\left[\begin{array}{l} z_1^2\Sigma z^3 dm - z_1 x_1 \Sigma x^3 dm + x_1^2 \Sigma x^2 z dm \\ + 2x_1 z_1 \Sigma x z^2 dm + 2y_1 z_1 \Sigma y z^2 dm + y_1^2 \Sigma y^2 z dm \end{array}\right] \\ - 3z_1[2x_1 y_1 \Sigma y x^2 dm + y_1^2 \Sigma x y^2 dm + 2x_1 z_1 \Sigma z x^2 dm + z_1^2 \Sigma x z^2 dm] \\ + 6y_1(x_1^2 - z_1^2)\Sigma x y^2 dm. \end{array}\right\}$$

Or, pour un solide de révolution, on aurait :

$$\Sigma x^3 dm = \Sigma x z^2 dm = \Sigma y z^2 dm = \Sigma x^2 y dm = \Sigma y^2 x dm = 0.$$

La Terre ou son écorce différant fort peu d'un tel solide, nous admettrons que les intégrales précédentes sont nulles, de même que $\Sigma\, xyz\, dm$, et nous poserons aussi

$$\Sigma x^2 z dm = \Sigma y^2 z dm = \sum \frac{x^2 + y^2}{2} z dm.$$

Alors :

$$\delta Q = -\frac{3}{2}\frac{M_1}{R_1^5} x_1 \Sigma z(x^2 + y^2 + r^2)\, dm$$
$$+ \frac{15}{2}\frac{M_1}{R_1^7} x_1 \left\{ z_1^2 \Sigma z^3 dm + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2}\Sigma z(x^2 + y^2) dm - 2z_1^2 \Sigma z x^2 dm \right\},$$

ou, si l'on élimine y_1^2 :

$$\delta Q = -\frac{3}{2}\frac{M_1}{R_1^5} x_1 \Sigma z(x^2 + y^2 + z^2) dm + \frac{15}{4}\frac{M_1}{R_1^5} x_1 \Sigma z(x^2 + y^2) dm$$
$$+ \frac{15}{2}\frac{M_1}{R_1^7} x_1 z_1^2 \left\{ \Sigma z^3 dm - \frac{1}{2}\Sigma z(x^2 + y^2) dm - \Sigma z(x^2 + y^2) dm \right\}$$
$$= \frac{3}{4}\frac{M_1 C_1 r_0}{R_1^4}\left(\frac{x_1}{R_1} - 5\frac{x_1 z_1^2}{R_1^3}\right),$$

expression dans laquelle r_0 représente le rayon équatorial moyen de la Terre, et $C_1 r_0$ l'intégrale $\Sigma(3x^2+3y^2-2z^2)\,z\,dm$.

Si, dans cette expression, on remplace $\frac{1}{R_1}$ par $\frac{1}{D_1}\cdot\frac{D_1}{R_1}$; $\frac{M_1}{D_1^3}$ par fm_1^2, f étant égal à l'unité pour le Soleil, et $\frac{r_0}{D_1}$ par ϖ_0, parallaxe horizontale équatoriale de l'astre, elle devient, en supprimant les indices 1 des coordonnées du centre attirant :

$$\delta Q = \frac{3}{4} f m_1^2 \varpi_0 C_1 \left(\frac{x}{R_1} - 5\frac{xz^2}{R_1^3}\right)\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^4;$$

d'où nous déduirons (9)

$$\delta p = \frac{\delta Q}{na} = -\frac{3}{4} f \frac{m_1^2}{n} \varpi_0 \frac{C_1}{C-A}\left(\frac{x}{R_1} - 5\frac{xz^2}{R_1^3}\right)\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^4.$$

Admettons que C_1 soit du même ordre de grandeur que les moments d'inertie; δQ sera, vis-à-vis de Q (8), du même ordre que ϖ_0 vis-à-vis de 1.

Nous n'aurons donc à envisager, dans son développement, que les seuls termes susceptibles de s'accroître considérablement par l'intégration, c'est-à-dire ceux qui dépendent exclusivement des périgées et du nœud. Or le développement de $\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^4$ donne (art. 8), si l'on s'arrête à la première puissance de l'excentricité, $1+7e^2+4e_1\cos(\lambda-\Gamma)$, où e_1 représente $e\left(1+\frac{19}{4}e^2\right)$.

Pour que les expressions multipliées par ce facteur ne donnent que des termes indépendants de λ, nous ne devrons y considérer que les seuls termes en λ. Cela étant, on a :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{R_1} - 5\frac{xz^2}{R_1^3} = \frac{1}{2}&\left\{1 + c_1 - \frac{5}{4}s_1^2(1+3c_1)\right\}\cos(\lambda-\varphi)\\
+\frac{1}{2}&\left\{1 - c_1 - \frac{5}{4}s_1^2(1-3c_1)\right\}\cos(\lambda+\varphi)\\
-\frac{1}{4}&is_1(2-5s_1^2+10c_1^2)\left[\cos(\lambda-\Omega-\varphi)-\cos(\lambda-\Omega+\varphi)\right]\\
+\frac{5}{8}&is_1\left[\begin{array}{l}(s_1^2-2c_1-2c_1^2)\cos(\lambda+\Omega-\varphi)\\ -(s_1^2+2c_1-2c_1^2)\cos(\lambda+\Omega+\varphi)\end{array}\right]
\end{aligned}\right\}\quad(36)$$

Il va de soi que, si l'on multiplie ces termes par $2e_1$, et qu'on y remplace λ par Γ, on aura les termes indépendants de λ dans le développement du produit de $\frac{x}{R_1} - 5\frac{xz^2}{R_1^3}$ par $\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^4$; et que, par conséquent, δp sera égal au développement précédent, λ y étant changé en Γ, multiplié par

$$-\frac{3}{2}fe_1\varpi_0\frac{m_1^2}{n}\frac{C_1}{C-A},$$

que nous ferons égal à $-fe_1\varpi_0 E$, E représentant $\frac{3}{2}\frac{m_1^2}{n}\frac{C_1}{C-A}$.

Soient a_1 ... les valeurs numériques des coefficients de l'expression (36), on aura :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{fe_1\varpi_0 E}\delta p &= a_1\cos(\Gamma-\varphi) + a_1'\cos(\Gamma+\varphi)\\ &\quad - b_1\left[\cos(\Gamma-\Omega-\varphi)-\cos(\Gamma-\Omega+\varphi)\right]\\ &\quad - g_1\cos(\Gamma+\Omega-\varphi) - g_1'\cos(\Gamma+\Omega+\varphi).\end{aligned}$$

L'application de nos formules d'intégration à cette expression(*) donnera, en négligeant ici la très petite quantité v_2 vis-à-vis de l'unité, et en ajoutant entre eux les termes qui proviennent des actions du Soleil et de la Lune, si l'on écrit pour abréger $E\frac{\mu}{1+\mu} = F$, qui est à très peu près égal à $\frac{3}{2}\frac{m_1^2}{n}\frac{C_1}{C}$:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{F}\delta\theta &= (a_1+a_1')\left[\frac{e_1\varpi_0}{\gamma_1}\sin\Gamma + f\frac{e_1'\varpi_0'}{\gamma_1'}\sin\Gamma'\right]\\ &\quad -(g_1+g_1')f\frac{e_1'\varpi_0'}{\gamma_1'+\omega_1}\sin(\Gamma'+\Omega):\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}-\frac{1}{F}s_1\delta\psi &= (-a_1+a_1')\left[\frac{e_1\varpi_0}{\gamma_1}\cos\Gamma + f\frac{e_1'\varpi_0'}{\gamma_1'}\cos\Gamma'\right]\\ &\quad +2b_1f\frac{e_1'\varpi_0'}{\gamma_1'-\varpi_1}\cos(\Gamma'-\Omega)\\ &\quad +(g_1-g_1')f\frac{e_1'\varpi_0'}{\gamma_1'+\omega_1}\cos(\Gamma'+\Omega),\end{aligned}$$

(*) Ces formules sont, pour $\delta p = \Sigma\, u_1\cos(v_1 t \pm \varphi)$:

$$\delta\theta = \sum\frac{u_1}{v_1}\frac{\mu}{1+\mu\pm v_2}\cos v_1 t,$$

$$s_1\delta\psi = \pm\sum\frac{u_1}{v_1}\frac{\mu}{1+\mu\pm v_2}\cos v_1 t.$$

et, en nombres, si nous désignons par ζ le facteur $\frac{C_1}{C}$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\zeta}\,\delta\theta &= -[0.6537]\sin\Gamma - [1.04261]\sin\Gamma' + [0.33267]\sin(\Gamma' + \Omega)\\ \frac{s_1}{\zeta}\,\delta\psi &= +[0.3023]\cos\Gamma + [0.70923]\cos\Gamma' - [0.25208]\cos(\Gamma' + \Omega)\\ &\qquad + [0.20527]\cos(\Gamma' - \Omega);\end{aligned}\right\}\;(57)$$

les parenthèses carrées représentent les nombres dont elles renferment les logarithmes.

21. Bessel a tenté de déterminer le coefficient ζ, Peters et Nyrén, en faisant usage des formules de Poisson, l'ont tenté également, au moyen d'observations faites sur le pendule à différentes latitudes. Ce procédé est incorrect. A la vérité, C_1 dépend des irrégularités du sphéroïde terrestre dans le sens de l'axe polaire, et si l'attraction de celui-ci sur le pendule ne dépendait également que de ces mêmes irrégularités, le problème pourrait être résolu de cette façon. Mais il n'en est pas ainsi. Le potentiel du sphéroïde sur un point extérieur, que nous avons représenté par $V + \delta V$ lorsque ce point extérieur est très éloigné, doit se représenter par $V + \delta V + \delta_2 V$ lorsque ce point est rapproché de la surface, ce qui est le cas du pendule. Or les termes qui composent $\delta_2 V$, insignifiants vis-à-vis de δV pour le Soleil et la Lune, deviennent prépondérants pour le pendule. Les observations de celui-ci ne peuvent donner que la somme $\delta V + \delta_2 V$, dont il est impossible de déduire l'une des parties δV, et la moins considérable pour ce cas. C'est donc aux observations astronomiques qu'il faudra recourir pour fixer, si possible, la valeur du coefficient ζ, que nous sommes obligé de laisser absolument indéterminé.

Si cette valeur n'est pas insensible, il en résultera, à cause de la lenteur excessive du mouvement du périgée solaire, une variation séculaire en obliquité et en longitude proportionnelle à la simple puissance du temps.

Écrivons, en ne considérant ici que les seuls termes dépendants du périgée du Soleil,

$$\delta\theta = -\,\varkappa\sin\Gamma, \qquad \delta\psi = \varkappa'\cos\Gamma.$$

La variation qui se produit entre les deux époques auxquelles correspondent Γ_0 et Γ, sera, si l'on s'arrête à la deuxième puissance du temps, ce qui suffit amplement :

$$\left.\begin{array}{l|l}
\delta\theta = -\varkappa(\sin\Gamma - \sin\Gamma_0) & \delta\psi = \varkappa'(\cos\Gamma - \cos\Gamma_0) \\
\quad = -\varkappa\cos\dfrac{\Gamma+\Gamma_0}{2}\gamma_1 t & \quad = -\varkappa'\sin\dfrac{\Gamma+\Gamma_0}{2}\gamma_1 t \\
\quad = -\varkappa\left(\cos\Gamma_0.\gamma_1 t - \dfrac{1}{2}\sin\Gamma_0\,\gamma_1^2 t^2\right) & \quad = -\varkappa'\left(\sin\Gamma_0.\gamma_1 t + \dfrac{1}{2}\cos\Gamma_0\gamma_1^2 t^2\right)
\end{array}\right\} \quad (38)$$

Dans ces expressions, les termes du second ordre sont bien certainement insensibles. La variation $\delta\theta$ est donc une variation séculaire de l'obliquité proportionnelle au temps; quant à $\delta\psi$, le facteur de t que renferme son expression, $-\varkappa'\gamma_1 \sin\Gamma_0$ ou

$$-[0.3023]\gamma_1\frac{\zeta}{s_1}\sin\Gamma_0 = [0.69515]\zeta,$$

pour 1850, serait une partie nouvelle à ajouter à l'expression de la constante de la précession luni-solaire.

Il en résulte que, si la valeur de cette constante a fait l'objet de deux déterminations successives, reposant sur des observations à l'époque moyenne desquelles correspondent Γ_0 pour la première détermination, Γ_1 pour la deuxième, ces deux valeurs doivent différer entre elles de

$$-\varkappa'\gamma_1(\sin\Gamma_1 - \sin\Gamma_0) = -\varkappa'\gamma_1^2\cos\Gamma_m\,.\,t,$$

t désignant le nombre d'années comprises entre les époques auxquelles correspondent Γ_0 et Γ_1, et Γ_m la moyenne entre ces dernières longitudes.

§ 4. *Des variations séculaires en obliquité et en longitude.*

22. L'excentricité de l'orbite terrestre, que nous avons considérée comme constante, est variable; le plan de l'écliptique, que nous avons supposé fixe, est soumis à un déplacement séculaire très faible.

Ces deux causes, dont les lois sont données par la mécanique céleste, produisent des variations séculaires dans le mouvement de l'équateur.

Occupons-nous d'abord de celles qui sont dues à la variation d'excentricité.

Si, dans l'expression (23) de $\frac{4xz}{R_1^2}\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3$, nous posons $e=e_0+e't$, et que nous nous arrêtions à la première puissance des quantités e' et t, le seul terme complémentaire non périodique de p, qui est le produit de cette expression par $\frac{h}{4}$, sera, pour le Soleil,

$$\delta p = \frac{3}{4} h s_2 e_0 e' t \sin \varphi,$$

d'où

$$\delta q = \frac{3}{4} h s_2 e_0 e' t \cos \varphi,$$

que nous écrirons, en faisant $\frac{3}{4}\frac{h s_2 e_0 e'}{n} = \alpha$:

$$\delta p = \alpha\varphi \sin \varphi$$
$$\delta q = \alpha\varphi \cos \varphi.$$

Posons

$$l = h_1\varphi \sin \varphi + k_1 \cos \varphi,$$

et substituons dans la seconde des équations (10), dans lesquelles on remplacera p et q par les expressions précédentes δp et δq, et l'on fera $\frac{a}{B} = \frac{b}{A} = \mu$,

$$\frac{dl}{dt} = -n\mu(m+q), \quad \frac{dm}{dt} = n\mu(l+p),$$

il viendra :

$$\frac{dm}{dt} = n\mu\left[(h_1+\alpha)\varphi \sin \varphi + k_1 \cos \varphi\right]$$

et, en intégrant :

$$m = \mu \left[-(h_1 + \alpha)(\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) + k_1 \sin \varphi \right].$$

Cette expression, portée dans la première équation, donne :

$$\frac{dl}{d\varphi} = -\mu^2 \left[-(h_1 + \alpha)(\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) + k_1 \sin \varphi \right] - \mu\alpha\varphi \cos \varphi.$$

Identifiant avec

$$\frac{dl}{d\varphi} = h_1 \varphi \cos \varphi + (h_1 - k_1) \sin \varphi,$$

on aura :

$$\mu^2(h_1 + \alpha) - \mu\alpha - h_1 = 0$$

$$\mu^2(h_1 + \alpha) + \mu^2 k_1 + (h_1 - k_1) = 0.$$

De celles-ci l'on tire

$$h_1 = -\frac{\alpha\mu}{1+\mu}, \quad k_1 = h_1 \frac{1}{1+\mu}, \quad h_1 + \alpha = \frac{\alpha}{1+\mu} = -\frac{h_1}{\mu};$$

et, par là, l et m deviennent :

$$l = h_1 \left\{ \varphi \sin \varphi + \frac{1}{1+\mu} \cos \varphi \right\}$$

$$m = h_1 \left\{ \varphi \cos \varphi - \frac{1}{1+\mu} \sin \varphi \right\}.$$

Les équations de l'article **15** donneront alors

$$\frac{d\theta}{dt} = -h_1 \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{1+\mu} = -\frac{h_1}{1+\mu}; \quad -\sin \theta \frac{d\psi}{dt} = h_1 \varphi.$$

Intégrons, en faisant abstraction des termes qui rentrent dans la nutation diurne; nous aurons

$$\delta\theta = -\frac{h_1}{1+\mu} t = \frac{\alpha\mu}{(1+\mu)^2} t = \frac{3}{4} \frac{h s_2 e_0 e' \mu}{n(1+\mu)^2} t.$$

$$-\sin \theta_0 \delta\psi = \frac{1}{2} h_1 n t^2 = -\frac{1}{2} n \frac{\alpha\mu}{1+\mu} t^2 = -\frac{3}{8} \frac{h s_2 e_0 e' \mu}{1+\mu} t^2,$$

ou, puisque $s_2 = \sin 2\theta_0$:

$$\delta\psi = \frac{3}{4}\frac{hc_1e_0e'\mu}{1+\mu}t^2.$$

L'action de la Lune produirait des variations dont la forme serait absolument la même, à part le changement de h en h'; en recourant à l'expression de p tirée de l'article 9, on verrait immédiatement que $h' = f'h$, f' étant égal à $f(1 - \frac{3}{2}i^2)$.

En sorte que, si nous remplaçons, dans les formules précédentes, h par $h(1+f')$, nous aurons les expressions complètes des variations qui sont liées à celle de l'excentricité de l'orbite terrestre.

On aura ainsi :

$$\delta\psi = \frac{3}{4}h(1+f')c_1e_0e'\frac{\mu}{1+\mu}t^2. \tag{39}$$

Le facteur de t^2 n'est guère supérieur à 0.00003″.

Et comme le coefficient de t dans l'expression de $\delta\theta$ est égal au précédent multiplié par $\frac{2s_1}{n}$, il sera plus de 450 fois moindre.

On peut donc négliger complètement la variation en obliquité qui est liée à celle de l'excentricité.

23. Sous l'action des planètes, l'écliptique se déplace d'un mouvement très lent.

Soit, page 11, $N\gamma_0$ l'écliptique fixe de 1850, $N\gamma_1$ celle de $1850 + t$; N son nœud ascendant sur l'écliptique fixe; ε l'angle qu'elle fait avec celle-ci; Λ la longitude $N\gamma_0$ du nœud ascendant rapportée à l'équinoxe fixe.

La mécanique céleste donne $\Lambda = \Lambda_0 + \lambda_1 t$, $\varepsilon = \varepsilon_1 t - \varepsilon_2 t^2$; λ_1 étant égal à $-8.6''$, ε_1 à $0.47''$ environ.

Recherchons les variations en obliquité et en longitude qui sont dues à ce déplacement de l'écliptique.

$O\gamma_0$ représentant l'équateur moyen de 1850, $O\gamma$ celui de $1850+t$, $\gamma_0\gamma$ sera la précession *luni-solaire* ψ calculée ci-dessus; $\gamma\gamma_1$, improprement nommé précession *planétaire*, sera désigné par χ. Quant à la précession véritable, ou *précession générale,* elle consiste dans le déplacement de l'équinoxe moyen de γ_0 à γ_1.

Les angles en γ_0 et γ_1 seront, dans ce paragraphe, où nous faisons abstraction de la nutation, les obliquités moyennes en 1850 et $1850+t$; ils seront désignés par θ_0 et θ_1; l'angle γ par θ.

La détermination de l'obliquité moyenne et de la précession générale sera traitée à la fin de ce même paragraphe.

Mais nous avons à rechercher d'abord les variations séculaires qui dépendent des termes en ε, omis ci-dessus, article 6.

Reprenons donc les formules (14) et (17), et bornons-nous pour le moment à l'action du Soleil; nous pourrons alors, en négligeant ε^2 et faisant $i=0$, nous borner à écrire :

$$\frac{2x}{R_1}=\left[(1+c_1)\cos(\lambda+c_1\chi-\varphi)+(1-c_1)\cos(\lambda+c_1\chi+\varphi)\right]$$
$$-2s_1\sin\mathfrak{B}\sin\varphi,$$
$$\frac{z}{R_1}=s_1\sin(\lambda+c_1\chi)+c_1\sin\mathfrak{B},$$

ou, en remplaçant $\sin\mathfrak{B}$ par

$$\sin\varepsilon\sin(\mathfrak{C}-\Lambda)=\sin\varepsilon\sin(\lambda+c_1\chi-\Lambda')=\sin\varepsilon\sin(\lambda_1-\Lambda')$$
$$=\frac{1}{2}\left[\cos(\lambda_1-\Lambda'-\varepsilon)-\cos(\lambda_1-\Lambda'+\varepsilon)\right],$$

λ_1 représentant $\lambda+c_1\chi$:

$$\frac{2x}{R_1}=\left[(1+c_1)\cos(\lambda_1-\varphi)+(1-c_1)\cos(\lambda_1+\varphi)\right]$$
$$-\frac{1}{2}s_1\Big[\sin(\lambda_1-\Lambda'-\varepsilon+\varphi)-\sin(\lambda_1-\Lambda'-\varepsilon-\varphi)$$
$$+\sin(\lambda_1-\Lambda'+\varepsilon-\varphi)-\sin(\lambda_1-\Lambda'+\varepsilon+\varphi)\Big];$$
$$\frac{z}{R_1}=s_1\sin\lambda_1+\frac{1}{2}e_1\left[\cos(\lambda_1-\Lambda'-\varepsilon)-\cos(\lambda_1-\Lambda'+\varepsilon\right].$$

Le produit de ces deux expressions donnera d'abord des termes renfermant l'argument λ_1. Nous ferons abstraction de ceux-ci, quoique λ_1 contienne implicitement ε. Mais si l'on remplace λ_1 par $\lambda + c_1\chi = \lambda + c'_1 \sin\varepsilon \sin \mathrm{A}'$ (16), il est clair que le développement des sinus ou cosinus de $2\lambda_1$ ne donnera pas de termes indépendants de λ, les seuls dont nous ayons à nous occuper. A la vérité, si l'on voulait tenir compte des termes dépendants du carré de l'excentricité de l'orbite, comme $\frac{xz}{\mathrm{R}_1^2}$ doit être multiplié par $\left(\frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{R}_1}\right)^3$ qui renferme $3e^2 \cos 2(\lambda - \Gamma)$, on obtiendrait des termes indépendants de λ; mais ils sont tellement insignifiants que nous en ferons abstraction (*).

Cela étant, nous aurons simplement, en n'écrivant que les termes qui sont indépendants de λ et qui renferment ε dans le produit

$$-3\frac{m_1^2}{n}\frac{xz}{\mathrm{R}_1^2}\left(\frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{R}_1}\right)^3 = -3\frac{m_1^2}{n}\left(1+\frac{9}{2}e^2\right)\frac{xz}{\mathrm{R}_1^2},$$

et en représentant par δp l'ensemble des termes qui se rapportent au Soleil :

$$\delta p = \frac{3}{8}\frac{m_1^2}{n}\left(1+\frac{9}{2}e^2\right)\left[\begin{array}{l}(c_1+c_2)\cos(\mathrm{A}'-\varepsilon-\varphi)+(c_1-c_2)\cos(\mathrm{A}'-\varepsilon+\varphi)\\ -(c_1+c_2)\cos(\mathrm{A}'+\varepsilon-\varphi)-(c_1-c_2)\cos(\mathrm{A}'+\varepsilon+\varphi)\\ +\frac{1}{2}s_2\left[\sin\varphi-\frac{1}{2}\sin(2\varepsilon+\varphi)+\frac{1}{2}\sin(2\varepsilon-\varphi)\right]\end{array}\right]$$

24. Appliquant les formules d'intégration (25, II''), dans lesquelles, pour le cas où p est de la forme $\Sigma u \cos(v_1 t \pm \varphi)$, il suffira de changer v_1 en $\frac{\pi}{2} + v_1$, et faisant

$$\varepsilon = \varepsilon_1 t, \quad \mathrm{A}' = \mathrm{A}_0 + \lambda'_1 t, \quad \frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}\left(1+\frac{9}{2}e^2\right) = h_1,$$

(*) Nous avons donné ces termes dans notre *Théorie*, etc., article 77. Voir au même endroit la raison pour laquelle le terme sin φ a été conservé dans la première expression de δp. Il disparaît, du reste, identiquement dans la seconde.

on trouve, en négligeant ici la nutation diurne :

$$\frac{1}{h_1}\frac{d\delta\theta}{dt} = c_1\left[\cos(\Lambda' - \varepsilon) - \cos(\Lambda' + \varepsilon)\right].$$

$$-\frac{1}{h_1} s_1 \frac{d\delta\psi}{dt} = -c_2\left[\sin(\Lambda' - \varepsilon) - \sin(\Lambda' + \varepsilon)\right]$$
$$+\frac{1}{4} s_2\left[-1 + \cos 2\varepsilon\right];$$

d'où, en intégrant :

$$\left.\begin{aligned}
\delta\theta &= \mu_1 h_1\left[c_1\left[\frac{\sin(\Lambda' - \varepsilon)}{\lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\sin(\Lambda' + \varepsilon)}{\lambda'_1 + \varepsilon_1}\right]\right] \\
\delta\psi &= \mu_1 h_1\left[\begin{aligned}&-\frac{c_2}{s_1}\left[\frac{\cos(\Lambda' - \varepsilon)}{\lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\cos(\Lambda' + \varepsilon)}{\lambda'_1 + \varepsilon_1}\right] \\ &+\frac{1}{2} c_1\left(t - \frac{\sin 2\varepsilon}{2\varepsilon_1}\right)\end{aligned}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Si l'on appliquait les mêmes formules à l'action de la Lune, on trouverait d'abord absolument les mêmes termes, multipliés seulement par $(1 - \frac{3}{2} i^2)$; ensuite d'autres termes secondaires dépendant de l'inclinaison et du nœud de son orbite.

Nous nous abstiendrons de calculer ces derniers, qui n'ont aucune importance pratique pour l'époque actuelle (*).

Les variations séculaires seront donc représentées par les formules (40), pourvu que nous y fassions :

$$\mu_1 h_1 = \mathrm{H}_1 = \frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}\frac{\mu}{1 + \mu}\left(1 + \frac{9}{2}e^2\right)\left[1 + f\left(1 - \frac{3}{2}i^2\right)\right]. \quad (41)$$

Si nous les développons suivant les puissances du temps, elles deviendront :

$$\left.\begin{aligned}
\delta\theta &= \mathrm{H}_1 c_1 \varepsilon_1 \sin \Lambda_0 t^2 + \frac{2}{3}\mathrm{H}_1 c_1 \varepsilon_1 \lambda'_1 \cos \Lambda_0 t^3. \\
\delta\psi &= -\mathrm{H}_1 \frac{c_2}{s_1}\varepsilon_1 \cos \Lambda_0 t^2 - \frac{2}{3}\mathrm{H}_1 \frac{c_2}{s_1}\varepsilon_1 \lambda'_1 \sin \Lambda_0 t_3 + \frac{2}{3}\mathrm{H}_1 c_1 \varepsilon_1^2 t^3.
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

(*) Voir *Théorie*, etc., art. 86.

Telles sont les variations séculaires en obliquité et en longitude qui proviennent du mouvement séculaire de l'écliptique.

25. Il nous reste à trouver l'expression de l'obliquité moyenne et celle de la précession générale.

Or le triangle $N\gamma\gamma_1$ donne, aux quantités en ε^2 près :

$$\cos\theta_1 = \cos\theta - \sin\varepsilon\sin\theta\cos\Lambda',$$

d'où l'on tire de même :

$$\theta_1 = \theta + \varepsilon\cos\Lambda' = \theta + \varepsilon_1 t\cos\Lambda_0 - \varepsilon_1\lambda_1'\sin\Lambda_0 t^2.$$

Dans cette formule, θ doit être remplacé par $\theta_0 + \delta\theta$, θ_0 étant l'obliquité moyenne en 1850, ce qui donnera

$$\theta_1 = \theta_0 + \varepsilon_1\cos\Lambda_0 t + \varepsilon_1(\mathrm{H}_1 c_1 - \lambda_1')\sin\Lambda_0 t^2 + \frac{2}{3}\mathrm{H}_1 c_1\varepsilon_1\lambda_1'\cos\Lambda_0 t^3. \quad (45)$$

Quant à ε et Λ, ils sont donnés par la mécanique céleste, et nous savons que $\Lambda' = \Lambda - \psi$.

L'obliquité moyenne est donc déterminée.

La précession générale ψ_1 est la différence entre la longitude moyenne λ et la longitude $\mathfrak{L}$ rapportée à l'écliptique fixe; aux quantités de l'ordre de ε^2 près, elle est donc égale à $N\gamma_1 - N\gamma$; or le triangle $N\gamma\gamma_1$ donne :

$$\cos\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\psi_1 - \psi}{2} = \sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\theta_1 + \theta}{2},$$

qu'on peut écrire, aux mêmes quantités près :

$$\begin{aligned}\sin\frac{\psi_1-\psi}{2} &= \cos\left(\theta_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_1\cos\Lambda_0 t\right)\sin\frac{\chi}{2}\\ &= \frac{1}{2}c_1'\varepsilon_1\sin\Lambda' t - \frac{1}{2}\varepsilon_1^2\sin\Lambda'\cos\Lambda_0 t^2;\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant Λ' par

$$\Lambda_0 + \lambda_1' t$$

et ψ par $-\mathrm{P}'t - \delta\varphi$, ou, (39) et (41), par

$$-\mathrm{P}\,t - \mathrm{H}_1 \frac{c_2}{s_1}\varepsilon_1 \cos \Lambda_0 t^2 + 3\mathrm{H}_1 c_1 e_0 e' t^2 :$$

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1 = -(\mathrm{P}' - c_1'\varepsilon_1 \sin \Lambda_0)\,t - \left(\mathrm{H}_1 \dfrac{c_2}{s_1} - c_1'\lambda_1' + \varepsilon_1 \sin \Lambda_0\right)\varepsilon_1 \cos \Lambda_0 t^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 3\mathrm{H}_1 c_1 e_0 e' t^2.\end{array}\right\} \quad (44)$$

Cette formule donne l'expression de la précession générale.
c_1 et c_1' représentent, comme ci-dessus, $\cos\theta_0$ et $\cot\theta_0$, et P′ la constante de la précession luni-solaire.

§ 5. *Des variations de la vitesse angulaire de l'écorce terrestre, ou de sa libration, et de la durée du jour sidéral.*

26. Les équations (10) que nous avons posées au début de cette théorie sont également applicables à la croûte et au noyau fluide de la Terre.

La troisième de ces équations

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{C}}(lm + nr),$$

est plus spécialement applicable à la croûte; elle renferme, en effet, dans son second membre, le facteur $\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}$ dont nous ne pouvons connaître approximativement la valeur que par la grandeur de la nutation diurne. Or celle-ci, dont les observations ont confirmé l'existence, serait absolument insensible pour la Terre considérée comme solide, de même qu'elle l'est bien certainement pour le noyau. Ce n'est donc que pour la croûte que $\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}$ peut être sensible, et c'est, appliquée à celle-ci seulement, que l'équation précédente donnera une valeur appréciable pour $\frac{dn}{dt}$.

L'hypothèse que nous avons faite jusqu'à présent, quant à la constance de la vitesse angulaire de l'écorce terrestre, n'est donc qu'approximative.

Pour étudier la grandeur et les lois de la variation de n, il faudra d'abord former le développement de

$$nr = -3fm_1^2 \frac{xy}{\mathrm{R}_1^2}\left(\frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{R}_1}\right)^3, \text{ art. 3,}$$

en partant des expressions de x et de y. Or celles-ci donnent :

$$\frac{8xy}{R_1^2}\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3 = -2s_1^2\left(1-\frac{3}{2}i^2+3e^2\right)\sin 2\varphi$$

$$+\left(1-\frac{i^2}{4}+\frac{e^2}{2}\right)\begin{bmatrix}(1+c_1)^2\sin(2☾-2\varphi)\\-(1-c_1)^2\sin(2☾+2\varphi)\end{bmatrix}$$

$$+2e\begin{bmatrix}(1+c_1)^2\sin(3☾-\Gamma-2\varphi)\\-(1-c_1)^2\sin(3☾-\Gamma+2\varphi)\end{bmatrix}$$

$$-\frac{e}{2}\begin{bmatrix}(1+c_1)^2\sin(☾+\Gamma-2\varphi)\\-(1-c_1)^2\sin(☾+\Gamma+2\varphi)\end{bmatrix}$$

$$-2e^2\begin{bmatrix}(1+c_1)^2\sin(2\Gamma-2\varphi)\\-(1-c_1)^2\sin(2\Gamma+2\varphi)\end{bmatrix}$$

$$+2is_1\begin{bmatrix}(1+c_1)\sin(\Omega-2\varphi)\\+(1-c_1)\sin(\Omega+2\varphi)\end{bmatrix}$$

$$-2is_1\begin{bmatrix}(1+c_1)\sin(2☾-\Omega-2\varphi)\\+(1-c_1)\sin(2☾-\Omega+2\varphi)\end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{4}i^2\begin{bmatrix}(1+c_1)^2\sin(2\Omega-2\varphi)\\-(1-c_1)^2\sin(2\Omega+2\varphi)\end{bmatrix}$$

$$+3es_1^2\left[\sin(☾-\Gamma-2\varphi)-\sin(☾-\Gamma+2\varphi)\right].$$

Tous ces termes ne donneront lieu, comme on le voit, qu'à des variations diurnes de la vitesse angulaire, qui ne sont pas capables de s'accroître par l'intégration ; nous pourrons donc négliger ceux dont le coefficient numérique est, dans le second membre, inférieur à 0.1. Si nous combinons les actions des deux astres, en multipliant par $f = 2.18$ les termes relatifs à l'action de la Lune, nous aurons ainsi :

$$-\frac{8nr}{3m_1^2} = -1.006\sin 2\varphi + 8.04\sin(2☾-2\varphi)$$
$$+3.68\sin(2\odot-2\varphi)+0.88\sin(3☾-\Gamma'-2\varphi)$$
$$+0.12\sin(3\odot-\Gamma-2\varphi)-0.22\sin(☾+\Gamma'-2\varphi)$$
$$+0.30\sin(\Omega-2\varphi)-0.30\sin(2☾-\Omega-2\varphi).$$

Avant de substituer cette valeur dans l'équation donnée ci-dessus, il faut remarquer que le terme lm du second membre est tout à fait insensible vis-à-vis du terme nr, et qu'on peut se dispenser provisoirement d'en tenir compte; cette équation pourra s'écrire alors

$$\frac{dn}{ndt} = \frac{3}{8}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{C}}\frac{m_1^2}{n}\left\{-1.006 \sin 2\varphi + \cdots\right\}.$$

L'erreur que l'on commettra en posant dans le premier membre $ndt = d\varphi$, et $n =$ constante dans le second, sera si insignifiante que, pour ne pas compliquer inutilement l'intégration, on peut effectuer celle-ci dans ces hypothèses (*).

Le coefficient de la nutation diurne $-\frac{h\nu}{n}$ (32) et (33) est égal à

$$\frac{3}{8}\left(\frac{m_1}{n}\right)^2 (\mathrm{B} - \mathrm{A})\frac{\mathrm{B} + \mathrm{A} - \mathrm{C}}{\mathrm{AB}}.$$

Or $\frac{\mathrm{B+A-C}}{\mathrm{AB}}$ peut s'écrire $\frac{\mathrm{C}-b-a}{(\mathrm{C}-a)(\mathrm{C}-b)}$, qui se réduit à $\frac{1}{\mathrm{C}}$ si l'on néglige au dénominateur ab vis-à-vis de C^2. Si donc nous prenons 0.15″ pour ce coefficient, valeur qui ne semble pas exagérée, eu égard à celles que différentes séries d'observations ont données (**), comme le coefficient $\frac{3}{8}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{C}}\left(\frac{m_1}{n}\right)^2$ n'en diffère que d'une fraction très petite de celui-ci, nous le prendrons en nombre abstrait égal à $\frac{0.15}{\mathrm{N}}$, $\frac{1}{\mathrm{N}}$ représentant sin 1″, et nous aurons, en intégrant :

$$\left.\begin{aligned}\frac{n-n_0}{n} \text{ ou } \frac{\Delta n}{n} = \frac{0.15}{\mathrm{N}}\Bigg\{ & 0.5 \cos 2\varphi + \frac{4.02}{1-m_2'}\cos(2☾ - 2\varphi) \\ & + \frac{1.84}{1-m_2}\cos(2\odot - 2\varphi) \\ & + \frac{0.44}{1-\frac{3}{2}m_2' - \frac{1}{2}\gamma_2'}\cos(3☾ - \Gamma' - 2\varphi)\Bigg\},\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

expression qui donne la variation de la vitesse angulaire n à l'instant où l'angle φ atteint la valeur φ; en sorte que la vitesse en cet instant est $n_0 + \Delta n$, n_0 désignant la vitesse moyenne.

(*) Il y a un moyen fort simple de les éviter; on pose rigoureusement $\frac{1}{n} = \frac{dt}{d\varphi} = \tau$; d'où, en prenant φ pour variable indépendante, $\frac{dn}{dt} = \frac{1}{d\varphi}\frac{d\tau}{\tau^3}$, ce qui permet d'intégrer rigoureusement l'équation ; mais le résultat final serait le même.

(**) Voir la notice en tête du volume.

Cette expression se compose de deux parties, dont la première a une période exactement semi-diurne, tandis que la seconde se compose de termes dont la période diffère de la précédente dans le même rapport que $1 - m_2'$, $1 - m_2$, etc., diffèrent de l'unité. La première partie dépend de l'angle horaire seulement ; la seconde dépend en outre de la position des astres attirants ; c'est cette dernière partie qui est prépondérante.

En recherchant quelle fraction de la vitesse moyenne représente le coefficient de sa variation, on se dira à première vue que cette fraction est absolument insensible : le coefficient de $\frac{\Delta n}{n}$, en effet, $\frac{0.15}{N}$, est égal à 0.000000726. La variation du chemin parcouru en 6 heures par un point du parallèle de rayon r' sera néanmoins très appréciable, comme on va le voir.

L'expression de ce chemin est, pendant le temps dt, $r'd\varphi = r'(n_0 + \Delta n)\,dt$, si nous négligeons des termes sans importance pour le sujet actuel, et sur lesquels nous reviendrons dans l'article suivant. Sa variation élémentaire est donc $r'\Delta n dt$, que nous pouvons écrire $r' \frac{\Delta n}{n} d\varphi$, ou, en désignant par σ la fraction très petite qui précède,

$$r'\sigma \left\{ 0.5 \cos 2\varphi + \frac{4}{1 - m_2'} \cos (2☾ - 2\varphi) + \cdots \right\} d\varphi.$$

En 6 heures, la variation du chemin parcouru sera égale à l'intégrale de l'expression précédente, prise, par exemple, de $-45°$ à $+45°$:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta e &= r'\sigma \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left\{ 0.5 \cos 2\varphi + \frac{4.02}{1 - m_2'} \cos(2☾ - 2\varphi) + \frac{1.84}{1 - m_2} \cos(2\odot - 2\varphi) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{0.44}{1 - \frac{3}{2} m_2' - \frac{1}{2}\gamma_2'} \cos(3☾ - \Gamma' - 2\varphi) + \cdots \right\} d\varphi \\
&= \frac{r'\sigma}{2} \left\{ 0.5 \sin 2\varphi - \frac{4.02}{(1 - m_2')^2} \sin(2☾ - 2\varphi) - \frac{1.84}{(1 - m_2)^2} \sin(2\odot - 2\varphi) + \cdots \right\}_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= r'\sigma \left\{ 0.5 + \frac{4.02}{(1 - m_2')^2} \cos 2☾ + \frac{1.84}{(1 - m_2)^2} \cos 2\odot + \cdots \right\},
\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

si l'on néglige les variations des longitudes du Soleil et de la Lune pendant 6 heures, ce qui est permis ici.

Pour ☾ = ⊙ = 0 ou 180°, on aurait donc, à très peu près, $\Delta e = 6{,}4 r'\sigma$. Or, en mètres, on a sous la latitude de 45° :

$$\lg r' = 6.6534$$

De plus

$$\lg \sigma = 3.8617 - 10$$

$$\lg 6{,}4 = 0.8062$$

$$\lg \Delta e \quad 1.3215$$

Le maximum de Δe serait donc égal à 20.9 mètres sous la latitude de 45°, dans les circonstances les plus favorables ; c'est-à-dire que, dans ces circonstances, un corps flottant librement sur un liquide en repos, et qui ne serait pas sujet aux variations de vitesse de celui-ci, mais conserverait la vitesse qu'il avait en commun avec ce dernier au commencement de l'expérience, pourrait accuser, après 6^h, une déviation de 20 mètres vers l'E. ou vers l'W., ou, plus exactement, que ce corps oscillerait alternativement, pendant 3^h de 10 mètres vers l'E., et de 10 mètres vers l'W. pendant les 3^h suivantes. Ces oscillations commenceraient soit à $-3^h = 21^h$ sidérales du premier méridien pour finir à 3^h, soit à 9^h pour finir à 15^h. Dans les intervalles il y aurait aussi des oscillations, mais de moindre importance.

Celles-ci pourraient être éprouvées également par un pendule, pourvu que sa pesanteur fût considérablement réduite : les variations de vitesse de son point de suspension occasionneraient alors une légère oscillation du pendule (*).

Examinons jusqu'à quel point une horloge bien réglée pourrait accuser les variations de la vitesse angulaire de l'écorce terrestre.

Le mouvement de l'écorce est mesuré par l'angle φ, qui augmente de 15° par heure dans l'hypothèse que ce mouvement est uniforme, et que l'on néglige les termes mentionnés à l'article précédent. On peut poser, dans cette hypothèse, $d\varphi = ndt$,

(*) Voir E. Ronkar, *Bull. de l'Acad. roy.*, 3e série, t. XIV, p. 296.

et l'équation précédente donne, si l'on remplace les coefficients numériques $\frac{0.15}{N}$ 0.5, etc., par les symboles a, b, c, etc. :

$$1 - \frac{n_0}{n} = a \cos 2\varphi + b \cos (2☾ - 2\varphi) + c \cos (2\odot - 2\varphi) + \cdots$$

On en tire, en multipliant les deux membres par $d\varphi$ et en remplaçant $\frac{n_0}{n}\, d\varphi$ par $n_0 dt$:

$$n_0 dt = d\varphi \left\{ 1 - a \cos 2\varphi - b \cos (2☾ - 2\varphi) - c \cos (2\odot - 2\varphi) \ldots \right\}$$

Intégrons en admettant que $\varphi = 0$ pour $t = 0$, ce qui suppose que t est l'heure sidérale du premier méridien ; si l'on prend l'intégrale entre 0 et t, et qu'on se rappelle que m_1' et m_1 sont les moyens mouvements de la Lune et du Soleil, on aura :

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi = \varphi - n_0 t = \frac{a}{2} \sin 2\varphi + \frac{b}{1 - m_2'} \cos (2☾_0 + m_1' t - \varphi) \sin (\varphi - m_1' t) \\ + \frac{c}{1 - m_2} \cos (2\odot_0 + m_1 t - \varphi) \sin (\varphi - m_1 t) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

La période de cette variation donne lieu aux mêmes observations que celle de la variation de la vitesse angulaire. Elle est presque exactement semi-diurne comme cette dernière.

Tous les termes qui composent le second membre peuvent être considérés à fort peu près comme ayant $\sin \varphi$ pour facteur, puisque tel serait, en effet, le cas, si l'on négligeait m_1' et m_1 vis-à-vis de n.

Dans cette hypothèse, qui approche très fort de la réalité, la variation de φ entre 0^h et 6^h sera :

$$(\Delta\varphi)_{6^h} = \frac{b}{1 - m_2'} \sin (2☾_0 + 6m_1') + \frac{c}{1 - m_2} \sin (2\odot_0 + 6m_1) + \cdots$$

ou en appelant $☾_1$ et $\odot_1$ les longitudes moyennes de la Lune et du Soleil à 3^h sidérales pour le premier méridien :

$$(\Delta\varphi)_{6^h} = \frac{b}{1 - m_2'} \sin 2☾_1 + \frac{c}{1 - m_2} \sin 2\odot_1 + \cdots$$

Entre 6^h et 12^h on aurait une valeur à très peu près égale et de sens contraire. Ces variations seront les plus considérables pour $☾_1 = \odot_1 = 45°$, $135°$, $225°$, etc.; ou pour $☾_1 = 45°$, etc., et $\odot_1 = 45° + 180°$, etc. Pour les calculer en secondes de temps, il suffira de multiplier le second membre $\frac{N}{15}$.

En admettant que $\sin 2☾_1 = \sin 2\odot_1 = 1$, cette valeur sera donc, après 6^h :

$$\frac{N}{15}\left(\frac{b}{1-m_2'} + \frac{c}{1-m_2} + \cdots\right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{4.02}{1-m_2'} + \frac{1.84}{1-m_2} + \cdots\right) 0^s.01,$$

c'est-à-dire 0.06^s environ.

Ainsi une pendule, dont la marche serait *rigoureusement* uniforme, accuserait après 6^h, dans les conditions précédentes, par rapport au mouvement diurne du ciel, une avance ou un retard de 0.06^s, quantité qui n'est plus négligeable aujourd'hui en astronomie.

Ce n'est pas encore là, toutefois, le maximum de la variation que peut subir la vitesse angulaire de l'écorce terrestre.

Pour $☾_0 = \odot_0 = 0°$ ou $180°$ on a, en effet (47) :

$$2\Delta\varphi = a \sin 2\varphi + \frac{b}{1-m_2'} \sin 2(\varphi - m_1't) + \frac{c}{1-m_2} \sin 2(\varphi - m_1 t) + \cdots$$

qui est un maximum pour $\varphi = 3^h$, un minimum pour $\varphi = -3^h$, si l'on néglige m_1' et m_1 vis-à-vis de n.

En sorte que, de 21^h à 3^h, la variation totale sera à très peu près :

$$\Delta\varphi = a + \frac{b}{1-m_2'} + \frac{c}{1-m_2} + \cdots = \left(a_5 + \frac{4}{1-m_2'} + \frac{1.84}{1-m_2} + \cdots\right) 0.01^s.$$

Celle-ci atteint environ 0.065^s, valeur un peu plus considérable que la précédente.

Pour $☾_0 = \odot_0 = 90°$ ou $270°$, on voit que le maximum positif aura lieu à 9^h, le maximum négatif à 15^h, et que la variation totale entre ces deux instants sera de -0.055^s.

Ce mouvement, en vertu duquel l'écorce solide du globe avance ou retarde sur le noyau fluide, dans le mouvement de rotation de ces deux masses autour de leurs axes polaires respectifs, axes qui ne s'écartent l'un de l'autre que de la petite fraction de seconde d'arc de la nutation diurne, constitue, comme cette dernière, un véritable balancement de l'écorce sur le noyau, ou une véritable libration. Nous l'appellerons *libration de l'écorce terrestre,* ou simplement *libration terrestre.*

Il serait fort compliqué d'en rechercher le maximum absolu, comme de rechercher entre quelles heures elle est nulle pour une longitude donnée. Ce serait, du reste, sans utilité pratique.

Mais on voit, par les exemples qui précèdent, en premier lieu, que la libration terrestre est la plus grande vers les syzigies, qu'elle est moindre vers les quadratures, dans le rapport de 1 à 3 environ; qu'elle est plus considérable aux moments où les longitudes du Soleil et de la Lune sont 0° ou 180°, que lorsqu'elles sont un multiple impair de 45°, ou lorsqu'elles sont de 90° ou 270°; enfin que dans les syzigies où ces longitudes sont 0° ou 180°, c'est entre 9^h et 15^h (ou entre 21^h et 3^h) sidérales du premier méridien que la libration terrestre atteint sa valeur maximum positive; tandis que c'est entre 0^h et 6^h (ou 12^h et 18^h), au contraire, que le maximum positif a lieu dans le cas où ces longitudes sont 45° ou 225°, entre 6^h et 12^h (ou entre 18^h et 6^h), dans le cas où ces longitudes sont de 135° ou 315°.

On voit aussi que toute avance est suivie, à 6^h d'intervalle, d'un retard qui est, à excessivement peu de chose près, égal à cette avance, en sorte que le moyen mouvement de l'écorce terrestre peut être regardé comme rigoureusement uniforme.

C'est ainsi que, pour des longitudes des astres de 45° ou 225°, il y a une avance de 0.06^s entre 0^h et 6^h, et un retard égal entre 6^h et 12^h; au moins la différence entre les deux est tout à fait insensible, puisqu'elle ne dépend, et même pour une très faible proportion seulement, que de la différence de position des astres à 3^h et à 9^h.

On trouve immédiatement, en effet, que, si l'on fait $t = 12^h$, d'où $\varphi = 180°$ dans l'équation (47), la variation $\Delta\varphi$, correspondante à cet intervalle de temps, sera :

$$\Delta\varphi = -\frac{b}{1-m'_2}\cos(2☾_0 + 12m'_1)\sin 12m'_1$$
$$-\frac{c}{1-m_2}\cos(2\odot_0 + 12m_1)\sin 12m_1 + \dots$$

le terme le plus considérable de cette variation dépend de $\sin 12m'_1$ ou de $\sin 6°$ environ, multiplié par $-\frac{0.15''}{N}\cdot\frac{4.02}{1-m'_2}$; c'est-à-dire qu'il est, au plus, égal à $-\frac{0.06''}{N}$ ou à $0.0000003''$.

Mais quoique le moyen mouvement de l'écorce terrestre soit uniforme, il n'en est pas moins vrai que son mouvement réel est sujet à une libration dont les fluctuations se reportent sur les différentes heures du jour, suivant les longitudes du Soleil et de la Lune.

Il ne nous semble pas douteux que des observations méridiennes bien faites, dans un azimut invariablement fixé par une bonne mire, ne puissent mettre en évidence cette libration terrestre, qui dépasse bien certainement, dans ses maxima, les erreurs accidentelles de marche d'une bonne pendule astronomique, si toutefois le coefficient de la nutation diurne est supérieur à $0.1''$, comme il a été supposé ici.

27. Il reste à examiner ce que nous donnera le produit lm dont nous n'avons pas tenu compte.

La variation qui en résultera pour la vitesse angulaire est

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{C}}lm$$
$$= \pm\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{C}}\frac{ab}{\mathrm{AB}}\left\{\sum\frac{u}{1+\frac{a}{\mathrm{B}}\pm v_2}\sin(vt\pm\varphi)\right\}\cdot\left\{\sum\frac{u'}{1+\frac{a}{\mathrm{B}}\pm v'^2}\cos(v't\pm\varphi)\right\}$$

Le produit des deux sommes Σ se composera d'un ensemble de termes qu'on écrira, en négligeant v_2 et v'_2 :

$$\frac{1}{2\left(1+\frac{a}{\mathrm{B}}\right)^2}\sum uu'\left[\sin\left(\overline{v+v't}\pm 2\varphi\right) + \sin(v-v')\,t\right].$$

L'intégration ne donnera, quant au premier terme, qu'un résultat absolument insensible; et, quant au second :

$$\Delta n = -\frac{1}{2\left(1+\frac{a}{B}\right)^2}\frac{d}{c}\frac{ab}{AB}\sum\frac{uu'}{v-v'}\cos(v-v')\,t.$$

Ce terme ne pourrait devenir un peu sensible que dans le cas où le dénominateur $v - v'$ serait très petit; ce qui n'arriverait guère que si $v - v'$ était égal à $\gamma' + 2\omega_1$, le mouvement du périgée lunaire étant environ deux fois plus considérable que celui du nœud, et de signe contraire à ce dernier; ou si $v - v'$ était égal à γ_1, le mouvement du périgée solaire étant exessivement lent.

Ce dernier cas se présente dans le produit des termes (23^{bis})

$$\frac{1}{4}hs_1\left[(1+c_1)\sin(2\odot-\varphi)+(1-c_1)(\sin 2\odot+\varphi)\right]$$

et

$$-\frac{9}{16}hs_2e^2\left[\sin(2\odot-\Gamma-\varphi)-(\sin 2\odot-\Gamma+\varphi)\right],$$

produit qui donnera dans l'expression de $\frac{dn}{dt}$, si l'on néglige $\frac{a}{B}$ vis-à-vis de 1 :

$$+\frac{9}{64}h^2s_1s_2e^2\frac{d}{C}\frac{ab}{AB}\cos\Gamma.$$

En sorte que le terme correspondant de l'expressin Δn sera :

$$\frac{9}{64}h^2s_1s_2e^2\frac{d}{C}\frac{ab}{AB}\frac{\sin\Gamma}{\gamma_1}. \tag{48}$$

Si l'on réduit en nombre le facteur de $\sin\Gamma$, on trouvera, en prenant $0.15''$ ou 0.01^s pour le coefficient de la nutation diurne $\frac{3}{8}\left(\frac{m_1}{n}\right)^2\frac{d}{C}$, et $\frac{ab}{AB}$ égal au carré de l'aplatissement, 7 millionièmes de millionième de seconde seulement.

La vitesse angulaire n de la Terre n'est donc sujette qu'à une variation séculaire insignifiante dépendant de la longitude du périgée solaire.

Quant aux termes qui pourraient dépendre de la longitude du périgée lunaire augmentée du double de celle du nœud, ils seraient notablement inférieurs au précédent, puisque $\gamma_1' + 2\omega_1$ est beaucoup plus grand que γ_1; or, en examinant attentivement tous les termes qui dépendent du périgée (23), y compris même ceux que nous avons négligés (*), on n'aperçoit aucune combinaison des arguments qui donne une différence égale à $\Gamma' + 2\Omega$; on peut donc absolument laisser ce cas de côté.

Mais les inégalités du sphéroïde donnent lieu (37) à des termes qui dépendent du périgée solaire exclusivement.

Comme les coefficients de ces termes n'atteignent probablement pas un dixième de seconde d'arc, leur produit un deux cent millionième de seconde, comme ce produit doit encore être multiplié par $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{C}}$ égal à 0.03 tout au plus, malgré l'accroissement résultant de l'intégration, par suite de la multiplication par $\frac{1}{2\gamma_1} = 1800$ environ, le résultat sera vraisemblablement aussi tout à fait insensible.

28. Jusqu'ici nous n'avons étudié que les variations de la vitesse angulaire n autour du plus petit des axes principaux de la Terre.

Mais la vitesse angulaire o autour de l'axe instantané de rotation est donnée par

$$o = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = n + \frac{l^2 + m^2}{2n}.$$

Elle est donc sujette, tout d'abord, aux variations que nous venons de calculer, de la vitesse angulaire n elle-même; ensuite à celles qui proviennent des termes que donnera l'expression $\frac{l^2+m^2}{2n}$.

Or les équations (24) développées en ne tenant compte que des termes les plus importants et en posant, ce qui est permis ici,

$$\frac{b}{\mathrm{A}} = \frac{a}{\mathrm{B}} = \mu \quad \text{et} \quad \frac{1 - \frac{a}{\mathrm{B}} \pm v_2}{(1 \pm v_2)^2 - \frac{ab}{\mathrm{AB}}} = 1,$$

(*) Voir P. Ubaghs, *Formules de la nutation annuelle*(20) (Mém. de l'Acad. roy. de Belgique, in-4°, t. XLVII).

s'écrivent :

$$l = \alpha_1 \sin(n_1 t + \beta_1)$$
$$-\mu h \{ s_2 N_0 \sin\varphi - N'_1 [(c_1 + c_2)\sin(\Omega - \varphi) + (c_1 - c_2)\sin(\Omega + \varphi)] \} + \cdots,$$
$$m = -\alpha_1 \cos(n_1 t + \beta_1)$$
$$-\mu h \{ s_2 N_0 \cos\varphi - N'_1 [(c_1 + c_2)\cos(\Omega - \varphi) - (c_1 - c_2)\cos(\Omega + \varphi)] \} + \cdots$$

La somme des carrés donnera d'abord les termes non périodiques :

$$\alpha_1^2 + \mu^2 h^2 \{ s_2^2 N_0^2 + 2N_1'^2(c_1^2 + c_2^2) + \cdots \};$$

puis des termes à longue période, tels que

$$-\mu^2 h^2 s_2 N_0 N'_1 \{ 2c_2 \cos\Omega - 2c_2 \cos\Omega \},$$
$$\mu^2 h^2 s_2 N_0 N'_4 \{ \cos(\mathbb{C} - \Gamma') - \cos(\mathbb{C} - \Gamma') \}, \text{ etc.}$$

qui se détruisent tous deux à deux ; enfin des termes à courte période, tels que

$$\alpha_1 \mu h s_2 N_0 \cos(n_1 t + \varphi + \beta_1), \text{ etc.}$$

Faisant abstraction complète de ces derniers, qui donneraient des variations diurnes notablement inférieures à celles que nous avons trouvées dans le paragraphe précédent, nous voyons que la variation de la vitesse angulaire o se compose de celle de n, augmentée de la quantité constante :

$$\delta o = \frac{\alpha_1^2 + \mu^2 h^2 (s_2^2 N_0^2 + 2N_1'^2(c_1^2 + c_2^2) + 2N_3'^2(1 + c_1^2) + \cdots}{2n}$$

La vitesse angulaire de la Terre autour de son axe instantané ne diffère donc, à part les variations tout à fait insensibles à courte période dont nous venons de faire abstraction, de la vitesse angulaire autour de son plus petit axe que d'une quantité constante, et tout ce que nous avons dit des variations de cette dernière vitesse est exactement applicable à la première.

Or nous n'avons trouvé (art. **27**) pour n qu'une variation tout à fait insignifiante, dépendant de la longitude du périgée solaire.

On peut donc affirmer que le jour sidéral reste sensiblement constant à travers les siècles, pourvu toutefois que le diamètre de la Terre ne subisse pas d'altération.

Il est bien entendu que nous laissons entièrement de côté les frottements que les marées et les mouvements de l'atmosphère exercent sur la surface de la Terre, et qui tendent bien certainement à produire une diminution séculaire de sa vitesse de rotation.

29. Nous avons quelques mots à dire de l'angle φ, qui a été considéré dans l'article précédent comme égal à $\varphi_0 + nt$.

Cet angle est l'angle horaire de l'intersection de l'équateur vrai et de l'écliptique fixe par rapport à un méridien quelconque, si la constante φ_0 reste arbitraire. Ce méridien doit passer, selon la définition, par l'axe du plus grand moment d'inertie. Mais d'après ce que nous venons de voir, on peut confondre cet axe, sans erreur appréciable, avec l'axe instantané de rotation.

Si nous désignons par η l'angle horaire de l'équinoxe vrai par rapport à ce même méridien, nous aurons évidemment

$$\varphi = \eta + \chi,$$

χ désignant comme ci-dessus la précession planétaire.

Cette équation permet de déterminer η, ou le temps sidéral, du moment où φ sera connu.

Or, comme on le sait,

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \cos\theta \frac{d\psi}{dt},$$

équation que nous pourrons écrire, en nous bornant aux seuls termes importants et négligeant ω_2 vis-à-vis de 1 :

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - c'_1 \left\{ \alpha_1 \cos\left[n_1(1+j)t + \beta_1\right] + h\mu \left[N_0 - 2N'_1 \frac{c_2}{1+\mu} \cos \Omega \right] \right\},$$

ou encore, en appelant P′ la constante de la précession, N′ celle de la nutation annuelle :

$$\frac{d\varphi}{dt} = n + c_1 P' - c'_1 \alpha_1 \cos\left[n_1(1+j)t + \beta_1\right] + N'\omega_1 \frac{c_2}{s_1} \cos \Omega. \qquad (49)$$

Remplaçons n par $n_0 + \Delta n$ (45) et φ par $\varphi_1 + \Delta\varphi$; il viendra, en intégrant, d'abord

$$\varphi_1 = (n_0 + c_1 P')\, t.$$

Pour sa partie uniforme, la période de l'angle φ ne diffère donc de celle de la révolution de la Terre autour de son axe que d'une très petite quantité, constante pour l'époque actuelle, mais sujette à une variation séculaire puisqu'elle dépend de la constante de la précession.

Cherchons-en la partie périodique $\Delta\varphi$.

En remplaçant Δn par sa valeur (45), l'équation précédente (49) s'écrira :

$$\frac{d\Delta\varphi}{dt} = -\, c'_1\alpha_1 \cos\left[n_1(1+j)\,t + \beta_1\right] + N'\omega_1 \frac{c_2}{s_1} \cos \Omega$$
$$+ \sigma n \left\{0.5 \cos 2\varphi + \frac{4.02}{1 - m'_2} \cos (2☾ - 2\varphi) + \frac{1.84}{1 - m_2} \cos (2\odot - 2\varphi) + \cdots \right\}$$

Dans l'intégration nous pourrons regarder θ comme constant et φ comme égal à $\varphi_0 + nt$, et nous trouverons

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi = &-\frac{c'_1\alpha_1}{n_1(1+j)} \sin\left[n_1(1+j)\,t + \beta_1\right] + N' \frac{c_2}{s_1} \sin \Omega \\ &+ \frac{1}{2}\sigma\left\{0.5 \sin 2\varphi - \frac{4.02}{(1-2m'_2)} \sin(2☾ - 2\varphi) - \frac{1.84}{(1-m_2)} \sin (2\odot - 2\varphi)\right\} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

La dernière partie de cette expression, déjà trouvée ci-dessus, exprime la libration de l'écorce terrestre, dont aucun géomètre n'a soupçonné l'existence.

Le premier terme accuserait une variation d'une période de 305 jours dans la durée du jour sidéral. On ne pourra se faire une idée de la grandeur de cette variation que quand le coefficient α_1 aura pu être déterminé par l'observation (art. **18**).

Le second terme seul figure dans les expressions des géomètres.

Indépendamment donc de ce terme, il existe des variations diurnes, qui constituent la libration terrestre, et une variation d'une période de 305 jours.

Les premières, comme nous l'avons vu, peuvent s'élever au maximum à 0.06^s probablement; la grandeur de la dernière nous est totalement inconnue.

A la rigueur, il eût fallu ne pas considérer θ comme constant dans l'intégration précédente. Mais nous pensons que l'erreur qu'entraîne cette hypothèse dans les formules est bien inférieure aux omissions signalées ici, et commises par les géomètres mêmes qui ont cru ne pas devoir faire cette hypothèse.

Son abandon ne pourrait du reste introduire que des termes séculaires tout à fait inappréciables. Le calcul de ceux-ci dépasserait de beaucoup, et sans aucune utilité, les bornes de ce Traité.

Il en serait de même du calcul du jour vrai et du jour moyen, qui exigerait d'abord la réduction à l'écliptique mobile de la nutation N′ calculée par rapport à l'écliptique fixe, puis la réduction de l'ascension droite apparente du Soleil en longitude moyenne.

Nous renvoyons le lecteur, pour ces détails, à la Théorie de Serret (Le Verrier, *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. V, pp. 331 et suiv.) et au Traité d'Oppolzer (t. I, pp. 198 et suiv. de l'édition française, traduction de E. Pasquier).

§ 6. *Expressions de la précession et de la nutation en ascension droite et en déclinaison.*

30. On part habituellement des expressions précédentes de la précession et de la nutation en obliquité et en longitude, pour en trouver les expressions en Æ et déclinaison.

Ce procédé est fort laborieux pour le calcul des termes du second ordre; en outre, il a été appliqué d'une manière très incorrecte, en ce sens qu'on a généralement négligé de tenir compte, dans ce calcul, de l'élément le plus important qui est la précession (*).

(*) Peters a indiqué le moyen de calculer rigoureusement les termes du second ordre $\Delta^2\alpha$ et $\Delta^2\delta$, dans *Num. const. nut.*, pp. 198-199; mais ni lui ni aucun astronome, à l'exception d'Oppolzer, *vox clamantis in deserto*, n'en ont fait l'application. Les formules de Wagner (*Obs. de Pulk.*, vol. I, p. 117) sont incorrectes.

Nous partirons, au contraire, des expressions différentielles des variations en Æ et en déclinaison, et nous les intégrerons avec toute la rigueur exigée par la précision des observations modernes.

Les formules connues donnent :

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\delta}{dt} &= -\cos\alpha s_1\frac{d\psi}{dt} + \sin\alpha\frac{d\theta}{dt}\\ \frac{d\alpha}{dt} &= -c_1's_1\frac{d\psi}{dt} + \operatorname{tg}\delta\left(-\sin\alpha s_1\frac{d\psi}{dt} - \cos\alpha\frac{d\theta}{dt}\right);\end{aligned}\right\}\quad(51)$$

et, par l'intégration, en considérant α et δ comme étant les coordonnées moyennes, que nous représenterons par α_0, δ_0, et ajoutant une fonction telle que les équations précédentes, dans lesquelles α, δ sont les coordonnées vraies, soient vérifiées :

$$\left.\begin{aligned}\Delta\delta &= -s_1\Delta\psi\cos\alpha_0 + \Delta\theta\sin\alpha_0 + \mathrm{V}.\\ \Delta\alpha &= -c_1's_1\Delta\psi + \operatorname{tg}\delta_0(-s_1\Delta\psi\sin\alpha_0 - \Delta\theta\cos\alpha_0) + \mathrm{W}.\end{aligned}\right\}\quad(52)$$

Pour déterminer V et W, nous différentierons ces équations et nous retrancherons des expressions précédentes les différentielles obtenues. Il viendra ainsi :

$$\left.\begin{aligned}0 &= \Delta\alpha\left\{\cos\left(\alpha_0+\frac{\Delta\alpha}{2}\right)\frac{d\theta}{dt}+\sin\left(\alpha_0+\frac{\Delta\alpha}{2}\right)s_1\frac{d\psi}{dt}\right\}-\frac{d\mathrm{V}}{dt}\\ &\text{et}\\ 0 &= -\Delta\delta\sec^2\delta_0\left(\cos\alpha_0\frac{d\theta}{dt}+\sin\alpha_0 s_1\frac{d\psi}{dt}\right)\\ &\quad+\Delta\alpha\operatorname{tg}\delta_0\left\{\sin\left(\alpha_0+\frac{\Delta\alpha}{2}\right)\frac{d\theta}{dt}-\cos\left(\alpha_0+\frac{\Delta\alpha}{2}\right)s_1\frac{d\psi}{dt}\right\}\\ &\quad+\Delta\alpha\Delta\delta\sec^2\delta_0\left(\sin\alpha_0\frac{d\theta}{dt}-\cos\alpha_0 s_1\frac{d\psi}{dt}\right)-\frac{d\mathrm{W}}{dt}.\end{aligned}\right\}\quad(53)$$

Si l'on remplace $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ par les expressions (52), abstraction faite de V et de W, et qu'on se borne d'abord aux termes du premier ordre, on aura pour la partie du même ordre des expressions de $\frac{dV}{dt}$ et de $\frac{dW}{dt}$:

$$\frac{dV_1}{dt} = \{- c_1' s_1 \Delta\psi + \operatorname{tg} \delta_0 (- \cos \alpha_0 \Delta\theta - \sin \alpha_0 s_1 \Delta\psi)\} \left(\cos \alpha_0 \frac{d\theta}{dt} + \sin \alpha_0 s_1 \frac{d\psi}{dt}\right)$$

$$\frac{dW_1}{dt} = - \sec^2 \delta_0 (\sin \alpha_0 \Delta\theta - \cos \alpha_0 s_1 \Delta\psi) \left(\cos \alpha_0 \frac{d\theta}{dt} + \sin \alpha_0 s_1 \frac{d\psi}{dt}\right)$$
$$+ \operatorname{tg}\delta_0 \{- c_1' s_1 \Delta\psi + \operatorname{tg} \delta_0 (- \cos \alpha_0 \Delta\theta - \sin \alpha_0 s_1 \Delta\psi)\} \left(\sin \alpha_0 \frac{d\theta}{dt} - \cos \alpha_0 s_1 \frac{d\psi}{dt}\right);$$

ou, en faisant

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \mathrm{T}, \quad c_1' + \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \delta_0 = m_0, \quad \cos \alpha_0 \operatorname{tg} \delta_0 = n_0,$$
$$\cos \alpha_0 = c_0, \quad \sin \alpha_0 = s_0, \quad \cos 2\alpha_0 = c_0'', \quad \sin 2\alpha_0 = s_0'';$$

$$\frac{dV_1}{dt} = - m_0 c_0 s_1 \Delta\psi \frac{d\theta}{dt} - m_0 s_0 s_1 \Delta\psi s_1 \frac{d\psi}{dt}$$
$$- n_0 c_0 \Delta\theta \frac{d\theta}{dt} - n_0 s_0 \Delta\theta s_1 \frac{d\psi}{dt};$$

$$\frac{dW_1}{dt} = - \left(\frac{1}{2} + \mathrm{T}^2\right) s_0'' \Delta\theta \frac{d\theta}{dt} + (c_0^2 + c_0'' \mathrm{T}^2) s_1 \Delta\psi \frac{d\theta}{dt}$$
$$+ (c_0'' \mathrm{T}^2 - s_0^2) \Delta\theta s_1 \frac{d\psi}{dt} + \left(\frac{1}{2} + \mathrm{T}^2\right) s_0'' s_1 \Delta\psi s_1 \frac{d\psi}{dt}$$
$$+ c_1' \mathrm{T} \left(- s_0 s_1 \Delta\psi \frac{d\theta}{dt} + c_0 s_1 \Delta\psi s_1 \frac{d\psi}{dt}\right).$$

En effectuant les produits renfermés dans ces expressions, on s'arrêtera aux termes à longue période les plus considérables.

A la vérité, il se rencontrera des termes dépendants des périgées solaire et lunaire dans le produit des termes en $\odot + \Gamma$ ou $☾ + \Gamma'$ et $\odot - \Gamma$ ou $☾ - \Gamma'$ qui entrent dans les formules (26) à (31); mais ces termes seront de la forme

$$\frac{1}{2} p_1 p_2 (m_1 - \gamma_1) \cos 2\Gamma.$$

Leur intégration donnera

$$\frac{1}{4} p_1 p_2 \frac{m_1 - \gamma_1}{\gamma_1} \sin 2\Gamma;$$

en effectuant le calcul, on trouverait pour $\sin 2\Gamma'$ un coefficient égal à un millionième et demi de seconde d'arc; pour $\sin 2\Gamma$ un coefficient cent fois plus faible; en sorte que, même multipliés qu'ils sont par T dans V_1 et par T^2 dans W_1, ces termes seront toujours négligeables.

On pourra donc réduire les expressions qui entrent dans celles de $\frac{dV_1}{dt}$ et de $\frac{dW_1}{dt}$ à

$$\left.\begin{aligned} -s_1\frac{d\psi}{dt} &= p_0 + p_1c_2\cos\Omega,\\ \frac{d\theta}{dt} &= p_1c_1\sin\Omega;\end{aligned}\right\}\qquad(54)$$

d'où

$$-s_1\Delta\psi = p_0t + \frac{p_1c_2}{\omega_1}\sin\Omega,$$

$$\Delta\theta = -\frac{p_1c_1}{\omega_1}\cos\Omega,$$

et

$$\begin{aligned}\frac{dV_1}{dt} &= m_0c_0p_1c_1\left(p_0t\sin\Omega + \frac{p_1c_2}{\omega_1}\frac{1-\cos 2\Omega}{2}\right)\\ &\quad - m_0s_0\left(p_0^2t + \frac{p_0p_1c_2}{\omega_1}\sin\Omega + p_0p_1c_2t\cos\Omega + \frac{1}{2}\frac{p_1^2c_2^2}{\omega_1}\sin 2\Omega\right)\\ &\quad + \frac{1}{2}n_0c_0\frac{p_1^2c_1^2}{\omega_1}\sin 2\Omega - n_0s_0\left(\frac{p_0p_1c_1}{\omega_1}\cos\Omega + \frac{p_1^2c_1c_2}{\omega_1}\frac{1+\cos 2\Omega}{2}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dW_1}{dt} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + T^2\right)s_0''\frac{p_1^2c_1^2}{\omega_1}\sin 2\Omega\\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + T^2\right)s_0''\left(p_0^2t + \frac{p_0p_1c_2}{\omega_1}\sin\Omega + p_0p_1c_2t\cos\Omega + \frac{1}{2}\frac{p_1^2c_2^2}{\omega_1}\sin 2\Omega\right)\\ &\quad - (c_0^2 + c_0''T^2)\left(p_0p_1c_1t\sin\Omega + \frac{p_1^2c_1c_2}{\omega_1}\frac{1-\cos 2\Omega}{2}\right)\\ &\quad + (c_0''T^2 - s_0^2)\left(\frac{p_0p_1c_1}{\omega_1}\cos\Omega + \frac{p_1^2c_1c_2}{\omega_1}\frac{1+\cos 2\Omega}{2}\right)\\ &\quad + c_1'T\left(s_0p_0p_1c_1t\sin\Omega + s_0\frac{p_1^2c_1c_2}{\omega_1}\frac{1-\cos 2\Omega}{2} + c_0p_0^2t + c_0p_0p_1c_2t\cos\Omega\right.\\ &\quad \left. + c_0\frac{p_0p_1c_2}{\omega_1}\sin\Omega + \frac{1}{2}c_0\frac{p_1^2c_2^2}{\omega_1}\sin 2\Omega\right).\end{aligned}$$

On pourra faire abstraction de l'unité dans les termes en $\cos 2\Omega$ des deux avant-dernières parenthèses, puisque ses produits par T^2, qui sont seuls à considérer, se détruisent.

31. L'intégration donnera, si l'on néglige les termes dont le coefficient ne renferme pas $\operatorname{tg}\delta_0$, ce qui arrive, entre autres, quand celui-ci est de la forme $m_0c_0 - n_0s_0$:

$$\left.\begin{aligned}
V_1 = &-\frac{1}{2}m_0s_0p_0^2t^2 - m_0\frac{p_0p_1}{\omega_1}(c_2s_0\sin\Omega + c_1c_0\cos\Omega)t \\
&-\frac{1}{4}\frac{p_1^2c_1c_2}{\omega_1^2}(m_0c_0+n_0s_0)\sin 2\Omega + \frac{1}{4}\left\{m_0s_0\frac{p_1^2c_2^2}{\omega_1^2} - n_0c_0\frac{p_1^2c_1^2}{\omega_1^2}\right\}\cos 2\Omega; \\
W_1 = &\left[s_0''\left(\frac{1}{2} + T^2\right) + c_1'c_0^2T\right]\frac{1}{2}p_0^2t^2 + \frac{1}{2}c_1'Ts_0\frac{p_1^2c_1c_2}{\omega_1}t \\
&+\left[\left(\frac{1}{2} + T^2\right)s_0'' + c_1'c_0T\right]p_0p_1c_2\frac{\sin\Omega}{\omega_1}t \\
&+(c_0^2 + c_0''T^2 - c_1's_0T)p_0p_1c_1\frac{\cos\Omega}{\omega_1}t \\
&+\frac{1}{2}\left[c_0''\left(\frac{1}{2} + T^2\right) - \frac{1}{2}c_1'Ts_0\right]\frac{p_1^2c_1c_2}{\omega_1^2}\sin 2\Omega \\
&-\frac{1}{4}\left[s_0''\left(\frac{1}{2} + T^2\right)\frac{c_1^2 + c_2^2}{c_2^2} + c_1'c_0T\right]\frac{p_1^2c_2^2}{\omega_1^2}\cos 2\Omega + c_1'Tp_0p_1c_1s_0\frac{\sin\Omega}{\omega_1^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

En remplaçant V et W par ces valeurs V_1 et W_1 dans les expressions précédentes (52), les équations (53) pourront s'écrire

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_1}{dt} + W_1(c_0p_1c_1\sin\Omega - s_0p_0 - s_0p_1c_2\cos\Omega)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} = \frac{dW_1}{dt} &- (1 + T^2)V_1(c_0p_1c_1\sin\Omega - s_0p_0 - s_0p_1c_2\cos\Omega) \\
&+ TW_1(s_0p_1c_1\sin\Omega + c_0p_0 + c_0p_1c_2\cos\Omega).
\end{aligned}$$

Comme les plus forts coefficients des termes de V_1 et W_1 ne renferment que des millièmes de seconde d'arc, et que le plus considérable dans les parenthèses, p_0, est égal à $\frac{1}{4000}$ environ, leurs produits par ce dernier seront négligeables; à plus forte raison des autres, puisqu'ils ne sont pas susceptibles de s'accroître considérablement par l'intégration.

32. Il reste toutefois encore à discuter la valeur des termes du second ordre omis dans les expressions qui précèdent.

Les plus importants sont certainement ceux en $\Delta\alpha^2$ qui ont $\mathrm{tg}^2\,\delta_0$ pour facteur.

L'expression de $\Delta\alpha^2$ (52) renferme affecté de ce facteur :

$$s_0^2 s_1^2 \Delta\psi^2 + c_0^2 \Delta\theta^2 + s_0'' s_1 \Delta\psi\Delta\theta,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{T}^2 \left\{ s_0^2\left(p_0^2 t^2 + 2\,\frac{p_0 p_1 c_2}{\omega_1}\sin \Omega t\right) + s_0''\,\frac{p_0 p_1 c_1}{\omega_1}\cos \Omega t + \cdots \right\} = \mathrm{T}^2\left\{\sum\right\}.$$

Il y aurait donc de ce chef à ajouter à $\frac{d\mathrm{V}_1}{dt}$:

$$-\frac{1}{2}\mathrm{T}^2\left\{\sum\right\}\left\{s_0\,\frac{d\theta}{dt} - c_0 s_1\,\frac{d\psi}{dt}\right\} =$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{T}^2\left\{\sum\right\}\left\{s_0 p_1 c_1 \sin \Omega + c_0 p_0 + c_0 p_1 c_2 \cos \Omega\right\}.$$

En se bornant ici au terme le plus considérable et en intégrant, on trouvera qu'il y a lieu d'ajouter à V_1 pour obtenir V :

$$-\frac{1}{6}\mathrm{T}^2 s_0^2 c_0 p_0^3 t^3.$$

De même il y aura lieu d'ajouter à $\frac{d\mathrm{W}_1}{dt}$

$$\frac{1}{2}\mathrm{T}^3\sum\left\{c_0\,\frac{d\theta}{dt} + s_0 s_1\,\frac{d\psi}{dt}\right\}$$

$$+\ \Delta\alpha\Delta\delta(1+\mathrm{T}^2)\left\{s_0\,\frac{d\theta}{dt} - c_0 s_1\,\frac{d\psi}{dt}\right\}.$$

Ici encore, nous nous bornerons à n'envisager d'abord que les termes les plus importants, qui ne sont pas périodiques, savoir :

$$-\frac{1}{2}\mathrm{T}^3 s_0^3 p_0^3 t^2 + \mathrm{T}(1+\mathrm{T}^2)c_0^2 s_0 p_0^3 t^2 = \left[\mathrm{T} + s_0\left(c_0^2 - \frac{1}{2}s_0^2\right)\mathrm{T}^3\right] p_1^3 t^2;$$

à cause desquels il faudra ajouter à W_1 pour obtenir W :

$$\left[\mathrm{T} + s_0\left(c_0^2 - \frac{1}{2}s_0^2\right)\mathrm{T}^3\right] p_0^3\,\frac{t^3}{3}.$$

Comme $\frac{p_0^3}{3}$ est égal à 0.000001″, et qu'il est multiplié par T^3, il ne deviendra un peu sensible que pour les étoiles distantes de 1° à peine du pôle. Aussi, quant aux termes périodiques qui proviennent de ceux du second ordre que nous avons négligés, comme leur coefficient est encore plus faible, et qu'il ne peut guère s'accroître par l'intégration, nous n'en tiendrons nullement compte, tout en faisant observer qu'il serait indispensable de le faire pour des étoiles distantes de quelques minutes seulement du pôle.

Mais pour ces dernières, l'intégration rigoureuse et, par suite, la réduction seraient tellement laborieuses pour un intervalle de temps dépassant l'année, que nous estimons préférable de s'en abstenir.

33. En adoptant les constantes de Bessel et de Peters, on trouvera, pour 1850, en secondes d'arc :

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\delta = &- c_0 s_1 \Delta\psi + s_0 \Delta\theta \\
&- \frac{1}{2} m_0 s_0 [7.2899]\, t^2 + m_0 \{ s_0 [6.8246] \sin \Omega + c_0 [6.9527] \cos \Omega \}\, t \\
&- \frac{1}{4} (c_1' c_0 + s_0'' \mathrm{T}) [6.4874] \sin 2\Omega - \frac{1}{4} \mathrm{T} (c_0^2 [6.6155] - s_0^2 [6.3593]) \cos 2\Omega \\
&- \frac{1}{2} s_0^2 c_0 \mathrm{T}^2\, 0.000001''.\, t^3 ; \\
\Delta\alpha = &- m_0 s_1 \Delta\psi - n_0 \Delta\theta \\
&+ \frac{1}{2} \left[s_0 c_0 (1 + 2\mathrm{T}^2) + c_1' c_0 \mathrm{T} \right] [7.2899]\, t^2 + \frac{1}{2} s_0 \mathrm{T} [6.5785]\, t \\
&- \left[s_0 c_0 (1 + 2\mathrm{T}^2) + c_1' c_0 \mathrm{T} \right] [6.8246] \sin \Omega \cdot t \\
&- (c_0'' \mathrm{T}^2 + c_1' s_0 \mathrm{T} + c_0^2) [6.9527] \cos \Omega \cdot t \\
&+ \frac{1}{2} c_0'' \left(\mathrm{T}^2 + \frac{1}{2} \right) [6.4874] \sin 2\Omega - \frac{1}{2} s_0 c_0 \left(\mathrm{T}^2 + \frac{1}{2} \right) [6.8071] \cos 2\Omega \\
&- c_1' \mathrm{T} \{ s_0 [7.4242] \sin \Omega - c_0 [6.3593] \cos 2\Omega - s_0 [6.4874] \sin 2\Omega \} \\
&+ \left[s_0 \left(c_0^2 - \frac{1}{2} s_0^2 \right) \mathrm{T}^3 + \mathrm{T} \right] 0.000001''.\, t^3 ;
\end{aligned}\right\} \quad (56)$$

les parenthèses numériques désignent, en secondes d'arc, les nombres dont elles renferment les logarithmes.

34. Il faudra remplacer $\Delta\theta$ et $-s_1\Delta\psi$ par les expressions complètes de la précession et de la nutation tant annuelle que diurne, qui sont données dans les formules (30) à (37).

Dans la réduction de ces formules en nombres, nous laisserons indéterminés, outre le coefficient de la nutation diurne

$$-\frac{h\nu}{n}=\frac{3}{8}\left(\frac{m_1}{n}\right)^2\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\ (\text{art. } 26),$$

que nous appellerons N_d, et celui de la nutation annuelle

$$\mathrm{N}_a=-2h\mu_1=\frac{3}{2}\frac{m_1^2}{n}\frac{2\mathrm{C}-\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2\mathrm{C}},$$

le rapport f des actions de la Lune et du Soleil, nous réservant de déterminer ultérieurement, par l'application de nos formules à de bonnes séries d'observations, ces trois coefficients, dont aucun n'est connu avec une précision suffisante.

Comme, dans les formules (31), c'est l'écliptique fixe de 1850 qui est prise pour plan de référence, afin que les suivantes soient rapportées à l'équinoxe moyen de $1850+t$, nous retrancherons de la précession luni-solaire la quantité $c_1'\varepsilon_1 \sin \Lambda_0$ qui sera désignée par χ' (44).

Au lieu de $\frac{\alpha_1}{n_1(1+j)}$, (30) et (31), qui est une constante arbitraire, il suffira d'écrire α_1, et n_1' au lieu de $n_1(1+j)$.

Pour le calcul de certains coefficients, la connaissance de $1+\mu$ est indispensable, sinon, l'on aurait un trop grand nombre d'inconnues, ou une trop forte complication de formules. Nous prendrons, dans ce cas, $\mu=0.00528$, comme nous l'avons trouvé par la comparaison des constantes de Bessel et de Peters, qui concordent bien entre elles (*).

Cela fait, et adoptant, outre les valeurs numériques des articles **12** et **13**, $\theta_0=23°27'31.5''$ pour 1850, les expressions pratiques complètes de la précession et de la nutation seront les suivantes, pour le calcul numérique desquelles nous avons

(*) *Théorie*, etc., art. 53.

pris $f = 2.18$ (*) dans l'expression de la nutation diurne, et dans quelques autres termes indiqués ci-dessous; de plus, nous avons réduit en un seul les termes en sin ☊ et ceux en sin 2☊ des formules (31) et (33).

Afin de faciliter le calcul numérique de ces formules, nous avons fait entrer dans l'expression de $-s_1\Delta\psi$ les mêmes termes entre parenthèses que dans celle de $\Delta\theta$, et nous avons ajouté à ces termes ceux qui sont nécessaires pour compléter l'expression. Dans ces derniers, qui sont généralement assez faibles, nous avons pris également $f = 2.18$.

Comme N_d est tout au moins cent fois plus petit que N_a, on pourra, dans presque toutes les réductions, faire abstraction, parmi les termes de la nutation diurne, de ceux en ☉ + Γ et en 2☊, dont le facteur logarithmique a pour caractéristique 7 au plus.

De même, parmi les termes de la nutation annuelle, on négligera, en obliquité, celui en ☉ — Γ donné ci-dessus (30), et en longitude, dans la parenthèse $\Sigma' \{ \sin \}$, les termes en 2☉ — 2Γ et en 2☉ — ☊, dont les coefficients ont pour caractéristique 5.

Ces termes doivent néanmoins être conservés dans les réductions des circompolaires, de même que dans celles qui exigent une très grande précision.

Les termes qui dépendent, sous le facteur ζ, du périgée du Soleil, peuvent être supprimés dans le calcul ordinaire des réductions, comme rentrant dans la correction du lieu moyen.

Ce n'est que dans la réduction d'observations séparées par un très long intervalle de temps qu'il conviendra d'en tenir compte, si la détermination de ζ donne toutefois à ce coefficient une valeur égale à 0.01″ au moins.

35. Nous poserons :

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma\{\cos\}_{☾} &= \{[9.38696]\cos ☊ - [7.3726]\cos 2☊ \\
&\quad + [7.3695]\cos 2☾ - [6.4082]\cos(☾ + \Gamma') \\
&\quad + [6.4783]\cos(3☾ - \Gamma') + [6.6848]\cos(2☾ - ☊)\}. \\
\Sigma\{\cos\}_{☉} &= \{[8.49108]\cos 2☉ - [6.7261]\cos(☉ + \Gamma) \\
&\quad + [7.0933]\cos(3☉ - \Gamma) - [6.4529)\cos(2☉ - ☊)\};
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

(*) *Théorie*, etc., art. 52.

et de même $\Sigma\{\sin\}_{☾}$ et $\Sigma\{\sin\}_{\odot}$ égales aux mêmes expressions, dans lesquelles chaque cosinus est remplacé par le sinus correspondant.

De plus :

$$\left.\begin{aligned}\Sigma'\{\sin\}=\{\ &[8.96307]\sin ☊-[6.533]\sin 2☊\\&+[7.1931]\sin(☾-\Gamma')+[6.260]\sin(2☾-☊)\\&+[7.4668]\sin(\odot-\Gamma)-[6.095]\sin(2\odot-2\Gamma')\\&+[5.543]\sin(2\odot-2\Gamma)-[5.689]\sin(2\odot-☊)\}.\end{aligned}\right\}\quad(58)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1=\left[\begin{aligned}&-[0.062729]\\&-[9.12575]\cos ☊+[7.503]\cos 2☊+[9.91335]\cos 2☾\\&-[0.11402]\cos(☾-\Gamma')-[8.3461]\cos(☾+\Gamma')\\&+[9.20591]\cos(3☾-\Gamma')+[9.14265]\cos(2☾-☊)\\&+[9.55411]\cos 2\odot-[8.2649]\cos(\odot-\Gamma)\\&+[8.3330]\cos(3\odot-\Gamma)-[7.487]\cos(\odot+\Gamma)\end{aligned}\right]\\&\sum_2=\left[\begin{aligned}&-[9.25380]\sin ☊+[6.540]\sin 2☊+[9.94765]\sin 2☾\\&-[8.5718]\sin(☾-\Gamma')-[8.3820]\sin(☾+\Gamma')\\&+[9.23951]\sin(3☾-\Gamma')+[9.26126]\sin(2☾-☊)\\&+[9.59137]\sin 2\odot+[8.3693]\sin(3\odot-\Gamma)\\&-[7.525]\sin(\odot+\Gamma).\end{aligned}\right]\end{aligned}\right\}\quad(59)$$

$$\left.\begin{aligned}{[\sin]}_{\Gamma}&=-[0.6537]\sin\Gamma-[1.04261]\sin\Gamma'\\&\quad+[0.33267]\sin(\Gamma'+☊).\\{[\cos]}_{\Gamma}&=-[0.3023]\cos\Gamma-[0.70923]\cos\Gamma'\\&\quad+[0.25208]\cos(\Gamma'+☊)-[0.20527]\cos(\Gamma'-☊).\end{aligned}\right\}\quad(60)$$

Enfin nous écrirons, en faisant $c'_1\varepsilon_1\sin\Lambda_0=\chi'$ (44) :

$$\psi'_1=c_1N_a(1.00042+f\,0.99240)-\chi'-0.000578''.\ \text{Voir (35).}$$

Cela posé, les expressions complètes de la précession et de la nutation, qu'il s'agira de substituer dans les formules (56), seront pour 1850, c_1 désignant toujours $\cos\theta_0=[9.962534]$:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_n\theta&=\alpha_1\cos(n'_1t+\beta_1)+N_a\left[f\Sigma\{\cos\}_{☾}+\Sigma\{\cos\}_{\odot}\right]\\&\quad+N_d\cos 2\varphi\Sigma_1+N_d\sin 2\varphi\Sigma_2+\zeta[\sin]_\Gamma\\-s_1\Delta_n\psi&=-\alpha_1\sin(n'_1t+\beta_1)+s_1\psi'_1t-c_1N_a\left[f\Sigma\{\sin\}_{☾}+\Sigma\{\sin\}_{\odot}\right]\\&\quad+N_a\Sigma'\{\sin\}+N_d\cos 2\varphi\Sigma_2-N_d\sin 2\varphi\Sigma_1+\zeta[\cos]_\Gamma.\end{aligned}\right\}\quad(61)$$

36. Abstraction faite des termes du second ordre, les formules (56) deviendront ainsi :

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\delta = & - \alpha_1 \sin(n_1't + \beta_1 - \alpha) + \mathrm{N}_a\Big[\sin\alpha\Big(f\Sigma\{\cos\}_{☾} + \Sigma\{\cos\}_{\odot}\Big) \\
& - c_1 \cos\alpha\Big(f\Sigma\{\sin\}_{☾} + \Sigma\{\sin\}_{\odot}\Big) + \cos\alpha\Sigma'\{\sin\}\Big] \\
& + s_1 \cos\alpha\,\psi_1' t - \mathrm{N}_d\Sigma_1 . \sin(2\varphi - \alpha) + \mathrm{N}_d\Sigma_2 \cos(2\varphi - \alpha) \\
& + \zeta\{[\sin]_{\mathrm{r}} \sin\alpha + [\cos]_{\mathrm{r}} \cos\alpha\}. \\
\Delta\alpha = & - \alpha_1\big[c_1' \sin(n_1't + \beta_1) + \mathrm{tg}\,\delta \cos(n_1't + \beta_1 - \alpha)\big] \\
& - \mathrm{tg}\,\delta \cos\alpha\, \mathrm{N}_a\big[f\Sigma\{\cos\}_{☾} + \Sigma\{\cos\}_{\odot}\big] \\
& + (c_1' + \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta)\Big[s_1\psi_1' t - \mathrm{N}_a c_1\Big(f\Sigma\{\sin\}_{☾} + \Sigma\{\sin\}_{\odot}\Big) \\
& + \mathrm{N}_a\Sigma'\{\sin\}\Big] \\
& - \mathrm{N}_d\Sigma_1 . \big[c_1' \sin 2\varphi + \mathrm{tg}\,\delta \cos(2\varphi - \alpha)\big] \\
& + \mathrm{N}_d\Sigma_2 . \big[c_1' \cos 2\varphi - \mathrm{tg}\,\delta \sin(2\varphi - \alpha)\big] \\
& - \mathrm{tg}\,\delta \cos\alpha\,\zeta\,[\sin]_{\mathrm{r}} + (c_1' + \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta)\zeta\,[\cos]_{\mathrm{r}}.
\end{aligned}\right\} \quad (62)$$

Si le lecteur veut traduire en nombres les formules (61), et qu'il déduise $f\mathrm{N}_a$ de la constante de Peters 9.2235″ (1850), il trouvera, même en adoptant avec nous $f = 2.18$, des résultats inférieurs, dans les centièmes de seconde, à ceux de Peters, pour les termes si importants qui dépendent de la double longitude du Soleil (*) ; à plus forte raison, s'il prenait, avec les géomètres modernes (**), $f = 2.1866$. La détermination de Peters repose donc sur des formules inexactes en différents points (***). Elle est à reprendre ; c'est ce que nous nous proposons de faire au moyen de nos formules ; et c'est pourquoi le coefficient N_a y reste indéterminé.

(*) Il est à remarquer que la transformation de la longitude moyenne en longitude vraie, effectuée par Peters, n'altère le coefficient de cos $2\odot$ que dans la quatrième décimale.

(**) Le Verrier, *Ann. de l'Obs. de Paris*, II, 174. Si l'on part des données admises par Oppolzer (pp. 180-181 de la traduction Pasquier), on trouve $f = 2.188$. Peters avait admis la valeur manifestement trop faible $f = 2.162$, c'est-à-dire qu'il a attribué au Soleil une action trop considérable.

(***) Comp. pp. 35 et 37, et *Théorie*, etc., art. 56.

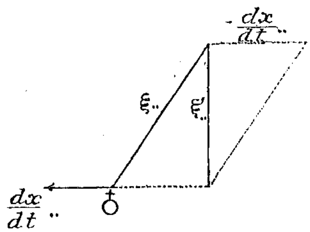
CHAPITRE II.

DE L'ABERRATION ET DE LA PARALLAXE STELLAIRES.

§ 1. *Aberration diurne, annuelle et systématique.*

37. Il ne sera question ici que de l'aberration des fixes, c'est-à-dire des étoiles sans mouvement propre réel.

Celle-ci est due à trois causes : la vitesse de rotation de la Terre, sa vitesse de translation autour du Soleil, et sa vitesse systématique, c'est-à-dire celle qu'elle a en commun avec le Soleil lui-même.



Soient α et δ les coordonnées polaires du rayon lumineux non aberré émis par l'étoile, rapportées à l'équateur vrai ; α' et δ' celles du rayon aberré ; V la vitesse de propagation de la lumière. Les composantes de la vitesse du rayon seront

$$\xi = -\mathrm{V}\cos\delta\cos\alpha, \quad \eta = -\mathrm{V}\cos\delta\sin\alpha, \quad \zeta = -\mathrm{V}\sin\delta;$$

et, si $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sont celles de la vitesse du lieu d'observation, les composantes de la vitesse relative V' de propagation seront $\xi' = \xi - \frac{dx}{dt}$, etc.

Puisque le rayon frappe notre œil avec cette vitesse relative, en appelant α', δ' ses coordonnées affectées de l'aberration, nous aurons

$$\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}}\cos\delta'\cos\alpha' = \cos\delta\cos\alpha + \frac{1}{\mathrm{V}}\frac{dx}{dt}, \quad \text{etc.,} \tag{1}$$

équations d'où il s'agit de tirer $\alpha' - \alpha$ et $\delta' - \delta$.

On en déduit d'abord

$$\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}}\cos\delta'\sin(\alpha' - \alpha) = \frac{1}{\mathrm{V}}\left(\cos\alpha\frac{dy}{dt} - \sin\alpha\frac{dx}{dt}\right), \tag{2}$$

que nous écrirons

$$= \frac{1}{V} \cdot C';$$

puis

$$\frac{V'}{V} \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha) = \cos \delta + \frac{1}{V}\left(\sin \alpha \frac{dy}{dt} + \cos \alpha \frac{dx}{dt}\right) = \cos \delta + \frac{1}{V} . S', \quad (3)$$

et l'on verra que S' et C' peuvent se mettre sous la forme $\Sigma M \sin \chi$ et $\Sigma M \cos \chi$.

Si l'on fait $\frac{1}{V} = v$, fraction très petite et $v \sec \delta = v'$, on aura rigoureusement, en posant $\operatorname{tg} (\alpha' - \alpha) = \Delta\alpha$:

$$\Delta\alpha = \frac{v'C'}{1 + v'S'} = v'C'[1 - v'S' + v'^2 S'^2 + \cdots] \quad (4)$$

en s'arrêtant aux termes du troisième ordre en v'.

Or

$$C'S' = \frac{1}{2} \Sigma M_1 M_2 \sin (\chi_1 + \chi_2)$$

et

$$S'^2 = \frac{1}{2} \Sigma M_1 M_2 \left[\cos(\chi_1 - \chi_2) - \cos(\chi_1 + \chi_2)\right],$$

C' étant de la forme

$$M_1 \cos \chi_1 + M_2 \cos \chi_2 + \cdots,$$

S' de la forme

$$M_1 \sin \chi_1 + M_2 \sin \chi_2 + \cdots,$$

et les sommes précédentes s'étendant à tous les produits deux à deux des termes de C' par ceux de S', les carrés y compris, en sorte que ces derniers n'entreront qu'une fois, les autres deux fois dans la somme.

On a donc

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha = v' \Sigma M \cos \chi - \frac{1}{2} v'^2 \Sigma M_1 M_2 \sin (\chi_1 + \chi_2) \\ + \frac{1}{2} v'^3 \Sigma M \cos \chi \Sigma M_1 M_2 \left[\cos (\chi_1 - \chi_2) - \cos (\chi_1 + \chi_2)\right] \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

dont le dernier terme peut s'écrire symboliquement, comme les précédents,

$$+\frac{1}{4}v'^3\,\Sigma\,M_1M_2M_3\Big[-\cos(\chi_1+\chi_2+\chi_3)+\cos(\chi_1+\chi_2-\chi_3)$$
$$+\cos(\chi_1-\chi_2+\chi_3)+\cos(\chi_1-\chi_2-\chi_3)\Big]$$

38. Or m_1, n_1 et σ_1 désignant les moyens mouvements annuel, diurne et systématique du lieu d'observation, $\odot$ et Γ les longitudes vraies du Soleil et du périgée, τ l'heure sidérale, A′, D′ les coordonnées du point vers lequel se dirige le Soleil, on sait que

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=m_1(\sin\odot+e\sin\Gamma)-n_1\sin\tau+\sigma_1\cos D'\cos A'\\ \frac{dy}{dt}&=-c_1m_1(\cos\odot+e\cos\Gamma)+n_1\cos\tau+\sigma_1\cos D'\sin A';\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

d'où

$$\left.\begin{aligned}&\cos\alpha\frac{dx}{dt}+\sin\alpha\frac{dy}{dt}=m_1(\cos\alpha\sin\odot-c_1\sin\alpha\cos\odot)\\&\qquad+em_1(\cos\alpha\sin\Gamma-c_1\sin\alpha\cos\Gamma)\\&+\sigma_1\cos D'(\cos\alpha\cos A'+\sin\alpha\sin A')-n(\cos\alpha\sin\tau+\sin\alpha\cos\tau)\\&=m_1c'^2\sin(\odot-\alpha)+m_1s'^2\sin(\odot+\alpha)\\&+em_1c'^2\sin(\Gamma-\alpha)+em_1s'^2\sin(\Gamma+\alpha)\\&+\sigma_1\cos D'\cos(A'-\alpha)-n_1\sin(\tau-\alpha),\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

c' et s' désignant le cos. et le sin. de la demi-obliquité;

$$\left.\begin{aligned}&\cos\alpha\frac{dy}{dt}-\sin\alpha\frac{dx}{dt}=-m_1(c_1\cos\odot\cos\alpha+\sin\odot\sin\alpha)\\&\qquad-em_1(c_1\cos\Gamma\cos\alpha+\sin\Gamma\sin\alpha)\\&+\sigma_1\cos D'(\sin A'\cos\alpha-\cos A'\sin\alpha)+n(\cos\tau\cos\alpha+\sin\tau\sin\alpha)\\&=-m_1c'^2\cos(\odot-\alpha)+m_1s'^2\cos(\odot+\alpha)\\&-em_1c'^2\cos(\Gamma-\alpha)+em_1s'^2\cos(\Gamma+\alpha)\\&+\sigma_1\cos D'\sin(A'-\alpha)+n_1\cos(\tau-\alpha).\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Les seconds membres des équations (7) et (8) pourront s'écrire sous la forme

$$S'=\Sigma\,M\sin\chi,\quad C'=\Sigma\,M\cos\chi,$$

les expressions correspondantes de M et de χ étant les suivantes :

M : $-m_1c'^2$, $+m_1s'^2$, $-em_1c'^2$, $+em_1s'^2$, $+\sigma_1\cos D'$, $+n_1$;

χ : $\alpha-\odot$, $\alpha+\odot$, $\alpha-\Gamma$, $\alpha+\Gamma$, $\alpha+A''$, $\alpha-\tau$,

A″ désignant le complément de A′.

39. Ces expressions, substituées dans celle de $\Delta\alpha$, donnent

$$\left.\begin{aligned}\Delta\alpha = {} & v\sec\delta\,\Big\{-m_1c'^2\big[\cos(\alpha-\odot)+e\cos(\alpha-\Gamma)\big]\\ & \qquad +m_1s'^2\big[\cos(\alpha+\odot)+e\cos(\alpha+\Gamma)\big]\\ & \qquad -\sigma_1\cos D'\sin(\alpha-A')+n_1\cos(\alpha-\tau)\Big\}\\ & -\frac{1}{2}v^2\sec^2\delta\Big\{\ m_1^2c'^4\sin 2(\alpha-\odot)+m_1^2s'^4\sin 2(\alpha+\odot)\\ & \qquad -2m_1^2s'^2c'^2(1+e)\sin 2\alpha\\ & \qquad +\sigma_1^2\cos^2 D'\sin 2(A'-\alpha)\\ & \qquad -2m_1\sigma_1c'^2\cos D'\cos(2\alpha-A'-\odot)\\ & \qquad +2m_1\sigma_1s'^2\cos D'\cos(2\alpha-A'+\odot)\Big\}.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Si l'on fait abstraction des termes non périodiques, qui rentrent dans la correction du lieu moyen, ainsi que de ceux de l'aberration diurne, dont on corrige directement l'observation, la formule se réduira à la suivante :

$$\left.\begin{aligned}\Delta\alpha = {} & v\sec\delta\,\Big\{-m_1c'^2\big[\cos(\odot-\alpha)+e\cos(\Gamma-\alpha)\big]\\ & \qquad +m_1s'^2\big[\cos(\odot+\alpha)+e\cos(\Gamma+\alpha)\big]\Big\}\\ & -\frac{1}{2}v^2\sec^2\delta\Big\{-m_1^2c'^4\sin 2(\odot-\alpha)+m_1^2s'^4\sin 2(\odot+\alpha)\\ & \qquad -2m_1\sigma_1c'^2\cos D'\cos(\odot+A'-2\alpha)\\ & \qquad +2m_1\sigma_1s'^2\cos D'\cos(\odot-A'+2\alpha)\Big\}.\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

A cause de la lenteur de leur période, nous ferons encore rentrer dans la correction du lieu moyen les termes qui dépendent du périgée. L'ensemble de ceux qui appartiennent à cette correction est donc

$$\left.\begin{aligned}& v\sec\delta\,(-m_1c'^2e\cos(\Gamma-\alpha)+m_1s'^2e\cos(\Gamma+\alpha)+\sigma_1\cos D'\sin(A'-\alpha))\\ & \quad -\frac{1}{2}v^2\sec^2\delta\big[-2m_1^2s'^2c'^2(1+e)\sin 2\alpha+\sigma_1^2\cos^2 D'\sin 2(A'-\alpha)\big].\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Et les termes exclusivement périodiques pourront s'écrire, si l'on fait

$$vm_1 = 20.5'' + x'',$$

d'où

$$v^2 m_1^2 = (20.5 + 2x)'' \frac{20.5}{206\,265} = 0.00208'' + x\,0.0002'';$$

et de plus

$$\frac{\sigma_1 \cos D'}{m_1} = y; \quad \text{d'où} \quad v^2 m_1 \sigma_1 \cos D' = 0.00208''.\, y: \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha = & - \sec\delta\,(20.5 + x)\left[c'^2 \cos(\odot - \alpha) - s'^2 \cos(\odot + \alpha)\right] \\ & + \sec^2\delta\,(0.00104 + 0.0001x)\left\{c'^4 \sin 2(\odot - \alpha)\right. \\ & - s'^4 \sin 2(\odot + \alpha) + 2yc'^2 \cos(\odot + A' - 2\alpha) \\ & \left. - 2ys'^2 \cos(\odot - A' + 2\alpha)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

40. Réduisant en nombres, on a, pour 1850, en représentant par $[l]$ le nombre dont l est le logarithme :

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha = & - \sec\delta\left[[1.293424]\cos(\odot - \alpha) - [9.927968]\cos(\odot + \alpha)\right] \\ & + \sec^2\delta\left[[6.98037]\sin 2(\odot - \alpha) - [4.2493]\sin 2(\odot + \alpha)\right] \\ & - \sec\delta.\, x\left[[9.98167]\cos(\odot - \alpha) - [8.61621]\cos(\odot + \alpha)\right] \\ & + \sec^2\delta\, 0.0001\, x\left[[9.96334]\sin 2(\odot - \alpha)\right. \\ & \qquad \left. - [7.2324]\sin 2(\odot + \alpha)\right] \\ & + \sec^2\delta.\, y[7\,29973]\cos(\odot + A' - 2\alpha) \\ & - \sec^2\delta.\, y[5.9342]\cos(\odot - A' + 2\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{13 bis}$$

L'inspection des deux derniers termes de cette formule montre que l'influence de l'aberration systématique, que l'on avait considérée comme constante jusque dans ces derniers temps, ne l'est pas, et que sa partie périodique peut s'élever en Æ à un demi-dixième de seconde de temps pour la polaire (*), si l'on admet

(*) Les premiers articles, dans lesquels il ait été question de l'influence *non constante* de l'aberration systématique sur la position d'une même étoile, ont paru dans les *A. N.*, n° 2607, F. Folie : *Un chapitre inédit d'astronomie sphérique;* n° 2610, Seeliger : *Ueber die Aberration der Fixsterne.* Ce dernier article avait été reçu par la rédaction des *A. N.* avant que le mien eût paru. Voir aussi dans le *Bull. astr.*, mars 1887, Thewis : *Sur la théorie de l'aberration de M. Seeliger.*

que la vitesse annuelle du mouvement systématique est de 1 $^1/_2$ à 2 fois le demi-grand axe de l'orbite terreste, d'où (12) $y = \frac{1}{4}$ environ.

41. Enfin, comme α et δ représentent, dans le second membre de $\Delta\alpha$, les coordonnées affectées de la précession et de la nutation, il faudra, si l'on veut leur faire représenter les coordonnées moyennes au 1er janvier de l'année de l'observation, ajouter à α et à δ respectivement

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha &= m'j + n'j \sin\alpha \operatorname{tg}\delta - 15.8'' \sin \Omega \\ &\qquad - \operatorname{tg}\delta\,(6.9'' \sin\alpha \sin\Omega + 9.2'' \cos\alpha \cos\Omega) \\ \text{et} \qquad & \\ \Delta\delta &= n'j \cos\alpha - 6.9'' \cos\alpha \sin\Omega + 9.2'' \sin\alpha \cos\Omega, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

m' et n' représentent les valeurs connues, rapportées au jour moyen comme unité, et j le nombre des jours écoulés depuis le 1er janvier de l'époque.

Il suffira évidemment d'introduire cette modification dans le premier terme en $\sec\delta$; et l'on trouvera ainsi qu'il y a lieu d'ajouter au second membre les termes suivants, dont le calcul n'est nécessaire que pour les circompolaires, en omettant même ceux qui ne sont pas multipliés par $\operatorname{tg}\delta \sec\delta$:

$$\Delta^2\alpha = -0.0000995 \operatorname{tg}\delta \sec\delta \left\{\begin{aligned} &c'^2\big[(n'j - 6.9 \sin\Omega)\cos(\odot - 2\alpha) - 9.2 \cos\Omega \sin(\odot - 2\alpha)\big] \\ -&s'^2\big[(n'j - 6.9 \sin\Omega)\sin(\odot - 2\alpha) + 9.2 \cos\Omega \sin(\odot + 2\alpha)\big] \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

En secondes de temps, le premier coefficient serait 0.000006633.

42. Pour rechercher l'aberration en déclinaison, partons d'abord de l'équation (1) :

$$\frac{V'}{V} \sin\delta' = \sin\delta + v\frac{dz}{dt},$$

et tirons ensuite des équations (2), en prenant la racine carrée de la somme de leurs carrés :

$$\frac{V'}{V} \cos\delta' = \cos\delta + vS' + \frac{1}{2} \sec\delta\, v^2 C'^2.$$

La combinaison des égalités précédentes donnera :

$$\frac{V'}{V}\sin(\delta'-\delta)=v\cos\delta\frac{dz}{dt}-v\sin\delta S'-\frac{1}{2}v^2\operatorname{tg}\delta C'^2,$$

$$\frac{V'}{V}\cos(\delta'-\delta)=1+v\sin\delta\frac{dz}{dt}+v\cos\delta S'+\frac{1}{2}v^2C'^2,$$

et la combinaison de celles-ci :

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\delta'-\delta)=&(v\cos\delta-v^2\cos 2\delta S')\frac{dz}{dt}\\&-\frac{1}{2}v^2\sin 2\delta\left[\left(\frac{dz}{dt}\right)^2-S'^2\right]-v\sin\delta S'-\frac{1}{2}v^2\operatorname{tg}\delta C'^2.\end{aligned}$$

Or, la troisième des équations (6) est

$$\frac{dz}{dt}=-s_1m_1(\cos\odot+e\cos\Gamma)+\sigma_1\sin D'.$$

Substituant cette expression ainsi que celles de S' et de C'^2 (7), on trouve, en laissant de côté les termes insignifiants, et en écrivant $\Delta\delta$ au lieu de $\operatorname{tg}(\delta'-\delta)$:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\delta=&\,v\cos\delta\left[-m_1s_1(\cos\odot+e\cos\Gamma)+\sigma_1\sin D'\right]\\&-v\sin\delta\left[m_1c'^2\sin(\odot-\alpha)+m_1s'^2\sin(\odot+\alpha)+\sigma_1\cos D'\cos(A'-\alpha)\right]\\&+\frac{1}{2}v^2\cos 2\delta\Big\{m_1^2s_1\left[c'^2\sin(2\odot-\alpha)+s'^2\sin(2\odot+\alpha)-c_1\sin\alpha\right]\\&+m_1s_1\sigma_1\cos D'\left[\cos(\odot+A'-\alpha)+\cos(\odot-A'+\alpha)\right]\\&-m_1\sigma_1c'^2\left[\cos(\odot-D'-\alpha)-\cos(\odot+D'-\alpha)\right]\\&-m_1\sigma_1s'^2\left[\cos(\odot-D'+\alpha)-\cos(\odot+D'+\alpha)\right]\Big\}\\&-\frac{1}{2}v^2\operatorname{tg}\delta\, m_1^2\Big\{c'^4\cos^2(\odot-\alpha)+s'^4\cos^2(\odot+\alpha)\\&\qquad\qquad-s'^2c'^2(\cos 2\odot+\cos 2\alpha)\Big\}\\&+\frac{1}{4}v^2\operatorname{tg}\delta\, m_1\sigma_1\cos D'\Big\{c'^2\left[\sin(\odot+A'-2\alpha)-\sin(\odot-A')\right]\\&\qquad\qquad+s'^2\left[\sin(\odot-A'+2\alpha)-\sin(\odot+A')\right]\Big\}.\\&-\frac{1}{4}v^2\sin 2\delta\Big\{\;2m_1s_1\sigma_1\left[\sin(\odot-D')-\sin(\odot+D')\right]\\&\qquad+m_1s_1^2\cos 2\odot-\sigma_1^2\cos 2D'\\&\qquad+m_1^2c'^4\cos 2(\odot-\alpha)+m_1^2s'^4\cos 2(\odot+\alpha)\\&\qquad-\sigma_1^2\cos^2 D'\cos 2(A'-\alpha)+2m_1^2s'^2c'^2\cos 2\odot\\&\qquad-2m_1\sigma_1\cos D'\left[c'^2\sin(\odot-A')+c'^2\sin(\odot+A'-2\alpha)\right.\\&\qquad\qquad\left.+s'^2\sin(\odot+A')+s'^2\sin(\odot-A'+2\alpha)\right]\Big\}.\end{aligned}\right\}\;(16)$$

Omettons dans cette formule les termes non périodiques, qui rentrent dans la correction du lieu moyen, savoir :

$$\left.\begin{aligned} & v\cos\delta(\sigma_1\sin D' - s_1 m_1 e\cos\Gamma) - \sin\delta v\sigma_1\cos D'\cos(A'-\alpha) \\ & -\frac{1}{2}v^2 m_1^2\cos 2\delta s_1 c_1\sin\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\delta\, v^2 m_1^2 s'^2 c'^2\cos 2\alpha + \frac{1}{4}v^2\sigma_1^2\cos 2D'\sin 2\delta \\ & \qquad + \frac{1}{4}v^2\sigma_1^2\cos^2 D'\cos 2(A'-\alpha)\sin 2\delta; \end{aligned}\right\}\ (17)$$

puis remplaçons, comme ci-dessus,

$$vm_1 \text{ par } 20.5 + x,\quad v^2 m_1^2 \text{ par } 0.00208,$$
$$\frac{\sigma_1\cos D'}{m_1} \text{ par } y,\quad v^2 m_1\sigma_1\cos D' \text{ par } 0.00208\,y;$$

il viendra :

$$\left.\begin{aligned} \Delta\delta = & -(20.5+x)\big[s_1\cos\delta\cos\odot + c'^2\sin\delta\sin(\odot-\alpha) + s'^2\sin\delta\sin(\odot+\alpha)\big] \\ & - 0.00052\operatorname{tg}\delta\big[c'^4\cos 2(\odot-\alpha) + s'^4\cos 2(\odot+\alpha) - s'^2c'^2\cos 2\odot\big] \\ & + \cos 2\delta\, 0.00104\, s_1\big[c'^2\sin(2\odot-\alpha) + s'^2\sin(2\odot+\alpha)\big] \\ & + \cos 2\delta\,.\,0.00104\,.\,ys_1\big[\cos(\odot+A'-\alpha) + \cos(\odot-A'+\alpha)\big] \\ & - \cos 2\delta\,.\,0.00104\,y\sec D'\big\{c'^2\big[\cos(\odot-D'-\alpha) - \cos(\odot+D'-\alpha)\big] \\ & \qquad + s'^2\big[\cos(\odot-D'+\alpha) - \cos(\odot+D'+\alpha)\big]\big\} \\ & + 0.00052\operatorname{tg}\delta\, y\big\{c'^2\big[\sin(\odot+A'-2\alpha) - \sin(\odot-A')\big] \\ & \qquad + s'^2\big[\sin(\odot-A'+2\alpha) - \sin(\odot+A')\big]\big\} \end{aligned}\right|\ (18)$$

ou, réduisant en nombres :

$$\left.\begin{aligned} \Delta\delta = & -(20.5+x)\big\{[9.599980]\cos\delta\cos\odot + [9.990851]\sin\delta\sin(\odot-\alpha) \\ & \qquad + [8.61622]\sin\delta\sin(\odot+\alpha)\big\} \\ & - 0.00052\operatorname{tg}\delta\big\{[9.9635]\cos 2(\odot-\alpha) + [7.232]\cos 2(\odot+\alpha) \\ & \qquad - [8.0141]\cos 2\odot\big\} \\ & + 0.00104\cos 2\delta\big\{[9.58164]\sin(2\odot-\alpha) + [8.2162]\sin(2\odot+\alpha)\big\} \\ & + y\cos 2\delta\, 0.00104\, s_1\big[\sin(\odot+A'+\alpha) - \sin(\odot-A'-\alpha)\big] \\ & - y\sec D'\cos 2\delta\big\{[6.9987]\big[\cos(\odot-D'-\alpha) - \cos(\odot+D'-\alpha)\big] \\ & - [5.633]\big[\cos(\odot-D'+\alpha) - \cos(\odot+D'+\alpha)\big]\big\} \\ & - y\operatorname{tg}\delta\big\{[6.9987]\big[\sin(\odot+A'-2\alpha) + \sin(\odot-A')\big] \\ & \qquad + [5.633]\big[\sin(\odot-A'+2\alpha) - \sin(\odot+A')\big]\big\}. \end{aligned}\right|\ (18\ bis.)$$

On voit encore, dans les derniers termes de cette expression, se manifester l'influence de l'aberration systématique.

Si l'on veut que les coordonnées α et δ se rapportent, dans les formules (18), à la position moyenne de l'étoile, il faudra ajouter au second membre les termes suivants, en omettant ceux qui n'ont pas tg δ en facteur :

$$\left.\begin{aligned}\Delta^2\delta = 0.0000995 \sin\delta \operatorname{tg}\delta \left[c'^2 \cos(\odot - \alpha) - s'^2 \cos(\odot + \alpha)\right]\\ \left[n'j \sin\alpha - 6.9 \sin\alpha \sin \Omega - 9.2 \cos\alpha \cos\Omega\right]\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

43. Il y a un procédé plus simple pour tenir compte des termes du second ordre de l'aberration annuelle en Æ et D. Supposons qu'on remplace α et δ respectivement par $\alpha + \Delta_1\alpha$ et $\delta + \Delta_1\delta$, α et δ représentant ici les coordonnées moyennes, $\Delta_1\alpha$ et $\Delta_1\delta$ les corrections qu'elles subissent par le fait de la précession et de la nutation annuelle, et que ces dernières soient mises sous la forme connue :

$$\mathrm{A}a + \mathrm{B}b, \quad \mathrm{A}a' + \mathrm{B}b'.$$

Si l'on désigne par $\Delta^2\alpha$ et $\Delta^2\delta$ les variations des termes de l'aberration dues à ces variations des coordonnées, et par u la constante de l'aberration en nombre abstrait, 0.0000995, on aura:

$$\left.\begin{aligned}\Delta^2\alpha = &- u \operatorname{tg}\delta \sec\delta(\mathrm{A}a' + \mathrm{B}b')\left[c'^2\cos(\odot - \alpha) - s'^2\cos(\odot + \alpha)\right]\\ &- u \sec\delta(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b)\left[c'^2 \sin(\odot - \alpha) + s'^2 \sin(\odot + \alpha)\right];\end{aligned}\right\} (20)$$

et, en n'écrivant que les termes qui, dans $\Delta^2\delta$, ont tgδ pour facteur, et qui sont renfermés dans $\mathrm{A}a + \mathrm{B}b$:

$$\Delta^2\delta = u \sin\delta(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b)\left[c'^2 \cos(\odot - \alpha) - s'^2 \cos(\odot + \alpha)\right]. \quad (21)$$

Il est visible que, si l'on calcule le terme principal de l'aberration annuelle au moyen des expressions $\mathrm{C}c + \mathrm{D}d$ et $\mathrm{C}c' + \mathrm{D}d'$, les formules précédentes pourraient s'écrire, sans erreur sensible, puisqu'on ne les applique qu'aux circompolaires, pour lesquelles $s_1 \cos\delta$ (18) est très petit :

$$\left.\begin{aligned}\Delta^2\alpha &= \operatorname{tg}\delta(\mathrm{A}a' + \mathrm{B}b')(\mathrm{C}c + \mathrm{D}d) + \frac{2}{\sin 2\delta}(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b)(\mathrm{C}c' + \mathrm{D}d')\\ \Delta^2\delta &= -\frac{1}{2}\sin 2\delta(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b)(\mathrm{C}c + \mathrm{D}d).\end{aligned}\right\} (22)$$

Cette forme a été proposée par Wagner (*).

(*) O. Struve, *Obs. de Poulk.*, vol. I, p. (117).

§ 2. *Parallaxe annuelle et systématique des étoiles.*

44. Dans toutes les théories qui précèdent, le centre de la Terre a servi d'origine des coordonnées.

Mais ce centre se déplaçant autour de celui du Soleil, nous aurons, en premier lieu, à transformer les coordonnées géocentriques α et δ, supposées réduites, pour une date d'observation quelconque, au 1[er] janvier d'une même année, en coordonnées héliocentriques, en admettant d'abord que le centre du Soleil soit immobile ; et dans cette première transformation s'introduira la parallaxe annuelle de l'étoile.

En second lieu, nous devrons rapporter les coordonnées de l'étoile, au temps t, à une origine fixe qui est la position occupée au commencement du temps t par le centre du Soleil, ce qui introduira dans les formules la parallaxe systématique de l'étoile.

45. Soient donc d'abord α, δ les coordonnées géocentriques moyennes, au temps t, d'une étoile fixe ; α', δ' ses coordonnées héliocentriques; A, D celles du Soleil ; Δ la distance de l'étoile à la Terre, Δ' sa distance au Soleil ; R le rayon de l'orbite terrestre que nous pourrons ici supposer circulaire.

Les axes coordonnés étant parallèles (puisque les positions sont toutes rapportées à un même équinoxe), nous aurons :

$$\begin{aligned}
\Delta' \cos\delta' \cos\alpha' &= \Delta \cos\delta \cos\alpha + \mathrm{R} \cos \mathrm{D} \cos \mathrm{A},\\
\Delta' \cos\delta' \sin\alpha' &= \Delta \cos\delta \sin\alpha + \mathrm{R} \cos \mathrm{D} \sin \mathrm{A},\\
\Delta' \sin\delta' &= \Delta \sin\delta + \mathrm{R} \sin \mathrm{D};
\end{aligned}$$

si nous négligeons la différence entre Δ' et Δ, et si nous faisons $\frac{\mathrm{R}}{\Delta} = \varpi$, parallaxe annuelle de l'étoile, si nous remplaçons enfin $\sin \mathrm{D}$, $\cos \mathrm{D} \sin \mathrm{A}$ et $\cos \mathrm{D} \cos \mathrm{A}$ respectivement par $s_1 \sin \odot$, $c_1 \sin \odot$ et $\cos \odot$, il vient

$$\left.\begin{aligned}
\cos\delta' \cos\alpha' &= \cos\delta \cos\alpha + \varpi \cos \odot\\
\cos\delta' \sin\alpha' &= \cos\delta \sin\alpha + c_1\varpi \sin \odot\\
\sin\delta' &= \sin\delta + s_1\varpi \sin \odot,
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

d'où l'on tire d'abord

$$\Delta\alpha = \sin(\alpha' - \alpha) = \frac{\varpi}{\cos\delta'}(c_1 \sin \odot \cos\alpha - \cos\odot \sin\alpha)$$

qu'on peut écrire

$$\Delta\alpha = \varpi \sec\delta\Big[c'^2 \sin(\odot - \alpha) - s'^2 \sin(\odot + \alpha)\Big]; \qquad (24)$$

puis

$$\cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha) = \cos\delta + \varpi\Big[\cos\odot\cos\alpha + c_1 \sin\odot \sin\alpha\Big],$$

que nous remplacerons par

$$\cos\delta' = \cos\delta + \varpi\Big[c'^2 \cos(\odot - \alpha) + s'^2 \cos(\odot + \alpha)\Big].$$

En combinant cette équation avec la troisième des précédentes (23), on trouvera

$$\left.\begin{aligned}\Delta\delta = \sin(\delta' - \delta) = \varpi\Big[s_1 \sin\odot\cos\delta - \big\{c'^2 \cos(\odot - \alpha)\\ + s'^2\cos(\odot + \alpha)\big\}\sin\delta\Big].\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

46. Les coordonnées α', δ' que nous venons de déterminer sont les coordonnées héliocentriques de l'étoile au temps t, rapportées à des axes parallèles aux axes du temps $t = 0$, dans l'hypothèse de l'immobilité du Soleil. Aussi les formules précédentes ne sont-elles suffisamment exactes que si la durée du temps t est assez courte.

Supposons maintenant que l'on ait déterminé les positions héliocentriques d'une étoile fixe à deux instants séparés par un nombre d'années assez considérable, et qu'on les ait rapportées à un même équinoxe. Soient α_0, δ_0 les coordonnées au premier instant, α_1, δ_1 celles du second instant. Si ces dernières coordonnées diffèrent des premières, toute erreur supposée éliminée, cela ne pourra provenir que d'un déplacement de l'origine, puisque l'étoile est censée fixe.

Nous rechercherons l'influence de ce déplacement dans les articles suivants.

47. Les théories qui précèdent peuvent s'appliquer à la détermination d'une quantité dont les astronomes n'ont pu faire que des estimations fort peu concordantes. Cette quantité est la vitesse du système solaire à travers l'espace.

Le mouvement propre du Soleil donne lieu à une aberration et à une parallaxe systématiques, qui ont été regardées à tort par les astronomes comme étant constantes pour une même étoile.

Les expressions des variations que ces causes produisent dans le lieu apparent des étoiles, étant fonctions de celui-ci, il va de soi que ces expressions ne seront pas identiques pour une même étoile à deux instants différents, et qu'elles offriront d'autant moins de similitude entre elles que ces deux instants seront séparés par un intervalle de temps plus considérable.

Et comme le déplacement parallactique dépend évidemment de la vitesse de transport du système solaire, celle-ci interviendra dans l'expression du lieu apparent de l'étoile au second instant, et pourra, par suite, être déterminée.

Cela suppose toutefois que l'étoile n'ait pas un mouvement propre réel. Mais on peut s'approcher de la réalisation de cette hypothèse, en appliquant à un grand nombre d'étoiles la méthode qui vient d'être indiquée : les mouvements réels de ces étoiles, qui sont probablement de grandeurs et de directions variables, pourront être censés se compenser les uns les autres.

Nous admettrons donc que l'étoile considérée n'a pas de mouvement *propre*, et nous supposerons connu le point vers lequel se dirige le système solaire.

Soient α_0, δ_0 les coordonnées du lieu *vrai* (*) de l'étoile pour $t=0$, c'est-à-dire ses coordonnées rapportées à une origine qui est le point occupé par le Soleil au commencement du temps t, et à l'équinoxe moyen de ce même instant.

Les coordonnées α_1 et δ_1 du lieu affecté de la seule aberration systématique seront données par les formules (9) et (16), dans

(*) Comme il s'agit des coordonnées moyennes, *vrai* signifie ici le contraire d'apparent; c'est-à-dire que le lieu *vrai* n'est pas affecté de l'aberration, soit annuelle, soit systématique.

lesquelles nous ferons abstraction de l'aberration annuelle et diurne, et remplacerons $v\sigma_1$ par $a'\sigma_2$, a' et σ_2 représentant respectivement $\frac{vm_1}{2\pi}$ et $\frac{\sigma_1}{R}$:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_0 + a'\sigma_2 \sec\delta_0 \cos D' \sin(A' - \alpha_0) \\
&\quad - \frac{1}{2} a'^2\sigma_2^2 \sec^2\delta_0 \cos^2 D' \sin 2(A' - \alpha_0) \\
&\quad + 2\pi a'^2\sigma_2 \sec^2\delta_0 \cos D' \left[c'^2 \cos(\odot + A' - 2\alpha_0) - s'^2 \cos(\odot - A' + 2\alpha_0)\right]. \\
\delta_1 &= \delta_0 + a'\sigma_2 \{\cos\delta_0 \sin D' - \sin\delta_0 \cos D' \cos(A' - \alpha_0)\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\pi a'^2\sigma_2 \operatorname{tg}\delta_0 \cos D' \{c'^2 [\sin(\odot + A' - 2\alpha_0) - \sin(\odot - A')] \\
&\qquad\qquad + s'^2 [\sin(\odot - A' + 2\alpha_0) - \sin(\odot + A')]\};
\end{aligned}\right\} (26)$$

on a négligé, dans l'expression de δ_1, les termes du second ordre qui ne sont pas multipliés par tg δ.

48. Introduisons maintenant la parallaxe systématique.

Si Δ_0 représente la distance de l'étoile à la position primitive, Δ sa distance à la seconde position occupée par le Soleil, après le temps t ; α, δ les coordonnées sphériques du lieu *vrai* de l'étoile, rapportées à cette nouvelle origine et à des axes parallèles aux premiers, on aura, en écrivant que la projection de Δ_0 sur chacun des trois axes est égale à la somme des projections de $\sigma_1 t$ et de Δ :

$$\begin{aligned}
\Delta \cos\alpha \cos\delta &= \Delta_0 \cos\alpha_0 \cos\delta_0 - \sigma_1 t \cos A' \cos D' \\
\Delta \sin\alpha \cos\delta &= \Delta_0 \sin\alpha_0 \cos\delta_0 - \sigma_1 t \sin A' \cos D' \\
\Delta \sin\delta &= \Delta_0 \sin\delta_0 - \sigma_1 t \sin D',
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, comme on sait :

$$\left.\begin{aligned}
\alpha - \alpha_0 = \operatorname{tg}(\alpha - \alpha_0) &= -\frac{\sigma_1 t \cos D' \sin(A' - \alpha_0)}{\Delta_0 \cos\delta_0 - \sigma_1 t \cos D' \cos(A' - \alpha_0)} \\
&= - \sec\delta_0 \varpi\sigma_2 t \cos D' \sin(A' - \alpha_0) + \cdots \\
\delta - \delta_0 = \operatorname{tg}(\delta - \delta_0) &= -\frac{\sigma_1 t[\sin D' \cos\delta_0 - \cos D' \sin\delta_0 \cos(A' - \alpha_0)]}{\Delta_0 - \sigma_1 t[\sin D' \sin\delta_0 + \cos D' \cos\delta_0 \cos(A' - \alpha_0)]} \\
&= - \varpi\sigma_2 t[\sin D' \cos\delta_0 - \cos D' \sin\delta_0 \cos(A' - \alpha_0)] + \cdots
\end{aligned}\right\} (27)$$

Mais la position de l'équateur ayant varié pendant le temps t en vertu de la précession, les coordonnées héliocentriques de l'étoile rapportées à l'équinoxe moyen du temps t seront :

$$\alpha' = \alpha + \Delta_p \alpha, \quad \delta' = \delta + \Delta_p \delta,$$

$\Delta_p \alpha$ et $\Delta_p \delta$ désignant les accroissements qu'elles ont subis du fait de la précession.

29. Ce ne sont pas encore là les coordonnées moyennes telles qu'on les déduit de l'observation : car, dans la nouvelle position qu'occupe l'étoile, on ne peut l'observer qu'affectée de l'aberration. Comme nous supposons sa position observée corrigée de l'aberration tant annuelle que diurne, nous aurons à calculer ses coordonnées α'_1 et δ'_1 affectées de l'aberration systématique, ce qui se fera en appliquant les formules précédentes (26), dans lesquelles α_0, δ_0, α_1, δ_1 seront remplacés respectivement par α', δ', α'_1, δ'_1.

Les différences $\alpha'_1 - \alpha_1$, $\delta'_1 - \delta_1$ représenteront alors les variations que la position de l'étoile aura subies, pendant l'intervalle de temps t, en vertu de la précession, de la parallaxe et de l'aberration systématiques.

Si l'on en retranche la précession, on aura ce que les astronomes appellent le *mouvement propre* de l'étoile, dans le cas où celle-ci n'a pas un mouvement réel.

Pour ne pas exposer le lecteur à une confusion regrettable, nous remplacerons cette expression tout à fait impropre par celle de *déplacement apparent systématique*, ou simplement *déplacement systématique*, réservant le nom de *mouvement propre* au déplacement réel ou objectif de l'étoile.

Dans la détermination de ce déplacement systématique nous ne conserverons, parmi les termes du second ordre, que les produits de la vitesse systématique par $\Delta_p \alpha$ ou $\Delta_p \delta$. Tous les autres peuvent être omis ; les derniers termes des formules (26) ne s'appliquent pas au lieu moyen ; les avant-derniers se détruiront à bien peu près au commencement et à la fin du temps t ;

quant à ceux qui renferment, dans les formules (27) et (29) complétées au moyen des termes du second ordre que nous avons omis, le produit de la parallaxe par le carré de la vitesse systématique ($\varpi\sigma_2 t$ par σ_2), ils sont évidemment insensibles.

Comme nous supposons connues les coordonnées A′, D′ du point vers lequel se dirige le Soleil, nous poserons :

$$\left.\begin{array}{ll}\sin D' = S', & \cos D' \sin (A' - \alpha_0) = S_0, \\ & \cos D' \cos (A' - \alpha_0) = C_0,\end{array}\right\} \quad (28)$$

Dans ces conditions les formules précédentes (26) et (27) s'écriront :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_0 + a'\sigma_2 \sec \delta_0 S_0 \\
\delta_1 &= \delta_0 + a'\sigma_2 (\cos \delta_0 S' - \sin \delta_0 C_0) \\
\alpha'_1 &= \alpha' + a'\sigma_2 \sec \delta' S_1 \\
\delta'_1 &= \delta' + a'\sigma_2 (\cos \delta' S' - \sin \delta' C_1) \\
\alpha' &= \alpha + \Delta_p \alpha \\
\delta' &= \delta + \Delta_p \delta \\
\alpha &= \alpha_0 - \varpi\sigma_2 t \sec \delta_0 S_0 \\
\delta &= \delta_0 - \varpi\sigma_2 t [\cos \delta_0 S' - \sin \delta_0 C_0].
\end{aligned}$$

Dans le second de ces quatre couples de formules, C_1 et S_1 représentent les valeurs que prennent C_0 et S_0 lorsque α_0 y est remplacé par α'.

50. Si l'on développe les calculs, on trouvera, en désignant par $\Delta\alpha_1$ la différence $\alpha'_1 - \alpha_1 - \Delta_p\alpha$:

$$\frac{\Delta\alpha_1}{S_0 \sec \delta_0} = - \varpi\sigma_2 t - a'\sigma_2\left[\cot (A' - \alpha_0)\Delta_p\alpha - \operatorname{tg} \delta_0 \Delta_p \delta\right]$$

et de même (29)

$$\begin{aligned}\Delta\delta_1 = &- \varpi\sigma_2 t [\cos \delta_0 S' - \sin \delta_0 C_0] \\ &- a'\sigma_2 [\sin \delta_0 S' \Delta_p\delta + \sin \delta_0 S_0 \Delta_p \alpha + \cos \delta_0 C_0 \Delta_p \delta].\end{aligned}$$

Le premier terme de chacune de ces formules, indépendant de la précession, est dû à la parallaxe systématique ; les autres expriment la différence des aberrations systématiques à la fin et au commencement du temps t; l'ensemble constitue ce que nous avons appelé le déplacement systématique; c'est la différence qui existe entre la position moyenne, rigoureusement déduite de l'observation, et la position moyenne calculée en faisant abstraction du mouvement systématique.

51. On voit par ces expressions que, *pour une étoile qui n'a pas de mouvement propre réel,* la connaissance de son déplacement systématique, dénommé à tort mouvement propre, suffit pour en déduire à la fois sa parallaxe et la vitesse du mouvement systématique, si, comme on peut l'admettre, la direction de ce mouvement est connue avec une approximation suffisante (*).

Les expressions de $\Delta\alpha_1$ et $\Delta\delta_1$, dont les valeurs sont données par l'observation, ne renferment en effet que les deux inconnues ϖ et σ_2. Une détermination approchée de ces quantités permettrait de les substituer dans les expressions des termes du second ordre $\Delta^2\alpha$ et $\Delta^2\delta$ que nous avons négligés, et de déterminer ces dernières quantités. En les retranchant des résultats de l'observation, qui donne en réalité $\Delta\alpha_1+\Delta^2\alpha$, $\Delta\delta_1+\Delta^2\delta$, on aurait plus exactement $\Delta\alpha_1$ et $\Delta\delta_1$, et l'on recommencerait le calcul de ϖ et σ_2.

Pour effectuer le calcul numérique on prendra

$$a' = \frac{vm_1}{2\pi} = \frac{20\,445''}{2\pi} = 3.254'',$$

puis on posera $\sigma_2 = x$, nombre abstrait, et $\varpi\sigma_2 = y$, la parallaxe ϖ de l'étoile étant exprimée en secondes.

Les équations précédentes serviront à la détermination de ces deux inconnues. Elles ne sont toutefois applicables qu'à une étoile qui n'a pas de mouvement propre réel.

(*) Pour déterminer cette direction, on se sert avec avantage de nos formules relatives à l'aberration et à la parallaxe systématiques. Voir sur ce sujet P. Ubaghs, *Détermination de la direction et de la vitesse de transport du système solaire dans l'espace* (1re partie) (Mém. cour. et autres Acad. sciences Bruxelles, t. XLVII, 1886).

Or l'astronomie ne pourrait aujourd'hui affirmer l'existence de pareilles étoiles, moins encore déterminer les mouvements propres avec une précision suffisante.

Elle doit donc chercher à éliminer ces derniers autant que possible, en recourant à un grand nombre d'étoiles; on peut espérer alors que les mouvements propres, s'ils n'ont plus rien de systématique, se compenseront mutuellement.

52. Afin de pouvoir appliquer ce procédé, nous admettrons que nous avons affaire à un groupe d'étoiles ayant la même parallaxe. Dans ce cas, en sommant, pour toutes ces étoiles, les équations précédentes en $\Delta\alpha_1$ et $\Delta\delta_1$, dont les premiers membres doivent en réalité s'écrire $\Delta\alpha_1 - p_\alpha$, $\Delta\delta_1 - p_\delta$, p_α et p_δ désignant les mouvements propres (réels) en Æ et D, on aura, puisqu'on admet que $\Sigma p_\alpha = \Sigma p_\delta = 0$:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\Delta\alpha_1 &= -yt\Sigma S_0 \sec\delta_0 - a'x\Sigma S_0\sec\delta_0\left[\cot(A'-\alpha_0)\Delta_p\alpha - \operatorname{tg}\delta_0\Delta_p\delta\right];\\ \Sigma\Delta\delta_1 &= -yt\,\Sigma\left[\cos\delta_0 S' - \sin\delta_0 C_0\right]\\ &\quad - a'x\,\Sigma\left[\sin\delta_0 S'\Delta_p\delta + \sin\delta_0 S_0\Delta_p\alpha + \cos\delta_0 C_0\Delta_p\delta\right].\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

De ces deux équations on tirera x et y, d'où l'on déduira la vitesse de transport du système solaire $\sigma_1 = Rx$, et la parallaxe moyenne $\varpi = \frac{y}{x}$ du groupe d'étoiles choisi.

Il est aisé d'y introduire également la correction de la valeur adoptée pour la précession générale.

53. Désignons par z cette correction. Dans les quantités $\Delta\alpha_1$ et $\Delta\delta_1$ qui représentent $\alpha_1' - \alpha_1 - \Delta_p\alpha$, etc. (art. **50**), on devra ajouter respectivement à $\Delta_p\alpha$ et à $\Delta_p\delta$, précessions calculées au moyen de la constante adoptée,

$$z(c_1 + s_1\sin\alpha_0\operatorname{tg}\delta_0) \quad \text{et} \quad z\,s_1\cos\alpha_0.$$

Les premiers membres des équations (30) deviennent ainsi

$$\begin{aligned}&\Sigma\left\{\alpha_1' - \alpha_1 - \Delta_p\alpha - z(c_1 + s_1\sin\alpha_0\operatorname{tg}\delta_0)\right\},\\ &\Sigma\left\{\delta_1' - \delta_1 - \Delta_p\delta - z\,s_1\cos\alpha_0\right\};\end{aligned}$$

et, si nous continuons à représenter par $\Delta\alpha_1$ la différence entre l'ascension droite observée au temps t, α'_1, et celle $\alpha_1 + \Delta_p\alpha$ qui se déduit de l'ascension droite observée au temps 0, en y appliquant la précession adoptée, $\Delta\delta_1$ ayant une signification analogue, ces équations s'écriront :

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\,\Delta\alpha_1 &= s_1 z\,\Sigma\,(c'_1 + \sin\alpha_0 \operatorname{tg}\delta_0) - yt\,\Sigma \sec\delta_0 S_0 \\ &\qquad - a'x\,\Sigma \sec\delta_0 S_0\left[\cot(A' - \alpha_0)\,\Delta_p\alpha - \operatorname{tg}\delta_0\Delta_p\delta\right]. \\ \Sigma\,\Delta\delta_1 &= s_1 z\,\Sigma\cos\alpha_0 - yt\,\Sigma\left[\cos\delta_0 S' - \sin\delta_0 C_0\right] \\ &\qquad - a'x\,\Sigma\left[\sin\delta_0 S'\Delta_p\delta + \sin\delta_0 S_0\Delta_p\alpha + \cos\delta_0 C_0\Delta_p\delta\right];\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

la signification des symboles S', S_0, C_0 est donnée ci-dessus (28).

L'application de ces dernières formules (31) à un groupe assez considérable d'étoiles de même grandeur permettra de déterminer, outre la vitesse du mouvement systématique et la parallaxe moyenne du groupe, la correction de la constante de la précession.

Si cette application fournit, pour divers groupes, des résultats concordants quant à la grandeur de cette première quantité, on pourra décider alors, en connaissance de cause, s'il est nécessaire ou non de tenir compte, dans la réduction des circompolaires, des termes périodiques du second ordre qui dépendent de l'aberration et de la parallaxe systématiques.

Dans les chapitres suivants, nous appliquerons les formules que nous avons développées dans ce Traité, à la détermination des constantes qui interviennent dans le calcul des réductions stellaires.