Une généralisation des octonions

Marie Kreusch

Séminaire des doctorants - Université de Liège - 5 septembre 2013

Les nombres réels sont bien connu du grand public mais d'autres types de nombres sont importants pour comprendre la géométrie et la physique. Par exemple en introduisant la raciné carré de -1 et donc les nombres complexes (en 1545 avec Jérôme Cadran), on a pu résoudre un plus grand nombre de d'équations. En dimension 3, on ne pouvait pas décrire les rotations et dilatations à l'aide de trois nombres seulement. Il fallait un quatrième nombre, ce qui donnait lieu à un ensemble quadridimensionnel de nombres nommés quaternions (découvert en 1843 par William Hamilton). Largement négligés depuis leur découverte en 1843 par John Graves, les octonions ont pris au cours des dernières décennies une importance étonnante dans la théorie des cordes. L'algèbre des octonions est l'algèbre de division (c'est-à-dire que tout élément non nul a un inverse pour la multiplication) de dimension maximal (égale à huit). Il a fallu attendre le développement de la physique des particules et la théorie de la supersymétrie (et la théorie des cordes en particulier) pour voir à quoi pourraient servir les octonions dans le monde réel.

La construction de Cayley-Dickson pour les algèbres $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$ va être légèrement abordée, ainsi que les représentations par des plans de FANO pour les algèbres $\mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$, on va ensuite relier ces algèbres au problème d'Hurwitz-Radon. Les algèbres de Clifford, qui sont une généralisation des quaternions, vont être comme algèbre construite sur un groupe. Dans notre cas, le groupe sera $(\mathbb{Z}_2)^n$. C'est de cette manière que l'on va construire des algèbres généralisant les octonions.

Remarque : Le séminaire débutera par un peu d'histoire des mathématiques, des anecdotes, des questions physiques et des mathématiques accessibles, voir [1], [4] [2]. La suite portera sur des résultats récents plus poussés, voir [3] et [5]

Références

[1] Baez J., "The octonions" *Bulletin (new series) of the American Mathematical Society* 39, no. 2 (2002) : 145 – 205.

[2] Baez J., J. Huerta "Des octonions pour la théorie des cordes" *Pour le Science* no. 406 (20011) : 70 – 75.

[3] Lenzhen A., S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, "New solutions to the Hurwitz problem on square identities." *Journal of Pure and Applied Algebra* 306, no. 12 (2011) : 83 – 118.

[4] Morier-Genoud S., V. Ovsienko, "Well, papa, can you multiply triplets ?". *Springer science+business Medi, LLC* 31, no. 4 (2009) : 1– 2.

[5] Morier-Genoud S., V. Ovsienko, "A series of Algebras Generalizing the Octonions and Hurwitz-Radon Identity". *Communications in Mathematical Physics* 215, no. 1 (2011) : 2903 – 2911.