ÉLÉMENTS

D'UNE

THÉORIE DES FAISCEAUX

ÉCOLE NORMALE
DES HUMANITÉS
À LIÈGE

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
U L G
BIBLIOTHÈQUE

(Mémoire présenté à la *Société royale des sciences de Liége* dans sa séance du 11 février 1878.)

ÉLÉMENTS

D'UNE

THÉORIE DES FAISCEAUX

PAR

F. FOLIE,

Administrateur-inspecteur de l'Université de Liége,
chargé du cours de Géométrie supérieure,
membre de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts
de Belgique.

BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

1878

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
L G
BIBLIOTHÈQUE

PRÉFACE.

Les pages qu'on va lire sont le résumé de douze années d'études sur la Géométrie supérieure.

Nous en avons consigné la plupart des résultats dans les publications de l'Académie de Belgique (*).

Avant d'indiquer quels sont les progrès que nous avons fait faire à cette science, esquissons à grands traits ceux qu'elle avait réalisés depuis les Grecs, en nous bornant à ses principes essentiels.

L'école d'Alexandrie connaissait, dans les figures rectilignes, le rapport que M. Chasles a nommé anharmonique; la relation même de l'involution lui était connue dans un cas particulier.

Depuis elle jusqu'à Desargues et Pascal, aucun nouveau principe fondamental ne s'introduit dans la science.

Ces deux grands géomètres découvrent le rapport anharmonique, l'involution et le fameux hexagramme, dans les coniques; Newton, son mode de description organique de ces courbes.

Après eux, plus rien de saillant jusqu'à l'école de Monge.

Carnot invente la théorie des transversales.

Brianchon, suivi par Gergonne, entrevoit le principe de dualité, auquel Möbius et Steiner donnent sa complète expression.

Bobillier trouve les coordonnées polygonales, généralisées ensuite par Plücker.

Poncelet imagine la théorie des polaires réciproques,

(*) Voir notre ouvrage intitulé : *Fondements d'une Géométrie supérieure cartésienne*, ainsi que le *Bulletin de l'Académie*, 2e série, t. XXVIII à XLVI.

qui a contribué, pour une bonne part, à la découverte du principe de dualité.

Sturm étend l'involution à un faisceau de coniques, et Poncelet découvre l'involution supérieure dans un faisceau de courbes quelconques.

M. Chasles enfin, outre toutes les théories dont on lui est redevable dans l'étude des coniques, des surfaces du second degré, et des courbes gauches, dote la géométrie et l'analyse du principe de correspondance.

A notre tour, nous retrouvons, en la généralisant, l'involution même de Desargues, dans des systèmes de polygones ou de polyèdres conjugués à des courbes ou à des surfaces supérieures, et nous parvenons à appliquer à celles-ci le théorème de Pappus et son corrélatif, ainsi que les théorèmes de Pascal et de Brianchon.

Dans la théorie même des coniques, nous découvrons l'évolution, que nous appliquons également aux courbes supérieures.

Mais, pour compléter l'édifice que ces dernières théories permettaient d'entrevoir, il manquait encore une pierre, on peut même dire la pierre angulaire.

En effet, pour que tous les théorèmes fondamentaux de la théorie des coniques eussent leurs analogues dans les courbes et les surfaces supérieures, il s'agissait de trouver, dans celles-ci, les analogues des propriétés anharmoniques et homographiques.

Ce sont là les derniers résultats auxquels nous sommes arrivé par la découverte du rapport anharmonique du n^e ordre, et du principe fondamental de la théorie des faisceaux, auquel cette découverte a conduit (*).

(*) Nous bornant exclusivement aux grands principes de la Géométrie supérieure, entendue exclusivement dans le sens de Steiner et de Chasles, on comprend que nous ne puissions citer ici les noms, souvent illustres, de tous

Le lecteur sera certainement frappé de la variété des procédés qui nous ont conduit au rapport anharmonique, tant dans le second ordre, que dans les ordres supérieurs.

Afin de lui éviter des recherches bibliographiques, nous avons numéroté tous les théorèmes que nous croyons nous appartenir en propre : on verra que le nombre en est grand.

Nous avons ainsi jeté les bases d'une théorie des courbes et des surfaces, dans laquelle on retrouvera, outre quelques propriétés entièrement neuves, tous les théorèmes capitaux qui n'étaient connus, avant nos publications, que pour les coniques, si nous en exceptons l'involution du n^e ordre, qui est due à Poncelet.

Ce serait un travail très-considérable que d'édifier, sur ces bases, un traité des courbes et des surfaces supérieures, analogue à celui des coniques de M. Chasles : nous ne comptons pas l'entreprendre.

Il nous paraît suffisant d'avoir consacré douze années de notre vie à des méditations géométriques, en négligeant d'autres études qui se rapportaient bien plus directement aux phénomènes de la création.

Mais la théorie des faisceaux, esquissée par nous, ne sera pas abandonnée : un jeune collègue, bien connu déjà par de belles applications de la théorie des formes à la Géométrie, poursuivra l'œuvre commencée, et, s'il le veut, la mènera à bonne fin.

les savants modernes qui, comme Kummer, Weierstrass, Kronecker, Hesse, Clebsch, Grassmann, Reye, E. Weyr, Cayley, Sylvester, Hirst, Cremona, de Jonquières, P. Serret, ont étendu le domaine de cette science, dans le champ de la Géométrie pure ou dans celui de la Géométrie analytique.

N. B. Dans la lecture de l'ouvrage, il faudra passer d'une page paire à la page paire suivante, et d'une impaire à l'impaire suivante, dans tous les cas où ces dernières renfermeront des numéros accentués, qui sont les corrélatifs de ceux des pages paires.

PRÉLIMINAIRES.

Nous nous proposons de montrer par quelle voie nous sommes arrivé à étendre aux courbes et aux surfaces supérieures les théories qui, jusqu'aujourd'hui, n'étaient connues que pour les coniques.

Pour aplanir cette voie autant que possible, nous avons cru utile d'étudier d'abord des systèmes de polygones conjugués entre eux, ou, si l'on veut, des faisceaux de polygones.

Mais la nécessité d'établir parallèlement les théories directes et leurs corrélatives, nous a obligé à distinguer, comme Steiner, entre *plurilatères* (n Seit) et *polygones* (n Eck), le premier terme désignant un ensemble de n droites, ou de n côtés; le second, un ensemble de n points, ou de n sommets.

Pour la même raison, nous avons dù imaginer une terminologie qui nous permît de déduire le théorème corrélatif, du théorème direct, par un simple changement de mots.

C'est ainsi qu'aux termes *bilatère*, *trilatère*, *quadrilatère*, *quinquélatère*, *sélatère* correspondent ceux de *digone*, *trigone*, *tétragone*, *pentagone*, *hexagone*; à l'*intersection de deux côtés* correspond la *jonction de deux sommets;* à *n droites concourantes*, ou *au concours de n droites*, correspondent *n points collimants*, ou *la collimation de n points;* à *un faisceau de droites*, ou *de courbes du* nᵉ *ordre*, correspond *une chaîne de points*, ou *de courbes de la* nᵉ *classe;* à *l'aire d'un triangle* enfin, représenté par $\frac{1}{2}\,bc\,.\,(a)$, où (a) signifie sin A, correspondra la *quotaire*, représentée par $\frac{1}{2}\,(b)\,.\,(c)\,.\,a$.

La définition même des polygones conjugués entre eux va montrer combien une semblable terminologie est utile.

DES COORDONNÉES TANGENTIELLES.

Dans cette seconde partie, nous allons établir les propriétés corrélatives de celles qui sont exposées dans la première.

Nous ferons usage de ce mode de détermination dû au génie pénétrant de Möbius, et assez improprement appelé coordonnées tangentielles, nom que nous remplacerons simplement par celui de coordonnées, quand l'amphibologie ne sera pas possible, et par celui de rectordonnées dans le cas contraire.

On ne semble pas s'être demandé, jusqu'à ce jour, s'il ne serait pas possible d'établir *a priori* un système de rectordonnées, c'est-à-dire sans passer, ou par les considérations statiques sur lesquelles Möbius a établi son calcul barycentrique, ou par les coordonnées ponctuelles, comme on le fait généralement.

A la suite de cette seconde partie, nous résoudrons le problème proposé, d'une manière tout à fait directe ; et la solution que nous en donnerons sera, bien plus intimement encore que la méthode de Möbius ou de Plücker, en harmonie avec le principe de dualité.

Si l'on repasse ensuite de ce nouveau système de rectordonnées à un système de coordonnées ponctuelles, ou ponctordonnées, celui-ci sera, au premier, ce que sont les coordonnées tangentielles aux ponctuelles, et pourra servir de base à l'établissement d'un calcul corrélatif du barycentrique.

Commençons par donner une idée générale du système de coordonnées tangentielles, ou de rectordonnées, aujourd'hui en usage.

Soit $$\Delta \equiv \delta_1 X + \delta_2 Y + \delta_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

une équation dans laquelle δ_1, δ_2, δ_3 représentent des fonctions

En termes ordinaires, nous avons dit (*) que deux polygones de n côtés sont conjugués à un troisième, lorsque chaque côté de l'un de ces deux polygones passe par l'un des points d'intersection de chaque côté de l'autre avec le troisième polygone.

Si nous traduisons cette définition dans les termes suivants :

Deux *n latères* sont conjugués à un troisième lorsque chaque *côté* de celui-ci est la *collimation* de *n intersections* des *côtés* du premier avec ceux du second, pris deux à deux,

on obtiendra immédiatement la définition corrélative, en remplaçant les termes soulignés par leurs correspondants, c'est-à-dire *n latère* par *n gone*, *côté* par *sommet*, *collimation* par *concours*, *intersection* par *jonction*.

Et l'on s'assurera que ce mode de traduction permettra d'énoncer le corrélatif de chacun de nos théorèmes, absolument dans les mêmes termes que celui-ci, pourvu qu'on ait soin de traduire les termes géométriques par leurs correspondants.

On verra même que, grâce à la simplicité des notations et à l'identité de marche suivie dans chaque théorie, ou dans sa corrélative, nous aurions pu n'écrire qu'une seule fois les démonstrations pour les deux ordres de théories; nous eussions ainsi approché encore davantage de cette unité, à laquelle a été ramenée, sous la puissante étreinte de Steiner, la dualité entrevue par Brianchon et Gergonne dans les formes géométriques.

Mais la lecture de l'ouvrage, qui sera déjà un peu malaisée pour ceux qui ne sont pas familiers avec la Géométrie supérieure, à cause de la concision des termes, des notations, des énoncés et des démonstrations, en fût devenue beaucoup plus difficile; et c'est pourquoi, tout en mettant toujours les deux théories corrélatives en regard l'une de l'autre, à la manière de Steiner, nous avons cru devoir les développer à peu près également chacune.

(*) Pour cette définition, comme pour d'autres que nous ne rappelons pas ici, voir nos *Fondements d'une Géométrie supérieure cartésienne*, Bruxelles, Hayez, 1872. Comme nous aurons à renvoyer très-fréquemment à cet ouvrage, nous le désignerons dans les notes subséquentes par F. G. S. C.

linéaires $a_1x + b_1y + c_1$, etc.; cette équation représente une droite qui, si les constantes a_1 ... sont données, sera déterminée par X et Y, que, pour cette raison, nous nommons les coordonnées de la droite.

Si l'on se donne, entre ces coordonnées, une relation linéaire $\Delta' - k\Delta'' = 0$, Δ' et Δ'' étant les valeurs que prend Δ, lorsqu'on y remplace x, y par x', y' et x'', y'', il existera un rapport déterminé k entre Δ' et Δ'', ou (n° 1, p. 12) entre les distances des points x', y' et x'', y'' à la droite Δ; et il est évident que ce rapport sera le même pour toutes les droites Δ, qui passeront par le point **P** déterminé, sur la droite **P'P''**, par $k = \frac{PP'}{PP''}$.

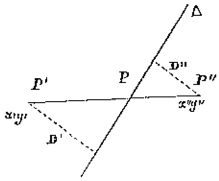


Fig. 1'.

Si la relation linéaire qui existe entre X et Y, au lieu d'être $\Delta' - k\Delta'' = 0$ était de la forme

$$K + K'\Delta' + K''\Delta'' + \cdots + K^{(n)}\Delta^{(n)} = 0,$$

on verrait de même que l'équation I), $\Delta = 0$, appartient encore à toutes les droites qui passent par un certain point fixe.

On *convient* que cette relation linéaire entre X et Y est l'*équation* de ce point.

Si, enfin, on a entre X et Y une relation $f(X, Y) = 0$, il est clair que la droite Δ pourra occuper une infinité de positions différentes; dans toutes ces positions, cette droite enveloppera une courbe, dont on *convient* que $f(X, Y) = 0$ est l'*équation en coordonnées tangentielles*.

Si la fonction f est algébrique, entière, et du n^e degré, la courbe sera de la n^e classe.

En effet, par un point donné x', y' passeront n droites Δ, déterminées par

$$\Delta' = \delta'_1 X + \delta'_2 Y + \delta'_3 = 0;$$

et

$$f(X, Y) = 0$$

L'ouvrage sera donc composé de deux parties parallèles, l'une traitant des coordonnées ponctuelles, ou des courbes du n^e ordre; l'autre, en regard, traitant, dans les mêmes termes et au moyen des mêmes formules, des coordonnées tangentielles, nommées par nous *rectordonnées*, ou des courbes de la n^e classe.

d'où résultent n systèmes de valeurs de X et de Y, et par suite n droites Δ, c'est-à-dire n tangentes à la courbe.

Celle-ci sera, en général, d'ordre $n(n-1)$.

Coupons-la, en effet, par une droite de coordonnées X_1, Y_1; et soient X', Y' celles de la tangente menée par l'un des points d'intersection de cette droite avec la courbe.

On sait que l'équation du point de contact de la tangente X', Y' est

$$Xf'_{X'} + Yf'_{Y'} + 1 = 0$$

et, comme la droite X_1, Y_1 passe par ce point, on aura :

$$X_1 f'_{X'} + Y_1 f'_{Y'} + 1 = 0.$$

Cette relation, et celle $f(X', Y') = 0$, qui indique que la droite $X'Y'$ est tangente à la courbe, serviront à déterminer les systèmes de valeurs de X', Y', systèmes qui seront au nombre de $n(n-1)$, en général; c'est-à-dire que la droite X_1, Y_1 coupe, en général, la courbe $f(X, Y)$ en $n(n-1)$ points.

§ I. De la droite ou unilatère.

1. Un point ou déterminé de position dans un plan par ses deux coordonnées x, y.

Il l'est également, si l'on a, entre ces coordonnées, deux relations $f(x, y) = 0$ et $\varphi(x, y) = 0$.

Mais, si l'on n'a entre x et y qu'une seule relation $f(x, y) = 0$, celle-ci appartiendra à une infinité de points, dont l'ensemble constitue un certain lieu.

Nous convenons de dire que cette relation est l'équation du lieu.

Si elle est du premier degré, tous les points qui y satisfont appartiennent à une même droite, et l'on *convient* de dire que cette relation est l'*équation de la droite.*

Pour faciliter l'interprétation géométrique des équations que nous aurons à étudier, et dans laquelle la ligne droite est appelée à jouer un rôle capital, nous conviendrons de mettre toujours le premier membre de son équation, en coordonnées rectangulaires,

$$Ax + By + C = 0,$$

sous la *forme normale*

$$\delta \equiv \frac{ax + by + 1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 0)$$

en faisant

$$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C}.$$

Exprimé de la sorte, ce premier membre δ représentera la distance d'un point quelconque x, y à la droite $\delta = 0$ ou $Ax + By + C = 0$.

2. Si $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$ sont les équations normales de deux droites, l'équation

$$\delta \equiv \delta_1 + \lambda\delta_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

§ I'. Du point ou monogone.

1'. Ces généralités rappelées, mettons l'équation du point sous sa forme *normale,* comme nous l'avons fait pour celle de la droite (n° 1).

L'équation générale I) : $\Delta = 0$, posée plus haut, se simplifie si l'on y fait $\delta_1 = x$, $\delta_2 = y$, $\delta_3 = 1$, et devient

$$\Delta \equiv \mathrm{X}x + \mathrm{Y}y + 1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Soit maintenant

$$\varpi \equiv a\mathrm{X} + by + 1 = 0, \quad \ldots\ldots \quad \text{III)}$$

l'équation en rectordonnées d'un point dont les ponctordonnées sont manifestement a, b.

La distance de ce point à une droite X', Y' sera, puisque l'équation, en coordonnées rectangulaires, de cette droite s'écrit

$$\Delta' \equiv \mathrm{X}'x + \mathrm{Y}'y + 1 = 0,$$

$$\mathrm{D}' = \frac{\mathrm{X}'a + \mathrm{Y}'b + 1}{\sqrt{\mathrm{X}'^2 + \mathrm{Y}'^2}};$$

d'où l'on voit que, pour faire exprimer, par la fonction ϖ elle-même, la distance du point $\varpi = 0$ à une droite X, Y, il faut que cette fonction soit mise sous la forme

$$\varpi = \frac{a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} + 1}{\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}} \cdot \quad \ldots\ldots \quad 0')$$

C'est sous cette *forme normale* que nous conviendrons toujours de supposer écrite l'*équation du point* $\varpi = 0$.

2'. Si $\varpi_1 = 0$, $\varpi_2 = 0$ sont les équations normales de deux points P_1 et P_2, l'équation

$$\varpi \equiv \varpi_1 + \lambda\varpi_2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad 1')$$

représentera une droite *concourant avec les deux premières*, ou *conjuguée aux deux premières.*

Interprétons géométriquement λ.

Si, sur la droite δ, nous prenons un point quelconque, ses distances respectives aux droites $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 = 0$ seront (n° 1) δ_1 et δ_2.

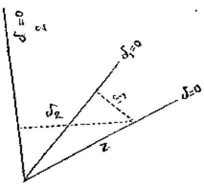


Fig. 1.

Soit r sa distance au point de concours; il est clair que $\delta_1 = r(\delta, \delta_1)$; $\delta_2 = r\,(\delta, \delta_2)$; les notations (δ, δ_1), etc., représentant les sinus des angles de δ avec δ_1, etc., et, par suite, en vertu de l'équation (1), à laquelle satisfont les coordonnées du point choisi, on aura :

$$\lambda = -\frac{\delta_1}{\delta_2} = -\frac{(\delta, \delta_1)}{(\delta, \delta_2)}.$$

3. Cas particuliers. Si la droite δ est bissectrice de l'angle des droites δ_1 et δ_2 (nous entendons par là l'angle de leurs parties positives), elle fera avec les deux droites des angles égaux et de signes contraires; on aura donc $\lambda = 1$, et, par suite, l'équation de *la bissectrice* sera

$$\delta_1 + \delta_2 = 0;$$

l'équation de la bissectrice de l'angle supplémentaire serait, au contraire :

$$\delta_1 - \delta_2 = 0 \;(^*),$$

les équations $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 = 0$ étant, bien entendu, mises sous leurs formes normales.

(*) Ces résultats, quoique opposés à ceux que donnent tous les auteurs, sont indiscutables. Comparez, du reste, avec les résultats corrélatifs.

Voir aussi, au sujet des signes, notre *Note sur la transformation des coordonnées et sur les signes des angles et des distances*, Bulletin de l'Académie royale de Belgique.

représentera un point P *collimant avec les deux premiers,* ou *conjugué à ceux-ci.*

Interprétons géométriquement λ.

Si, par le point ϖ, nous faisons passer une droite quelconque, les distances de celle-ci aux points $\varpi_1 = 0$ et $\varpi_2 = 0$ seront ϖ_1 et ϖ_2 (n° 1'); et, par suite, on aura

$$\lambda = -\frac{\varpi_1}{\varpi_2} = -\frac{PP_1}{PP_2}.$$

3'. Cas particuliers. Si le point ϖ est bissecteur de la distance des points ϖ_1 et ϖ_2, on aura $PP_2 = -PP_1$, d'où $\lambda = 1$, et, par suite, l'équation du *point bissecteur sera*

$$\varpi_1 + \varpi_2 = 0,$$

les équations $\varpi_1 = 0$ et $\varpi_2 = 0$ étant mises sous leurs formes normales; tandis que

$$\varpi_1 - \varpi_2 = 0$$

sera l'équation du *point à l'infini* sur la droite P_1P_2.

4. Désignons par 1 le point d'intersection des droites $\delta_1 = 0$ et $\delta'_1 = 0$; par 2 le point d'intersection des droites $\delta_2 = 0$ et $\delta'_2 = 0$.

Puisque $\lambda_1\delta_1 + \lambda'_1\delta'_1 = 0$ est (n° 2) l'équation d'une droite passant par 1, et, de même, $\lambda_2\delta_2 + \lambda'_2\delta'_2 = 0$ celle d'une droite passant par 2, si nous identifions les équations de ces deux droites, le système

$$\lambda_1\delta_1 + \lambda'_1\delta'_1 \equiv \lambda_2\delta_2 + \lambda'_2\delta'_2 = 0$$

représentera la *droite de collimation* des points 1 et 2 d'intersection des droites δ_1 et δ'_1, δ_2 et δ'_2.

De même

$$\lambda_2\delta_2 + \lambda'_2\delta'_2 \equiv \lambda_3\delta_3 + \lambda'_3\delta'_3 = 0$$

représentera la droite de collimation des points 2 et 3. Et de là il résulte que la *condition de collimation* des points 1, 2, 3 est

$$\lambda_1\delta_1 + \lambda'_1\delta'_1 \equiv \lambda_2\delta_2 + \lambda'_2\delta'_2 \equiv \lambda_3\delta_3 + \lambda'_3\delta'_3. \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

4bis. Il nous a paru assez curieux d'appliquer à trois droites conjuguées entre elles (n° 2), ou à trois unilatères conjugués, les théories que nous développerons par la suite relativement aux bilatères, trilatères ... conjugués, et qui nous conduiront directement aux rapports anharmoniques et aux involutions d'ordre supérieur.

Ainsi nous pourrons, en effet, nous assurer s'il existe un rapport anharmonique et une involution du premier ordre.

Considérons donc l'identité

$$\delta''_1 \equiv \delta_1 - \lambda_1\delta_1 = 0,$$

qui exprime que les trois droites δ_1, δ'_1, δ''_1, sont conjuguées entre elles, autrement dit, qu'elles sont concourantes.

Cette identité peut s'écrire :

$$\delta_1 + k'\delta'_1 + k''\delta''_1 \equiv 0,$$

et on y lit l'énoncé suivant, que nous ne citons que pour son analogie avec le théorème de Pappus (n° 6) :

Si trois droites sont conjuguées entre elles, les distances d'un point quelconque de l'une, aux deux autres, sont analogiques,

et, plus généralement :

Il existe une relation linéaire entre les distances d'un point quelconque (du plan) à trois droites conjuguées entre elles.

1'. Désignons par 1 la droite de jonction des points $\varpi_1 = 0$, $\varpi'_1 = 0$; par 2 la droite de jonction des points $\varpi_2 = 0$, $\varpi'_2 = 0$.

Puisque $\lambda_1\varpi_1 + \lambda'_1\varpi'_1 = 0$ est (n° 2') l'équation d'un point situé sur 1, et de même $\lambda_2\varpi_2 + \lambda'_2\varpi'_2 = 0$, celle d'un point situé sur 2, si nous identifions les équations de ces deux points, le système

$$\lambda_1\varpi_1 + \lambda'_1\varpi'_1 \equiv \lambda_2\varpi_2 + \lambda'_2\varpi'_2 = 0$$

représentera le *point d'intersection* des droites 1 et 2.

De même

$$\lambda_2\varpi_2 + \lambda'_2\varpi'_2 \equiv \lambda_3\varpi_3 + \lambda'_3\varpi'_3 = 0$$

représentera le point d'intersection des droites 1 et 3.

Il résulte de là que la *condition de concours* des droites 1, 2, 3, est

$$\lambda_1\varpi_1 + \lambda'_1\varpi'_1 \equiv \lambda_2\varpi_2 + \lambda'_2\varpi'_2 \equiv \lambda_3\varpi_3 + \lambda'_3\varpi'_3. \quad . \quad . \quad . \quad 2')$$

Si nous cherchons à appliquer la méthode qui nous a donné directement l'involution (voir bilatères conjugués, etc.), nous verrons que celle-ci, qui se déduit, sous son expression la plus simple, de l'élimination de λ, entre deux relations de la même forme

$$\delta_1 - \lambda_1 \delta'_1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

ne peut pas se trouver ici sous cette expression, parce qu'il n'existe qu'une relation unique, et que l'élimination de λ_1 est, par suite, impossible.

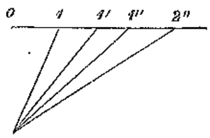


Fig. 1bis.

En effet, si l'équation 3) est celle de la droite δ''_1, en y remplaçant δ_1 et δ'_1 par les valeurs (*)

$$\delta_1 = 11''.(1), \qquad \delta'_1 = 1'1''.(1'),$$

on trouve :

$$11''.(1) = \lambda_1 1'1''.(1');$$

mais cette relation est unique.

On en trouverait une autre, à la vérité, en considérant la droite δ''_2, pour laquelle on aurait l'équation

$$\delta''_2 \equiv \delta_1 - \lambda_2 \delta'_1 = 0.$$

On en tirerait

$$12''.(1) = \lambda_2 1'2''.(1');$$

et la comparaison de ces deux égalités conduirait à

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{11''.1'2''}{2''1.1''1'},$$

c'est-à-dire au rapport anharmonique, mais non à l'involution.

Et cependant, on peut trouver la forme générale de celle-ci pour le premier ordre.

Si l'on considère, en effet, sur la transversale qui coupe le faisceau, un point 0, on pourra écrire

$$\delta_1 = 01.(1), \qquad \delta'_1 = 01'.(1'), \qquad \delta''_1 = 01''.(1'');$$

et, en substituant dans l'identité 2), on aura :

$$01.(1) + k'01'.(1') + k''01''.(1'') \equiv 0,$$

ou, puisque les sinus (1), (1'), (1'') sont, pour chaque transversale, des constantes indépendantes de la position du point 0 :

$$\lambda.01 + \lambda'.01 + \lambda''.01'' \equiv 0,$$

(*) Pour le sens des notations, voir le n° 7.

et enfin, en appelant x, x_1, x'_1, x''_1, les distances respectives des points 0, 1, 1', 1'' à une origine quelconque sur la transversale :

$$\lambda(x - x_1) + \lambda'(x - x'_1) + \lambda''(x - x''_1) \equiv 0,$$

ou, symboliquement,

$$\sum_{\prime}^{\prime\prime\prime} \lambda\,(x - x_1) \equiv 0,$$

forme qui correspond, pour le premier ordre, à celle que M. P. Serret a donnée de l'involution du second ordre, et que nous avons étendue aux ordres supérieurs.

Quant aux procédés des nos 9, 10 et 11, qui nous ont conduit chacun au rapport anharmonique, appliqués au cas de trois droites conjuguées, ils ne donneraient que des propriétés résultant de la similitude des triangles.

Nous laissons au lecteur le soin d'appliquer la méthode précédente au cas de trois points conjugués entre eux.

§ II. Rapport anharmonique. Faisceau de quatre droites.

5. Nous avons vu que, si la droite δ_3 est conjuguée aux droites δ_1 et δ_2, elle a pour équation $\delta_1 + \lambda_3\delta_2 = 0$, et que la signification géométrique de λ_3 est

$$\lambda_3 = -\frac{(\delta_3\delta_1)}{(\delta_3\delta_2)} \text{ que nous écrirons } -\frac{(31)}{(32)}\cdot$$

Menons une transversale quelconque, qui coupe ces trois droites respectivement aux points 1, 2, 3, et désignons par (1) et (2) les sinus des angles que cette transversale fait avec les droites 1 et 2.

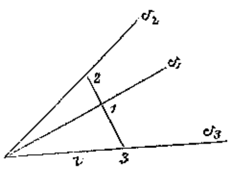


Fig. 2.

On a évidemment

$$\frac{(31)}{31} = \frac{(1)}{r}; \quad \frac{(32)}{32} = \frac{(2)}{r};$$

d'où

$$\lambda_3 = -\frac{(31)}{(32)} = -\frac{(1)}{(2)}\cdot\frac{31}{32}\cdot$$

On aurait de même, pour une quatrième droite δ_4 du faisceau :

$$\lambda_4 = -\frac{(41)}{(42)} = -\frac{(1)}{(2)}\cdot\frac{41}{42};$$

et, par suite :

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_4} = \frac{(31)}{(32)} : \frac{(41)}{(42)} = \frac{31}{32} : \frac{41}{42} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

On reconnaît dans ces deux dernières expressions *le rapport anharmonique* (*) d'un faisceau de quatre droites et celui d'une chaîne de quatre points; et l'on trouve en même temps, dans

(*) Cette expression est due à M. Chasles; et nous la conserverons, même pour les rapports d'ordre supérieur, dont nous nous occuperons dans la suite de cet ouvrage.

§ II′. Rapport anharmonique. Chaîne de quatre points.

5′. Nous avons vu que, si le point ϖ_3 est conjugué aux points ϖ_1 et ϖ_2, il a pour équation $\varpi_1 + \lambda_3\varpi_2 = 0$, et que la signification géométrique de λ_3 est

$$\lambda_3 = -\frac{\varpi_3\varpi_1}{\varpi_3\varpi_2} \quad \text{que nous écrirons} \quad -\frac{31}{32}.$$

Joignons ces trois points à un centre quelconque par des rayons 1, 2, 3; désignons par 1 et 2 les longueurs des deux premiers d'entre eux, par (31) et (32), les sinus des angles que le troisième rayon fait avec ceux-ci, par 31, etc., la distance du point 3 au point 1, etc., par (s) enfin le sinus de l'angle que le troisième rayon fait avec la droite de collimation.

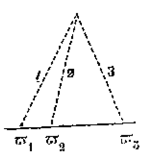


Fig. 2′.

On aura

$$\frac{31}{(31)} = \frac{1}{(s)}; \quad \frac{32}{(32)} = \frac{2}{(s)}; \quad \text{d'où} \quad \lambda_3 = -\frac{31}{32} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(32)}{(31)}.$$

On aurait de même, pour un quatrième point ϖ_4 de la chaîne :

$$\lambda_4 = -\frac{41}{42} = -\frac{1}{2}\,\frac{(42)}{(41)}; \quad \text{et, par suite :} \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_4} = \frac{31}{32}:\frac{41}{42} = \frac{(31)}{(32)}:\frac{(41)}{(42)},$$

égalité qui exprime le théorème :

Le rapport anharmonique d'une chaîne de quatre points est égal à celui du faisceau formé par la jonction de ces points à un centre quelconque.

l'égalité de ces deux rapports, la démonstration de ce théorème capital de BRIANCHON :

Le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites est égal à celui des segments que ces droites interceptent sur une transversale quelconque.

5 bis. Mais ces rapports peuvent s'écrire et se retenir beaucoup plus aisément sous la forme

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_4}=\frac{(31)(42)}{(23)(14)}=\frac{31.42}{23.14}.$$

On voit, en effet, que le dénominateur se tire du numérateur en faisant simplement passer au premier rang la dernière figure de celui-ci. On verra, de plus, que la même règle s'applique à la formation du RAPPORT ANHARMONIQUE DU n^e ORDRE.

Nous représenterons ces mêmes rapports 1), en modifiant légèrement la notation de MÖBIUS, par

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_4}=(3142)=[3142] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Le faisceau des quatre droites $\delta_1 \ldots \delta_4$ donne naissance aux différents rapports anharmoniques

$$(1234),\ (1243),\ (1342),\ (1324),\ (1423),\ (1432);$$

et il est facile de s'assurer (*) que, si l'on représente respectivement ces rapports par r, r', r'', r''', r^{IV}, r^{V}, on aura

$$r+r'''=1,\quad r'+r^{\text{IV}}=1,\quad r''+r^{\text{V}}=1;$$

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1,\quad \frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}=1,\quad \frac{1}{r^{\text{IV}}}+\frac{1}{r^{\text{V}}}=1;$$

d'où il résulterait encore

$$r+\frac{1}{r^{\text{IV}}}=1,\qquad r'''+\frac{1}{r^{\text{V}}}=1,$$

$$r'+\frac{1}{r'''}=1,\qquad r^{\text{IV}}+\frac{1}{r''}=1,$$

$$r''+\frac{1}{r}=1,\qquad r^{\text{V}}+\frac{1}{r'}=1.$$

(*) Comp. CHASLES, *Traité de Géométrie supérieure*, p. 24.

La considération des autres formes du rapport anharmonique est superflue, puisque l'on a, par exemple :

$$(1234) = (4321) = (3412) = (2143)$$
$$(1234).(3214) = 1; \quad (1234)\,(1432) = 1; \quad \text{etc.}$$

Toutes les formules précédentes montrent que chaque forme du rapport anharmonique est déterminée, d'une manière unique, en fonction de l'une quelconque d'entre elles.

Notons, comme cas particulier, la forme

$$(1214) = 1.$$

Il va de soi que, si les équations des droites 1, 2, 3, 4, au lieu d'avoir la forme

$$\delta_1 . \delta_2 . (\delta_1 + \lambda_{3,4}\, \delta_2) = 0$$

ont la forme suivante :

$$\delta_1 + \lambda_{1,2,3,4}\, \delta_2 = 0,$$

le rapport anharmonique, qui, dans le premier cas, est

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_4} = (3142),$$

sera, dans le second,

$$\frac{(\lambda_3 - \lambda_1)\,(\lambda_4 - \lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_3)\,(\lambda_1 - \lambda_4)} = (3142);$$

et que les résultats qui précèdent sont applicables à cette forme générale, comme à la forme particulière.

§ III. — Faisceau de bilatères.

6. Considérons les deux bilatères $\delta_1\delta_2$, $\delta'_1\delta'_2$ et leur conjugué $\delta''_1\delta''_2$, c'est-à-dire l'ensemble des deux droites de jonction des points d'intersection des côtés du premier bilatère avec ceux du second.

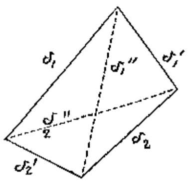


Fig. 3

L'équation du troisième bilatère sera évidemment

$$\delta''_1\delta''_2 \equiv \delta_1\delta_2 - \lambda\delta'_1\delta'_2 = 0, \quad . \quad . \quad 1)$$

λ ayant une valeur déterminée.

Si la valeur de λ était quelconque, le premier membre représenterait, au lieu d'un bilatère, une conique conjuguée (circonscrite) aux bilatères $\delta_1\delta_2$ et $\delta'_1\delta'_2$; et les résultats qui suivent seraient applicables à cette conique, quoique nous ne nous occupions ici que du bilatère $\delta''_1\delta''_2$.

L'identité 1) peut aussi s'écrire :

$$\delta_1\delta_2 + k'\delta'_1\delta'_2 + k''\delta''_1\delta''_2 \equiv 0 \; , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

et l'on y lit immédiatement l'énoncé suivant, auquel M. Chasles a donné le nom de *théorème de* Pappus :

Si trois bilatères sont conjugués entre eux, les produits des distances d'un point quelconque de l'un d'entre eux, aux côtés des deux autres, sont analogiques ; et, plus généralement encore :

Théorème I. *Il existe une relation linéaire entre les produits des distances d'un point quelconque (du plan) aux couples respectifs de côtés de trois bilatères conjugués entre eux.*

Ce dernier énoncé, que nous croyons neuf, revêtira une autre forme (voir n° 9), et sera généralisé dans les paragraphes suivants.

Une autre interprétation de la même identité 1) nous conduira directement au *théorème* de Desargues.

§ III′. Chaîne de digones.

6′. Considérons les deux digones $\varpi_1\varpi_2$, $\varpi'_1\varpi'_2$ et leur conjugué $\varpi''_1\varpi''_2$, c'est-à-dire l'ensemble des deux points d'intersection des droites de jonction des sommets du premier digone avec ceux du second.

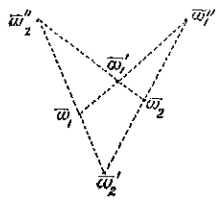


Fig. 3′.

L'équation du troisième digone sera évidemment

$$\varpi''_1\varpi''_2 \equiv \varpi_1\varpi_2 - \lambda\varpi'_1\varpi'_2 = 0, \quad . \quad . \quad 1')$$

λ ayant une valeur déterminée.

Si la valeur de λ était quelconque, le premier membre représenterait, au lieu d'un digone, une conique conjuguée (inscrite) aux digones $\varpi_1\varpi_2$ et $\varpi'_1\varpi'_2$; et les résultats qui suivent seraient applicables à cette conique, quoique nous ne nous occupions ici que du digone $\varpi''_1\varpi''_2$.

L'identité 1′) peut aussi s'écrire

$$\varpi_1\varpi_2 + k'\varpi'_1\varpi'_2 + k''\varpi''_1\varpi''_2 \equiv 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2')$$

et l'on y lit immédiatement le corrélatif du théorème de Pappus :

Si trois digones sont conjugués entre eux, les produits des distances d'une droite quelconque (passant par un sommet) de l'un d'entre eux, aux sommets des deux autres, sont analogiques, etc., et plus généralement encore

Théorème I′. *Il existe une relation linéaire entre les produits des distances d'une droite quelconque (du plan) aux couples respectifs de sommets de trois digones conjugués entre eux.*

Ce dernier énoncé revêtira une autre forme (n° 9′) et sera généralisé dans les paragraphes suivants.

7. Désignons par 1, 2, etc., aussi bien les côtés δ_1, δ_2, etc., que leurs points d'intersection par une transversale quelconque; par (1) le sinus de l'angle de celle-ci avec δ_1, etc., par 11'', etc., la distance des points 1 et 1'' pris sur la transversale.

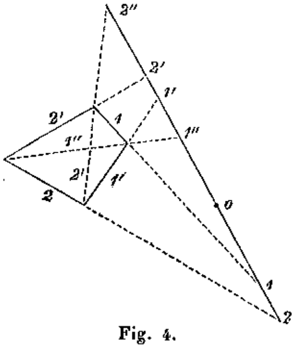


Fig. 4.

Considérons d'abord le point 1'', pour lequel nous avons, en vertu de l'équation 1) :

$$\delta_1\delta_2 - \lambda\delta'_1\delta'_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

et exprimons δ_1 ..., qui sont (n° 1), les distances de ce point 1'' aux côtés δ_1 ..., en fonction des segments interceptés sur la transversale; nous aurons évidemment

$$\delta_1 = 11''.(1); \quad \delta_2 = 21''.(2); \quad \delta'_1 = 1'1''.(1'); \quad \delta'_2 = 2'1''.(2');$$

et, en substituant ces valeurs dans la relation qui précède :

$$11''.21''.(1).(2) = \lambda 1'1''.2'1''.(1').(2').$$

Considérons ensuite le point 2'', pour lequel existe également la relation 3); nous obtiendrons de la même manière :

$$12''.22''.(1).(2) = \lambda 1'2''.2'2''(1').(2');$$

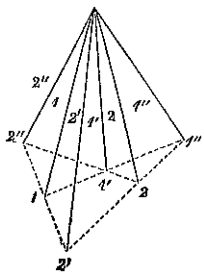
et, en divisant ces deux égalités l'une par l'autre :

$$\frac{11''.21''}{12''.22''} = \frac{1'1''.2'1''}{1'2''.2'2''},$$

ce qui est, comme on le sait, l'une des relations qui expriment l'involution des trois couples de points 12, 1'2', 1''2'' (*).

(*) Cette relation était connue des Grecs dans le cas particulier que nous venons d'examiner. Son application aux coniques, et le nom même d'*involution*, appartiennent à Desargues.

7'. Désignons par 1, 2, etc., aussi bien les points ϖ_1, ϖ_2, etc., que leurs droites de jonction à un centre quelconque; par (11'), etc., les sinus des angles compris entre ces droites.



Fg. 4'.

Considérons d'abord la droite 1'', pour laquelle nous avons, en vertu de l'équation 1')

$$\varpi_1\varpi_2 - \lambda\varpi'_1\varpi'_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3')$$

et exprimons $\varpi_1 \ldots$, qui sont (n° 1') les distances de cette droite 1'' aux sommets $\varpi_1 \ldots$, en fonction des sinus des angles compris entre les rayons.

Nous aurons évidemment

$$\varpi_1 = (11'') \,.\, 1; \quad \varpi_2 = (21'') \,.\, 2; \quad \varpi'_1 = (1'1'') \,.\, 1'; \quad \varpi'_2 = (2'1'') \,.\, 2',$$

et, en substituant ces valeurs dans la relation qui précède :

$$(11'') \,.\, (21'') \,.\, 1 \,.\, 2 = \lambda\, (1'1'') \,.\, (2'1'') \,.\, 1' \,.\, 2'.$$

Pour la droite 2'', nous obtiendrons de même

$$(12'') \,.\, (22'') \,.\, 1 \,.\, 2 = \lambda\, (1'2'') \,.\, (2'2'') \,.\, 1' \,.\, 2';$$

et, en divisant ces deux égalités l'une par l'autre :

$$\frac{(11'') \,.\, (21'')}{(12'') \,.\, (22'')} = \frac{(1'1'') \,.\, (2'1'')}{(1'2'') \,.\, (2'2'')},$$

ce qui est l'une des relations qui expriment l'involution des trois couples de droites 12, 1'2', 1''2''.

8. On trouve une expression plus générale de l'involution en considérant, sur la transversale, un point *quelconque* 0, au lieu des points particuliers $1''$, $2''$.

Si, dans l'identité 2), que nous écrirons sous la forme symbolique

$$\sum_{\prime}^{\prime\prime\prime} k\delta_1\delta_2 \equiv 0,$$

nous remplaçons les distances δ_1 ... en fonction des distances 01, au moyen des relations $\delta_1 = 01.(1)$, ... nous obtiendrons :

$$k01.02.(1).(2) + k'01'.02'.(1')(2') + k''01''.02''.(1'')(2'') \equiv 0;$$

or, les sinus (1) ... sont, pour une même transversale, des constantes indépendantes de la position du point 0 sur cette transversale; en sorte que l'identité précédente pourra s'écrire, en faisant rentrer toutes les constantes en une seule :

$$\lambda.01.02 + \lambda'.01'.02' + \lambda''.01''.02'' \equiv 0,$$

ou, si l'on veut,

$$\lambda.\overline{x-x_1}.\overline{x-x_2} + \lambda'.\overline{x-x_1'}.\overline{x-x_2'} + \lambda''.\overline{x-x_1''}.\overline{x-x_2''} \equiv 0,$$

en appelant x, x_1 ... les distances des points 0, 1 ,.. à une origine quelconque prise sur la transversale; et enfin, symboliquement :

$$\sum_{\prime}^{\prime\prime\prime} \lambda.\overline{x-x_1}.\overline{x-x_2} \equiv 0 \text{ (*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

9. De l'identité même *qui exprime que trois bilatères sont conjugués entre eux,* nous venons de tirer directement l'involution, sans passer par le rapport anharmonique, d'où on la déduit habituellement.

(*) C'est dans la *Géométrie de direction* de M. P. Serret que nous avons rencontré pour la première fois cette expression de l'involution. Nous la généraliserons plus bas.

8'. On en trouve une expression plus générale en considérant une droite *quelconque* 0, passant par le centre du faisceau, au lieu des droites particulières 1'', 2''.

Si, dans l'identité 2), que nous écrirons

$$\overset{\prime\prime\prime}{\underset{\prime}{\Sigma}} k\varpi_1\varpi_2 \equiv 0,$$

nous remplaçons les distances $\varpi_1 \ldots$, des points $\varpi_1 \ldots$ à cette droite 0, en fonction des sinus $(01) \ldots$, au moyen des relations $\varpi_1 = (01) . 1 \ldots$, nous aurons :

$$k\,(01) . (02) . 1 . 2 + k' 01' . 02' . 1' . 2' + k'' 01'' . 02'' . 1'' . 2'' \equiv 0.$$

Or, les longueurs 1, 2 ... sont des constantes, ainsi que k... En les faisant rentrer dans une seule, nous pourrons écrire

$$\lambda\,(01) . (02) + \lambda'\,(01') . (02') + \lambda''\,(01'') . (02'') \equiv 0,$$

ou bien

$$\lambda\,(X - X_1)\,(X - X_2) + \lambda'\,(X - X_1')\,(X - X_2') + \lambda''\,(X - X_1'')\,(X - X_2'') \equiv 0,$$

en appelant X, X_1 ... les angles des droites 0, 1 ... avec une droite quelconque passant par le centre du faisceau, et $(X - X_1) \ldots$ les sinus des angles $X - X_1, \ldots$; et enfin

$$\overset{\prime\prime\prime}{\underset{\prime}{\Sigma}} \lambda\,(X - X_1)\,(X - X_2) \equiv 0. \quad \ldots \ldots \quad 4')$$

9'. Recherchons le rapport anharmonique dans l'identité

$$\varpi_1''\varpi_2'' \equiv \varpi_1\varpi_2 - \lambda\varpi_1'\varpi_2'.$$

Coupons, par une droite quelconque, les jonctions des sommets des digones $\varpi_1\varpi_2$ et $\varpi_1'\varpi_2'$; désignons ces jonctions par $1_1'$, $1_2'$, $2_1'$, $2_2'$; conservons les mêmes notations pour représenter leurs

Il s'agit maintenant de retrouver le rapport anharmonique dans cette même identité $\delta''_1\delta''_2 = \delta_1\delta_2 - \lambda\delta'_1\delta'_2 = 0$.

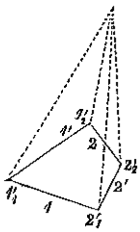


Fig. 5.

Joignons, à un centre quelconque, les sommets des bilatères $\delta_1\delta_2$ et $\delta'_1\delta'_2$; désignons ces sommets par $1'_1$, $1'_2$, $2'_1$, $2'_2$; conservons les mêmes notations pour représenter les rayons qui y aboutissent; et nommons 1, 2, $1'$, $2'$ les quatre côtés du quadrilatère; $1''$, $2''$ ses diagonales.

En rapportant les distances δ_1 ... (n° 1) au centre considéré, nous aurons :

$$\delta_1 = \frac{2'_1 . 1'_1 (2'_1 1'_1)}{1}; \quad \delta_2 = \frac{1'_2 . 2'_2 (1'_2 2'_2)}{2};$$

$$\delta'_1 = \frac{1'_1 . 1'_2 (1'_1 1'_2)}{1'}; \quad \delta'_2 = \frac{2'_2 . 2'_1 (2'_2 2'_1)}{2'};$$

$$\delta''_1 = \frac{1'_1 . 2'_2 (1'_1 2'_2)}{1''}; \quad \delta''_2 = \frac{1'_2 . 2'_1 (1'_2 2'_1)}{2''}.$$

Ces expressions, substituées dans l'identité

$$\delta''_1\delta''_2 \equiv \delta_1\delta_2 - \lambda\delta'_1\delta'_2,$$

donnent, après réduction :

$$\frac{(1'_1 2'_2) . (1'_2 2'_1)}{1'' . 2''} \equiv \frac{(2'_1 1'_1) . (1'_2 2'_1)}{1 . 2} - \lambda \frac{(1'_1 1'_2) . (2'_2 2'_1)}{1' . 2'} \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Si le centre du faisceau est choisi en un point du bilatère $\delta''_1\delta''_2$, chacun des deux membres de l'identité sera nul, et, par suite :

$$\lambda \frac{1 . 2}{1' . 2'} = \frac{(2'_1 1'_1) . (1'_2 2'_2)}{(1'_1 1'_2) . (2'_2 2'_1)},$$

expression dans laquelle on reconnaît le rapport anharmonique des quatre rayons du faisceau, que l'on pourrait aussi écrire :

$$\frac{(1) . (2)}{(1') . (2')},$$

intersections avec la transversale; nous aurons, en désignant par (1), $(1'_1)$, $(2'_2)$, les sinus des angles des triangles $1\,1'_1 2'_2, \ldots$:

$$\varpi_1 = 1'_1 2'_1 \frac{(1'_1)(2'_1)}{(1)}; \quad \varpi_2 = 2'_2 1'_2 \frac{(2'_2)(1'_2)}{(2)};$$

$$\varpi'_1 = 1'_1 1'_2 \frac{(1'_1)(1'_2)}{(1')}; \quad \varpi'_2 = 2'_2 2'_1 \frac{(2'_2)(2'_1)}{(2')};$$

$$\varpi''_1 = 1'_1 2'_2 \frac{(1'_1)(2'_2)}{(1'')}; \quad \varpi''_2 = 2'_1 1'_2 \frac{(2'_1)(1'_2)}{(2'')}.$$

Ces expressions, substituées dans l'identité précédente, donnent, après réduction

$$\frac{1'_1 2'_2 \cdot 2'_1 1'_2}{(1'')(2'')} = \frac{1'_1 2'_1 \cdot 2'_2 1'_2}{(1) \cdot (2)} - \lambda \frac{1'_1 1'_2 \cdot 2'_2 2'_1}{(1') \cdot (2')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5')$$

Si la transversale est une droite du digone $1''2''$ (c'est-à-dire si elle passe par l'un de ces deux points), chacun des membres de l'identité sera nul, et, par suite :

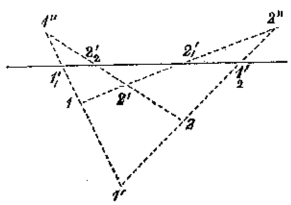


Fig. 5'.

$$\lambda \frac{(1) \cdot (2)}{(1') \cdot (2')} = \frac{1'_1 2'_1 \cdot 2'_2 1'_2}{1'_2 1'_1 \cdot 2'_1 2'_2},$$

où l'on reconnaît le rapport anharmonique des quatre points de la transversale, rapport que l'on pourrait écrire

$$\frac{1 \cdot 2}{1' \cdot 2'},$$

en désignant par $1 \ldots$ les segments interceptés, sur celle-ci, entre les côtés des angles des deux digones.

La même propriété existe évidemment pour toute tangente à une conique conjuguée (inscrite) aux deux digones; elle est connue par le nom de *propriété anharmonique de quatre tangentes à une conique.*

Si la transversale est une droite quelconque du plan des en désignant par (1) ... les sinus des angles soutendus, au centre du faisceau, par les côtés δ_1 ...

La même propriété existe évidemment pour tout point d'une conique conjuguée (circonscrite) aux deux bilatères; elle est connue sous le nom de *propriété anharmonique de quatre points d'une conique* (*).

Si le centre du faisceau est un point quelconque du plan des bilatères, en réunissant en une seule les constantes 1, 2, etc., de l'identité 5), on pourra mettre celle-ci sous la forme :

$$(1).(2) + k'(1').(2') + k''(1'').(2'') \equiv 0,$$

c'est-à-dire :

Théorème II. *Si, d'un centre quelconque (pris dans le plan), on mène des rayons aux sommets de trois bilatères conjugués entre eux, il existe une relation linéaire entre les produits des sinus des angles soutendus, en ce centre, par les couples respectifs de côtés des trois bilatères.*

Cet énoncé n'est, au fond, qu'une forme différente de la généralisation que nous avons donnée plus haut (n° 6) du théorème de Pappus, et de la formule générale 4) qui exprime l'involution (n° 8).

10. Un autre procédé, tout intuitif également, permet d'établir la constance du rapport anharmonique, et d'arriver, chemin faisant, à un théorème susceptible de la généralisation la plus complète.

Nous l'appliquerons, comme ci-dessus, au cas de trois bilatères conjugués entre eux.

En conservant la figure et les notations qui précèdent, écrivons simplement l'identité

$$1'_1 . 1'_2 . 2'_2 . 2'_1 = 1'_1 . 1'_2 . 2'_2 . 2'_1,$$

(*) C'est l'extension de ce procédé de recherche bien simple, à nos systèmes de plurilatères conjugués à des courbes d'ordre supérieur, qui nous a conduit à la découverte du *rapport anharmonique du* n^e *ordre.*

digones, en réunissant en une seule les constantes qui entreront dans l'identité 4), on pourra écrire celle-ci :

$$1 \, . \, 2 + k' 1' \, . \, 2' + k'' 1'' \, . \, 2'' \equiv 0, \text{ c'est-à-dire :}$$

Théorème II. *Si l'on coupe, par une transversale quelconque, les côtés de trois digones conjugués entre eux, il existe une relation linéaire entre les produits des segments interceptés, sur cette transversale, par les couples respectifs d'angles des trois digones,* énoncé qui ne diffère pas, dans le fond, de ceux des nos 6' et 8'.

10'. Écrivons l'identité

$$(1'_1) \, . \, (1'_2) \, . \, (2'_2) \, . \, (2'_1) = (1'_1) \, . \, (1'_2) \, . \, (2'_2) \, . \, (2'_1),$$

et transformons-la dans les suivantes :

$$\frac{(1'_1) \, . \, (1'_2) \, . \, 1'}{1'} \, . \, \frac{(2'_2) \, . \, (2'_1) \, . \, 2'}{2'} = \frac{(2'_1) \, . \, (1'_1) \, . \, 1}{1} \, . \, \frac{(1'_2) \, . \, (2'_2) \, . \, 2}{2}$$
$$= \frac{(1'_1) \, . \, (2'_2) \, . \, 1''}{1''} \, . \, \frac{(1'_2) \, . \, (2'_1) \, . \, 2''}{2''} \, .$$

Ces égalités peuvent s'énoncer :

Théorème III. *Dans le cas de trois digones conjugués entre eux,* et transformons-la dans les suivantes :

$$\frac{1'_1 . 1'_2 . (1')}{(1')} \cdot \frac{2'_2 . 2'_1 (2')}{(2')} = \frac{2'_1 . 1'_1 (1)}{(1)} \cdot \frac{1'_2 . 2'_2 . (2)}{(2)} = \frac{1'_1 . 2'_2 . (1'')}{(1'')} \cdot \frac{1'_2 . 2'_1 . (2'')}{(2'')}.$$

Chacun des numérateurs, tels que $1'_1 . 1'_2 (1')$ représente le double de l'aire du triangle qui a son sommet au centre du faisceau, et pour base le côté $1'$; nous pourrons donc énoncer le théorème :

Théorème III. *Dans le cas de trois bilatères conjugués entre eux, dont les quatre sommets sont joints à un centre quelconque, si l'on forme le produit des aires des deux triangles qui ont leur sommet en ce centre, et pour bases respectives les côtés de chaque bilatère, et qu'on divise ce produit par celui des sinus des angles au centre de chacun de ces triangles, le quotient obtenu sera constant pour chacun des trois bilatères.*

Mais si nous exprimons les aires de ces triangles au moyen du produit de la base par la hauteur, les égalités précédentes s'écriront :

$$\frac{1' . \delta'_1}{(1')} \cdot \frac{2' . \delta'_2}{(2')} = \frac{1 . \delta_1}{(1)} \cdot \frac{2 . \delta_2}{(2)} = \frac{1'' . \delta''_1}{(1'')} \cdot \frac{2'' . \delta''_2}{(2'')}.$$

Si le centre du faisceau est un point du lieu qui a pour équation

$$\delta_1 . \delta_2 - \lambda \delta'_1 . \delta'_2 = 0$$

et qui est, en général, une conique conjuguée aux deux bilatères, on aura donc

$$\lambda = \frac{\delta_1 . \delta_2}{\delta'_1 . \delta'_2} = \frac{1' . 2'}{1 . 2} \cdot \frac{(1)\,(2)}{(1')(2')},$$

comme nous venons de le voir.

11. Au lieu de rechercher la signification géométrique de l'équation

$$\delta_1 \delta_2 - \lambda \delta'_1 \delta'_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

par la méthode du n° 9, si nous exprimons les distances δ_1... de la *dont les quatre côtés sont coupés par une droite quelconque, si l'on forme le produit des quotaires* (*) *des deux triangles qui ont leurs bases sur cette droite, et pour sommets respectifs ceux de chaque digone, et qu'on divise ce produit par celui des bases de chacun de ces triangles, le quotient obtenu sera constant pour chaque digone.*

Mais on a évidemment

$$(1'_1).(1'_2).1' = (1').\varpi'_1,$$

Substituant dans les égalités précédentes, on obtient :

$$\frac{(1').\varpi'_1}{1'} \cdot \frac{(2').\varpi'_2}{2'} = \frac{(1).\varpi_1}{1} \cdot \frac{(2).\varpi_2}{2} = \frac{(1'').\varpi''_1}{1''} \cdot \frac{(2'').\varpi''_2}{2''}.$$

Si la transversale est une droite du lieu qui a pour équation

$$C'_2 \equiv \varpi_1\varpi_2 - \lambda\varpi'_1\varpi'_2 = 0,$$

c'est-à-dire si elle est tangente à une conique conjuguée aux deux digones, on aura donc

$$\lambda = \frac{\varpi_1 . \varpi_2}{\varpi'_1 . \varpi'_2} = \frac{(1')(2')}{(1)(2)} \cdot \frac{1 . 2}{1'. 2'},$$

comme nous venons de le voir.

11'. Au lieu de rechercher la signification géométrique de l'équation

$$C'_2 \equiv \varpi_1\varpi_2 - \lambda\varpi'_1\varpi'_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6')$$

(*) Voir les Préliminaires.

manière dont nous l'avons fait en suivant la corrélative de celle-ci, nous arriverons à une nouvelle propriété assez remarquable.

Écrivons donc

$$\delta_1 = \frac{1.(11_1')(12_1')}{(1)}, \quad \delta_2 = \frac{2.(21_2')(22_2')}{(2)},$$

$$\delta_1' = \frac{1'.(1'1_1')(1'1_2')}{(1')}, \quad \delta_2' = \frac{2'(2'2_1')(2'2_2')}{(2')};$$

et substituons ces valeurs dans l'équation précédente, nous obtiendrons :

$$\lambda = \frac{(11_1').(12_1').(21_2').(22_2')}{(1'1_1')(1'1_2').(2'2_1').(2'2_2')} \cdot \frac{1\,.\,2}{1'.2'} \cdot \frac{(1').(2')}{(1).(2)}.$$

Or, en comparant cette valeur à celle que nous venons de trouver

$$\lambda = \frac{1'.2'}{1\,.\,2} \cdot \frac{(1).(2)}{(1').(2')},$$

nous en déduirons

$$\lambda^2 = \frac{(11_1').(12_1').(21_2').(22_2')}{(1'1_1').(1'1_2').(2'2_1').(2'2_2')},$$

c'est-à-dire, si nous nous rappelons la signification générale de l'équation 6) :

Théorème IV. *Si une conique est conjuguée (circonscrite) à deux bilatères, et qu'on joigne les sommets de ceux-ci à un point quelconque de la conique, le rapport des produits des sinus des angles comptés, dans le premier bilatère, depuis les côtés de celui-ci jusqu'aux rayons aboutissant à leurs extrémités, à ceux des sinus des angles, comptés de même dans le second, est constant.*

En combinant ce théorème avec le corrélatif de celui de Carnot, on arrivera à une expression tellement simple de l'un et de l'autre, qu'elle sera tout à fait intuitive dans le cas du cercle; et c'est pour cette raison, peut-être, qu'on ne l'a pas remarquée.

12. Les propriétés que nous venons d'énoncer, étaient toutes connues, à l'exception des derniers théorèmes; leur mode seul de démonstration nous est quelquefois propre.

par la méthode précédente, qui est de tout point la corrélative de celle du n° 9', si nous exprimons les distances ϖ_1... en fonction des aires des triangles $1'_1 1 2'_2, \ldots$, nous arriverons à une nouvelle propriété assez remarquable.

Écrivons donc

$$\varpi_1 = \frac{11'_1 \,.\, 12'_1 \,.\, (1)}{1}, \quad \varpi_2 = \frac{22'_2 \,.\, 21'_2 \,.\, (2)}{2},$$

$$\varpi'_1 = \frac{1'1'_1 . 1'1'_2 . (1')}{1'}, \quad \varpi'_2 = \frac{2'2'_2 . 2'2'_1 . (2')}{2'};$$

et substituons ces valeurs dans l'équation précédente, nous obtiendrons :

$$\lambda = \frac{11'_2 \,.\, 12'_2 \,.\, 21'_2 \,.\, 22'_2}{1'1'_2 \,.\, 1'1'_2 \,.\, 2'2'_1 \,.\, 2'2'_2} \cdot \frac{(1) \,.\, (2)}{(1') \,.\, (2')} \cdot \frac{1' . 2'}{1 \,.\, 2}.$$

Or, en comparant cette valeur à celle que nous venons d'obtenir

$$\lambda = \frac{(1') \,.\, (2')}{(1) \,.\, (2)} \cdot \frac{1 \,.\, 2}{1' . 2'},$$

nous en déduirons

$$\lambda^2 = \frac{11'_1 \,.\, 12'_1 \,.\, 21'_2 \,.\, 22'_2}{1'1'_1 \,.\, 1'1'_2 \cdot 2'2'_1 \,.\, 2'2'_2},$$

c'est-à-dire si nous nous rappelons la signification générale de l'équation 6') :

Théorème IV'. *Si une conique est conjuguée (inscrite) à deux digones, et qu'on coupe les côtés de ceux-ci par une tangente quelconque à la conique, le rapport des produits des côtés du premier digone, comptés depuis les sommets de celui-ci jusqu'à cette tangente, à ceux des côtés du second, comptés de même, est constant.*

En combinant ce théorème avec celui de Carnot, on arrivera à une expression plus simple de l'un et de l'autre; et cette dernière expression, transformée en sa corrélative, deviendra tout à fait intuitive, dans le cas du cercle.

12'. Démontrons le théorème de Brianchon comme nous avons démontré celui de Pascal.

Soit un trigone $\varpi_1\varpi_2\varpi_3$, et l'un de ses conjugués par rapport à

Celles dont nous allons nous occuper étant neuves, nous les traiterons pour les coniques en général.

Commençons par démontrer de la manière la plus simple, pensons-nous, le théorème de Pascal.

Soit un trilatère $\delta_1\delta_3\delta_5$, et l'un de ses conjugués, par rapport à une conique C_2, $\delta_2\delta_4\delta_6$, ce qui forme un hexagone inscrit $\delta_1 \ldots \delta_6$. Appelons δ_0 par la droite de jonction des intersections de δ_3 avec δ_4 et de δ_6 avec δ_1.

$\delta_1\delta_3$ et $\delta_2\delta_0$ seront deux bilatères conjugués à la conique; l'équation de celle-ci sera donc

$$C_2 \equiv \delta_1\delta_3 - \lambda\delta_0\delta_2 = 0.$$

Et de même :

$$C_2 \equiv \delta_4\delta_6 - \lambda'\delta_5\delta_0 = 0.$$

En multipliant en croix ces deux équations, nous aurons

$$\lambda'\delta_1\delta_3\delta_5 - \lambda\delta_2\delta_4\delta_6 = 0.$$

Or, le premier membre renferme le facteur C_2; il doit donc renfermer en outre un facteur linéaire Δ, en sorte que

$$\lambda'\delta_1\delta_3\delta_5 - \lambda\delta_2\delta_4\delta_6 \equiv C_2 . \Delta = 0 \; ; \quad \ldots \ldots \quad 7)$$

et, comme les intersections de δ_1 avec δ_2 et δ_6, de δ_3 avec δ_2 et δ_4, de δ_5 avec δ_4 et δ_6 sont sur la conique C_2, les autres, savoir celles de δ_1 avec δ_4, de δ_3 avec δ_6, de δ_5 avec δ_2, sont sur la droite Δ, cqfd.

Cette même forme d'équation conduit aussi très-aisément aux théorèmes sur les points et les droites de Steiner.

Elle dévoile, en outre, lorsque la conique se réduit à un bilatère, l'existence de *trois bilatères conjugués entre eux*, c'est-à-dire tels que chaque côté de l'un passe par trois points d'intersection des côtés des deux autres. L'équation 6) devient en effet, dans ce cas :

$$\lambda'\delta_1\delta_3\delta_5 - \lambda\delta_2\delta_4\delta_6 = \Delta . \Delta' . \Delta'' = 0 . \quad \ldots \ldots \quad 8)$$

une conique C_2, $\varpi_2\varpi_4\varpi_6$, ce qui forme un hexagone circonscrit $\varpi_1 \ldots \varpi_6$. Appelons ϖ_0 le point d'intersection des jonctions de ϖ_3 avec ϖ_4 et de ϖ_6 avec ϖ_1.

$\varpi_1\varpi_3$ et $\varpi_2\varpi_0$ seront deux digones conjugués à la conique; l'équation de celle-ci sera donc

$$C_2 \equiv \varpi_1\varpi_3 - \lambda\varpi_2\varpi_0.$$

Et de même

$$C_2 \equiv \varpi_4\varpi_6 - \lambda'\varpi_5\varpi_0.$$

En multipliant en croix ces deux équations, nous aurons

$$\lambda'\varpi_1\varpi_3\varpi_5 - \lambda\varpi_2\varpi_4\varpi_6 = 0.$$

Or, le premier membre renferme le facteur C_2; il doit donc, en outre, renfermer un facteur linéaire Π, en sorte que

$$\lambda'\varpi_1\varpi_3\varpi_5 - \lambda\varpi_2\varpi_4\varpi_6 \equiv C_2 \,.\, \Pi = 0 \,; \quad \ldots \ldots \quad 7')$$

et, comme les jonctions de ϖ_1 avec ϖ_2 et ϖ_6, de ϖ_3 avec ϖ_2 et ϖ_4, de ϖ_5 avec ϖ_4 et ϖ_6 sont tangentes à la conique C_2, les autres, savoir celles de ϖ_1 avec ϖ_4, de ϖ_3 avec ϖ_6, de ϖ_5 avec ϖ_2, concourent au point Π, cqfd.

Cette même forme d'équation conduit aux théorèmes sur les points et les droites de Steiner.

Elle dévoile, en outre, l'existence de *trois trigones conjugués entre eux*, c'est-à-dire tels que chaque sommet de l'un est le concours de trois droites de jonction des sommets des deux autres. L'équation 7') devient, en effet, dans le cas où la conique se réduit à un digone $\Pi'.\Pi''$:

$$\lambda'\varpi_1\varpi_3\varpi_5 - \lambda\varpi_2\varpi_4\varpi_6 \equiv \Pi \,.\, \Pi' \,.\, \Pi'' = 0 \,. \quad \ldots \ldots \quad 8')$$

Enfin, on trouverait de même des théorèmes tels que le suivant:

Dans un octogone circonscrit à une conique, les jonctions des sommets non adjacents sont tangentes à une autre conique.

Enfin, des modes de démonstration tout à fait analogues conduiraient à des théorèmes tels que le suivant :

Dans un octogone inscrit à une conique, les côtés non adjacents se coupent sur une autre conique (*).

12bis. Considérons l'équation

$$\frac{a_1}{\delta_1}+\frac{a_2}{\delta_2}+\frac{a_3}{\delta_3}=0$$

qui est évidemment celle d'une conique.

Il est facile de prouver que δ_1, δ_2, δ_3 sont les côtés d'un triangle inscrit à la courbe; et que ceux du triangle circonscrit à celle-ci, par les sommets du premier, sont respectivement $\frac{\delta_2}{a_2}+\frac{\delta_3}{a_3}=0$, etc.

En effet, l'équation précédente peut s'écrire

$$(a_1\delta_2+a_2\delta_1)\delta_3+a_3\delta_1\delta_2=0$$

ou

$$A_3\Delta'_3\delta_3+a_3\delta_1\delta_2=0\,;$$

ce qui est l'équation d'une conique rapportée aux bilatères conjugués $\delta_1\delta_2$ et $\delta_3\Delta'_3$; il en résulte, 1° que δ_1 et δ_2 se coupent sur la courbe; 2° que Δ'_3 est tangente en ce point d'intersection de δ_1 et de δ_2, puisque les deux points de rencontre de Δ'_3 avec la courbe se confondent en ce point.

De ces relations on déduit très-simplement le *théorème de* Carnot.

Mais il en résulte, de plus, que l'équation de la conique, rapportée à ces deux riangles, inscrit et circonscrit, pourra s'écrire :

$$2C_2\equiv A_1\delta_1\Delta'_1+A_2\delta_2\Delta'_2+A_3\delta_3\Delta'_3=0.$$

Cette forme symétrique d'équation devait conduire à une propriété fort simple de ces triangles ; la voici en effet :

Théorème V. *Si, par trois points pris sur une conique, on lui inscrit et circonscrit un triangle, une transversale quelconque coupe les côtés de ces deux triangles en trois couples de points en* évolution.

Démonstration. Si l'on désigne les points d'intersection de la transversale, avec la conique, par $00'$; avec les côtés des deux triangles, par 1, 2, 3, 1′, 2′ 3′, on sait, par le théorème Desargues, que $00'$ est en involution avec 21 et 33′, 13 et 22′, 32 et 11′; écrivant les relations qui expriment ces involutions, et les multipliant membre à membre, on trouvera

$$12'.23'.31'=1'2.2'3.3'1\,,$$

(*) Voir F. G. S. C., p. 58, où se trouve l'énoncé, tout à fait général, du théorème analogue pour les courbes du n^e ordre.

relation identique, au signe près, avec celle qui exprime l'involution des trois couples de points 11′, 22′, 33′, et que nous avons appelée ÉVOLUTION de ces trois couples (*).

Nous verrons que cette même propriété se rencontre également, sous une forme absolument identique, dans les courbes supérieures.

Il est fort aisé de mettre la relation précédente sous une forme telle qu'elle exprime l'égalité de deux rapports anharmoniques, par exemple :

$$[11'23'] = -[1'12'3],$$

et ainsi de suite ; en sorte que l'*évolution des trois couples de points* signifie que *ces trois couples sont tels que le rapport anharmonique de quatre points, pris dans les trois couples, est égal et de signe contraire à celui de leurs conjugués.*

Il est aisé de trouver de même, pour l'hexagone inscrit, la propriété correspondante à celle de l'évolution (**).

Les propriétés corrélatives sont tellement aisées à formuler et à démontrer, que nous nous bornerons à l'énoncé du corrélatif du théorème V :

Théorème V′. *Si, par trois points pris sur une conique, on lui inscrit et circonscrit un triangle, et qu'on joigne les sommets de ces deux triangles à un centre quelconque, on forme un faisceau en* ÉVOLUTION.

(*) *Bulletin de l'Académie roy. de Belgique*, 2e serie, t. XLIII, p. 500.
(**) *Ibid.*, t. XLIV, p. 193.

§ IV. Faisceau de trilatères (*).

13. L'identité 8) n° **12**, ou

$$\delta_1\delta_2\delta_3 + k'\delta'_1\delta'_2\delta'_3 + k''\delta''_1\delta''_2\delta''_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 1)$$

exprime, comme nous l'avons vu, que les trois trilatères qui y entrent sont conjugués entre eux; et l'on y lit immédiatement l'énoncé suivant :

Théorème VI. Extension du théorème de Pappus. *Si trois trilatères sont conjugués entre eux, les produits des distances d'un point quelconque de l'un d'entre eux, aux côtés des deux autres, sont analogiques;*

et, plus généralement encore :

Il existe une relation linéaire entre les produits des distances d'un point quelconque (du plan) aux ternes respectifs de côtés de trois trilatères conjugués entre eux.

Ce dernier énoncé revêtira une autre forme au n° 19.

14. Une autre interprétation de la même identité nous conduira immédiatement à l'*extension du théorème de* Desargues.

En suivant absolument la même marche qu'au n° 7, et conservant les mêmes notations, nous aurons, pour chacun des points 1'', 2'', 3'' d'intersection d'une transversale quelconque, avec les côtés de même nom du troisième trilatère, la relation

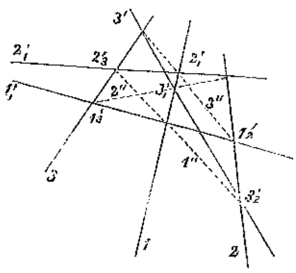


Fig. 6.

$$\delta_1\delta_2\delta_3 - \lambda\delta'_1\delta'_2\delta'_3 = 0 \, ; \quad . \quad . \qquad 2)$$

(*) Les extensions des théorèmes de Pappus, de Desargues et de Pascal, par lesquelles commence ce paragraphe, ont été données, pour la première fois, dans nos F. G. S. C., pp. 20 et suiv., où nous en avons fait directement

§ IV'. De trigones (*).

13'. L'identité 8') n° 12, ou

$$\varpi_1\varpi_2\varpi_3 + k'\varpi'_1\varpi'_2\varpi'_3 + k''\varpi''_1\varpi''_2\varpi''_3 \equiv 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1')$$

exprime que les trois trigones qui y entrent sont conjugués entre eux; et l'on y lit l'énoncé suivant :

Théorème VI'. Extension du théorème corrélatif de celui de Pappus. Si *trois trigones sont conjugués entre eux, les produits des distances d'une droite quelconque (passant par un sommet) de l'un d'entre eux, aux sommets des deux autres, sont analogiques;*

et, plus généralement :

Il existe une relation linéaire entre les produits des distances d'une droite quelconque (du plan) aux ternes respectifs de sommets de trois trigones conjugués entre eux.

Ce dernier énoncé revêtira une autre forme au n° 19'.

14'. Passons au théorème corrélatif de celui de Desargues, et suivons, pour cela, absolument la même marche qu'au n° 7', en conservant les mêmes notations.

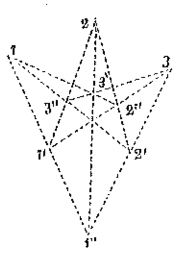


Fig. 6'.

Nous aurons, pour chacune des droites 1'', 2'', 3'' de jonction d'un centre quelconque (dans le plan) avec les sommets de même nom du trigone, la relation suivante, qui se tire de l'identité 1') :

$$\varpi_1\varpi_2\varpi_3 - \lambda\varpi'_1\varpi'_2\varpi'_3 = 0 ; \quad . \quad . \quad 2')$$

(*) La note du n° 13 est applicable à l'extension des théorèmes corrélatifs de ceux de Pappus et de Desargues, et à celle du théorème de Brianchon, aux courbes de la troisième classe; voir F. G. S. C., pp. 42 et suiv.

La figure des trois trigones peut se construire à l'aide du théorème suivant:

Théorème. *Si l'on joint, par des droites, les sommets d'un trigone à deux* et, comme dans ce même n° 7, pour le point 1″ :

$$\delta_1 = 11''.(1); \quad \delta_2 = 21''.(2); \quad \delta_3 = 31''.(3);$$
$$\delta'_1 = 1'1''.(1'); \quad \delta'_2 = 2'1''.(2'); \quad \delta'_3 = 3'1''.(3');$$

valeurs qui, substituées dans la relation 2), donnent :

$$11''.21''.31''.(1).(2).(3) = \lambda 1'1''.2'1''.3'1''.(1').(2').(3').$$

Pour les points 2″ et 3″, il suffira évidemment de changer, dans cette relation, 1″ en 2″ et en 3″.

La comparaison de ces trois égalités entre elles conduira aux suivantes :

$$\frac{11''.\ 21''.\ 31''}{1'1''.\ 2'1''.\ 3'1''} = \Big[\quad\Big]_{2''} = \Big[\quad\Big]_{3''},$$

où le second et le troisième membre ne sont autre chose que le premier lui-même, dans lequel on a à remplacer 1″ par 2″ et par 3″.

Elles expriment le théorème :

Théorème VII. Extension du théorème de Desargues. *Dans un système de trois trilatères conjugués entre eux, une transversale quelconque rencontre les côtés de ces trilatères en trois ternes de points qui sont en involution.*

15. On trouve une expression plus générale de cette involution, analogue à celle que M. P. Serret a donnée pour le second ordre, en procédant comme nous l'avons fait au n° 8.

l'application aux courbes du troisième ordre, ce qui nous dispensera de la faire ici.

La figure des trois trilatères peut se construire à l'aide du théorème suivant :

Théorème. *Si l'on coupe un trilatère par deux sécantes, et qu'on joigne deux à deux les points d'intersection de celles-ci avec ses côtés par trois transversales (qui ne passent pas, deux à deux, par l'un de ces points), les troisièmes intersections de ces dernières avec le trilatère sont collimantes.*

et, comme dans ce même n° 7′, pour la droite 1″:

$$\varpi_1 = (11'').1\,; \quad \varpi_2 = (21'').2\,; \quad \varpi_3 = (31'').3\,;$$
$$\varpi_1' = (1'1'').1'\,; \quad \varpi_2' = (2'1'').2'\,; \quad \varpi_3' = (3'1'').3'\,;$$

valeurs qui, substituées dans la relation 2′), donneront

$$(11'').(21'').(31'').1.2.3 = \lambda\,(1'1'').(2'1'').(3'1'').1'.2'.3'.$$

Pour les droites 2″ et 3″, il suffira de changer, dans cette relation, 1″ en 2″ et en 3″.

La comparaison de ces trois égalités entre elles conduira aux suivantes :

$$\frac{(11'').(21'').(31'')}{(1'1'').(2'1'').(3'1'')} = \Big[\quad\Big]_{2''} = \Big[\quad\Big]_{3''}\,;$$

elles expriment le théorème :

Théorème VII′. EXTENSION DU CORRÉLATIF DU THÉORÈME DE DESARGUES. *Dans un système de trois trigones conjugués entre eux, si l'on joint leurs sommets à un centre quelconque (du plan) par des droites, ces trois ternes de droites sont en involution.*

15′. On trouve une expression plus générale de cette involution, en procédant comme nous l'avons fait au n° 8′.

Cette expression, mise sous forme symbolique, est

$$\sum_{\prime}^{\prime\prime\prime} \lambda\,(X - X_1).(X - X_2).(X - X_3) \equiv 0.$$

points (du plan), et qu'on prenne trois points d'intersection de ces droites deux à deux (de manière qu'il n'y en ait pas deux sur l'une de ces droites), les troisièmes jonctions de ces points avec le trigone sont concourantes. (Voir *ibid.*)

Cette expression, mise sous forme symbolique, est

$$\sum_{,}^{'''} \lambda \overline{x - x_1} \,.\, \overline{x - x_2} \,.\, \overline{x - x_3} \equiv 0 \ (^*).$$

16. On déduirait immédiatement, de notre extension du théorème de Desargues, celle que nous avons donnée au théorème de Pascal, pour une courbe du troisième ordre en général (**), et qui s'énonce dans les termes suivants, si cette courbe est remplacée par un trilatère :

Théorème VIII. Extension du théorème de Pascal. *Dans un système de deux quadrilatères conjugués à un trilatère, les intersections des côtés opposés sont collimantes.*

L'expression analytique la plus simple de ce théorème est, si $\delta'_1 .. \delta'_4$, $\delta''_1 .. \delta''_4$ sont les premiers membres des équations des deux quadrilatères conjugués au trilatère $\delta_1\delta_2\delta_3 = 0$:

$$\delta'_1 \ldots \delta'_4 - \lambda\delta''_1 \ldots \delta''_4 \equiv k\delta_1\delta_2\delta_3\Delta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

expression dans laquelle on découvre l'existence de trois quadrilatères conjugués entre eux. (Voir fig. 7.)

Remarque. De même qu'une forme d'équation semblable (n° 12) conduit très-aisément aux propriétés des points et des droites de Steiner, de même l'étude de l'équation précédente, appliquée aux différents systèmes de quadrilatères conjugués inscrits à un même trilatère (ou à une même courbe du troisième ordre), au moyen de la construction rappelée dans les deux notes ci-dessus, conduirait bien certainement à des propriétés analogues.

Nous n'avons pas le loisir d'entreprendre cette recherche, et nous appelons sur elle l'attention des jeunes géomètres. Il nous paraît superflu de répéter cette remarque à l'occasion des formes analogues que nous trouverons dans les ordres supérieurs. Nous n'y reviendrons donc pas.

(*) Voir à ce sujet le *Bulletin de l'Académie*, 2e sér., t. XLV, p. 159.

(**) Pour la construction de la figure, et la démonstration du théorème, voir F. G. S. C., pp. 22 et 23.

16'. Du théorème qui précède, on déduirait immédiatement l'extension de celui de Brianchon, que nous avons donnée pour une courbe de la troisième classe en général (*), et qui s'énonce dans les termes suivants, si cette courbe est remplacée par un trigone :

Théorème VIII'. EXTENSION DU THÉORÈME DE BRIANCHON. *Dans un système de deux tétragones conjugués à un trigone, les jonctions des sommets opposés sont concourantes.*

L'expression la plus simple de ce théorème est

$$\varpi'_1 \dots \varpi'_4 - \lambda\varpi''_1 \dots \varpi''_4 \equiv k\varpi_1\varpi_2\varpi_3 \,.\, \Pi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3')$$

expression dans laquelle on découvre l'existence de trois tétragones conjugués entre eux.

(*) Voir F. G. S. C., p. 44.

17. Enfin, de ce que les intersections des couples de côtés opposés de deux quadrilatères conjugués (inscrits) à un même trilatère (ou à une courbe au troisième ordre), sont collimantes, on peut conclure immédiatement ce corollaire (*) :

Théorème IX. *Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de côtés opposés de deux quadrilatères conjugués (inscrits) à un même trilatère (ou à une même courbe du troisième ordre), on obtient un hexagone inscrit à une conique;* et l'on peut conclure de là, en appliquant notre extension du théorème de Pascal, ou l'équation 3), aux courbes du troisième ordre en général, C_3, que, de l'identité

$$\delta'_1 \ldots \delta'_4 - \lambda\delta''_1 \ldots \delta''_4 \equiv kC_3 \, . \, \Delta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

on peut déduire les suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta'_1\delta'_2\delta'_3 - \lambda_1\delta''_1\delta''_2\delta''_3 &\equiv k_1C'_2 \, . \, \Delta; \\
\delta'_1\delta'_2\delta'_4 - \lambda_2\delta''_1\delta''_2\delta''_4 &\equiv k_2C''_2 \, . \, \Delta; \\
\delta'_1\delta'_3\delta'_4 - \lambda_3\delta''_1\delta''_2\delta''_4 &\equiv k_3C'''_2 \, . \, \Delta; \\
\delta'_1\delta'_3\delta'_4 - \lambda_4\delta''_2\delta''_3\delta''_4 &\equiv k_4C^{\text{IV}}_2 \, . \, \Delta;
\end{aligned}$$

ce qui constitue, en soi, un théorème d'analyse pure assez curieux.

Il serait très-intéressant de rechercher les propriétés des quatre coniques $C'_2 \ldots C^{\text{IV}}_2$, qui résultent de ces combinaisons.

18. En généralisant la forme d'équation 4), on arrive à la suivante

$$\delta'_1 \ldots \delta'_n - \lambda\delta''_1 \ldots \delta''_n \equiv k\delta_1\delta_2\delta_3 \, . \, C_{n-3},$$

dans laquelle on lit l'énoncé :

Théorème X. *Dans un système de deux* n *latères conjugués (inscrits) à un trilatère (ou à une courbe du troisième ordre), les couples de côtés non adjacents se coupent en* n(n — 3) *points situés sur une courbe d'ordre* n — 3.

(*) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 2e série, t. XLIV, p. 191.

17'. Enfin, de ce que les jonctions des couples de sommets opposés de deux tétragones conjugués à un même trigone (ou à une courbe de la troisième classe) sont concourantes, on peut conclure immédiatement ce corollaire :

Théorème IX'. *Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de sommets opposés de deux tétragones conjugués à un même trigone (ou à une courbe de la troisième classe), on obtient un hexagone circonscrit à une conique.*

18'. Par la même forme d'équation que celle donnée au n° 19', on démontrerait ce théorème :

Théorème X'. *Dans un système de deux* n *gones conjugués à un trigone (ou à une courbe de la troisième classe), les jonctions des couples de sommets non adjacents, au nombre de* n (n — 3), *enveloppent une courbe de classe* n — 3.

19. Nous allons suivre maintenant, dans l'étude des trilatères conjugués, la même voie qui, dans l'étude des bilatères, nous a conduit directement au rapport anharmonique.

Partons de l'identité

$$\delta''_1\delta''_2\delta''_3 \equiv \delta_1\delta_2\delta_3 - \lambda\delta'_1\delta'_2\delta'_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Joignons, à un centre quelconque, les sommets des trilatères 1, 2, 3 et 1', 2', 3', sommets qui sont, pour chacun des côtés d'un trilatère, ses intersections avec deux des trois côtés de l'autre, à choisir arbitrairement, pourvu qu'ils déterminent complétement les trilatères.

Nous choisirons, pour ces sommets, les points

$$2'_1,\ 3'_1;\ 3'_2,\ 1'_2;\ 1'_3,\ 2'_3,$$

qui sont les intersections respectives des côtés 2' et 1, 3' et 1, etc.

Conservons ces mêmes notations pour représenter les rayons qui aboutissent à ces extrémités; nommons $2'_13'_1$, $1'_21'_3$ etc. les longueurs des côtés 1, 1', etc., comprises entre ces extrémités; nous aurons, comme au n° 9, en rapportant les distances δ_1, etc., au centre considéré :

$$\delta_1 = \frac{2'_1 \cdot 3'_1\,(2'_13'_1)}{2'_13'_1};$$

expression que nous représenterons simplement par

$$\delta_1 = \{2'_13'_1\} \equiv \{3'_12'_1\};$$

nous aurons de même :

$$\delta_2 = \{3'_21'_2\};\quad \delta_3 = \{1'_32'_3\}.$$
$$\delta'_1 = \{1'_21'_3\};\quad \delta'_2 = \{2'_32'_1\};\quad \delta'_1 = \{3'_13'_2\}.$$
$$\delta''_1 = \{3'_22'_3\};\quad \delta''_2 = \{1'_33'_1\};\quad \delta''_3 = \{2'_11'_2\}.$$

Substituant ces valeurs, développées, dans l'identité 5), et

19'. Recherchons le rapport anharmonique du troisième ordre dans l'identité

$$\varpi''_1\varpi''_2\varpi''_3 \equiv \varpi_1\varpi_2\varpi_3 - \lambda\varpi'_1\varpi'_2\varpi'_3.$$

Coupons, par une transversale quelconque, les côtés des trigones 1, 2, 3 et 1', 2', 3', *côtés* qui sont, pour chacun des sommets d'un trigone, ses jonctions avec deux des trois sommets de l'autre, à choisir arbitrairement, pourvu qu'ils déterminent entièrement les trigones.

Nous choisirons, pour ces côtés, les droites $2'_1, 3'_1$; $3'_2, 1'_2$; $1'_3, 2'_3$, qui sont les jonctions respectives des sommets 2' et 1, 3' et 1, etc.

Conservons ces mêmes notations pour représenter les intersections de ces côtés avec la transversale ; nous aurons, en rapportant les distances ϖ_1 ... à celle-ci :

$$\varpi_1 = \frac{2'_1 3'_1 \,.\, (2'_1) \,.\, (3'_1)}{(2'_1 3'_1)}, \quad \varpi_2 = \frac{3'_2 1'_2 \,.\, (3'_2) \,.\, (1'_2)}{(3'_2 1'_2)}, \quad \varpi_3 = \frac{1'_3 2'_3 \,.\, (1'_3) \,.\, (2'_3)}{(1'_3 2'_3)};$$

$$\varpi'_1 = \frac{1'_2 1'_3 \,.\, (1'_2) \,.\, (1'_3)}{(1'_2 1'_3)}, \quad \varpi'_2 = \frac{2'_3 2'_1 \,.\, (2'_3) \,.\, (2'_1)}{(2'_3 2'_1)}, \quad \varpi'_3 = \frac{3'_1 3'_2 \,.\, (3'_1) \,.\, (3'_2)}{(3'_1 3'_2)};$$

$$\varpi''_1 = \frac{3'_2 2'_3 \,.\, (3'_2) \,.\, (2'_3)}{(3'_2 2'_3)}, \quad \varpi'' = \frac{1'_3 3'_1 \,.\, (1'_3) \,.\, (3'_1)}{(1'_3 3'_1)}, \quad \varpi''_3 = \frac{2'_1 1'_2 \,.\, (2'_1) \,.\, (1'_2)}{(2'_1 1'_2)};$$

expressions dans lesquelles les dénominateurs, tels que $(2'_1 3'_1)$ ou $(1'_2 1'_3)$, représentent les sinus des angles $2'_1 1 3'_1$ ou $1'_2 1' 1'_3$, etc., ou bien des angles 1 ou 1', etc.

Substituées dans l'identité précédente, elles donnent, après réduction :

$$\frac{3'_2 2'_3 \,.\, 1'_3 3'_1 \,.\, 2'_1 1'_2}{(3'_2 2'_3)\,.\,(1'_3 3'_1)\,.\,(2'_1 1'_2)} \equiv \frac{2'_1 3'_1 \,.\, 3'_2 1'_2 \,.\, 1'_3 2'_3}{(2'_1 3'_1)\,.\,(3'_2 1'_2)\,.\,(1'_3 2'_3)} - \lambda \frac{1'_2 1'_3 \,.\, 2'_3 2'_1 \,.\, 3'_1 3'_2}{(1'_2 1'_3)\,.\,(2'_3 2'_1)\,.\,(3'_1 3'_2)}.$$

Comme les dénominateurs sont des quantités constantes, quelle que soit la transversale choisie, nous pourrons écrire :

$$2'_1 3'_1 \,.\, 3'_2 1'_2 \,.\, 1'_3 2'_3 - \lambda' 1'_2 1'_3 \,.\, 2'_3 2'_1 \,.\, 3'_1 3'_2 \equiv k 3'_2 2'_3 \,.\, 3'_1 1'_3 \,.\, 2'_1 1'_2.$$

Or les facteurs, qui entrent dans ces expressions, sont les supprimant les facteurs $2'_1$, $3'_1$, $3'_2$, $1'_2$, $1'_3$, $2'_3$, qui seront communs à tous les termes, nous trouverons

$$\frac{(2'_1 3'_1)(3'_2 1'_2)(1'_3 2'_3)}{2'_1 3'_1 \,.\, 3'_2 1'_2 \,.\, 1'_3 2'_3} - \lambda \frac{(1'_2 1'_3)(2'_3 2'_1)(3'_1 3'_2)}{1'_2 1'_3 \,.\, 2'_3 2'_1 \,.\, 3'_1 3'_2} = \frac{(3'_2 2'_3)(1'_3 3'_1)(2'_1 1'_2)}{3'_2 2'_3 \,.\, 1'_3 3'_1 \,.\, 2'_1 1'_2};$$

si nous remarquons que les dénominations sont des quantités constantes, quelque soit le centre choisi, nous pourrons écrire plus simplement :

$$(2'_1 3'_1)(3'_2 1'_2)(1'_3 2'_3) - \lambda'(1'_2 1'_3)(2'_3 2'_1)(3'_1 3'_2) = k \,.\, (3'_2 2'_3)(3'_1 1'_3)(2'_1 1'_2).$$

Or, les différents facteurs, qui entrent dans ces expressions, sont les sinus des angles soutendus, au centre du faisceau, par les côtés $1, 2, 3$; $1', 2', 3'$; $1'', 2'', 3''$, qui sont limités respectivement par $2', 3'$; $3', 1'$; $1', 2'$; $2, 3$; $3, 1$; $1, 2$; de sorte que la relation précédente s'écrira :

$$(1) \,.\, (2) \,.\, (3) - \lambda'(1') \,.\, (2') \,.\, (3') = k(1'') \,.\, (2'') \,.\, (3''),$$

et pourra s'énoncer :

Théorème XI. *Si, d'un centre quelconque (pris dans le plan) on mène les rayons aux sommets* (*) *de trois trilatères conjugués entre eux, il existe une relation linéaire entre les produits des sinus des angles soutendus, en ce centre, par les ternes respectifs de côtés des trois trilatères*, énoncé qui ne diffère pas, dans le fond, ni de notre extension générale du théoréme de Pappus (n° **14**), ni de celle du théorème de Desargues (n° 16).

20. Si le centre du faisceau est un point du troisième trilatère, le second membre des identités précédentes est nul, et l'on aura, par suite :

$$\lambda' = \lambda \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3}{1' \,.\, 2' \,.\, 3'} = \frac{(1) \,.\, (2) \,.\, (3)}{(1') \,.\, (2') \,.\, (3')} = \frac{(2'_1 3'_1)(3'_2 1'_2)(1'_3 2'_3)}{(1'_2 1'_3)(2'_3 2'_1)(3'_1 3'_2)} \,. \qquad 6)$$

Cette dernière égalité peut s'écrire

$$\lambda' = \frac{(2'_1 3'_1)(3'_2 1'_2)(1'_3 2'_3)}{(2'_3 2'_1)(3'_1 3'_2)(1'_2 1'_3)};$$

(*) V. plus haut la définition de ces *sommets*.

segments interceptés, sur la transversale, par les angles 1, 2, 3 ; 1′, 2′, 3′ ; 1″, 2″, 3″, dont les côtés sont déterminés, respectivement, par les sommets 2′, 3′ ; 3′, 1′ ; 1′, 2′ ; 2, 3 ; 3, 1 ; 1, 2 ; de sorte que la relation précédente pourra s'écrire

$$1\,.\,2\,.\,3 - \lambda' 1'\,.\,2'\,.\,3' \equiv k 1''\,.\,2''\,.\,3'',$$

et s'énoncer :

Théorème XI′. *Si l'on mène une droite quelconque dans le plan de trois trigones conjugués entre eux, il existe une relation linéaire entre les produits des segments interceptés, sur cette droite, par les ternes respectifs d'angles des trois trigones,* énoncé qui n'est qu'une autre forme de ceux que nous avons trouvés comme extension des corrélatifs des théorèmes de Pappus, n° 14′, et de Desargues, n° 16′.

20′. Si la transversale passe par l'un des sommets du digone $\varpi''_1 \varpi''_2 \varpi''_3$, chacun des membres de l'identité sera nul, et, par suite :

$$\lambda' = \lambda\,.\,\frac{(1)\,.\,(2)\,.\,(3)}{(1')\,.\,(2')\,.\,(3')} = \frac{1\,.\,2\,.\,3}{1'\,.\,2'\,.\,3'} = \frac{2'_1 3'_1\,.\,3'_2 1'_2\,.\,1'_3 2'_3}{2'_3 2'_1\,.\,3'_1 3'_2\,.\,1'_2 1'_3}.$$

On reconnaît dans le second membre le rapport anharmonique des six points de la transversale ; et l'on peut, par conséquent, énoncer ce théorème fondamental :

Théorème XII′. *Si l'on mène une droite quelconque par l'un des* et l'on voit alors que le dénominateur se tire du numérateur en faisant simplement passer au premier rang la dernière figure de celui-ci.

Or, c'est ainsi que se forme (n° 5^{bis}) le rapport anharmonique connu jusqu'à ce jour, et dont chaque terme est composé de deux facteurs, ou le rapport anharmonique du second ordre.

L'identité de marche et de résultat entre l'exposition actuelle, relative aux trilatères conjugués, et celle du n° 9, relative aux bilatères conjugués, montre à l'évidence que nous avons affaire ici à un rapport anharmonique supérieur; nous l'appellerons RAPPORT ANHARMONIQUE DU TROISIÈME ORDRE (*); et nous pourrons énoncer ce théorème fondamental :

Théorème XII. *Si l'on joint un point quelconque d'un trilatère aux sommets (**) de deux trilatères conjugués au premier, le rapport anharmonique du faisceau ainsi formé est constant;*

et l'on peut ajouter que :

Ce rapport est égal à celui des segments interceptés, entre les rayons, sur une transversale quelconque.

Cette dernière propriété, presque intuitive, se vérifie, du reste, très-aisément.

Désignons par $2'_1$ etc. les rayons menés aux points $2'_1$ etc.; par $(2'_1)$ etc. les sinus des angles compris entre la transversale et ces rayons; par $2'_1 3'_1$ la distance entre les extrémités de la transversale, comptées sur les rayons $2'_1$ et $3'_1$, etc., nous aurons :

$$(2'_1 3'_1) = (2'_1)\,\frac{2'_1 3'_1}{3'_1};\ (3'_2 1'_2) = (3'_2)\,\frac{3'_2 1'_2}{1'_2};\ (1'_3 2'_3) = (1'_3)\,\frac{1'_3 2'_3}{2'_3}.$$

$$(2'_3 2'_1) = (2'_1)\,\frac{2'_3 2'_1}{2'_3};\ (3'_1 3'_2) = (3'_2)\,\frac{3'_1 3'_2}{3'_1};\ (1'_2 1'_3) = (1'_3)\,\frac{1'_2 1'_3}{1'_2}.$$

De là se tire immédiatement la propriété cherchée.

(*) Voir au *Bulletin* les raisons pour lesquelles nous avons adopté cette dénomination. *Bulletin de l'Académie*, 2e série, t. XLIV, p. 469; et *Recherches de géom. sup.*

(**) Voir plus haut comment nous avons défini ces sommets; on pourrait prendre pour tels les intersections d'un côté avec ceux de noms contraires.

sommets d'un trigone, elle rencontre les côtés (*) *de deux trigones, conjugués au premier, en six points dont le rapport anharmonique est constant;*

et l'on peut ajouter que

Ce rapport est égal à celui du faisceau formé par la jonction de ces points à un centre quelconque.

Cette dernière propriété se vérifierait comme nous l'avons fait pour sa corrélative.

REMARQUE CAPITALE. Le théorème précédent est applicable également au cas où l'un des trigones serait remplacé par une courbe de la troisième classe, à laquelle les deux autres seraient conjugués, et s'énonce alors :

Théorème XIII'. *Une tangente quelconque à une courbe de la troisième classe rencontre les côtés de deux trigones, conjugués à cette courbe, en six points dont le rapport anharmonique est constant.*

Cette propriété de six tangentes à une courbe de la troisième classe est l'extension de la *propriété anharmonique de quatre tangentes à une conique.*

(*) Voir plus haut la définition de ces *côtés.*

Remarque capitale. Le théorème qui précède est encore applicable au cas où le premier trilatère serait remplacé par une courbe quelconque du troisième ordre, à laquelle les deux autres trilatères seraient conjugués. Inutile de s'arrêter à la démonstration, qui se fonde sur l'identité de forme des équations du premier trilatère et de la courbe, si on les rapporte à un système de trilatères conjugués (*).

Nous aurons ainsi le théorème général :

Théorème XIII. *Si l'on joint un point quelconque d'une courbe du troisième ordre aux sommets de deux trilatères conjugués à cette courbe, le rapport anharmonique du faisceau ainsi formé est constant.*

Ce théorème est l'extension de celui qui est connu sous le nom de *propriété anharmonique de quatre points d'une conique.*

21. Avant de procéder à une étude, tout à fait sommaire cependant, du rapport anharmonique du troisième ordre, cherchons à le découvrir de nouveau par le procédé que nous avons suivi au n° 10.

En désignant par $2'_1$ etc. les rayons qui joignent les sommets $2'_1$ etc. à un centre quelconque, par (1) etc. les sinus des angles soutendus, en ce centre, par les côtés 1, etc., nous pourrons écrire identiquement :

$$\frac{2'_1 . 3'_1 . (1)}{(1)} \cdot \frac{3'_2 . 1'_2 . (2)}{(2)} \cdot \frac{1'_3 . 2'_3 . (3)}{(3)} = \frac{1'_2 . 1'_3 . (1')}{(1')} \cdot \frac{2'_3 . 2'_1 . (2')}{(2')} \cdot \frac{3'_1 . 3'_2 \; (3')}{(3')}$$
$$= \frac{3'_2 . 2'_3 . (1'')}{(1'')} \cdot \frac{1'_3 . 3'_1 . (2'')}{(2'')} \cdot \frac{2'_1 . 1'_2 . (3'')}{(3'')},$$

et énoncer, comme au n° 10, le théorème :

Théorème XIV. *Dans le cas de trois trilatères conjugués entres eux, dont les sommets* (**) *sont joints à un centre quelconque, si l'on forme le produit des aires des trois triangles qui ont leurs*

(*) F. G. S. C., p. 11.

(**) Ces sommets sont définis plus haut (voir la note précédente).

21'. Écrivons identiquement

$$
\begin{aligned}
&\frac{(2'_1)\,.\,(3'_1)\,.\,1}{1}\,.\,\frac{(3'_2)\,.\,(1'_2)\,.\,2}{2}\,.\,\frac{(1'_3)\,.\,(2'_3)\,.\,3}{3}\\
=&\frac{(1'_2)\,.\,(1'_3)\,.\,1'}{1'}\,.\,\frac{(2'_3)\,.\,(2'_1)\,.\,2'}{2'}\,.\,\frac{(3'_1)\,.\,(3'_2)\,.\,3'}{3'}\\
=&\frac{(3'_2)\,.\,(2'_3)\,.\,1''}{1''}\,.\,\frac{(1'_3)\,.\,(3'_1)\,.\,2''}{2''}\,.\,\frac{(2'_1)\,.\,(1'_2)\,.\,3''}{3''}\,.
\end{aligned}
$$

Ces égalités nous permettront d'énoncer ce théorème :

Théorème XIV'. *Dans le cas de trois trigones conjugués entre eux, dont les côtés* (*) *sont coupés par une droite quelconque, si l'on forme le produit des quotaires des triangles qui ont leurs bases sur cette droite, et pour angles adjacents respectifs ceux que celle-ci fait avec ces mêmes côtés, et qu'on divise ce produit par celui des bases, le quotient obtenu sera constant pour chaque trigone.*

Mais on a :

$$(2'_1)\,.\,(3'_1)\,.\,1 = (1)\,.\,\varpi,\ \text{etc.}$$

(*) Voir plus haut la définition de ces *côtés*.

sommets en ce centre, et pour bases respectives les côtés de chaque trilatère, et qu'on divise ce produit par celui des sinus des angles formés au sommet de chacun de ces triangles, le quotient obtenu sera constant pour chacun des trois trilatères.

Mais si nous exprimons les aires de ces triangles au moyen du produit de la base par la hauteur, et que nous désignions, pour abréger, les côtés qui servent de base par 1, etc., les égalités précédentes s'écriront :

$$\frac{1\,.\,\delta_1}{(1)}\cdot\frac{2\,.\,\delta_2}{(2)}\cdot\frac{3\,.\,\delta_3}{(3)}=\frac{1'\,.\,\delta'_1}{(1')}\cdot\frac{2'\,.\,\delta'_2}{(2')}\cdot\frac{3'\,.\,\delta'_3}{(3')}=\frac{1''\,.\,\delta''_1}{(1'')}\cdot\frac{2''\,.\,\delta''_2}{(2'')}\cdot\frac{3''\,.\,\delta''_3}{(3'')}.$$

Si le centre du faisceau est pris en un point de lieu qui a pour équation

$$C_3 \equiv \delta_1\delta_2\delta_3 - \lambda\delta'_1\delta'_2\delta'_3 = 0,$$

(que ce lieu soit un trilatère ou une courbe du troisième ordre), on aura donc

$$\lambda = \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{\delta'_1\delta'_2\delta'_3} = \frac{1'\,.\,2'\,.\,3'}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{(1)\;(2)\;(3)}{(1')\,(2')\,(3')},$$

ce qui nous ramène à la *propriété anharmonique* trouvée plus haut.

22. Si nous recherchons la signification de l'équation

$$C_3 \equiv \delta_1\delta_2\delta_3 - \lambda\delta'_1\delta'_2\delta'_3 = 0 \quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad 7)$$

par la méthode du n° 11, nous pourrons écrire :

$$\delta_1 = \frac{2'_1 3'_1\,.\,(12'_1)\;(13'_1)}{(2'_1 3'_1)},\quad \delta_2 = \frac{3'_2 1'_2\,.\,(23'_2)\;(21'_2)}{(3'_2 1'_2)},\quad \delta_3 = \frac{1'_3 2'_3\,.\,(31'_3)\,(32'_3)}{(1'_3 2'_3)},$$

$$\delta'_1 = \frac{1'_2 1'_3\,.\,(1'1'_2)\,(1'1'_3)}{(1'_2 1'_3)},\quad \delta'_2 = \frac{2'_3 2'_1\,.\,(2'2'_3)\,(2'2'_1)}{(2'_3 2'_1)},\quad \delta'_3 = \frac{3'_1 3'_2\,.\,(3'3'_1)\,(3'3'_2)}{(3'_1 3'_2)}.$$

Ces valeurs, substituées dans les égalités précédentes, donnent

$$\frac{(1).\varpi_1}{1}\cdot\frac{(2).\varpi_2}{1}\cdot\frac{(3).\varpi_3}{3}=\frac{(1').\varpi_1'}{1'}\cdot\frac{(2').\varpi_2'}{2'}\cdot\frac{(3').\varpi_3'}{3'}=\frac{(1'').\varpi_1''}{1''}\cdot\frac{(2'').\varpi_2''}{2''}\cdot\frac{(3'').\varpi_3''}{3''}.$$

Si la transversale est tangente au lieu qui a pour équation

$$C_3' \equiv \varpi_1\varpi_2\varpi_3 - \lambda\varpi_1'\varpi_2'\varpi_3' = 0,$$

(que ce lieu soit un trigone ou une courbe de la troisième classe), on aura donc

$$\lambda = \frac{\varpi_1\varpi_2\varpi_3}{\varpi_1'\varpi_2'\varpi_3'} = \frac{(1').(2').(3')}{(1)\ .(2)\ .(3)}\cdot\frac{1\ .\ 2\ .\ 3}{1'.\ 2'.\ 3'},$$

ce que nous ramène à la *propriété anharmonique* trouvée plus haut.

22'. Si nous recherchons la signification de l'équation

$$C_3' \equiv \varpi_1\varpi_2\varpi_3 - \lambda\varpi_1'\varpi_2'\varpi_3' = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7')$$

par la méthode du n° **11'**, nous pourrons écrire :

$$\varpi_1 = \frac{12_1'.13_1'.(2_1'3_1')}{2_1'3_1'},\quad \varpi_2 = \frac{23_2'.21_2'.(3_2'1_2')}{3_2'1_2'},\quad \varpi_3 = \frac{31_3'.32_3'.(1_3'2_3')}{1_3'2_3'};$$

$$\varpi_1' = \frac{1'1_2'.1'1_3'.(1_2'1_3')}{1_2'1_3'},\quad \varpi_2' = \frac{2'2_3'.2'2_1'.(2_3'2_1')}{2_3'2_1'},\quad \varpi_3' = \frac{3'3_1'.3'3_2'.(3_1'3_2')}{3_1'3_2'}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation précédente, nous obtiendrons :

$$\lambda = \frac{(12'_1).(13'_1).(23'_2).(21'_2).(31'_3).(32'_3)}{(1'1'_2).(1'1'_3).(2'2'_3).(2'2'_1).(3'3'_1).(3'3'_2)} \cdot \frac{2'_1 3'_1 . 3'_2 1'_2 . 1'_3 2'_3}{1'_2 1'_3 . 2'_3 2'_1 . 3'_1 3'_2} \cdot \frac{(1'_2 1'_3).(2'_3 2'_1).(3'_1 3'_2)}{(2'_1 3'_1).(3'_2 1'_2).(1'_3 2'_3)}$$

ou

$$\lambda = \frac{(12'_1).(13'_1).(23'_2).(21'_2).(31'_3).(32'_3)}{(1'1'_2).(1'1'_3).(2'2'_3).(2'2'_1).(3'3'_1).(3'3'_2)} \cdot \frac{1 . 2 . 3}{1' . 2' . 3'} \cdot \frac{(1').(2').(3')}{(1).(2).(3)} .$$

Comparant cette valeur à celle donnée par la relation 6), nous en déduirons :

$$\lambda^2 = \frac{(12'_1).(13'_1).(23'_2).(21'_2).(31'_3).(32'_3)}{(1'1'_2).(1'1'_3).(2'2'_3).(2'2'_1).(3'3'_1).(3'3'_2)},$$

c'est-à-dire, en nous rappelant la signification générale de l'équation 7) :

Théorème XV. *Si une courbe du troisième ordre est conjuguée à deux trilatères, et qu'on joigne les sommets de ceux-ci* (*) *à un point quelconque de la courbe, le rapport des produits des sinus des angles comptés, dans le premier trilatère, depuis les côtés de celui-ci jusqu'aux rayons aboutissant à leurs extrémités, à ceux des sinus des angles, comptés de même dans le second, en constant.*

Ce théorème, combiné avec le corrélatif de celui de Carnot, donnera lieu à une expression nouvelle de l'un et de l'autre.

(*) C'est-à-dire les extrémités définies plus haut.

Substituons ces valeurs dans l'équation précédente, nous aurons :

$$\lambda = \frac{12'_1 \,.\, 13'_1 \,.\, 23'_2 \,.\, 21'_2 \,.\, 31'_3 \,.\, 32'_3}{1'1'_2 \,.\, 1'1_3 \,.\, 2'2'_3 \,.\, 2'2'_1 \,.\, 3'3'_1 \,.\, 3'3'_2} \cdot \frac{(2'_1 3'_1) \,.\, (3'_2 1'_2) \,.\, (1'_3 2'_3)}{(1'_2 1'_3) \,.\, (2'_3 3'_1) \,.\, (3'_1 3'_2)} \cdot \frac{1'_2 1'_3 \,.\, 2'_3 2'_1 \,.\, 3'_1 3'_2}{2'_1 3'_1 \,.\, 3'_2 1'_2 \,.\, 1'_3 2'_3},$$

ou

$$\lambda = \frac{12'_1 \,.\, 13'_1 \,.\, 23'_2 \,.\, 21'_2 \,.\, 31'_3 \,.\, 32'_3}{1'1'_2 \,.\, 1'1'_3 \,.\, 2'2'_3 \,.\, 2'2'_1 \,.\, 3'3'_1 \,.\, 3'3'_2} \cdot \frac{(1) \,.\, (2) \,.\, (3)}{(1') \,.\, (2') \,.\, (3')} \cdot \frac{1' \,.\, 2' \,.\, 3'}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

Comparant cette valeur à celle donnée par la relation 6'), nous en déduirons :

$$\lambda^2 = \frac{12'_1 \,.\, 13'_1 \,.\, 23'_2 \,.\, 21'_2 \,.\, 31'_3 \,.\, 32'_3}{1'1'_2 \,.\, 1'1'_3 \,.\, 2'2'_3 \,.\, 2'2'_1 \,.\, 3'3'_1 \,.\, 3'3'_2},$$

c'est-à-dire :

Théorème XV'. *Si une courbe de la troisième classe est conjuguée à deux trigones, et qu'on coupe les côtés* (*) *de ceux-ci par une tangente quelconque à la courbe, le rapport des produits des côtés du premier trigone, comptés depuis les sommets de celui-ci jusqu'à cette tangente, à ceux des côtés du second, comptés de même, est constant.*

Ce théorème, combiné avec celui de Carnot, donnera lieu à une expression nouvelle de l'un et de l'autre.

(*) Voir plus haut la définition de ces *côtés*.

§ IV^{bis}. Rapport anharmonique du troisième ordre (*).

22bis. Dans son *Traité de Géométrie supérieure*, M. Chasles a étudié, d'une manière complète, les relations qui existent entre les différentes formes du rapport anharmonique du second ordre.

Il serait sans doute très-intéressant, au point de vue analytique, d'entreprendre la même étude pour les rapports anharmoniques du troisième ordre et des ordres supérieurs; mais la géométrie aurait, pensons-nous, moins à y gagner.

Les formes seules du rapport anharmonique du troisième ordre sont au nombre de 120, en ne comptant, bien entendu, que celles qui commencent par la même figure. Ce nombre, à la vérité, peut être réduit à 60, au moyen des formules que nous donnerons ci-dessous. On verra même qu'il est aisé de le réduire davantage, si l'on veut considérer une forme comme étant réduite à une autre, lorsque la somme de leurs valeurs est équivalente à un rapport du second ordre.

Il n'en est pas moins vrai que le nombre de ces formes sera toujours trop considérable, pour que l'énumération complète puisse en être d'une grande utilité à la géométrie; et que sera-ce dans les ordres supérieurs au troisième?

Nous nous bornerons donc à indiquer ici le procédé qui pourrait conduire à l'étude des formes du rapport anharmonique du troisième ordre.

En général, on convient de choisir, parmi les six formes du rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites $\alpha + \lambda_{1 \ldots 4}\beta = 0$, comme forme capitale la suivante

$$(1324) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)},$$

parce qu'elle se réduit à $\frac{\lambda_3}{\lambda_4}$, lorsque les quatre rayons sont

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \alpha + \lambda_3\beta = 0, \quad \alpha + \lambda_4\beta = 0,$$

et qu'elle est susceptible, alors, de l'interprétation géométrique la plus simple.

Comme la même raison n'existe pas pour les ordres supérieurs, nous conviendrons de prendre pour forme capitale :

$$r_2 = (1234) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)},$$

de sorte que, dans le cas particulier examiné plus haut, $\frac{\lambda_3}{\lambda_4}$ ne sera plus égal à r_2, mais à $1 - r_2$; et de même, la forme capitale du rapport des six rayons $\alpha + \lambda_{1 \ldots 6}\beta = 0$ sera

$$r_3 = (123456) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_6)}{(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_5)} = \frac{(12).(34).(56)}{(61).(23).(45)},$$

(*) Voir *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 2e série, t. XLV, pp. 88 et suiv., et *Recherches de géom. sup.*

les facteurs des deux termes représentant les sinus des angles compris entre les rayons 1 et 2, 3 et 4, etc.

Examinons d'abord les cas particuliers qui peuvent se présenter dans ce rapport.

De même que $(1214) = 1$, on trouvera

$$(121416) = -1,$$
$$(123415) = -(1234),$$
$$(121345) = -(1345).$$

Recherchons maintenant quelles sont les différentes formes qui sont équivalentes à la première (123456).

La relation fondamentale, qui nous servira de point de départ, est la suivante, qui se vérifie très-aisément, et qui montre que

Un rapport anharmonique du troisième ordre est équivalent au produit de deux rapports du second, c'est-à-dire :

$$r_3 = (123456) = -(1234)(5614), \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

d'où l'on déduira, en renversant l'ordre des figures dans le second membre, ce qui est permis :

$$r_3 = -(4321)(6541) = 432165. \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

Or, si l'on tient compte des identités manifestes

$$(123456) \equiv (345612) \equiv (561234), \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

la relation 1) donnera

$$r_3 = (654321) \equiv (216543); \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

par où l'on voit que le rapport (123456) est équivalent à cinq autres rapports, commençant respectivement par 2, 3, 4, 5, 6 ; et qu'on peut renverser l'ordre des figures, et écrire $(123456) = (654321)$, comme le montre la relation 4); ajoutons enfin qu'en renversant les termes du rapport r_3 on trouvera

$$r_3 = (123456) \equiv \frac{1}{(612345)} \equiv \frac{1}{(234561)} \equiv \frac{1}{(456123)} \quad \ldots \quad 5)$$

relations auxquelles on en ajoutera trois autres, en renversant l'ordre des figures dans les seconds membres ; et nous aurons, pensons-nous, donné le moyen de trouver tous les rapports qui peuvent s'exprimer au moyen du premier seul (123456).

Nous bornant maintenant à ceux de ces rapports, qui commencent par 1, cherchons s'il existe, comme dans le second ordre, une relation simple entre la somme de certains d'entre eux.

Si, dans la relation fondamentale 1), on remplace (1234) par $-1+(1324)$, on trouvera

$$(123456) \equiv -(5614)-(132456)$$

ou

$$\left.\begin{array}{l}(123456)+(132456) \equiv -(1456). \\ \text{On trouverait de même} \\ (123456)+(123546) \equiv -(1236) \\ (123456)+(154326) \equiv -(3452)\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

On peut retrouver ces relations, ainsi que d'autres, par une voie plus directe.

Les identités

$$a_1-a_3+a_2-a_1+a_3-a_2 \equiv 0,$$

$$a_2(a_1-a_3)+a_3(a_2-a_1)+a_1(a_3-a_2) \equiv 0,$$

d'où l'on peut déduire les relations qui existent entre les diverses formes du rapport du second ordre, ont pour analogues les suivantes :

$$a_2(a_5-a_3)+a_3(a_2-a_4)+a_4(a_3-a_5)+a_5(a_4-a_2) \equiv 0, \quad . \quad 7)$$

$$a_2(a_5-a_3)(a_6-a_4)+a_3(a_2-a_4)(a_6-a_5)+a_4(a_3-a_5)(a_6-a_2)$$
$$+a_5(a_4-a_2)(a_6-a_3) \equiv 0. \quad \ldots\ldots \quad 8)$$

Si a_2 ... représentent, dans ces relations, les distances des points d'intersection 2 ..., d'une transversale avec les rayons 2..., à son point d'intersection 1 avec le rayon 1, la relation 7) pourra s'écrire

$$12\,.\,35+13\,.\,42+14\,.\,53+15\,.\,24 \equiv 0,$$

ou bien

$$\frac{12\,.\,35\,.\,46}{46}-\frac{13\,.\,24\,.\,56}{56}+\frac{14\,.\,53\,.\,26}{26}-\frac{15\,.\,42\,.\,36}{36} \equiv 0. \quad . \quad . \quad 7')$$

Divisant celle-ci par 61 . 23 . 45, on trouvera (*) :

$$-\frac{(123546)}{(46)}+\frac{(132456)}{(56)}-\frac{(145326)}{(26)}+\frac{(154236)}{(36)} \equiv 0. \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

On obtiendrait d'autres identités entre rapports anharmoniques du troisième ordre, en divisant la relation 7) par 12 . 35 . 46, 13 . 24 . 56, etc. ; mais, comme la relation 8) nous en fournira de plus simples, et tout à fait analogues, nous nous bornerons à rechercher celles-ci.

La relation 8) s'écrira

$$12\,.\,35\,.\,46+13\,.\,42\,.\,56+14\,.\,53\,.\,26+15\,.\,24\,.\,36 \equiv 0. \qquad 8$$

(*) Nous transportons ici, aux sinus des angles compris entre les rayons, la relation trouvée entre les segments interceptés, sur la transversale, entre ces rayons. (Voir n° 20.)

Si nous la divisons successivement par 61.25.45 et par 61.25.43, nous aurons :

$$\left.\begin{array}{r} -(123546)+(132456)-(145326)+(154236)\equiv 0, \\ (125546)-(154256)-(143526)-(152436)\equiv 0, \end{array}\right\} \quad . \ . \quad 10)$$

Il est remarquable que les relations 9) et 10) ne diffèrent entre elles qu'en ce que les premières ont un dénominateur à chaque terme, et que les secondes n'en ont pas.

De la combinaison de ces identités, on pourra en déduire d'autres, dans lesquelles n'entreront que trois rapports seulement.

Si nous divisons la relation 8')

1° Par 12.35.46, nous trouverons :

$$1+(246531)-(1462)+(153643)\equiv 0,$$

ou bien, puisque $1-(1462)\equiv(1642)$:

$$(135642)+(153642)+(1642)\equiv 0$$

qu'on peut écrire, par un changement de figures :

$$(123456)+(132456)+(1456)\equiv 0; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 11)$$

2° par 13.42.56, nous trouverons de même :

$$(124653)+(142653)+(1653)\equiv 0,$$

ce qui est, au fond, la relation 11); et, en suivant un procédé analogue :

$$(123456)+(123546)+(1236)\equiv 0, \text{ et} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad 12)$$

$$(123456)+(154326)+(3452)\equiv 0; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 13)$$

3° par 12.34.56, nous obtiendrons :

$$(5346)-(1542)+(143562)-(243651)\equiv 0,$$

ou, par un changement de figures, après en avoir renversé l'ordre dans le dernier rapport :

$$(123456)-(154236)+(1456)+(2453)\equiv 0. \quad . \ . \ . \ . \ . \quad 14)$$

L'addition des identités 13) et 14) reproduirait 12).

Toutes ces identités expriment la somme de deux rapports du troisième ordre au moyen de rapports du second.

On en déduirait d'analogues, affectées de dénominateurs, de la relation 7'); et ces dernières, combinées avec les précédentes, ramèneraient naturellement à l'expression fondamentale du rapport du troisième ordre au moyen du produit de deux rapports du second.

5

§ IV$^{\text{ter}}$. De l'involution du troisième ordre (*).

22$^{\text{ter}}$. On sait que l'involution des trois couples de points $1, 2;\ 1', 2';\ 1'', 2''$ peut s'exprimer par la relation

$$|\ 11'21''\ |\ .\ |\ 12'22''\ | = 1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

et par celles qu'on en déduit en avançant les accents d'un rang, c'est-à-dire en changeant 1 en $1'$, $1'$ en $1''$, $1''$ en 1, ou de deux rangs, en changeant 1 en $1''$, $1'$ en 1 et $1''$ en $1'$.

L'involution entre les trois ternes de points $1, 2, 3;\ 1', 2', 3';\ 1'', 2'', 3''$, qui s'exprime par (voir n° 14)

$$\frac{11'\,.\,12'\,.\,13'}{11''.\,12''.\,13''} = \Big[\quad\Big]_2 = \Big[\quad\Big]_3, \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

peut se traduire aisément en relations analogues aux formules 1).

En ne considérant que les deux premiers membres des égalités 2), on pourra les écrire

$$\frac{11'\,.\,21''\,.\,12'.\,22''.\,13'\,.\,23''}{11''.\,21'.\,12''\,.\,22'\,.\,13''.\,23'} = 1,$$

ou

$$|\ 11'21''\ |\ .\ |\ 12'22''\ |\ .\ 13'23''\ | = 1; \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

et les formules analogues s'obtiendraient immédiatement par le changement de 1 en 2, 2 en 3, 3 en 1, ou de 1 en 3, 2 en 1, 3 en 2.

Mais celles-ci ne renferment que des rapports anharmoniques du second ordre, et il s'agirait de pouvoir exprimer l'involution du troisième ordre au moyen de rapports anharmoniques du même ordre.

L'analogie nous conduit évidemment à écrire la formule

$$|\ 11'21''31'''\ |\ .\ |\ 12'22''32'''\ |\ .\ |\ 13'23''33'''\ | = -1. \quad \ldots \quad 4)$$

ou, symboliquement :

$$\prod_{1'}^{3'} |\ 11'21''31'''\ | = -1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4')$$

ainsi que les formules qu'on obtiendrait en avançant, dans cette dernière, les

(*) Les formules qui suivent ont été données dans le *Bulletin de l'Académie*, 2e série t. XLV, pp. 90-92. La démonstration donnée ci-dessus est plus simple que celle que nous avions trouvée; elle nous a été communiquée par M. Le Paige.

accents, ou les figures 1, 2, 3, d'un ou de deux rangs, ou en les intervertissant entre eux, comme on peut le faire dans les relations 2).

Ainsi, par exemple, en avançant les accents d'un rang, on aurait

$$\prod_{1''}^{3''} | 1 1'' 2 1''' 3 1' | = -1;$$

et l'on arriverait au même résultat, en avançant de deux rangs les figures 1, 2, 3 c'est-à-dire en les changeant en 3, 1, 2, sans modifier, dans la relation 4), les lettres accentuées.

Démontrons que la formule 4) exprime en effet l'involution des quatre ternes 1, 2, 3; 1', 2', 3'; 1'', 2'', 3''; 1''', 2''', 3'''. Celle des ternes 1 .. 1' .. 1''' .. donne :

$$\frac{11' \,.\, 12' \,.\, 13'}{11''' \,.\, 12''' \,.\, 13'''} : \frac{21' \,.\, 22' \,.\, 23'}{21''' \,.\, 22''' \,.\, 23'''} = 1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

et celle des ternes 1 .. 1'' .. 1''' .. :

$$\frac{21'' \,.\, 22'' \,.\, 23''}{21''' \,.\, 22''' \,.\, 23'''} : \frac{31'' \,.\, 32'' \,.\, 33''}{31''' \,.\, 32''' \,.\, 33'''} = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

Multiplions ces deux relations l'une par l'autre, nous aurons :

$$\frac{11' \,.\, 12' \,.\, 13' \,.\, 21'' \,.\, 22'' \,.\, 23'' \,.\, 31''' \,.\, 32''' \,.\, 33'''}{11''' \,.\, 12''' \,.\, 13''' \,.\, 21' \,.\, 22' \,.\, 23' \,.\, 31'' \,.\, 32'' \,.\, 33''} = 1,$$

ou

$$\frac{11' \,.\, 21'' \,.\, 31'''}{1'''1 \,.\, 1'2 \,.\, 1''3} \cdot \frac{12' \,.\, 22'' \,.\, 32'''}{2'''1 \,.\, 2'2 \,.\, 2''3} \cdot \frac{13' \,.\, 23'' \,.\, 33'''}{3'''1 \,.\, 3'2 \,.\, 3''3} = -1, \text{ C. Q. F. D.}$$

En écrivant les autres formules qui, avec 5) et 6), expriment l'involution des ternes 1 .. 1' .. 1''' .., et 1 .. 1'' .. 1''' .., on obtiendrait celles que nous avons annoncées comme se déduisant de 4') par l'inversion des accents ou des figures.

§ IV$^{\text{quater}}$. Évolution dans les courbes du troisième ordre.

22$^{\text{quater}}$. Considérons l'équation

$$\frac{a_1}{\delta_1} + \frac{a_2}{\delta_2} + \frac{a_3}{\delta_3} + \frac{a_4}{\delta_4} = 0,$$

ou

$$a_1\delta_2\delta_3\delta_4 + a_2\delta_1\delta_3\delta_4 + a_3\delta_1\delta_2\delta_4 + a_4\delta_1\delta_2\delta_3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

qui est celle d'une courbe du troisième ordre passant par les six sommets du quadrilatère $\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$.

(La construction du quadrilatère inscrit se fera simplement de la manière suivante, lorsque la courbe proposée n'est pas de la troisième classe :

1° Par un point de la courbe, je mène deux tangentes 3′ et 3″ à celle-ci;

2° Par le point de contact de 3′, la corde arbitraire 1 ;

3° Par ses intersections avec la courbe, et par le contact de 3″, les cordes 3 et 4; leurs nouvelles intersections collimeront avec le contact de 3′, et donneront le côté 2.

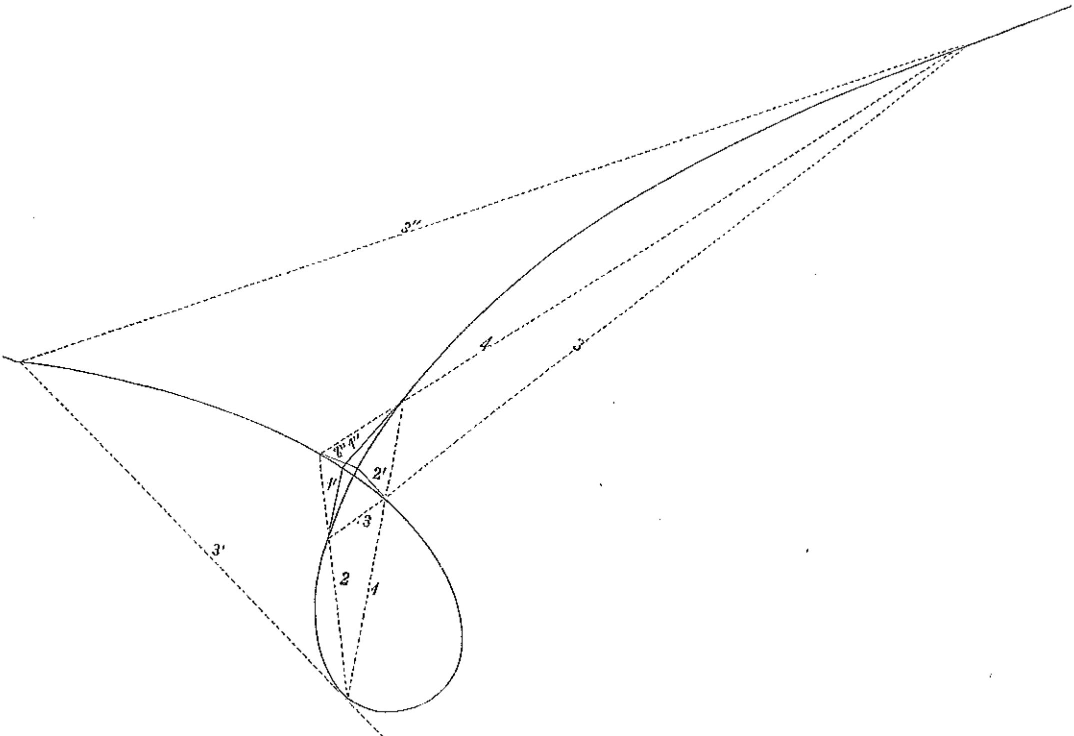


Fig. 7.

On voit en effet que, si l'on écrit l'équation 1) sous la forme

$$\delta_3\delta_4(a_1\delta_2 + a_2\delta_1) + \delta_1\delta_2(a_3\delta_4 + a_4\delta_3) = 0,$$

ou, pour abréger

$$\delta_3\delta_4\delta'_3 + k\delta_1\delta_2\delta''_3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

on a affaire à deux trilatères conjugués; or δ'_3, passant par le point d'intersection de δ_1 et de δ_2, et rencontrant deux fois la courbe en ce point, y est tangente; de même δ''_3 est tangente au point $\delta_3\delta_4$; et ces deux tangentes se coupent sur la courbe, en vertu de l'équation 2). On verrait, de même, que les tangentes aux sommets $\delta_1\delta_3$ et $\delta_2\delta_4$, $\delta_1\delta_4$ et $\delta_2\delta_3$ se coupent sur la courbe.

Il est facile de s'assurer, en outre, de la collimation des trois points $1', 1''$; $2', 2''$ et $3', 3''$ où ces tangentes se rencontrent sur la courbe, ainsi que des trois points $1, 1'$; $2, 2'$ et $3, 3'$ d'intersection des côtés opposés des deux triangles, l'un inscrit, l'autre circonscrit, ou des trois points $3', 4$; $2'', 1$ et $1'', 2$; etc.

Or, les trilatères conjugués $123''$ et $343'$ donnent, si on les coupe par une transversale, qui rencontre leurs côtés en des points désignés par les mêmes chiffres, et la courbe en des points $0, 0', 0''$ (n° 14) :

$$\frac{13'.13.14}{23'.23.24}=\frac{10.10'.10''}{20.20'.20''}.$$

Les trilatères conjugués $132''$ et $242'$ donnent de même :

$$\frac{32'.32.34}{12'.12.14}=\frac{30.30'.30''}{10.10'.10''};$$

et les trilatères conjugués $231''$ et $141'$:

$$\frac{21'.21.24}{31'.31.34}=\frac{20.20'.20''}{30.30'.30''}.$$

Multipliant entre elles ces trois égalités, on obtiendra :

$$13'.32'.21'=1'3.3'2.2'1.$$

On trouverait de même, pour les triangles 124 et $1''2''3'$; 234 et $2''3''1'$; 134 et $1''3''2'$, les relations

$$\begin{aligned}11''.23'.42''&=2''2.1''4.3'1,\\22''.31'.43''&=3''3.2''4.1'2,\\33''.12'.41''&=1''1.3''4.2'3;\end{aligned}$$

et la multiplication de ces trois égalités entre elles reproduit la précédente.

Toutes les quatre sont des relations d'*évolution;* on peut donc énoncer ce théorème (*) :

Théor. XVI. *Si un quadrilatère est complètement* (**) *inscrit à une courbe du troisième ordre, et qu'on mène, en trois de ses sommets, des tangentes à la courbe, les côtés des deux triangles, déterminés par ces sommets et par ces tangentes, sont coupés par une transversale en trois couples de points* EN ÉVOLUTION.

Il serait aisé de trouver la propriété corrélative pour les courbes de la troisième classe.

(*) *Bulletin de l'Académie*, t. XLIII, p. 505.

(**) Voir *Journal de Crelle*, t. LXVI, une note de Steiner, dans laquelle il signale l'existence de ces quadrilatères complètement inscrits à des courbes du troisième ordre.

§ V. Faisceau de quadrilatères (*).

23. L'identité trouvée précédemment (n° 16)

$$\delta_1 \ldots \delta_4 + k'\delta'_1 \ldots \delta'_4 + k''\delta''_1 \ldots \delta''_4 \equiv 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

exprime que les trois quadrilatères $\delta_1, .. \delta_4$; $\delta'_1, .. \delta'_4$; $\delta''_1, .. \delta''_4$ sont conjugués entre eux; et l'on y lit immédiatement l'énoncé suivant:

Théorème XVII. Extension du théorème de Pappus. *Si trois quadrilatères sont conjugués entre eux, les produits des distances d'un point quelconque de l'un d'entre eux, aux côtés des deux autres, sont analogiques;*

et, plus généralement encore :

Il existe une relation linéaire entre les produits des distances d'un point quelconque (du plan) aux quaternes respectifs de côté de trois quadrilatères conjugués entre eux.

Ce dernier énoncé revêtira une autre forme aux n^{os} (25) et (28).

24. En suivant la même marche qu'aux n^{os} (7) et (14), et conservant les mêmes notations, nous aurons, pour chacun des points $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ d'intersection d'une transversale quelconque avec les côtés de même nom du troisième quadrilatère, la relation

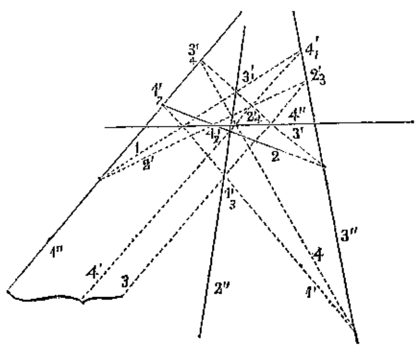


Fig. 8.

$$\delta_1 \ldots \delta_4 - \lambda\delta'_1 \ldots \delta'_4 = 0; \quad 2$$

(*) Voir F. G. S. C., pp. 23-27, où nos extensions des théorèmes de Pappus, de Desargues et de Pascal, ont été données pour la première fois, et, directement, pour les courbes du quatrième ordre.

§ V'. Chaîne de tétragones (*).

23'. L'identité 7'), (n° 16'), ou

$$\varpi_1 \ldots \varpi_4 + k'\varpi'_1 \ldots \varpi'_4 + k''\varpi''_1 \ldots \varpi''_4 \equiv 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1')$$

exprime que les trois tétragones qui y entrent sont conjugués entre eux, et l'on y lit l'énoncé suivant :

Théorème XVII'. Extension du théorème corrélatif de celui de Pappus. *Si trois tétragones sont conjugués entre eux, les produits des distances d'une droite quelconque (passant par un sommet) de l'un d'entre eux, aux sommets des deux autres, sont analogiques ;*

et, plus généralement :

Il existe une relation linéaire entre les produits des distances d'une droite quelconque (du plan) aux ternes respectifs de sommets de trois tétragones conjugués entre eux.

Ce dernier énoncé revêtira une autre forme aux nos (25') et (28').

24'. En conservant les mêmes notations qu'aux nos (7') et (14'), nous aurons, pour chacune des jonctions 1'', 2'', 3'', 4'' d'un centre quelconque (dans le plan), avec les sommets de même nom du tétragone, la relation suivante, qui se tire de 1') :

$$\varpi_1 \ldots \varpi_4 - \lambda\varpi'_1 \ldots \varpi'_4 = 0 \, ; \quad 2')$$

et, comme dans ces mêmes

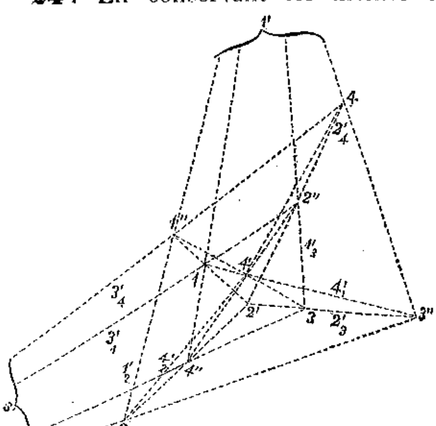


Fig. 8'.

(*) F. G. S. C., pp. 44-47.

et, comme dans ce même n° (14), pour le point $1''$:

$$\delta_1 = 11''.(1);\quad \delta_2 = 21''.(2);\quad \delta_3 = 31''.(3);\quad \delta_4 = 41''.(4);$$
$$\delta'_1 = 1'1''.(1');\ \text{etc.},$$

valeurs qui, substituées dans la relation (2), donneront :

$$\begin{aligned}&11''.21''.31''.41''.(1).(2).(3).(4)\\ &= \lambda\, 1'1''.2'1''.3'1''.4'1''.(1').(2').(3').(4').\end{aligned}$$

Pour les points $2''$, $3''$, $4''$, il suffira, évidemment, de changer, dans cette relation, $1''$ en $2''$, en $3''$ et en $4''$.

La comparaison des quatre égalités ainsi obtenues conduira aux suivantes :

$$\frac{11''.21''.31''.41''}{1'1''.2'1''.3'1''.4'1''} = \Big[\quad\Big]_{2''} = \Big[\quad\Big]_{3''} = \Big[\quad\Big]_{4''},$$

où les trois derniers membres ne sont autre chose que le premier lui-même, dans lequel on a à remplacer $1''$ par $2''$, $3''$ et $4''$.

Elles expriment le théorème :

Théorème XVIII. Extension du théorème de Desargues. *Dans un système de trois quadrilatères conjugués entre eux, une transversale quelconque rencontre les côtés de ces quadrilatères en trois quaternes de points en involution.*

25. On trouve une expression plus générale de cette involution, en procédant comme nous l'avons fait au n° (8).

Cette expression, mise sous forme symbolique, est

$$\sum_{\mathrm{I}}^{\mathrm{IV}} \lambda\,(x - x'_1)(x - x'_2)(x - x'_3)(x - x'_4) = 0.$$

26. Du théorème précédent, qui est applicable à un système de quadrilatères conjugués inscrits à une courbe du quatrième ordre, on déduirait immédiatement l'extension que nous avons donnée au théorème de Pascal (*); elle s'énonce, pour le cas où la courbe est remplacée par un quadrilatère :

(*) Pour la démonstration, v. F. G. S. C., pp. 26 et 27.

numéros, pour la droite $1''$:

$$\varpi_1 = (11'').1 ; \quad \varpi_2 = (21'').2 ; \quad \varpi_3 = (31'').3 ; \quad \varpi_4 = (41'').4 ;$$
$$\varpi'_1 = (1'1'').1' ; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \varpi'_4 = (4'1'').4' ;$$

valeurs, qui, substituées dans la relation précédente, donneront :

$$\begin{aligned} &(11'').(21'').(31'').(41'').1.2.3.4 \\ &= \lambda\,(1'1'').(2'1'').(3'1'').(4'1'').1'.2'.3'.4'. \end{aligned}$$

Pour les droites $2''$, $3''$ et $4''$, il suffira de changer, dans cette relation, $1''$ en $2''$, en $3''$ et en $4''$.

La comparaison de ces quatre égalités conduira aux suivantes :

$$\frac{(11'').(21'').(31'').(41'')}{(1'1'').(2'1'').(3'1'').(4'1'')} = \Big[\quad \Big]_{2''} = \Big[\quad \Big]_{3''} = \Big[\quad \Big]_{4''} ;$$

elles expriment le théorème :

Théorème XVIII'. EXTENSION DU CORRÉLATIF DU THÉORÈME DE DESARGUES. *Dans un système de trois tétragones conjugués entre eux, si l'on joint leurs sommets à un centre quelconque (du plan) par des droites, ces trois quaternes de droites sont en involution.*

25'. On trouvera, comme au n° (8'), la forme symbolique suivante de cette involution :

$$\sum_{\mathrm{I}}^{\mathrm{IV}} \lambda (X - X'_1) \ldots (X - X'_4) = 0.$$

26'. Du théorème qui précède, on déduit immédiatement celui que nous avons donné antérieurement pour une courbe de la quatrième classe en général (*), et qui s'énonce dans les termes suivants, si cette courbe est remplacée par un tétragone :

(*) F. G. S. C., p. 47.

Théorème XIX. Extension du théorème de Pascal. *Dans un système de deux quinquélatères conjugués à un quadrilatère, les intersections des côtés opposés sont collimantes.*

L'expression analytique la plus simple de ce théorème est

$$\delta'_1 \ldots \delta'_5 - \lambda\delta''_1 \ldots \delta''_5 \equiv k\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4 . \Delta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

expression dans laquelle on découvre l'existence de trois quinquélatères conjugués entre eux.

27. Ce théorème a, pour corollaires immédiats, les suivants (*) :

Théorème XX. *Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de côtés opposés de deux quinquélatères conjugués inscrits à un quadrilatère (ou à une courbe du quatrième ordre), on obtient un hexagone inscrit à une conique.*

Théorème XXI. *Si l'on combine quatre à quatre, dans un ordre quelconque, les couples de côtés opposés de deux quinquélatères conjugués inscrits à un quadrilatère (ou à une courbe du quatrième ordre), on obtient un système de deux quadrilatères conjugués inscrits à une courbe du troisième ordre.*

Si l'on exprime analytiquement ces deux corollaires, v. n° 17, on verra que, de l'identité

$$\delta'_1 \ldots \delta'_5 - \lambda\delta''_1 \ldots \delta''_5 \equiv kC_4 . \Delta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

On peut déduire les suivants :

1° $$\delta'_1\delta'_2\delta'_3 - \lambda_1\delta''_1\delta''_2\delta''_3 \equiv k_1C'_2 . \Delta, \text{ etc.}$$

2° $$\delta'_1\delta'_2\delta'_3\delta'_4 - \lambda'_1\delta''_1\delta''_2\delta''_3\delta''_4 \equiv k'_1C'_3 . \Delta, \text{ etc.}$$

Et, en étendant cette même forme d'équation, on obtiendra immédiatement le théorème général :

Théorème XXII. *Dans un système de deux* n *latères conjugués, inscrits à un quadrilatère (ou à une courbe du quatrième ordre), les couples de côtés non adjacents se coupent en* n (n — 4) *points situés sur un lieu d'ordre* n — 4.

(*) *Bulletin de l'Académie,* 2e série, t. XLIV, p. 191, et *Recherches de Géométrie supérieure.*

Théorème XIX'. EXTENSION DU THÉORÈME DE BRIANCHON. *Dans un système de deux pentagones conjugués à un tétragone, les jonctions des sommets opposés sont concourantes.*

L'expression la plus simple de ce théorème est

$$\varpi_1' \ldots \varpi_5' - \lambda \varpi_1'' \ldots \varpi_5'' \equiv \varpi_1 \ldots \varpi_4 \,.\, \Pi; \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 5')$$

on y découvre l'existence de trois pentagones conjugués entre eux.

27'. Ce théorème a, pour corollaires immédiats, les suivants (*) :

Théorème XX'. *Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de sommets opposés de deux pentagones conjugués à un tétragone (ou à une courbe de la quatrième classe), on obtient un hexagone circonscrit à une conique.*

Théorème XXI'. *Si l'on combine quatre à quatre, dans un ordre quelconque, les couples de sommets opposés de deux pentagones conjugués à un tétragone (ou à une courbe de la quatrième classe), on obtient un système de deux tétragones conjugués à une courbe de la troisième classe.*

En étendant la forme d'équation qui précède, on arriverait au théorème :

Théorème XXII'. *Dans un système de deux* n *gones conjugués à un tétragone (ou à une courbe de la quatrième classe), les jonctions des couples de côtés non adjacents, au nombre de* n(n — 4), *enveloppent une courbe de classe* n — 4.

(*) *Bulletin de l'Académie*, 2e série, t. XLIV, p. 191, et *Recherches de Géométrie supérieure*.

28. Cherchons maintenant à découvrir, dans les quadrilatères conjugués, l'existence du rapport anharmonique du quatrième ordre.

Partons de l'identité

$$\delta''_1 \dots \delta''_4 \equiv \delta_1 \dots \delta_4 - \lambda \delta'_1 \dots \delta'_4. \qquad 5)$$

Joignons, à un centre quelconque, les sommets des quadrilatères **1**, **2**, **3**, **4** et **1'**, **2'**, **3'**, **4'**, *sommets* qui sont les intersections de chaque côté d'un quadrilatère avec deux des quatre côtés de l'autre, pourvu qu'elles déterminent complètement les quadrilatères.

Nous choisirons, pour ces *sommets*, les points

$$1'_2,\ 1'_3; \quad 2'_3,\ 2'_4; \quad 3'_4,\ 3'_1; \quad 4'_1,\ 4'_2,$$

qui sont les intersections respectives des côtés

$$1' \text{ et } 2,\ 1' \text{ et } 3; \quad 2' \text{ et } 3,\ 2' \text{ et } 4; \text{ etc.}$$

Conservons ces mêmes notations pour représenter les rayons qui aboutissent à ces sommets; nommons $1'_2 1'_3$, $3'_1 4'_1$, etc., les longueurs des côtés $1'$, 1, etc., comprises entre ces sommets; nous aurons, comme au n° (19), en rapportant les distances $\delta_1 \dots$ au centre considéré :

$$\delta_1 = \frac{3'_1 \,.\, 4' \,.\, (3'_1 4'_1)}{3'_1 4'_1},$$

expression que nous représenterons simplement par

$$\delta_1 = \{3'_1 4'_1\} \equiv \{4'_1 3'_1\}.$$

Nous aurons de même :

$$\delta_2 = \{4'_2 1'_2\}, \quad \delta_3 = \{1'_3 2'_3\}, \quad \delta_4 = \{2'_4 3'_4\};$$

et

$$\delta'_1 = \{1'_2 1'_3\}, \quad \delta'_2 = \{2'_3 2'_4\}, \quad \delta'_3 = \{3'_4 3'_1\}, \quad \delta'_4 = \{4'_1 4'_2\};$$
$$\delta''_1 = \{1'_2 3'_4\}, \quad \delta''_2 = \{3'_1 1'_3\}, \quad \delta''_3 = \{4'_1 2'_3\}, \quad \delta''_4 = \{2'_4 4'_2\}.$$

28'. Recherchons le rapport anharmonique du quatrième ordre dans l'identité

$$\varpi_1'' \ldots \varpi_4'' \equiv \varpi_1 \ldots \varpi_4 - \lambda \varpi_1' \ldots \varpi_4'.$$

Coupons, par une transversale quelconque, les *côtés* des tétragones 1, 2, 3, 4 et 1', 2', 3', 4', *côtés* qui sont, pour chacun des sommets d'un tétragone, les jonctions avec deux des trois sommets de l'autre, à choisir arbitrairement, pourvu qu'ils déterminent entièrement les tétragones. Nous choisirons, pour ces côtés, les droites

$$1_2',\ 1_3';\ 2_3',\ 2_4';\ 3_4',\ 3_1';\ 4_1',\ 4_2',$$

qui sont les jonctions respectives des sommets 1' et 2, 1' et 3, etc.

Conservons ces mêmes notations pour désigner les intersections de ces côtés avec la transversale; nous aurons, en rapportant les distances $\varpi_1 \ldots$ à celle-ci :

$$\varpi_1 = \frac{3_1'4_1' \cdot (3_1') \cdot (4_1')}{3_1'4_1'},$$

que nous écrirons $\{3_1'4_1'\}$; et de même:

$$\begin{array}{llll}
\varpi_2 = \{4_2'1_2'\}, & \varpi_3 = \{1_3'2_3'\}, & \varpi_4 = \{2_4'3_4'\}, & \\
\varpi_1' = \{1_2'1_3'\}, & \varpi_2' = \{2_3'2_4'\}, & \varpi_3' = \{3_4'3_1'\}, & \varpi_4' = \{4_1'4_2'\}, \\
\varpi_1'' = \{1_2'3_4'\}, & \varpi_2'' = \{1_3'3_1'\}, & \varpi_3'' = \{2_3'4_1'\}, & \varpi_4'' = \{2_4'4_2'\}.
\end{array}$$

Substituées dans l'identité précédente, ces expressions donnent :

$$\frac{3_1'4_1' \cdot 4_2'1_2' \cdot 1_3'2_3' \cdot 2_4'3_4'}{(3_1'4_1')\cdot(4_2'1_2')\cdot(1_3'2_3')\cdot(2_4'3_4')} - \lambda \frac{1_2'1_3' \cdot 2_3'2_4' \cdot 3_4'3_1' \cdot 4_1'4_2'}{(1_2'1_3')\cdot(2_3'2_4')\cdot(3_4'3_1')\cdot(4_1'4_2')}$$
$$\equiv \frac{1_2'3_4' \cdot 1_3'3_1' \cdot 2_3'4_1' \cdot 2_4'4_2'}{(1_2'3_4')\cdot(1_3'3_1')\cdot(2_3'4_1')\cdot(2_4'4_2')}.$$

Comme les dénominateurs sont des quantités indépendantes de la transversale, nous pourrons écrire :

$$3_1'4_1' \cdot 4_2'1_2' \cdot 1_3'2_3' \cdot 2_4'3_4' - \lambda' 1_2'1_3' \cdot 2_3'2_4' \cdot 3_4'3_1' \cdot 4_1'4_2' \equiv k 1_2'3_4' \cdot 1_3'3_1' \cdot 2_3'4_1' \cdot 2_4'4_2',$$

Substituant ces valeurs, développées, dans l'identité 5), et supprimant les facteurs $3'_1$, $4'_3$, $4'_2$, $1'_2$, etc., qui seront communs à tous les termes, nous trouverons :

$$\frac{(3'_1 4'_1).(4'_2 1'_2).(1'_3 2'_3).(2'_4 3'_4)}{3'_1 4'_1 \;.\; 4'_2 1'_2 \;.\; 1'_3 2'_3 \;.\; 2'_4 3'_4} - \lambda \frac{(1'_2 1'_3).(2'_3 2'_4).(3'_4 3'_1).(4'_1 4'_2)}{1'_2 1'_3 \;.\; 2'_3 2'_4 \;.\; 3'_4 3'_1 \;.\; 4'_1 4'_2}$$
$$= \frac{(1'_2 3'_4).(3'_1 1'_3).(4'_1 2'_3).(2'_4 4'_2)}{1'_2 3'_4 \;.\; 3'_1 1'_3 \;.\; 4'_1 2'_3 \;.\; 2'_4 4'_2}.$$

Si nous remarquons que les dénominateurs sont des quantités constantes, quel que soit le centre choisi, nous pourrons écrire plus simplement :

$$(3'_1 4'_1).(4'_2 1'_2).(1'_3 2'_3).(2'_4 3'_4) - \lambda'(1'_2 1'_3).(2'_3 2'_4).(3'_4 3'_1).(4'_1 4'_2)$$
$$= k(1'_2 3'_4).(3'_1 1'_3).(4'_1 2'_3).(2'_4 4'_2).$$

Or, les différents facteurs, qui entrent dans ces expressions, sont les sinus des angles soutendus, au centre du faisceau, par les côtés

$$1, 2, 3, 4; \quad 1', 2', 3', 4'; \quad 1'', 2'', 3'', 4'',$$

qui sont limités respectivement par

$$3', 4'; \quad 4', 1'; \quad 1', 2'; \quad 2', 3'; \quad 2, 3; \quad 3, 4; \quad 4, 1; \quad 1, 2;$$

de sorte que la relation précédente s'écrira :

$$(1).(2).(3).(4) - \lambda'(1').(2').(3').(4') = k(1'').(2'').(3'').(4''),$$

et s'énoncera :

Théorème XXIII. *Si, d'un centre quelconque (pris dans le plan), on mène des rayons aux sommets (*) de trois quadrilatères conjugués entre eux, il existe une relation linéaire entre les produits des sinus des angles soutendus, en ce centre, par les quaternes respectifs de côtés des trois quadrilatères,*

énoncé qui ne diffère pas, dans le fond, ni de notre extension générale du théorème de Pappus n° (23), ni celle du théorème de Desargues, n° (25).

(*) Voir plus haut la définition de ces *sommets*.

ou, plus simplement, comme plus haut (n° 20'),

$$1.2.3.4 - \lambda 1'.2'.3'.4' = k1''.2''.3''.4'',$$

et énoncer le théorème suivant :

Théorème XXIII'. *Si l'on mène une droite quelconque dans le plan de trois tétragones conjugués entre eux, il existe une relation linéaire entre les produits des segments interceptés, sur cette droite, par les quaternes respectifs d'angles des trois tétragones,* qui n'est qu'une autre forme de nos extensions des théorèmes corrélatifs de celui de Pappus et de celui de Desargues, n°s (23') et (25').

29. Si le centre du faisceau est un point du troisième quadrilatère, le second membre des identités précédentes est nul, et l'on aura, par suite :

$$\lambda' = \lambda \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}{1' \,.\, 2' \,.\, 3' \,.\, 4'} = \frac{(1) \,.\, (2) \,.\, (3) \,.\, (4)}{(1') \,.\, (2') \,.\, (3') \,.\, (4')} = \frac{(3'_1 4'_1) \,.\, (4'_2 1'_2) \,.\, (1'_3 2'_3) \,.\, (2'_4 3'_4)}{(1'_2 1'_3) \,.\, (2'_3 2'_4) \,.\, (3'_4 3'_1) \,.\, (4'_1 4'_2)}.$$

Cette dernière égalité peut s'écrire :

$$\lambda' = \frac{(3'_1 4'_1) \,.\, (4'_2 1'_2) \,.\, (1'_3 2'_3) \,.\, (2'_4 3'_4)}{(3'_4 3'_1) \,.\, (4'_1 4'_2) \,.\, (1'_2 1'_3) \,.\, (2'_3 2'_4)};$$

et l'on voit alors que le dénominateur se tire du numérateur en faisant simplement passer au premier rang la dernière figure de celui-ci.

C'est ainsi que nous avons formé les rapports anharmoniques du second et du troisième ordre.

Nous appellerons donc le rapport précédent RAPPORT ANHARMONIQUE DU QUATRIÈME ORDRE, et nous pourrons énoncer ce théorème fondamental :

Théorème XXIV. *Si l'on joint un point quelconque d'un quadrilatère aux sommets* (*) *de deux quadrilatères conjugués au premier, le rapport anharmonique du faisceau ainsi formé est constant ;*

et l'on peut ajouter que

ce rapport est égal à celui des segments interceptés, entre les rayons, sur une transversale quelconque.

On vérifierait cette dernière propriété, qui résulte, du reste, à l'évidence, de l'expression même du rapport anharmonique, de la même manière que nous l'avons fait au n° (20).

REMARQUE CAPITALE. Le théorème qui précède est manifestement applicable au cas où le premier quadrilatère serait remplacé par une courbe du quatrième ordre, à laquelle les deux autres seraient conjugués; il suffit, pour cela, que les deux der-

(*) Voir, plus haut, comment nous avons défini ces sommets.

29'. Si la transversale passe par l'un des sommets du tétragone $\varpi_1'' \ldots \varpi_4''$, on aura

$$\lambda \frac{(1) \ldots (4)}{(1') \ldots (4')} = \frac{1 \ldots 4}{1' \ldots 4'} = \frac{3_1'4_1' \,.\, 4_2'1_2' \,.\, 1_3'2_3' \,.\, 2_4'3_4'}{1_2'1_3' \,.\, 2_3'2_4' \,.\, 3_4'3_1' \,.\, 4_1'4_2'},$$

expression dans laquelle on reconnaît le *rapport anharmonique des huit points de la transversale.*

Nous pourrons donc énoncer ce théorème fondamental :

Théorème XXIV'. *Si l'on mène une droite quelconque par l'un des sommets d'un tétragone, elle rencontre les côtés* (*) *de deux tétragones conjugués au premier en huit points dont le rapport anharmonique est constant;*

et l'on peut ajouter que

Ce rapport est égal à celui du faisceau formé par la jonction de ces points à un centre quelconque.

Remarque capitale. On peut remplacer le premier tétragone par une courbe de la quatrième classe, à laquelle les deux autres sont conjugués, et dire dans ce cas :

Théorème XXV'. *Une tangente quelconque à une courbe de la quatrième classe rencontre les côtés de deux tétragones, conjugués à cette courbe, en huit points dont le rapport anharmonique est constant.*

Cette propriété de huit tangentes à une courbe de la quatrième classe correspond à la *propriété anharmonique de quatre tangentes à une conique.*

(*) Voir plus haut la définition de ces côtés.

niers membres de l'identité 3) puissent représenter une courbe quelconque du quatrième ordre, ce qui est toujours possible (*).

Dans ce cas nous aurons le théorème général :

Théorème XXV. *Si l'on joint un point quelconque d'une courbe du quatrième ordre aux sommets (**) de deux quadrilatères conjugués à cette courbe, le rapport anharmonique du faisceau ainsi formé est constant,*
nouvelle extension de la *propriété anharmonique de quatre points d'une conique.*

30. On peut retrouver également, par le procédé des nᵒˢ (10 et 21), le rapport anharmonique du quatrième ordre.

En désignant par $3'_1$, $4'_1$ etc. les rayons qui joignent les extrémités des côtés 1 etc. à un centre quelconque; par (1) etc. les sinus des angles soutendus, en ce centre, par les côtés 1 etc., nous pourrons écrire identiquement :

$$\frac{3'_1 \,.\, 4'_1 \,.\, (1)}{(1)} \cdot \frac{4'_2 \,.\, 1'_2 \,.\, (2)}{(2)} \cdot \frac{1'_3 \,.\, 2'_3 \,.\, (3)}{(3)} \cdot \frac{2'_4 \,.\, 3'_4 \,.\, (4)}{(4)}$$
$$= \frac{1'_2 \,.\, 1'_3 \,.\, (1')}{(1')} \cdot \frac{2'_3 \,.\, 2'_4 \,.\, (2')}{(2')} \cdot \frac{3'_4 \,.\, 3'_1 \,.\, (3')}{(3')} \cdot \frac{4'_1 \,.\, 4'_2 \,.\, (4')}{(4')}$$
$$= \frac{1'_2 \,.\, 3'_4 \,.\, (1'')}{(1'')} \cdot \frac{1'_3 \,.\, 3'_1 \,.\, (2'')}{(2'')} \cdot \frac{2'_3 \,.\, 4'_1 \,.\, (3'')}{(3'')} \cdot \frac{2'_4 \,.\, 4'_2 \,.\, (4'')}{(4'')};$$

et énoncer, comme aux nᵒˢ 10 et 21, le théorème :

Théorème XXVI. *Dans le cas de trois quadrilatères conjugués entre eux, dont les sommets (***) sont joints à un centre quelconque, si l'on forme le produit des aires des quatre triangles qui ont leur sommet en ce centre, et pour bases respectives les côtés de chaque quadrilatère, et qu'on divise ce produit par celui des sinus des angles formés au sommet de chacun de ces triangles, le quotient obtenu sera constant pour chacun des trois quadrilatères.*

(*) Voir F. G. S. C., p. 24.

(**) Voir plus haut nᵒ 28 la définition de ces *sommets.*

(***) *Ibid.*

30'. Écrivons identiquement

$$\frac{(3_1') . (4_1') . 1}{1} \cdot \frac{(4_2') . (1_2') . 2}{2} \cdot \frac{(1_3') . (2_3') . 3}{3} \cdot \frac{(2_4') . (3_4') . 4}{4}$$

$$= \frac{(1_2') . (1_3') . 1'}{1'} \cdot \frac{(2_3') . (2_4') . 2'}{2'} \cdot \frac{(3_4') . (3_1') . 3'}{3'} \cdot \frac{(4_1') . (4_2') . 4'}{4'}$$

$$= \frac{(1_2') . (3_4') . 1''}{1''} \cdot \frac{(1_3') . (3_1') . 2''}{2''} \cdot \frac{(2_3') . (4_1') . 3''}{3''} \cdot \frac{(2_4') . (4_2') . 4''}{4''};$$

nous pourrons énoncer le théorème :

Théorème XXVI'. *Dans le cas de trois tétragones conjugués entre eux, dont les côtés (*) sont coupés par une transversale quelconque, si l'on forme les produits des quotaires des triangles qui ont leurs bases sur cette droite, et pour angles adjacents respectifs ceux que celle-ci fait avec ces mêmes côtés, et qu'on divise ce produit par celui des bases, le quotient obtenu sera constant pour chaque tétragone.*

Mais on a :

$$(3_1') . (4_1') . 1 = (1) . \varpi_1; \text{ etc.}$$

Ces valeurs, substituées dans les égalités précédentes, donnent :

$$\frac{(1) . \varpi_1}{1} \cdot \frac{(2) . \varpi_2}{2} \cdot \frac{(3) . \varpi_3}{3} \cdot \frac{4 . (\varpi_4)}{4} = \frac{(1') . \varpi_1'}{1'} \cdot \frac{(2') . \varpi_2'}{2'} \cdot \frac{(3') . \varpi_3'}{3'} \cdot \frac{(4') . \varpi_4'}{4'}$$

$$= \frac{(1'') . \varpi_1''}{1''} \cdot \frac{(2'') . \varpi_2''}{2''} \cdot \frac{(3'') . \varpi_3''}{3''} \cdot \frac{(4'') . \varpi_4''}{4''}.$$

(*) Voir ci-dessus la définition de ces côtés.

Mais, en exprimant les aires de ces triangles au moyen du produit de la base par la hauteur, et désignant leurs bases par 1, etc., nous pourrons écrire, au lieu des égalités précédentes :

$$\frac{1\,.\,\delta_1}{(1)}\cdot\frac{2\,.\,\delta_2}{(2)}\cdot\frac{3\,.\,\delta_3}{(3)}\cdot\frac{4\,.\,\delta_4}{(4)}=\frac{1'.\,\delta'_1}{(1')}\cdot\frac{2'.\,\delta'_2}{(2')}\cdot\frac{3'.\,\delta'_3}{(3')}\cdot\frac{4'.\,\delta'_4}{(4')}$$

$$=\frac{1''.\,\delta''_1}{(1'')}\cdot\frac{2''.\,\delta''_2}{(2'')}\cdot\frac{3''.\,\delta''_3}{(3'')}\cdot\frac{4''.\,\delta''_4}{(4'')}.$$

Si le centre du faisceau est pris en un point du lieu qui a pour équation

$$C_4\equiv\delta_1\ldots\delta_4-\lambda\delta'_1\ldots\delta'_4=0,$$

on aura donc :

$$\lambda=\frac{\delta_1\ldots\delta_4}{\delta'_1\ldots\delta'_4}=\frac{1'\ldots 4'}{1\ldots 4}\cdot\frac{(1)\;(2)\;(3)\;(4)}{(1')\,(4')\,(3')\,(4')},$$

ce qui nous ramène à la *propriété anharmonique* trouvée plus haut.

31. Si nous recherchons la signification de l'équation

$$C_4\equiv\delta_1\ldots\delta_4-\lambda\delta'_1\ldots\delta'_4=0,\quad\ldots\ldots\quad 7)$$

par la méthode du n° 22, en écrivant

$$\delta_1=\frac{1.(13'_1).(14'_1)}{(1)},\ \delta_2=\frac{2.(24'_2).(21'_2)}{(2)},\ \delta=\frac{3.(31'_3).(32'_3)}{(3)},\ \delta_4=\frac{4.(42'_4).(41'_4)}{(4)}$$

$$\delta'_1=\frac{1'.(1'1'_2).(1'1'_3)}{(1')},\ \delta'_2=\frac{2'.(2'2'_3).(2'2'_4)}{(2')},\ \delta'_3=\frac{3'.(3'3'_4).(3'3'_1)}{(3')},\ \delta'_4=\frac{4'.(4'4'_4).(4'4'_2)}{(4')},$$

nous obtiendrons, en substituant :

$$\lambda=\frac{(13'_1)\,.\,(14'_1)\,.\,(24'_2)\,.\,(21'_2)\,.\,(31'_3)\,.\,(32'_3)\,.\,(42'_4)\,.\,(41'_4)}{(1'1'_2).(1'1'_3).(2'2'_3).(2'2'_4).(3'3'_4).(3'3'_1).(4'4'_1).(4'4'_2)}\cdot\frac{1..4.(1')..(4')}{1'..4'.(1)..(4)};$$

et, en comparant à la relation 6) :

$$\lambda^2=\frac{(13'_1)\,.\,(14'_1)\,.\,(24'_2)\,.\,(21'_2)\,.\,(31'_3)\,.\,(32'_3)\,.\,(42'_4).(41'_4)}{(1'1'_2).(1'1'_3).(2'2'_3).(2'2'_4).(3'3'_4).(3'3'_1).(4'4'_1).(4'4'_2)}\cdot\frac{1..4.(1')..(4')}{1'..4'(1)..(4)};$$

c'est-à-dire :

Si la transversale est tangente au lieu qui a pour équation

$$C'_4 \equiv \varpi_1 \ldots \varpi_4 - \lambda\varpi'_1 \ldots \varpi'_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7')$$

que ce lieu soit un tétragone ou une courbe de la quatrième classe, on aura donc

$$\lambda = \frac{\varpi_1 \ldots \varpi_4}{\varpi'_1 \ldots \varpi'_4} = \frac{(1') \ldots (4')}{(1) \ldots (4)} \cdot \frac{1 \ldots 4}{1' \ldots 4'},$$

c'est-à-dire la *propriété anharmonique* trouvée plus haut.

31'. Si nous recherchons la signification de l'équation

$$C'_4 \equiv \varpi_1 \ldots \varpi_4 - \lambda\varpi'_1 \ldots \varpi'_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7')$$

par la méthode du n° 22', en écrivant

$$\varpi_1 = \frac{13'_1 \,.\, 14'_1 \,.\, (1)}{1}, \quad \varpi_2 = \frac{24'_2 \,.\, 21'_2 \,.\, (2)}{2}, \quad \varpi_3 = \frac{31'_3 \,.\, 32'_3 \,.\, (3)}{3}, \quad \varpi_4 = \frac{42'_4 \,.\, 43'_4 \,.\, (4)}{4};$$

$$\varpi'_1 = \frac{1'1'_2 \,.\, 1'1'_3 \,.\, (1')}{1'}, \quad \varpi'_2 = \frac{2'2'_3 \,.\, 2'2'_4 \,.\, (2')}{2'}, \quad \varpi'_3 = \frac{3'3'_4 \,.\, 3'3'_1 \,.\, (3')}{3'}, \quad \varpi' = \frac{4'4'_1 \,.\, 4'4'_2 \,.\, (4')}{4'},$$

nous obtiendrons, en substituant, et en comparant la valeur de λ à celle de la relation 6') :

$$\lambda^2 = \frac{13'_1 \,.\, 14'_1 \,.\, 24'_2 \,.\, 21'_2 \,.\, 31'_3 \,.\, 32'_3 \,.\, 42'_4 \,.\, 41'_4}{1'1'_2 \,.\, 1'1'_3 \,.\, 2'2'_3 \,.\, 2'2'_4 \,.\, 3'3'_4 \,.\, 3'3'_1 \,.\, 4'4'_1 \,.\, 4'4'_2},$$

c'est-à-dire :

Théorème XXVII. *Si une courbe du quatrième ordre est conjuguée à deux quadrilatères, et qu'on joigne les sommets (*) de ceux-ci à un point quelconque de la courbe, le rapport des produits des sinus des angles comptés, dans le premier quadrilatère, depuis les côtés de celui-ci jusqu'aux rayons aboutissant à leurs extrémités, à ceux des sinus des angles, comptés de même dans le second, est constant.*

(*) Définis plus haut.

Théorème XXVII'. *Si une courbe de la quatrième classe est conjuguée à deux tétragones, et qu'on coupe les côtés* (*) *de ceux-ci par une tangente quelconque à la courbe, le rapport des produits des côtés du premier tétragone, comptés depuis les sommets de celui-ci jusqu'à cette tangente, à ceux des côtés du second, comptés de même, est constant.*

§ V^bis. Rapport anharmonique du quatrième ordre (**).

31^bis. Le rapport anharmonique des huit rayons $\alpha + \lambda_{1\ldots8}\beta = 0$ s'écrira, selon les conventions du n° 22^bis :

$$r_4 = (12\ldots78) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_6)(\lambda_7 - \lambda_8)}{(\lambda_8 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_7)}.$$

Et l'on voit immédiatement que l'on aura

$$\begin{aligned}(12141618) &= 1,\\ (12341618) &= (1234),\\ (12345618) &= -(123456);\end{aligned}$$

on voit, en outre, que le rapport (12345678) est identique aux suivants

$$(34567812),\quad (56781234),\quad (78123456),\quad \ldots\ldots \qquad 1)$$

et que l'on peut, de plus, renverser l'ordre des figures dans chacune de ces quatre expressions.

Le rapport anharmonique du quatrième ordre peut s'exprimer également au moyen de produits de rapports anharmoniques d'ordre inférieur. C'est ainsi que l'on a

$$r_4 = (12345678) = -(123456)(1678)$$

et, par suite, si l'on remplace (123456) par sa valeur trouvée au n° 22^bis

$$r_4 = (1234)(1456)(1678); \qquad \ldots\ 2)$$

on trouve aussi, directement :

$$r_4 = (1234)(5678)(1458).$$

D'autres expressions, analogues, de r_4 se déduiront de l'application des relations 2) aux formes 1), qui sont les équivalentes de r_4, et à celles qui s'en déduisent par l'inversion des figures.

(*) Définis plus haut.

(**) Voir *Bull. de l'Acad.*, 2^e sér., t. XLIV, pp. 469 et suiv.

C'est ainsi qu'on trouverait

$$\left.\begin{aligned} r_4 &= -(345678)(1238) = (3456)(7836)(1238) \\ &= -(567812)(3452) = (5678)(1258)(3452) \\ &= -(781234)(5674) = (7812)(3472)(5674)\,; \\ \text{et de même}\qquad r_4 &= (3456)(7812)(3672) \\ &= (5678)(1234)(5814) \\ &= (7812)(3456)(7236) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 2')$$

En suivant maintenant la même marche qu'aux pages 63 et 64, on arriverait à toutes les formes du rapport anharmonique du quatrième ordre, qui peuvent s'exprimer au moyen de la première (12..78).

Puis, en faisant usage de la méthode et des formules de la page 65, on trouverait des relations, analogues à celles de cette page, entre la somme de rapports anharmoniques du quatrième ordre commençant par la même figure.

C'est ainsi, par exemple, qu'en se servant de la première des formules précédentes 2), et en la combinant avec la première des formules 6) de la page 63, on obtiendrait :

$$\begin{aligned} r_4 &= \{(132456) + (1456)\}.(1678) \\ &= -(13245678) + (1456)(1678) \\ &= -(13245678) - (145678); \end{aligned}$$

$$(12345678) + (13245678) = -(145678); \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

et ainsi de suite.

Ces formules 3) permettraient d'arriver, par une marche inverse de celle que nous avons suivie à la page 64, à des identités analogues à celles de cette page; et l'on tirerait, de ces dernières, de nouvelles relations entre les rapports anharmoniques du quatrième ordre.

Nous ne pousserons pas plus loin ces développements, qui deviendraient beaucoup trop considérables.

§ V$^{\text{ter}}$. De l'involution du quatrième ordre (*).

31$^{\text{ter}}$. Nous nous bornerons également à indiquer ici les différentes manières d'exprimer l'involution du quatrième ordre, en engageant le lecteur à les démontrer par le procédé du n° 22$^{\text{ter}}$; comme nous l'avons vu (n° 24) la formule de cette involution est

$$\frac{11'.12'.13'.14'}{11''.12''.13''.14''} = \Big[\quad\Big]_2 = \Big[\quad\Big]_3 = \Big[\quad\Big]_4. \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

(*) *Bulletin de l'Académie*, 2e sér., t. XLIV, pp. 88 et suiv.

Il est manifeste qu'on peut y avancer d'un rang les accents, ou les figures, et qu'on peut de même y intervertir l'ordre des accents. On s'assurera aisément que les formules 1) peuvent se remplacer par la suivante :

$$\left.\begin{array}{l} |11'21''|\,.\,|12'22''|\,.\,|13'23''|\,.\,|14'24''| = 1, \\ \text{ou} \quad \prod_{1'}^{4'} |11'21''| = 1, \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 2)$$

et par celles qu'on en déduira en y remplaçant successivement 1 par 2, 3 ou 4, et de même 2 par 3, 4 ou 1 ; ou en avançant ces figures d'un, de deux ou de trois rangs.

Par analogie avec les résultats obtenus précédemment, relativement à l'involution du troisième ordre, on pourra certainement exprimer aussi celle du quatrième, entre les quatre quaternes de points $1..4, 1'..4', 1''..4'', 1'''..4'''$, au moyen de la formule

$$\prod_{1'}^{4'} |11'21''31'''| = 1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

et de celles qui s'en déduisent en y avançant les accents, ou les figures, d'un ou de plusieurs rangs, ou en les intervertissant entre eux, comme on peut le faire dans les formules 1).

Et de même, l'involution entre les cinq quaternes de points $1...4, 1'...4', ..1^{\text{IV}}...4^{\text{IV}}$, pourra se traduire par la formule

$$\prod_{1'}^{4'} |11'21''31'''41^{\text{IV}}| = 1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

et par celles qu'on en déduira au moyen des transformations que nous venons d'indiquer.

Nous laisserons au lecteur le soin de démontrer, en suivant la marche indiquée au n° 22ter, que les formules 4) se ramènent en effet aux formules 3), et celles-ci aux formules 2).

§ VI. Faisceau de quinquélatères (*).

32. L'identité trouvée plus haut (n° 26)

$$\delta_1 \dots \delta_5 + k'\delta'_1 \dots \delta'_5 + k'_1\delta''_1 \dots \delta''_5 \equiv 0$$

exprime que les trois quinquélatères $\delta_1 \dots \delta_5$, $\delta'_1 \dots \delta'_5$, $\delta''_1 \dots \delta''_5$ sont conjugués entre eux; et l'on y lit immédiatement l'énoncé suivant :

Théorème XXVIII. Extension du théorème de Pappus. *Si trois quinquélatères sont conjugués entre eux, les produits des distances d'un point quelconque de l'un d'entre eux, aux côtés des deux autres, sont analogiques;*

et, plus généralement encore :

Il existe une relation linéaire entre les produits des distances d'un point quelconque (du plan) aux quines respectifs de côtés de trois quinquélatères conjugués entre eux.

33. On trouverait, comme au n° 24, pour chacun des points d'intersection $1'' \dots 5''$ d'une transversale quelconque avec les côtés de même nom du troisième quinquélatère, la relation

$$\delta_1 \dots \delta_5 - \lambda\delta'_1 \dots \delta'_5 = 0; \quad \dots \dots \quad 1)$$

et, comme dans ce même n° 24, pour le point $1''$:

$$\delta_1 = 11''.(1);\ \delta_2 = 21''.(2);\ \dots\ \delta_5 = 51''.(5);$$
$$\delta'_1 = 1'1''.(1'),\ \text{etc.},$$

valeurs qui, substituées dans la relation 1), donneront :

$$11''.21''.31''.41''.51''.(1) \dots (5) = \lambda 1'1'' \dots 5'1''.(1') \dots (5').$$

(*) F. G. S. C., pp. 27 et suiv., où nos extensions des théorèmes de Pappus, de Desargues et de Pascal, ont été données, pour la première fois, et directement, pour les courbes du cinquième ordre.

§ VI'. Chaîne de pentagones (*).

32'. L'identité trouvée plus haut (n° 24')

$$\varpi_1 \dots \varpi_5 + 14'\varpi_1' \dots \varpi_5' + 14''\varpi_1'' \dots \varpi_5'' \equiv 0 \quad . \quad . \quad . \quad 1')$$

exprime que les trois pentagones $\varpi_1 \dots$, $\varpi_1' \dots$, $\varpi_1'' \dots$ sont conjugués entre eux, et l'on y lit l'énoncé :

Théorème XXVIII'. Extension du théorème corrélatif de celui de Pappus. *Si trois pentagones sont conjugués entre eux, les produits des distances d'une droite quelconque (passant par un sommet) de l'un d'entre eux, aux sommets des deux autres, sont analogiques;*

et, plus généralement :

Il existe une relation linéaire entre les produits des distances d'une droite quelconque (du plan) aux ternes respectifs de sommets de trois pentagones conjugués entre eux.

33'. En conservant les mêmes notations qu'aux n°s 14' et 24' nous aurons, pour chacune des jonctions 1'' ... 5'' d'un centre quelconque (dans le plan) avec les sommets de même nom du pentagone, la relation suivante, qui se tire de 1') :

$$\varpi_1 \dots \varpi_5 - \lambda \varpi_1' \dots \varpi_5' = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2')$$

et, comme dans ces mêmes numéros, pour la droite 1'' :

$$\varpi_1 = 11''.(1), \ \varpi_2 = 21''.(2), \dots \varpi_5 = 51''.(5);$$
$$\varpi_1' = 1'1''.(1'), \ . \ . \ . \ . \ . \ . \dots \varpi_5' = 5'1''.(5');$$

valeurs qui, substituées dans la relation précédente, donneront :

$$(11'') . \dots (15'') . 1 \dots 5 = \lambda (1'1'') \dots (5'1'') . 1' \dots 5'.$$

(*) F. G. S. C., pp. 47 et suiv.

Pour les points $2''...5''$, il suffira évidemment de changer, dans cette relation, $1''$ en $2''...5''$.

La comparaison des cinq égalités ainsi obtenues conduira aux suivantes :

$$\frac{11''.21''.31''.41''.51''}{1'1''.2'1''.3'1''.4'1''.5'1''}=\Big[\quad\Big]_{2''}=\Big[\quad\Big]_{3''}=\Big[\quad\Big]_{4''}=\Big[\quad\Big]_{5''},$$

où les quatre derniers membres ne sont autre chose que le premier lui-même, dans lequel on a à remplacer $1''$ par $2''$, $3''$, $4''$, $5''$.

Elles expriment le théorème :

Théorème XXIX. EXTENSION DU THÉORÈME DE DESARGUES. *Dans un système de trois quinquélatères conjugués entre eux, une transversale quelconque rencontre les côtés de ces quinquélatères en trois quines de points en involution.*

34. On trouve une expression plus générale de cette involution en procédant comme nous l'avons fait au n° 8.

Cette expression, mise sous forme symbolique, est

$$\sum_{1}^{\nu}\lambda'(x-x'_1)\,...\,(x-x'_5)\equiv 0.$$

35. Du théorème précédent, qui est applicable à un système des quinquélatères conjugués inscrits à une courbe du cinquième ordre, on déduirait immédiatement l'extension que nous avons donnée au théorème de Pascal (*) ; elle s'énonce, pour le cas où la courbe est remplacée par un quinquélatère :

Théoreme XXX. EXTENSION DU THÉORÈME DE PASCAL. *Dans un système de deux sélatères conjugués à un quinquélatère, les intersections des côtés opposés sont collimantes,*

théorème dont l'expression analytique la plus simple est

$$\delta'_1\,...\,\delta'_6-\lambda\delta''_1\,...\,\delta''_6\equiv k\delta_1\,...\,\delta_5.\,\Delta\,,\qquad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

et montre, en même temps, l'existence de trois sélatères conjugués entre eux.

(*) Pour la démonstration, voir F. G. S. C., p. 29.

Pour les droites $2'' \ldots 5''$, il suffira de remplacer $1''$ par $2'', \ldots 5''$.

Comparant entre elles les relations obtenues, on trouvera :

$$\frac{(11'').(21'')\ldots(51'')}{(1'1'').(2'1'')\ldots(5'1'')} = [\quad]_{2''} = [\quad]_{3''} = [\quad]_{4''} = [\quad]_{5''};$$

elles expriment le théorème :

Théorème XXIX'. EXTENSION DU CORRÉLATIF DU THÉORÈME DE DESARGUES. *Dans un système de trois pentagones conjugués entre eux, si l'on joint leurs sommets à un centre quelconque (du plan) par des droites, ces trois quines de droites sont en involution.*

34'. On trouvera, comme au n° 8', la forme symbolique plus générale de cette involution :

$$\overset{v}{\underset{r}{\Sigma}}\lambda'(X - X_1')\ldots(X - X_5') \equiv 0.$$

35'. Du théorème qui précède, on déduit immédiatement celui que nous avons donné antérieurement pour une courbe de la cinquième classe en général (*), et qui s'énonce, dans le cas ici considéré :

Théorème XXX'. EXTENSION DU THÉORÈME DE BRIANCHON. *Dans un système de deux hexagones conjugués à un pentagone, les jonctions des sommets opposés sont concourantes.*

L'expression la plus simple de ce théorème est

$$\varpi_1' \ldots \varpi_6' - \lambda\varpi_1'' \ldots \varpi_6'' \equiv \varpi_1 \ldots \varpi_5 . \Pi ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5')$$

on y découvre l'existence de trois hexagones conjugués entre eux.

(*) F. G. S. C., p. 49.

36. Ce théorème a, pour corollaires immédiats, les suivants (*) :

Théorème XXXI. *Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de côtés opposés de deux sélatères conjugués inscrits à un quinquélatère (ou à une courbe du cinquième ordre), on obtient un hexagone inscrit à une conique.*

Théorème XXXII. *Si on les combine quatre à quatre, on obtient un système de deux quinquélatères conjugués inscrits à une courbe du troisième ordre.*

Théorème XXXIII. *Si on les combine cinq à cinq, on obtient un système de deux quinquélatères conjugués inscrits à une courbe du quatrième ordre.*

Si l'on exprime analytiquement ces trois corollaires (voir n° 17), on verra que, de l'identité

$$\delta'_1 \dots \delta'_6 - \lambda\delta''_1 \dots \delta''_6 \equiv kC_5 . \Delta,$$

on peut déduire les suivantes :

$$1^\circ \quad \delta'_1\delta'_2\lambda'_5 - \lambda_1\delta''_1\delta''_2\delta''_5 \equiv k_1C'_2 . \Delta, \text{ etc.}$$

$$2^\circ \quad \delta'_1 \dots \delta'_4 - \lambda'_1\delta''_1 \dots \delta''_4 \equiv k'_1C'_5 . \Delta, \text{ etc.}$$

$$5^\circ \quad \delta'_1 \dots \delta'_5 - \lambda''_1\delta''_1 \dots \delta''_5 \equiv k''_1C'_4 . \Delta, \text{ etc.}$$

Et, en étendant cette même forme d'équation, on obtiendra le théorème général :

Théorème XXXIV. *Dans un système de deux* n *latères conjugués, inscrits à un quinquélatère (ou à une courbe du cinquième ordre), les couples de côtés non adjacents se coupent en* n (n — 5) *points situés sur un lieu d'ordre* n — 5.

37. Pour découvrir, dans les quinquélatères conjugués, l'existence du rapport anharmonique du cinquième ordre, partons de l'identité

$$\delta''_1 \dots \delta''_5 \equiv \delta_1 \dots \delta_5 - \lambda\delta'_1 \dots \delta'_5 ; \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

(*) *Bulletin de l'Académie,* 2e série, t. XLIV, p. 191.

36'. Ce théorème a, pour corollaires immédiats, les suivants :

Théorème XXXI'. *Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de sommets opposés de deux hexagones conjugués à un pentagone (ou à une courbe de la cinquième classe), on obtient un hexagone circonscrit à une conique.*

Théorème XXXII'. *Si on les combine quatre à quatre, on obtient un système de deux tétragones conjugués à une courbe de la troisième classe.*

Théorème XXXIII'. *Si on les combine cinq à cinq, on obtient un système de deux pentagones conjugués à une courbe de la quatrième classe.*

En étendant la forme d'équation qui précède, on arriverait au théorème :

Théorème XXXIV'. *Dans un système de deux* n *gones conjugués à un pentagone (ou à une courbe de la cinquième classe), les jonctions des couples de côtés non adjacents, au nombre de* n(n — 5), *envelopperont une courbe de classe* n — 5.

37'. Recherchons le rapport anharmonique du cinquième ordre dans l'identité

$$\varpi''_1 \ldots \varpi''_5 \equiv \varpi_1 \ldots \varpi_5 - \lambda \varpi'_1 \ldots \varpi'_5.$$

Coupons, par une transversale quelconque, les *côtés* des pentajoignons, à un centre quelconque, les sommets des quinquélatères 1, 2, 3, 4, 5 et 1', 2', 3', 4', 5', *sommets* qui sont les intersections du côté d'un quinquélatère avec deux des cinq côtés de l'autre, pourvu que ces sommets déterminent complétement les quinquélatères.

Nous choisirons, comme tels, les points

$$1'_2,\ 1'_3;\quad 2'_3,\ 2'_4;\quad 3'_4,\ 3'_5;\quad 4'_5,\ 4'_1;\quad 5'_1,\ 5'_2,$$

qui sont les intersections successives des côtés 1' et 2, 1' et 3, etc.

Conservons ces mêmes notations pour représenter les rayons qui aboutissent à ces sommets; nommons $1'_2 1'_3$, $4'_1 5'_1$, etc., les longueurs des côtés 1', 1, etc., comprises entre ces sommets; nous aurons, comme au nº 28, en rapportant les distances δ_1... au centre considéré :

$$\delta_1 = \frac{4'_1 . 5'_1 . (4'_1 5'_1)}{4'_1 5'_1},$$

que nous écrirons

$$\delta_1 = \{4'_1 5'_1\}.$$

Nous aurons de même :

$$\delta_2 = \{5'_2 1'_2\},\ \delta_3 = \{1'_3 2'_3\},\ \delta_4 = \{2'_4 3'_4\},\ \delta_5 = \{3'_5 4'_5\};$$
$$\delta'_1 = \{1'_2 1'_3\},\ \delta'_2 = \{2'_3 2'_4\},\ \delta'_3 = \{3'_4 3'_5\},\ \delta'_4 = \{4'_5 4'_1\},\ \delta'_5 = \{5'_1 5'_2\};$$

et

$$\delta''_1 = \{1'_2 3'_5\},\ \delta''_2 = \{1'_3 4'_5\},\ \delta''_3 = \{2'_3 4'_1\},\ \delta''_4 = \{2'_4 5'_1\},\ \delta''_5 = \{3'_4 5'_2\}.$$

Substituant ces valeurs, développées, dans l'identité 4), et supprimant les facteurs $4'_1$, $5'_1$, $5'_2$, $1'_2$, ..., qui seront communs à tous les termes, nous trouverons

$$\frac{(4'_1 5'_1)\ (5'_2 1'_2)\ (1'_3 2'_3)\ (2'_4 3'_4)\ (3'_5 4'_5)}{4'_1 5'_1\ .\ 5'_2 1'_2\ .\ 1'_3 2'_3\ .\ 2'_4 3'_4\ .\ 3'_5 4'_5}$$
$$-\lambda \frac{(1'_2 1'_3)\ (2'_3 2'_4)\ (3'_4 3'_5)\ (4'_5 4'_1)\ (5'_1 5'_2)}{1'_2 1'_3\ .\ 2'_3 2'_4\ .\ 3'_4 3'_5\ .\ 4'_5 4'_1\ .\ 5'_1 5'_2}$$
$$= \frac{(1'_2 3'_5).(1'_3 4'_5).(2'_3 4'_1).(2'_4 5'_1).(3'_4 5'_2)}{1'_2 3'_5\ .\ 1'_3 4'_5\ .\ 2'_3 4'_1\ .\ 2'_4 5'_1\ .\ 3'_4 5'_2}.$$

gones $1 \ldots 5$, $1' \ldots 5'$, que nous définirons comme plus haut, n° 28′, et que nous nommerons

$$1'_2,\ 1'_3;\ 2'_3,\ 2'_4;\ 3'_4,\ 3'_5;\ 4'_5,\ 4'_1;\ 5'_1,\ 5'_2,$$

qui sont les jonctions respectives des sommets $1'$ et 2, $1'$ et 3, etc.

Conservons ces mêmes notations pour désigner les intersections de ces *côtés* avec la transversale; nous aurons :

$$\varpi_1 = \frac{4'_1 5'_1 \,.\, (4'_1) \,.\, (5'_1)}{(4'_1 5'_1)},$$

que nous écrirons $\{4'_1 5'_1\}$, et ainsi de suite.

Substituées dans l'identité précédente, ces expressions donnent :

$$\begin{aligned} &\frac{4'_1 5'_1 \,.\, 5'_2 1'_2 \,.\, 1'_3 2'_3 \,.\, 2'_4 3'_4 \,.\, 3'_5 4'_5}{(4'_1 5'_1)\,.\,(5'_2 1'_2)\,.\,(1'_3 2'_3)\,.\,(2'_4 3'_4)\,.\,(3'_5 4'_5)} \\ -\lambda\, &\frac{1'_2 1'_3 \,.\, 2'_3 2'_4 \,.\, 3'_4 3'_5 \,.\, 4'_5 4'_1 \,.\, 5'_1 5'_2}{(1'_2 1'_3)\,.\,(2'_3 2'_4)\,.\,(3'_4 3'_5)\,.\,(4'_5 4'_1)\,.\,(5'_1 5'_2)} \\ = &\frac{1'_2 3'_5 \,.\, 1'_3 4'_5 \,.\, 2'_3 4'_1 \,.\, 2'_4 5'_1 \,.\, 3'_4 5'_2}{(1'_2 3'_5)\,.\,(1'_3 4'_5)\,.\,(2'_3 4'_1)\,.\,(2'_4 5'_1)\,.\,(3'_4 5'_2)}. \end{aligned}$$

Comme les dénominateurs sont indépendants de la transversale, nous pourrons écrire, comme plus haut, n° 28′ :

$$1 \ldots 5 - \lambda 1' \ldots 5' \equiv k 1'' \ldots 5'',$$

et énoncer le théorème :

Théorème XXXV′. *Si l'on mène une droite quelconque dans le plan de trois pentagones conjugués entre eux, il existe une relation linéaire entre les produits des segments interceptés, sur cette droite, par les quines respectifs d'angles des trois pentagones,* qui n'est qu'une autre forme des théorèmes XXVIII′ et XXIX′.

Si nous remarquons que les dénominateurs sont des quantités constantes, quel que soit le centre choisi, nous pourrons écrire, plus simplement :

$$\begin{aligned} &(4'_4 5'_1)(5'_2 1'_2)(1'_3 2'_3)(2'_4 3'_4)(3'_5 4'_5) \\ - \lambda' &(1'_2 1'_3)(2'_3 2'_4)(3'_4 3'_5)(4'_5 4'_1)(5'_1 5'_2) \\ \equiv \quad &(1'_2 3'_5).(1'_3 4'_5).(2'_3 4'_1).(2'_4 5'_1).(3'_4 5'_2). \end{aligned}$$

Or, les différents facteurs, qui entrent dans ces expressions, sont les angles soutendus, au centre du faisceau, par les côtés 1, 2, 3, 4, 5; 1′, 2′, 3′, 4′, 5′; 1″, 2″, 3″, 4″, 5″, qui sont limités respectivement par 4′, 5′; 5′, 1′; 1′, 2′; 2′, 3′; 3′, 4′; 2, 3; 3, 4; 4, 5; 5, 1; 1, 2; de sorte que la relation précédente pourra s'écrire :

$$(1)(2)(3)(4)(5) - \lambda'(1')(2')(3')(4')(5') \equiv k(1'')(2'')(3'')(4'')(5''),$$

et s'énoncera :

Théorème XXXV. *Si, d'un centre quelconque (dans le plan), on mène les rayons aux sommets de trois quinquélatères conjugués entre eux, il existe une relation linéaire entre les produits des sinus des angles soutendus, en ce centre, par les quines respectifs de côtés des trois quinquélatères,*

énoncé qui ne diffère pas, dans le fond, ni de notre extension générale du théorème de Pappus (n° 32), ni de celle du théorème de Desargues (n° 35).

38. Si le centre du faisceau est un point du troisième quinquélatère, le second membre des identités précédentes est nul, et l'on a :

$$\lambda' = \lambda \frac{1 \ldots 5}{1' \ldots 5'} = \frac{(1)(2)(3)(4)(5)}{(1')(2')(3')(4')(5')} = \frac{(4'_1 5'_1)(5'_2 1'_2)(1'_3 2'_3)(2'_4 3'_4)(3'_5 4'_5)}{(1'_2 1'_3)(2'_3 2'_4)(3'_4 3'_5)(4'_5 4'_1)(5'_1 5'_2)}, \quad 6)$$

ou bien

$$\lambda' = \frac{(4'_1 5'_1)(5'_2 1'_2)(1'_3 2'_3)(2'_4 3'_4)(3'_5 4'_5)}{(4'_5 4'_1)(5'_1 5'_2)(1'_2 1'_3)(2'_3 2'_4)(3'_4 3'_5)};$$

expression dans laquelle on retrouve la loi de formation énoncée aux n°s 20 et 29, et que nous appellerons RAPPORT ANHARMONIQUE

38'. Si la transversale passe par l'un des sommets du pentagone $\varpi_1'' \ldots \varpi_5''$, on aura

$$\lambda \frac{(1) \ldots (5)}{(1') \ldots (5')} = \frac{1 \ldots 5}{1' \ldots 5'} = \frac{4_1'5_1' \,.\, 5_2'1_2' \,.\, 1_3'2_3' \,.\, 2_4'3_4' \,.\, 3_5'4_5'}{4_5'4_1' \,.\, 5_1'5_2' \,.\, 1_2'1_3' \,.\, 2_3'2_4' \,.\, 3_4'3_5'}, \quad . \quad 6')$$

expression dans laquelle on reconnait le RAPPORT ANHARMONIQUE DU CINQUIÈME ORDRE.

Nous pourrons donc énoncer ce théorème fondamental :

DU CINQUIÈME ORDRE ; nous pourrons donc énoncer ce théorème fondamental :

Théorème XXXVI. *Si l'on joint un point quelconque d'un quinquélatère aux sommets* (*) *de deux quinquélatères conjugués au premier, le rapport anharmonique du faisceau ainsi formé est constant ;*

et l'on peut ajouter (voir n° 20) que

Ce rapport est égal à celui des segments interceptés, entre les rayons, sur une transversale quelconque.

REMARQUE CAPITALE. Le théorème qui précède est manifestement applicable au cas où le premier quinquélatère est remplacé par une courbe du cinquième ordre, à laquelle les deux autres seraient conjugués (**).

Dans ce cas, nous aurons le théorème général :

Théorème XXXVII. *Si l'on joint un point quelconque d'une courbe du cinquième ordre aux sommets de deux quinquélatères conjugués à cette courbe, le rapport anharmonique du faisceau ainsi formé est constant,*

nouvelle extension de la *propriété anharmonique de quatre points d'une conique.*

39. En procédant comme au n° 30, et désignant par $4'_1$, $5'_1$, etc., les rayons qui joignent les extrémités des côtés des quinquélatères à un centre quelconque ; par (1) etc., les sinus des angles soutendus, en ce centre, par les côtés 1, etc., nous écrirons identiquement :

$$\frac{4'_1 . 5'_1 . (1)}{(1)} . \frac{5'_2 . 1'_2 . (2)}{(2)} . \frac{1'_3 . 2'_3 . (3)}{(3)} . \frac{2'_4 . 3'_4 . (4)}{(4)} . \frac{3'_5 . 4'_5 . (5)}{(5)}$$
$$= \frac{1'_2 . 1'_3 . (1')}{(1')} . \frac{2'_3 . 2'_4 . (2')}{(2')} . \frac{3'_4 . 3'_5 . (3')}{(3')} . \frac{4'_5 . 4'_1 . (4')}{(4')} . \frac{5'_1 . 5'_2 . (5')}{(5')}$$
$$= \frac{1'_2 . 3'_5 . (1'')}{(1'')} . \frac{1'_3 . 4'_5 . (2'')}{(2'')} . \frac{2'_3 . 4'_1 . (3'')}{(3'')} . \frac{2'_4 . 5'_1 . (4'')}{(4'')} . \frac{3'_4 . 5'_2 . (5'')}{(5'')} ;$$

et nous énoncerons, par suite, le théorème :

(*) Voir plus haut comment nous avons défini ces *sommets*.
(**) F. G. S. C., p. 27.

Théorème XXXVI′. *Si l'on mène une droite quelconque par l'un des sommets d'un pentagone, elle rencontre les côtés (*) de deux pentagones conjugués au premier en dix points dont le rapport anharmonique est constant ;*

et l'on peut ajouter que

Ce rapport est égal à celui du faisceau formé par la jonction de ces points à un centre quelconque.

Remarque capitale. On peut remplacer le premier pentagone par une courbe de la cinquième classe, à laquelle les deux autres sont conjugués, et dire, dans ce cas :

Théorème XXXVII. *Une tangente quelconque à une courbe de la cinquième classe rencontre les côtés de deux pentagones conjugués à cette courbe en dix points, dont le rapport anharmonique est constant.*

Cette propriété de dix tangentes à une courbe de la cinquième classe correspond à la *propriété anharmonique de quatre tangentes à une conique.*

39′. Écrivons identiquement :

$$\frac{(4'_1)\cdot(5'_1)\cdot 1}{1}\cdot\frac{(5'_2)\cdot(1'_2)\cdot 2}{2}\cdot\frac{(1'_3)\cdot(2'_3)\cdot 3}{3}\cdot\frac{(2'_4)\cdot(3'_4)\cdot 4}{4}\cdot\frac{(3'_5)\cdot(4'_5)\cdot 5}{5} =$$

$$\frac{(1'_2)\cdot(1'_3)\cdot 1'}{1'}\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$\frac{(1'_2)\cdot(3'_5)\cdot 1''}{1''}\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

nous pourrons énoncer le théorème :

Théorème XXXVIII. *Dans le cas de trois pentagones conjugués entre eux, dont les côtés (**) sont coupés par une droite quelconque, si l'on forme le produit des quotaires des triangles qui ont leurs*

(*) Définis plus haut.

(**) *Ibid.*

Théorème XXXVIII. *Dans le cas de trois quinquélatères conjugués entre eux, dont les sommets (*) sont joints à un centre quelconque, si l'on forme le produit des aires des cinq triangles qui ont leurs sommets en ce centre, et pour bases respectives les côtés de chaque quinquélatère, et qu'on divise ce produit par celui des sinus des angles formés au sommet de chacun de ces triangles, le quotient obtenu sera constant pour chacun des trois quinquélatères.*

Si nous exprimons les aires de ces triangles au moyen du produit de la base par la hauteur, en désignant les bases par 1, etc., les égalités précédentes s'écriront :

$$\frac{1\,.\,\delta_1}{(1)}\cdot\frac{2\,.\,\delta_2}{(2)}\cdot\frac{3\,.\,\delta_3}{(3)}\cdot\frac{4\,.\,\delta_4}{(4)}\cdot\frac{5\,.\,\delta_5}{(5)}=\frac{1'\,.\,\delta'_1}{(1')}\cdots\frac{5'\,.\,\delta'_5}{(5')}=\frac{1''\,.\,\delta''_1}{(1'')}\cdots\frac{5''\,.\,\delta''_5}{(5'')}.$$

Si le centre du faisceau est pris en un point quelconque du lieu qui a pour équation

$$C_5 \equiv \delta_1 \ldots \delta_5 - \lambda\delta'_1 \ldots \delta'_5 = 0, \qquad 7)$$

on aura donc :

$$\lambda = \frac{\delta_1 \ldots \delta_5}{\delta'_1 \ldots \delta'_5} = \frac{1' \ldots 5'}{1 \ldots 5}\cdot\frac{(1)(2)\ldots(5)}{(1')(2')\ldots(5')},$$

ce qui nous ramène à la propriété anharmonique trouvée plus haut.

40. Si nous recherchons la signification géométrique de l'équation

$$C_5 \equiv \delta_1 \ldots \delta_5 - \lambda\delta'_1 \ldots \delta'_5 = 0$$

par la méthode du nº 31, en écrivant

$$\delta_1=\frac{1\,.(14'_1).(15'_1)}{(1)},\quad \delta_2=\frac{2\,.(25'_2).(21'_2)}{(2)},\quad \delta_3=\frac{3\,.(31'_3).(32'_3)}{(3)},$$

$$\delta_4=\frac{4\,.(42'_4).(43'_4)}{(4)},\quad \delta_5=\frac{5\,.(53'_5).(54'_5)}{(5)},$$

$$\delta'_1=\frac{1'.(1'1'_2).(1'1'_3)}{(1')},\quad \delta'_2=\frac{2'.(2'2'_3).(2'2'_4)}{(2')},\quad \delta'_3=\frac{3'.(3'3'_4).(3'3'_5)}{(3')},$$

$$\delta'_4=\frac{4'.(4'4'_5).(4'4'_1)}{(4')},\quad \delta'_5=\frac{5'.(5'5'_1).(5'5'_2)}{(5')},$$

(*) Voir plus haut la définition de ces *sommets*.

bases sur cette droite, et pour angles adjacents respectifs ceux que celle-ci fait avec ces mêmes côtés, et qu'on divise ce produit par celui des bases, le quotient obtenu sera constant pour chaque pentagone.

Mais on a :

$$(4'_1) \cdot (5'_1) \cdot 1 = (1) \cdot \varpi_1, \text{ etc.}$$

Ces valeurs substituées dans les égalités précédentes donnent :

$$\frac{(1) \cdot \varpi_1}{} \cdots \frac{(5) \cdot \varpi_5}{5} = \frac{(1') \cdot \varpi'_1}{1'} \cdots \frac{(5') \cdot \varpi'_5}{5'} = \frac{(1'') \cdot \varpi''_1}{1''} \cdots \frac{(5'') \cdot \varpi''_5}{5''}.$$

Si la transversale est tangente au lieu qui a pour équation

$$C'_5 \equiv \varpi_1 \ldots \varpi_5 - \lambda \varpi'_1 \ldots \varpi'_5 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7')$$

(que ce soit un pentagone ou une courbe de la cinquième classe) on aura donc

$$\lambda = \frac{\varpi_1 \ldots \varpi_5}{\varpi'_1 \ldots \varpi'_5} = \frac{(1') \ldots (5')}{(1) \ldots (5)} \cdot \frac{1 \ldots (5)}{1' \ldots (5')},$$

c'est-à-dire la *propriété anharmonique* trouvée plus haut.

40'. Si nous recherchons la signification géométrique de l'équation

$$C'_5 \equiv \varpi_1 \ldots \varpi_5 - \lambda \varpi'_1 \ldots \varpi'_5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7')$$

par la méthode du n° 31', en écrivant

$$\varpi_1 = \frac{14'_1 \cdot 15'_1 \cdot (1)}{(1)} \text{ etc.},$$

nous obtiendrons, en substituant, et en comparant la valeur de λ à celle de la relation 6') :

$$\lambda^2 = \frac{14'_1 \cdot 15'_1 \cdot 25'_2 \cdot 21'_2 \cdot 31'_3 \cdot 32'_3 \cdot 42'_4 \cdot 43'_4 \cdot 53'_5 \cdot 54'_5}{1'1'_2 \cdot 1'1'_3 \cdot 2'2'_3 \cdot 2'2'_4 \cdot 3'3'_4 \cdot 3'3'_5 \cdot 4'4'_5 \cdot 4'4'_1 \cdot 5'5'_1 \cdot 5'5'_2},$$

c'est-à-dire :

nous obtiendrons, en substituant et comparant à la relation 6) :

$$\lambda^2 = \frac{(14'_1)\,.\,(15'_1)\,.\,(25'_2)\,.\,(21'_2)\,.\,(31'_3)\,.\,(32'_3)\,.\,(42'_4)\,.\,(43'_4)\,.\,(53'_5)\,.\,(54'_5)}{(1'1'_2)\,.\,(1'1'_3)\,.\,(2'2'_3)\,.\,(2'2'_4)\,.\,(3'3'_4)\,.\,(3'3'_5)\,.\,(4'4'_5)\,.\,(4'4'_1)\,.\,(5'5'_1)\,.\,(5'5'_5)},$$

c'est-à-dire :

Théoreme XXXIX. *Si une courbe du cinquième ordre est conjuguée à deux quinquélatères, et qu'on joigne les sommets de ceux-ci à un point quelconque de la courbe, le rapport des produits des sinus des angles comptés, dans le premier quinquélatère, depuis les côtés de celui-ci jusqu'aux rayons aboutissant à leurs extrémités, à ceux des sinus des angles, comptés de même dans le second, est constant.*

41. Il serait fort aisé d'étendre les théories qui précèdent à un système de trois n latères conjugués entre eux, c'est-à-dire satisfaisant à l'identité

$$\delta''_1 \ldots \delta''_n \equiv \delta_1 \ldots \delta_n - \lambda \delta'_1 \ldots \delta'_n,$$

et d'en déduire tous les théorèmes que nous avons donnés plus haut relativement aux bilatères, trilatères, quadrilatères et quinquélatères conjugués, ou à des courbes rapportées à de semblables systèmes, ainsi que l'expression du rapport anharmonique du n^e ordre.

Mais nous croyons d'autant plus superflu de nous y arrêter, que nous avons démontré (*) qu'au delà du cinquième ordre, l'équation d'une courbe ne peut pas, en général, se mettre sous la forme

$$C_n \equiv \delta_1 \ldots \delta_n - \lambda \delta'_1 \ldots \delta_n = 0.$$

Bornons-nous donc à faire remarquer que la loi de formation que nous avons trouvée pour les rapports anharmoniques du

(*) F. G. S. C., p. 11.

Théorème XXXIX. *Si une courbe de la cinquième classe est conjuguée à deux pentagones, et qu'on coupe les côtés de ceux-ci par une tangente quelconque à la courbe, le rapport des produits des côtés du premier pentagone, comptés depuis les sommets de celui-ci jusqu'à cette tangente, à ceux du second, comptés de même, est constant.*

---

troisième, du quatrième et du cinquième ordre est tout à fait générale, et que le RAPPORT ANHARMONIQUE DU n^e ORDRE s'écrira, par suite, pour un faisceau de $2n$ droites, en continuant à faire usage des notations qui précèdent :

$$\lambda' = \frac{(\overline{n'-1_1},\ n'_1)\,(n'_2 1'_2)\,(1'_3,\ 2'_3)\ \ldots (\overline{n'-2_n}\ ,\overline{n'-1_n})}{(\overline{n'-1_n},\overline{n'-1_1})\,(n'_1 n'_2)\,(1'_2 1'_3)\ldots(\overline{n'-2_{n-1}},\overline{n'-2_n})}$$

ou, si l'on veut remplacer les notations

$$\overline{n'-1_1},\ n'_1,\ n'_2,\ 1'_2,\ 1'_3,\ 2'_3 \ldots \overline{n'-2_n},\ \overline{n'-1_n}$$

par les nombres naturels $1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots 2n-1, 2n$:

$$\lambda' = \frac{(1,2)\,(3,4)\,(5,6)\ldots\quad(2n-1,2n)}{(2n,1)\,(2,3)\,(4,5)\ldots(2n-2,2n-1)}.$$

§ VI^{bis}. RAPPORT ANHARMONIQUE DU CINQUIÈME ORDRE (*).

41bis. Le rapport anharmonique du cinquième ordre, ou des dix rayons $\alpha + \lambda_{1\ldots10}\beta = 0$, s'écrira, suivant les conventions du n° 22bis :

$$r_5 = (12 \ldots 10) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)\ldots(\lambda_9 - \lambda_{10})}{(\lambda_{10} - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)\ldots(\lambda_8 - \lambda_9)};$$

et l'on voit immédiatement que l'on aura (**) :

$$\begin{aligned}
&(1214161810) = 1,\\
&(1234161810) = -(1234),\\
&(1234561810) = (123456),\\
&(1234567810) = -(12345678);
\end{aligned}$$

on voit, en outre, que le rapport r_5 ou $(12\ \ldots\ 90)$ est identique aux suivants

$$(34 \ldots 9012),\quad (56 \ldots 1234),\quad (78 \ldots 3456),\quad (90 \ldots 5678),\ \ .\ \ .\ \ .\qquad 1)$$

(*) Voir *Bull. de l'Acad.*, 2e sér., t. XLIV, pp. 469 et suiv.

(**) Pour éviter toute ambiguïté, nous remplacerons 10 par 0.

et qu'il est permis, de plus, de renverser l'ordre des figures dans chacune de ces expressions.

Les formules qui suivent donneront le moyen d'exprimer le rapport du cinquième ordre par des produits de rapports d'ordre inférieur :

$$r_5 = (12 \ldots 0) = -(12 \ldots 8)(1890),$$

ou, en remplaçant $(12 \ldots 8)$ par ses valeurs, trouvées au n° 31[bis] :

$$\left.\begin{aligned} r_5 &= (123456)\,(1678)\,(1890), \\ r_5 &= -(1234)\,(1456)\,(1678)\,(1890), \\ r_5 &= -(1234)\,(5678)\,(1458)\,(1890). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

On trouverait aussi directement

$$r_5 = (12 \ldots 6)\,.\,(167890),$$

ce qui n'est, du reste, autre chose que la première ou la deuxième des formules précédentes.

En appliquant les formules 2) aux expressions 1), on en trouverait d'autres, toutes équivalentes à r_5.

L'extension, au rapport anharmonique du n^e ordre, des formules que nous avons trouvées pour le troisième, le quatrième et le cinquième, est tellement simple que nous ne nous y arrêterons pas, nous bornant à donner l'expression de ce rapport au moyen d'un produit de rapports du second ordre :

$$r_n = (-1)^n.(1234).(1456).(1678)\ldots(1\;2n-4\;2n-3\;2n-2).(1\;2n-2\;2n-1\;2n).$$

Nous ne nous arrêterons pas davantage à rechercher les formules analogues à celles que nous avons données aux numéros 22[bis] et 31[bis] pour le troisième et le quatrième ordre ; cela nous entraînerait trop loin.

§ VI[ter]. Involution du cinquième ordre (*).

41[ter]. Ici encore, nous nous contenterons d'indiquer les formules au moyen desquelles l'involution du cinquième ordre pourra s'exprimer par des relations entre les différents rapports anharmoniques du même ordre ou des ordres inférieurs.

Cette involution s'exprime, n° 33, par les formules

$$\frac{11'.12'.13'.14'.15'}{11''.12''.13''.14''.15''} = \Big[\quad\Big]_2 = \Big[\quad\Big]_3 = \Big[\quad\Big]_4 = \Big[\quad\Big]_5, \quad . \quad 1)$$

dans lesquelles on peut évidemment intervertir les accents ou les figures.

(*) Voir *Bull. de l'Acad.*, 2e sér., t. XLIV, pp. 88 et suiv.

Celles-ci pourront se remplacer par la suivante :

$$\prod_{1'}^{5'} |\, 11'21'' \,| = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

et par celles qu'on en déduit en avançant les figures 1 et 2 successivement d'un, de deux, de trois ou de quatre rangs.

De même, l'involution des quatre quines $1 \ldots 5$, $1' \ldots 5'$, ..., $1''' \ldots 5'''$ s'exprimerait par

$$\prod_{1'}^{5'} |\, 11'21''31''' \,| = -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

et par les formules qui s'en déduisent en avançant les accents, ou les intervertissant entre eux.

Celle des cinq quines de points $1 \ldots 5$, ..., $1^{\text{iv}} \ldots 5^{\text{iv}}$ s'exprimerait par

$$\prod_{1'}^{5'} |\, 11'21''31'''41^{\text{iv}} \,| = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

et par les formules qui s'en déduissent comme plus haut.

Enfin, l'involution des six quines de points $1 \ldots 5$, ..., $1^{\text{v}} \ldots 5^{\text{v}}$ se traduirait par la formule

$$\prod_{1'}^{5'} |\, 11'21''31'''41^{\text{iv}}51^{\text{v}} \,| = -1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

et par celles qui s'en déduisent de même.

La régularité qui se manifeste dans ces formules, non-seulement en met l'exactitude hors de doute, mais permet, de plus, de les généraliser avec la plus grande facilité.

CONCLUSION.

Il nous resterait encore à traiter de la génération des courbes du n^e ordre au moyen des points n^{uples} d'intersection des rayons de n faisceaux homographiques, ou de n faisceaux de n^e ordre, ainsi que de la véritable conception du principe de dualité.

Quant au premier de ces points, nous nous bornerons, pour aujourd'hui, à renvoyer aux Notes que nous avons déjà publiées sur ce sujet (*).

Quant au second, il demande, pour que la dualité apparaisse avec une parfaite évidence, à être traité d'abord dans l'espace.

Ce n'est donc pas ici le lieu de nous en occuper. Nous voulons d'autant moins le faire, que nos rectordonnées, ramenées de l'espace dans le plan, nous feraient retomber tout simplement, pensons-nous, sur les coordonnées tangentielles, telles que Clebsch les a déduites, dans son ouvrage posthume (**), des coordonnées trigonales de la droite.

Les théories que nous venons d'exposer, jointes à celles que M. Le Paige a découvertes (***), permettront de construire par points, d'une manière élégante, une courbe supérieure déterminée par un nombre suffisant de conditions.

Ces constructions feront l'objet d'un prochain travail, pour lequel M. Le Paige a bien voulu nous promettre sa collaboration.

(*) *Bull. de l'Acad.*, t. XLIV, p. 474; et *Recherches de Géométrie supérieure,* t. LXVI, p. 195.

(**) Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie.*

(***) *Bull. de l'Acad.*, t. XLIV, pp. 94-96, 158-166, 247-259.
Ibid., t. XLV, pp. 231-257, 365-386, 546-564.

ERRATA.

Page	Ligne haut.	Ligne bas.	Au lieu de	Lisez
12	2		ou	est
13	9		*by*	*b*Y.
14		1	BELGIQUE	BELGIQUE, 2e sér., t. XLI, no 1.
37	1		no 9′	no 9.
38		5	*bilatères*	*trilatères.*
43	1		DE.	CHAÎNE DE.
57		2	ϖ	ϖ_1.
59	8		ce que	ce qui.
74		11	On... suivants . . .	on... suivantes.
82		7	*leur sommet* . . .	*leurs sommets.*
91	3		$+ 14' \ldots + 14''$. . . .	$+ k' \ldots + k''$.
94		14	λ'_3	δ'_3.

TABLE DES MATIÈRES.

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

EN VENTE CHEZ DECQ, LIBRAIRE, A BRUXELLES ET A LIÉGE.

1° **Fondements d'une Géométrie supérieure cartésienne.** In-4°. Bruxelles, HAYEZ, 1872. *Mém. de l'Acad. roy de Belgique.*

2° **Recherches de Géométrie supérieure**, 1re et 2e parties. Bruxelles, HAYEZ, 1878. *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique.*

3° **Précis de Géométrie élémentaire.** Liége, DESOER, 1876.

4° **Nouvelles tables usuelles des logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques**, en 4 feuilles, avec applications. Liége, DESSAIN, 1866. *Mém. de la Société roy. des sciences de Liége.*

5° **Théorie nouvelle du mouvement d'un corps solide**, 1re partie. Bruxelles, 1865; 2e et 3e parties, id., 1867. *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique.*

6° **Sur la densité moyenne de la terre.** Bruxelles, HAYEZ, 1872. *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique.*

7° **Le commencement et la fin du monde d'après la théorie mécanique de la chaleur.** Bruxelles, HAYEZ, 1873. *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique.*

8° **Biographie de M. Gloesener.** Bruxelles, HAYEZ, 1878.

9° **Mémoires sur la théorie mécanique de la chaleur**, traduits de l'allemand de R. CLAUSIUS, 1er vol. Paris, E. LACROIX, 1868; 2e vol., id., 1869.

10° **La fonction potentielle et le potentiel**, traduit de l'allemand de R. CLAUSIUS. Paris, GAUTHIER-VILLARS, 1870.

11° **Cours de calcul des Probabilités**, fait à l'Université de Liége par A. MEYER, publié sur les manuscrits de l'auteur par F. FOLIE. Bruxelles, HAYEZ, 1874.