

LABORATOIRE D'AÉRONAUTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE

RUE DU VAL BENOIT, 75

B - 4000 LIÈGE

BELGIQUE

RAPPORT IF-26

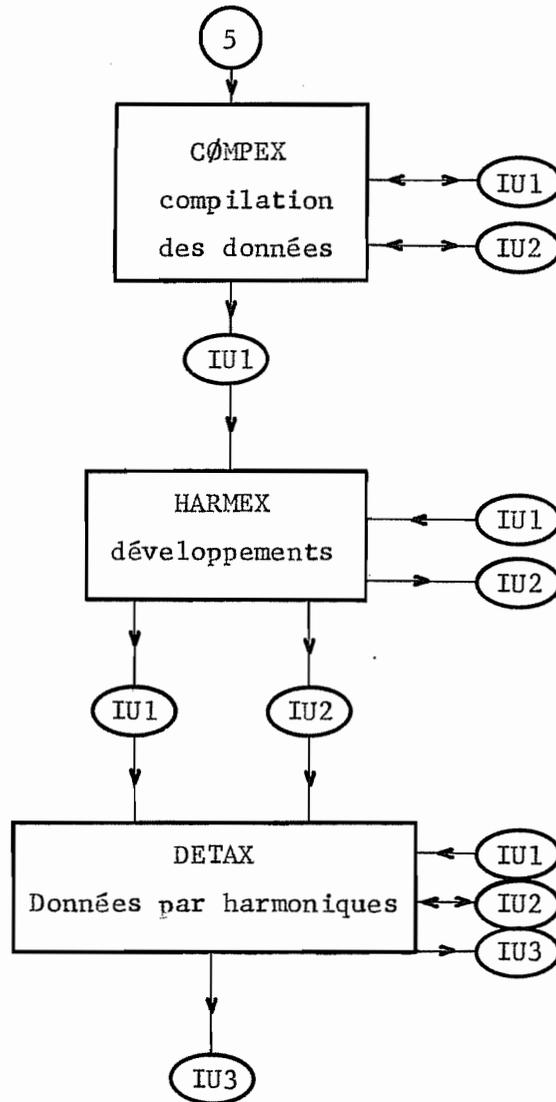
"MANUEL THEORIQUE ET PRATIQUE DU PROGRAMME D'ANALYSE
DE FOURIER"

J.F. DEBONGNIE,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES

OCTOBRE 1978

0. INTRODUCTION

Le programme se compose de 3 modules :



CHAPITRE 1SYNTAXE DES DONNEES DE L'UTILISATEUR

1. Les données sont réparties en rubriques repérées par une carte commençant par un point et 3 lettres de l'alphabet latin.

Ces rubriques sont

.GEN	:	données générales
.ALØ	:	axes locaux
.SST	:	subdivision en sous-structures
.ELE	:	éléments
.FIX	:	fixations (à zéro)
.RET	:	coordonnées retenues
.CAG	:	cartes additionnelles générales
.CAP	:	cartes additionnelle particulières
.CHA	:	charges
.INE	:	inerties concentrées
.DEP	:	déplacements imposés
.TEM	:	températures non axisymétriques
.PRE	:	pressions
.FØN	:	fonctions de thêta

La syntaxe relative à la rubrique .FØN sera analysée à part.

Pour la plupart des autres rubriques, il est possible de définir un format, servant à préciser l'ordre dans lequel les variables sont données. Le format est introduit par une carte

.FØR

suivie d'une carte définissant le format.

Exemple

.ALØ

.FØR

NØRG NZ NR

Dans le format, les noms de variables sont séparés par un blanc au moins. La première variable peut être précédée de blancs. La lecture du format s'arrête à la colonne 72. (Les colonnes suivantes sont réservées à la numérotation des cartes).

Le format reste d'application tant qu'aucun autre format n'est défini. (Mais il est évidemment oublié quand on passe à la rubrique suivante).

En l'absence de format, c'est l'ordre canonique qui est d'application. Si, après un certain nombre de cartes, on veut abandonner le format en cours pour revenir à l'ordre canonique, on tape une carte .FØR, suivie d'une carte blanche : c'est ce qu'on appelle un format blanc. Ecrire un format blanc équivaut donc à s'imposer l'ordre canonique.

2. Ecriture des nombres

a) nombres entiers : ils sont séparés par un blanc au moins.

Un nombre peut comporter les signes suivants :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, -

L'apparition d'un autre signe entraîne un message d'erreur.

b) nombres réels : ils sont séparés par un blanc au moins.

Le nombre "cent" peut s'écrire des diverses manières suivantes :

100
 100.
 + 100.

 1. E02
 1E02
 1.E+02
 1. E+02
 + 1.E02
 + 1E02
 + 1E2 , etc...

mais l'écriture

1.E 02

est proscrite, car le blanc est interprété comme un séparateur.

A la place du signe E, on peut également utiliser le signe D.
Les signes admis sont donc

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ., E, D, +, -

L'exposant ne peut dépasser 75.

Aucun nombre ne peut dépasser la colonne 72.

3. Règles particulières concernant les diverses rubriques

.GEN

Pas de cartes format : l'ordre canonique est de rigueur. C'est l'ordre d'ASEF :

- 1) ISTART ISTØP IFDA IRUPT ISUPER IUNEU IU18 IDENT NØCH INIT
IUSØUT LL1 INF LL2 IUSIN
- 2) 2 cartes "titre"
- 3)
- 4) NØP1 NØP2 NØP3 NØP4 NØP5 NØP6 NVAL NMAX LPREC NALG NTRI
ICRIT IPLAN
- 5) ND NTHETA NPHASE ISTRES IFØ NCCØPT IGRAD NITER NPREC
(blanc) IUPRCØ
- 6) E XNU T A DMAS
- 7) ALFA PI PØIDS ØMEGA

.NØE

Le format canonique est

NØEUD R Z T DT

Remarque : par T et DT, il faut entendre les températures servant au calcul de E et α . Les températures variant avec θ sont données séparément.

.ALØ

Format canonique :

NØRG NR NZ

.SST

Format canonique :

NØS NEL

.ELE

On peut utiliser une carte format pour les éléments de quatre noeuds au plus. L'ordre canonique est alors

NØEL ITYP N1 N2 N3 N4 ND ITENS L1 L2 L3 IC1 IC2 IC3 IC4

Pour les éléments de plus de quatre noeuds, aucune carte format n'est prévue: l'ordre canonique est donc de rigueur. C'est

NØEL ITYP 99999 NBN 0 0 ND ITENS L1 L2 L3 IC1 IC2 IC3 IC4

NØEL ITYP N1 N2 N3

.CAG

Ordre canonique :

IC ICØDE ADD1 ADD2 ADD3 ADD4

.CAP

Ordre canonique :

NØEL ICØDE ADD1 ADD2 ADD3 ADD4

.FIX

Ordre canonique :

ND1 ND2 NDP1 NDP2 NDP3 NDP4 NDP5 NDP6

.RET

Ordre canonique :

ND1 ND2 NDP1 NDP2 NDP3 NDP4 NDP5 NDP6

.INE

Ordre canonique :

ND1 ND2 NDP CHARGE

.DEP

On écrit

.DEP (1 2)

pour indiquer que pour les déplacements en question, c'est la fonction de θ numéro 12 qui est en jeu.

L'ordre canonique est

ND1 ND2 NDP DEPLAC

.CHA

On écrit

.CHA (1 0, 2)

pour indiquer que les charges définies se rapportent à la fonction de θ numéro 10 et au cas de charge numéro 2.

L'ordre canonique est

ND1 ND2 NDP CHARG1 CHARG2 CHARG3

.TEM

On écrit

.TEM (9, 3)

pour indiquer que les températures définies se rapportent à la fonction de θ numéro 9 et au cas de charge numéro 3

L'ordre canonique est

NŒUD T DT

.PRE

Même convention que ci-dessus :

.PRE (9, 3)

Ordre canonique :

NEL P11 P12

Le problème doit se terminer par la carte .FIN

CHAPITRE 2LA COMPILATION DES DONNEES

1. Objet : Les données de l'utilisateur s'écrivent en "format libre".
 (Il serait plus pertinent de parler de "format souple" car il ne s'agit certes pas d'une liberté anarchique. D'ailleurs, l'antonyme de "format rigide" est, logiquement, "format souple" et non "format libre". En fait, par "format libre" on entend que la syntaxe des données est moins rigide, non inexistante).

Le compilateur de données est destiné à transformer ces données en format souple en des données écrites en format rigide.

2. Présentation informatique

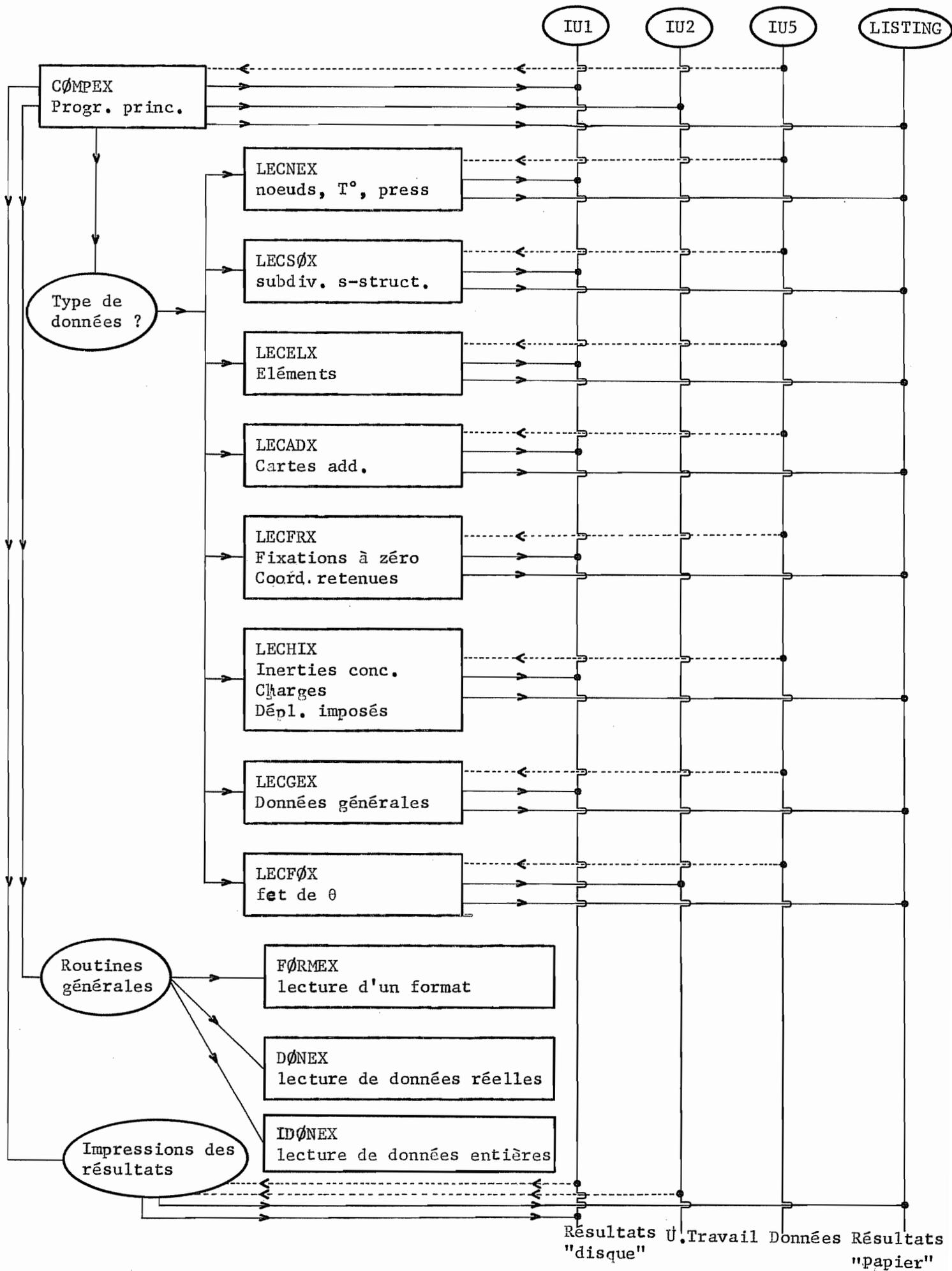
- le programme principal du compilateur de données s'appelle CØMPEX
- la plupart des sous-programmes de CØMPEX ont un nom commençant par LEC et finissant par X
 ex. : LECNEX, LECALX, LECCELX, LECSØX, etc...
- Une exception notable est le sous-programme FØRMEX

3. Fonctionnement du compilateur, vu de l'extérieur

- les données sont lues dans l'ordre où elles arrivent.
- on compile uniquement les données de type SAMCEF, à l'exclusion des fonctions de thêta. Les données SAMCEF sont écrites, après traduction, sur l'unité IU1 ; les fonctions de thêta sont copiées sur l'unité IU2, puis copiées sur IU1 à la fin de CØMPEX
- lorsque IOP \geq 1, on recopie, en fin de compilation, l'unité IU1 et l'unité IU2 sur le listing.

De toute manière, le contenu de l'unité IU5 (données de l'utilisateur) est copié au fur et à mesure de la traduction avec, le cas échéant, les commentaires du programme. (messages d'erreur aux indications de traduction libre du programme dans le cas où on lui fait lire un mot inconnu de lui).

4. Structure du compilateur de données



5. Mode de lecture des caractères alphanumériques

On définit une représentation numérique de chaque caractère selon la loi suivante.

caractère	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
représ. num.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
caractère	K	L	M	N	Ø	P	Q	R	S	T
représ. num.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
caractère	U	V	W	X	Y	Z	1	2	3	4
représ. num.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
caractère	5	6	7	8	9	0				
représ. num.	31	32	33	34	35	36				

Cette table permet de représenter un mot par un nombre entier en base 37, par exemple

ARNØLD \rightarrow (1, 18, 14, 15, 12, 4),

soit le nombre

$$(((((1 \times 37 + 18) \times 37 + 14) \times 37 + 15) \times 37 + 12) \times 37 + 4 = 103808980$$

Remarque : pour faire un tel calcul, on peut utiliser le programme suivant sur HP25 :

N° Instruction	Instruction
1	x \leftrightarrow y
2	3
3	7
4	X
5	x \leftrightarrow y
6	+
7	GØ TØ OO

Pour effectuer le calcul lui-même, on procède alors comme suit :

- taper le premier représentant
- enter
- pour les représentants suivants : taper, puis R/S.

La conversion inverse se fait à l'aide du programme suivant sur HP25 :

n° Instruction	Instruction
1	RCL 1
2	STØ 0
3	3
4	7
5	:
6	INT
7	STØ 1
8	3
9	7
10	X
11	STØ - 0
12	RCL 0
13	GØ TØ 00

Pour utiliser ce programme, il faut

- taper le nombre
- STØ 1
- R/S → dernier représentant
- R/S → avant-dernier représentant
- etc...

Dans un INTEGER, en FORTRAN IBM, on a 32 bits, dont l'un est affecté au signe. Le plus grand nombre positif que l'on puisse numériser est donc $2^{31} - 1 = 2\ 147\ 483\ 653$

(La positivité jouera un rôle dans l'identification des formats).

Or un nombre composé de 6 chiffres en base 37 peut valoir

$$37^6 - 1 = 2\ 565\ 726\ 418 ,$$

soit un nombre plus grand. Cependant, si les mots sont composés de 6 caractères dont le premier n'est pas un chiffre, le plus grand nombre à mémoriser est, en base 37,

$$(26, 36, 36, 36, 36, 36) ,$$

c'est-à-dire

$$1\ 872\ 286\ 838 < 2^{31} - 1$$

De cette manière, on retrouve des règles semblables à celles du compilateur FØRTRAN

Remarque : capacité des INTEGER selon les machines

machine	nb bits total	nb bits utiles
IBM	32	31
CDC	60	59
UNIVAC	36	35
SIEMENS	32	31

6. Fonctionnement de la routine FØRMEX

La routine FØRMEX lit les mots du format et les transforme en nombres selon le procédé indiqué ci-dessus. Elle reçoit par ailleurs de la routine appelante une liste de mots connus, sous forme numérique, qui est contenue dans le vecteur IDICT. Le vecteur est ordonné (ordre des nombres croissants). En outre, la routine appelante lui fournit un vecteur IADR indiquant la place de chaque mot dans le format canonique.

Exemple : appel par LECALX

IDICT = (536, 544, 730350) (NR, NZ, NØRG)

IADR = (2, 3, 1) → l'ordre canonique est (NØRG, NR, NZ)

Elle sort dans le vecteur IØRD l'ordre effectif défini par l'utilisateur. Ainsi, si l'utilisateur définit le format

.FØR

NØRG NZ

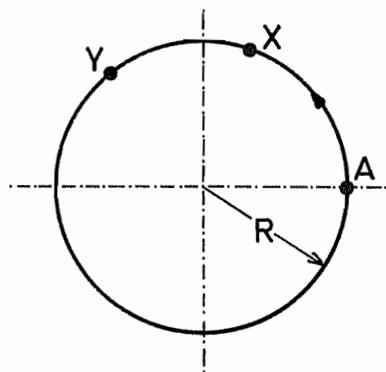
On aura

IØRG = (1, 3, 0)

En outre, il est prévu que l'utilisateur puisse faire de "petites" erreurs dans ses mots. Dans ce cas, FØRMEX choisit dans la liste le nombre le plus proche de celui qu'il a calculé. Il le signale dans le listing des données de l'utilisateur.

CHAPITRE 3DEVELOPPEMENTS EN SERIES DE FOURIERI.- Préliminaires théoriques

0. Pour repérer un point X sur une circonférence de rayon R, on peut imaginer de mesurer la longueur AX qui le sépare d'un point arbitraire A choisi comme origine, dans un sens convenu.



Il est équivalent d'utiliser l'angle

$$\theta_{AX} = \frac{\widehat{AX}}{R}$$

On vérifie aisément qu'il s'agit d'une description vectorielle (ou linéaire) :

$$\widehat{AY} = \widehat{AX} + \widehat{XY} \text{ ou } \theta_{AY} = \theta_{AX} + \theta_{XY}$$

Mais la circonférence étant une courbe fermée, il existe plusieurs chemins distincts pour aller de Y en X, tout d'abord en avant et en arrière, puis dans chacun de ces sens, en faisant un ou plusieurs tours supplémentaires.

Il est donc nécessaire d'identifier tous les angles qui diffèrent de $2k\pi$ radiaux. On écrira donc

$$\alpha \equiv \beta$$

si $(\beta - \alpha) = 2k\pi$, $k \in \{ 0, \pm 1, \pm 2 \dots \}$

La description classique de la circonférence par un segment $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ de la droite réelle n'est donc qu'une image et doit être manipulée avec quelque précaution. Par exemple, si l'on se réfère au segment $[0, 2\pi]$, on dira naturellement qu'une fonction f y est continue si pour tout

$$\theta \in]0, 2\pi[, \quad \lim_{\xi \uparrow \theta} f(\xi) = f(\theta) = \lim_{\xi \downarrow \theta} f(\xi)$$

et si, de plus,

$$\lim_{\xi \uparrow 2\pi} f(\xi) = f(2\pi)$$

$$\lim_{\xi \downarrow 0} f(\xi) = f(0) ,$$

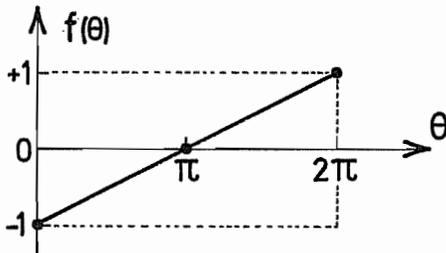
alors qu'en réalité, l'équivalence des points 0 et 2π nécessite la condition supplémentaire

$$f(0) = f(2\pi)$$

comme on s'en rendrait d'ailleurs immédiatement compte en choisissant un autre intervalle de références, par exemple $[-\pi, \pi]$.

Cette remarque peut sembler triviale ; mais l'expérience nous a montré que bien souvent, on perd cet aspect de vue. Ainsi, la fonction

$$f(\theta) = \frac{\theta}{\pi} - 1 \quad \text{dans }]0, 2\pi[$$



doit être considérée comme discontinue (ce qui explique que sa série de Fourier converge en 0 et 2π vers zéro, en vertu du phénomène de GIBBS)

1. Soit alors f une fonction définie sur la circonférence, que nous décrirons dorénavant à l'aide de l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Si cette fonction $f \in L^2(0, 2\pi)$, on peut définir sa série de Fourier [5]

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta$$

Nous appellerons a_0, a_n, b_n harmoniques primaires de la fonction f : ce sont ceux qui apparaissent naturellement dans le développement de cette fonction.

Considérant la suite

$$f_0 = a_0$$

$$\vdots$$

$$f_{2n+1} = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + a_{n+1} \cos (n+1)\theta$$

$$f_{2n+2} = a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

la convergence de la série dans L^2 revient à dire

$$\| f - f_n \|_{L^2} \rightarrow 0 ,$$

d'où

$$\left| \| f \| - \| f_n \| \right| \leq \| f - f_n \| \rightarrow 0 ,$$

ce qui entraîne

$$\| f \|_{L^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \| f_n \|_{L^2} = \pi^{1/2} \left[2 a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]^{1/2}$$

Telle est l'expression de la norme de f dans L^2 en termes de ses coefficients de Fourier.

2. Au sens de L^2 , il est équivalent de considérer la fonction f ou la suite de ses coefficients de Fourier $(a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots)$ [3]

Supposons à présent que l'on veuille dériver la fonction f . Formellement, on écrira

$$Df = \sum_{n=1}^{\infty} [n b_n \cos n \theta + (- n a_n) \sin n \theta] ,$$

soit, dans des notations évidentes,

$$a_n (Df) = n b_n (f) \tag{1}$$

$$b_n (Df) = -n a_n (f)$$

on aura alors

$$\| Df \|_{L^2} = \pi^{1/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \right]^{1/2} ,$$

et la dérivée (formelle) sera dans L^2 si cette norme est finie.

Malheureusement, ce n'est que sous des conditions très restrictives que Df sera la dérivée de f au sens classique (même si elle est dans L^2). Aussi, pour obtenir une théorie cohérente (et, en fait, plus proche de l'intuition de l'ingénieur), il faut définir la dérivée généralisée, ou encore, dérivée au sens des distributions par les relations (1) ci-dessus.

Dorénavant, toutes les dérivées dont nous parlerons sont définies de cette façon. Elles possèdent la propriété fondamentale suivante : si l'on pose

$$\langle f, g \rangle = a_0(f) a_0(g) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(f) a_n(g) + b_n(f) b_n(g)] , \quad (*)$$

et si $g \in C^{\infty}$ sur la circonférence, on a

$$\langle f, Dg \rangle = - \langle Df, g \rangle , \quad (2)$$

la dérivée Dg coïncidant avec la dérivée classique de g , vu la régularité de cette fonction. En effet,

$$\begin{aligned} \langle f, Dg \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(f) \cdot n b_n(g) - b_n(f) \cdot n a_n(g)] \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(g) \cdot n b_n(f) - b_n(g) \cdot n a_n(f)] \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(Df) a_n(g) + b_n(Df) \cdot b_n(g)] \\ &= - \langle Df, g \rangle . \end{aligned}$$

Dans les ouvrages classiques [1, 8, 9, 11], c'est par la relation (2) ci-dessus que l'on définit la dérivée au sens des distributions.

Considérons alors une fonction $f \in L^2$ telle que ses dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre m soient dans L^2 . On a donc

$$\| f \|_{L^2} < \infty , \quad \| Df \|_{L^2} < \infty , \quad \dots , \quad \| D^m f \|_{L^2} < \infty ,$$

ce qui entraîne en particulier

$$\| f \|_m^2 = \left\{ \| f \|_{L^2}^2 + \| Df \|_{L^2}^2 + \dots + \| D^m f \|_{L^2}^2 \right\}^{1/2} < \infty$$

L'ensemble des fonctions jouissant de cette propriété s'appelle espace de SOBOLEV d'ordre m et se note H^m ($H^0 = L^2$).

On obtient immédiatement

$$\| f \|_m = \pi^{1/2} \left\{ 2a_0^2 + \sum_{h=1}^{\infty} (1 + n^2 + \dots + n^{2m}) (a_n^2 + b_n^2) \right\}^{1/2}$$

(*) Cette expression généralise visiblement l'intégrale d'un produit de fonctions.

Mais cette expression est un peu lourde. On remarque que

$$n^{2m} \leq 1 + n^2 + \dots + n^{2m} \leq (m+1) n^{2m},$$

d'où

$$\pi^{1/2} [2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2m} (a_n^2 + b_n^2)]^{1/2} \leq \|f\|_m \leq (m+1) \pi^{1/2} [2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2m} (a_n^2 + b_n^2)]^{1/2}$$

Dès lors, la convergence au sens de la norme

$$\widetilde{\|f\|}_m = \pi^{1/2} [2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2m} (a_n^2 + b_n^2)]^{1/2}$$

est identique à celle que définit la norme $\|f\|_m$, car

$$\|f\|_m \leq \varepsilon \text{ chaque fois que } \widetilde{\|f\|}_m \leq \frac{\varepsilon}{m+1}$$

et

$$\widetilde{\|f_p\|} \leq \varepsilon \text{ chaque fois que } \|f\|_p \leq \varepsilon$$

On dit que ces deux normes sont équivalentes. Aussi utiliserons-nous dorénavant la norme $\widetilde{\|f\|}$, en omettant toutefois le tilde dans les écritures.

3. Cette expression de $\|f\|_m$ suggère d'ailleurs une extension des espaces de Sobolev : pourquoi se limiter aux valeurs entières de m ? On étendra directement la définition aux valeurs réelles $s \geq 0$ en posant (*)

$$\|f\|_s = \pi^{1/2} [2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} (a_n^2 + b_n^2)]^{1/2}$$

Bien qu'un peu artificielle au premier examen, cette extension est d'une grande utilité. On dira qu'une fonction $f \in L^2$ dont la norme dans H^s est finie, admet une dérivée d'ordre s au sens de L^2 (ou encore, en moyenne). On peut d'ailleurs construire la dérivée d'ordre s en passant par les séries de Fourier complexes :

$$f = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\theta} + c_{-n} e^{-in\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$$

(*) On trouvera dans NEČAS [7], LIONS et MAGENES [12] une présentation des espaces d'ordre fractionnaire dans \mathbb{R}^n entier à partir des intégrales de Fourier.

Les relations entre les c_0 , c_n , a_0 , a_n , b_n s'explicitent aisément

$$\begin{aligned} f &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n (\cos n\theta + i \sin n\theta) + c_{-n} (\cos n\theta - i \sin n\theta)] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(c_n + c_{-n}) \cos n\theta + i (c_n - c_{-n}) \sin n\theta] \end{aligned}$$

d'où

$$a_0 = c_0$$

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

$$b_n = i (c_n - c_{-n})$$

Inversement,

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \left(\frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \right)],$$

d'où

$$c_0 = a_0$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) = \bar{c}_n,$$

ce qui entraîne encore

$$a_n = c_n + \bar{c}_n = 2\operatorname{Re} c_n$$

$$b_n = -1 \left(\frac{c_n - \bar{c}_n}{i} \right) = -2\operatorname{Im} c_n$$

Cela étant, si

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta},$$

on a immédiatement

$$D^m f = \sum_{-\infty}^{+\infty} (in)^m c_n e^{in\theta}$$

On étendra naturellement aux valeurs non entières en posant

$$D^s f = \sum_{-\infty}^{+\infty} (in)^s c_n e^{in\theta},$$

Les coefficients de Fourier complexes sont donc

$$c_n(D^s f) = n^s e^{is\frac{\pi}{2}} c_n,$$

soit encore,

$$\begin{aligned} c_n(D^s f) &= \frac{1}{2} n^s \left(\cos s \frac{\pi}{2} + i \sin s \frac{\pi}{2} \right) (a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2} n^s \left[(a_n \cos s \frac{\pi}{2} + b_n \sin s \frac{\pi}{2}) + i (a_n \sin s \frac{\pi}{2} - b_n \cos s \frac{\pi}{2}) \right], \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$a_n(D^s f) = n^s (a_n \cos s \frac{\pi}{2} + b_n \sin s \frac{\pi}{2})$$

$$b_n(D^s f) = n^s (b_n \cos s \frac{\pi}{2} - a_n \sin s \frac{\pi}{2}).$$

La norme dans L^2 de $D^s f$ ainsi construit vaut alors

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2(D^s f) + b_n^2(D^s f)] \right\}^{1/2} \\ & \left\{ 4 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(D^s f)|^2 \right\}^{1/2} = \left\{ 4 \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} |c_n|^2 \right\}^{1/2} \\ & = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} (a_n^2 + b_n^2) \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Exemple : construction de la dérivée d'ordre $1/2$ de $\sin\theta$

$$a_0 = 0 \quad b_1 = 1. \quad a_1 = 0$$

$$c_1 = -\frac{i}{2}$$

$$c_1(D^{1/2}(\sin\theta)) = 1^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}} c_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4} (1+i) i = \frac{\sqrt{2}}{4} (-1+i),$$

d'où

$$a_1(D^{1/2} \dots) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b_1(D^{1/2} \dots) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$D^{1/2}(\sin\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos\theta + \sin\theta),$$

soit la même fonction avec un retard de $\frac{\pi}{4}$ (La dérivation d'ordre 1 aurait entraîné un retard de $\frac{\pi}{2}$)

Disons deux mots de la comparaison des espaces H^s : si $p > q \geq 0$,

on a

$$\|f\|_p^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2p} (a_n^2 + b_n^2) \geq a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2q} (a_n^2 + b_n^2) = \|f\|_q^2,$$

donc, si $f \in H^p$, on a automatiquement $f \in H^q$ pour tout q tel que $0 \leq q < p$

On peut donner aux espaces H^s une structure préhilbertienne en définissant le produit scalaire

$$(f, g)_s = \pi [2a_0(f) a_0(g) + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} \{a_n(f) a_n(g) + b_n(f) b_n(g)\}].$$

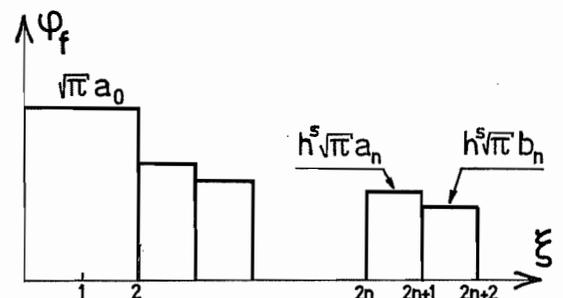
Mais H^s est-il complet ? La réponse est affirmative. On peut donner de ce fait une démonstration très élémentaire ; basée sur le caractère complet de L^2 et inspirée d'une théorie des séries basée sur celle de l'intégral de Lebesgue [5] (*). Identifiant la fonction f avec la suite de ses coefficients de Fourier $(a_0, \dots, a_n, b_n, \dots)$, on lui associe la fonction étagée

$$\Psi_f(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \xi \leq 0 \\ \sqrt{\pi} a_0 & \text{pour } 0 < \xi \leq 2 \\ n^s \sqrt{\pi} a_n & \text{pour } 2n < \xi \leq 2n+1 \\ n^s \sqrt{\pi} b_n & \text{pour } (2n+1) < \xi \leq 2n+2 \end{cases}$$

alors,

$$\|f\|_s^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_f^2 d\xi = \|\Psi_f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

Il en découle que si la condition de Cauchy est vérifiée, on a



(*) Pour d'autres démonstrations, voir SOBELEV [10], NEČAS [7], GARNIR [1], CHOQUET-BRUHAT [9]

$$0 = \lim_{\inf(p,q) \rightarrow \infty} \|f_p - f_q\|_s = \lim_{\inf(p,q) \rightarrow \infty} \|\psi_{f_p} - \psi_{f_q}\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

ce qui entraîne l'existence d'une fonction $\psi_g \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\psi_{f_p} - \psi_g\| \rightarrow 0.$$

Dès lors, la fonction g dont les coefficients de Fourier sont

$$a_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^2 \psi_g \, d\xi$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{-s} \int_{2n}^{2n+1} \psi_g \, d\xi$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{-s} \int_{2n+1}^{2n+2} \psi_g \, d\xi$$

est visiblement dans H^s et vérifie

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f_p - g\|_s \rightarrow 0.$$

On remarquera, et c'est important, que le caractère complet n'a pu être démontré qu'en faisant usage des dérivées au sens des distributions, puisque l'on a admis sans discussion les relations de dérivation terme à terme de la série.

Etant préhilbertien et complet, H^s est un espace de Hilbert

4. Soit à présent une fonctionnelle linéaire bornée G sur H^s . Une fonction $f \in H^s$ admet un développement de Fourier de la forme

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

En vertu de la linéarité et de la continuité de G (qui découle de sa bornation [1,2]), on peut intervertir la somme et le passage à la fonctionnelle.

$$G(f) = a_0 G(1) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n G(\cos n\theta) + b_n G(\sin n\theta)],$$

ce qui définit les harmoniques duaux de G :

$$\begin{aligned} a_0^* (G) &= G(1) \\ a_n^* (G) &= G(\cos n\theta) \\ b_n^* (G) &= G(\sin n\theta) \end{aligned}$$

Nous utilisons ici le signe $*$ pour indiquer qu'il s'agit des harmoniques duaux.

Un type fréquent de fonctionnelle correspond à une intégrale :

$$G(f) = \int_0^{2\pi} g(\theta) f(\theta) d\theta \quad , \quad g \in L^2$$

Dans ce cas, il est commode - et conforme à l'usage introduit par Laurent Schwartz dans sa Théorie des Distributions [8] d'identifier la fonctionnelle G et sa densité g . Nous écrirons donc tout aussi bien

$$a_0^*(g) \quad , \quad a_n^*(g) \quad , \quad b_n^*(g)$$

au lieu de

$$a_0^*(G) \quad , \quad a_n^*(G) \quad , \quad b_n^*(G) \quad .$$

Cela étant, on a

$$G(f) = a_0^*(g) a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^*(g) a_n(f) + b_n^*(g) b_n(f)] \quad .$$

Mais on peut encore écrire, si f est $g \in L^2$,

$$G(f) = \int_0^{2\pi} gf d\theta = \pi [2a_0(g) a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n(g) a_n(f) + b_n(g) b_n(f)\}]$$

Identifiant, on obtient les relations entre harmoniques primaux et duaux :

$$a_0^*(g) = 2\pi a_0(g) \quad ; \quad a_n^*(g) = \pi a_n(g) \quad ; \quad b_n^*(g) = \pi b_n(g)$$

Les mêmes relations peuvent être prolongées aux fonctionnelles, ce qui définit les harmoniques primaux d'une fonctionnelle :

$$a_0(G) = \frac{1}{2\pi} a_0^*(G) \quad ; \quad a_n(G) = \frac{1}{\pi} a_n^*(G) \quad ; \quad b_n(G) = \frac{1}{\pi} b_n^*(G)$$

5. Mais une question subsiste : comment vérifier qu'une fonctionnelle est bornée sur H^s ? En principe, la bornation d'une fonctionnelle G s'exprime par [1,2]

$$\|G\|_{H^s}' = \sup_{\substack{f \in H^s \\ \|f\|_s \neq 0}} \left| \frac{G(f)}{\|f\|_s} \right| < \infty$$

La grandeur $\|G\|_{H^s}'$, est dite norme dans le dual $(H^s)'$ de H^s . (Le dual d'un espace topologique H^s est en effet l'ensemble des fonctionnelles linéaires bornées sur cet espace). Mais une telle définition n'a pas de portée pratique directe, car on n'imagine pas d'exhiber toutes les fonctions de H^s pour vérifier si G est bien bornée !

Heureusement, le fait que les H^s soient des espaces de Hilbert permet de simplifier nettement ce critère. En effet, le célèbre théorème de représentation des fonctionnelles de F. Riesz [2] dit que toute fonctionnelle G , linéaire bornée sur un espace de Hilbert \mathcal{H} muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ admet un représentant $\tilde{g} \in \mathcal{H}$ tel que

$$(\forall f)_{\mathcal{H}} \quad G(f) = (\tilde{g}, f)_{\mathcal{H}} .$$

Appliquant ce théorème à une fonctionnelle G de $(H^s)'$, on obtient donc

$$(\forall f)_{H^s} \quad G(f) = (\tilde{g}, f)_{H^s} ,$$

ce qui, en termes des séries de Fourier, s'écrit

$$a_0(G) a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(G) a_n(f) + b_n(G) b_n(f)] = \\ \pi \{ 2a_0(\tilde{g}) a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} [a_n(\tilde{g}) a_n(f) + b_n(\tilde{g}) b_n(f)] \}$$

On en déduit par identification que les harmoniques du représentant de Riesz de G dans H^s sont donnés par

$$a_0(\tilde{g}) = \frac{1}{2\pi} a_0^*(G) = a_0(G) \\ a_n(\tilde{g}) = \frac{1}{\pi} n^{-2s} a_n^*(G) = n^{-2s} a_n(G) \\ b_n(\tilde{g}) = \frac{1}{\pi} n^{-2s} b_n^*(G) = n^{-2s} b_n(G)$$

A ce stade, il convient de prendre garde au fait que si G est une fonctionnelle linéaire continue sur H^p et H^q , $p \neq q$, on a

$$a_n(\hat{g}_{(p)}) = \frac{1}{\pi} n^{-2p} a_n^{\times}(G) \neq a_n(\hat{g}_{(q)}) = \frac{1}{\pi} n^{-2q} a_n^{\times}(G) .$$

Le représentant de Riesz dépend de l'espace dans lequel on se place. L'intérêt des représentants est que l'on a

$$\|G\|_{H^s} = \sup_{f \in \mathcal{H}_0^s} \frac{G(f)}{\|f\|_s} = \sup_{f \in \mathcal{H}_0^s} \frac{(\hat{g}, f)_s}{\|f\|_s} = \|\hat{g}\|_s ,$$

ce qui permet de calculer la norme de la fonctionnelle G comme la somme d'une série :

$$\begin{aligned} \|G\|_{H^s}^2 &= \|\hat{g}\|_s^2 = \pi \left\{ 2a_0^2(\hat{g}) + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} [a_n^2(\hat{g}) + b_n^2(\hat{g})] \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} a_0^2(G) + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s} [a_n^2(G) + b_n^2(G)] \right\} \end{aligned}$$

Cette expression a une forme identique à la norme déjà définie dans H^r , $r \geq 0$, si ce n'est qu'ici, il s'agit du cas $r < 0$. On est donc amené à définir les espaces H^r , r réel quelconque comme les espaces de fonctionnelles (une fonction g est identifiée à la fonctionnelle $G(f) = \int_0^{2\pi} gf \, d\theta$) telles que

- les harmoniques duaux $a_0^{\times}(G)$, $a_n^{\times}(G)$, $b_n^{\times}(G)$ existent, et on en déduit les harmoniques primaux par divisions par $(2) \pi$.
- ces derniers vérifient

$$\|G\|_r^2 = \pi \left\{ 2a_0^2(G) + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} [a_n^2(G) + b_n^2(G)] \right\} < \infty$$

Lorsque $r \geq 0$, ces fonctionnelles sont identifiables à des fonctions, car le développement

$$\begin{aligned} &a_0(G) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(G) \cos n\theta + b_n(G) \sin n\theta] \\ &= \frac{1}{2\pi} G(1) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [G(\cos n\theta) \cos n\theta + G(\sin n\theta) \sin n\theta] \end{aligned}$$

converge au sens de L^2 . Par contre, lorsque $r < 0$, le développement de Fourier diverge et ne peut être identifié à une fonction courante : il s'agit d'une distribution.

Exemple : Il est aisé de prouver que toute fonction de H^1 est continue. En effet

$$f(\theta) = f(\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta} Df(\xi) d\xi ,$$

d'où

$$\begin{aligned} |f(\theta) - f(\theta_0)| &\leq \left[\int_{\theta_0}^{\theta} (Df)^2 d\xi \right]^{1/2} \sqrt{\theta - \theta_0} \\ &\leq \|f\|_1 \sqrt{\theta - \theta_0} . \end{aligned}$$

Dès lors, la mesure de Dirac en $\theta = \theta_0$ est dans H^{-1} , car $\delta_{\theta_0}(f) = f(\theta_0) < c \|f\|_1$

D'ailleurs, on a

$$a_0^{\mathbb{X}}(\delta_{\theta_0}) = \delta_{\theta_0}(1) = 1$$

$$a_n^{\mathbb{X}}(\delta_{\theta_0}) = \delta_{\theta_0}(\cos n\theta) = \cos n\theta_0$$

$$b_n^{\mathbb{X}}(\delta_{\theta_0}) = \delta_{\theta_0}(\sin n\theta) = \sin n\theta_0$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \|\delta_{\theta_0}\|_{-1} &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\cos^2 n\theta_0 + \sin^2 n\theta_0) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right] < \infty , \end{aligned}$$

donc δ_{θ_0} appartient bien à H^{-s}

(On remarquera que cette norme est indépendante de θ_0 , ce qui correspond à la symétrie cyclique).

On peut poser le problème inverse, consistant à déterminer à quel espace appartient la fonctionnelle δ_{θ_0} . On a

$$\|\delta_{\theta_0}\|_{-s} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} \right] < \infty$$

chaque fois que $2s > 1$. Donc, la norme de Dirac appartient à tout H^{-s} tel que $s = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Ceci implique que les fonctions de H^s sont dans L^∞ chaque fois que $s > \frac{1}{2}$.

Considérons alors le développement (formel) de δ_{θ_0} en série : il vient

$$\begin{aligned}\delta_{\theta_0} &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n\theta_0 \cos n\theta + \sin n\theta_0 \sin n\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(\theta - \theta_0)\end{aligned}$$

Il est clair qu'en $\theta = \theta_0$, cette série, qui s'écrit

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} 1,$$

diverge

Quant au représentant de δ_{θ_0} dans H^s ($s > \frac{1}{2}$), c'est

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s} \cos n(\theta - \theta_0).$$

Cette fonction appartient à H^s , car

$$\begin{aligned}\|\gamma\|_s^2 &= \pi \left\{ \frac{2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s} \cos^2 n(\theta - \theta_0) \right\} < \infty \\ \text{pour } s &> \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

6. Critères de convergence des charges et des déplacements

Pour les déplacements, certaines considérations théoriques (voir annexe) nous ont conduit à choisir la convergence dans $H^{1/2}$, soit pour la norme

$$\|u\|_{1/2}^2 = \pi \left\{ 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) \right\}.$$

Le critère sera donc

$$u \sim u_{(n)} \quad \text{si} \quad \|u - u_{(n)}\|_{1/2}^2 \leq \varepsilon \|u\|_{1/2}^2,$$

ε fixé d'avance.

Pour les charges, on choisit symétriquement le critère de convergence dans $H^{-1/2}$:

$$\|f\|_{-1/2}^2 = \pi \left\{ 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n^2 + b_n^2) \right\} ,$$

c'est-à-dire que le critère sera

$$f \sim f_{(n)} \quad \text{si} \quad \|f - f_{(n)}\|_{-1/2}^2 \leq \varepsilon \|f\|_{-1/2}^2 .$$

Il semble que ces critères correspondent à peu près à la convergence en énergie. C'est, en tout cas, le cas pour des problèmes du second ordre, plans de révolution, où les déplacements de contour appartiennent à $H^{1/2}$ [7, 12, 13]

Rappelons que la convergence des charges au sens de $H^{-1/2}$ n'entraîne pas la convergence ponctuelle !

Un problème se pose pour les mesures de Dirac, qui ne sont pas dans $H^{-1/2}$. Nous référant au problème des plaques, où les déplacements de contour sont dans $H^{3/2}$, nous avons choisi, dans ce cas, la convergence de $H^{-3/2}$. Donc

$$\delta \sim \delta_{(n)} \quad \text{si} \quad \|\delta - \delta_{(n)}\|_{-3/2}^2 \leq \varepsilon \|\delta\|_{-3/2}^2 ,$$

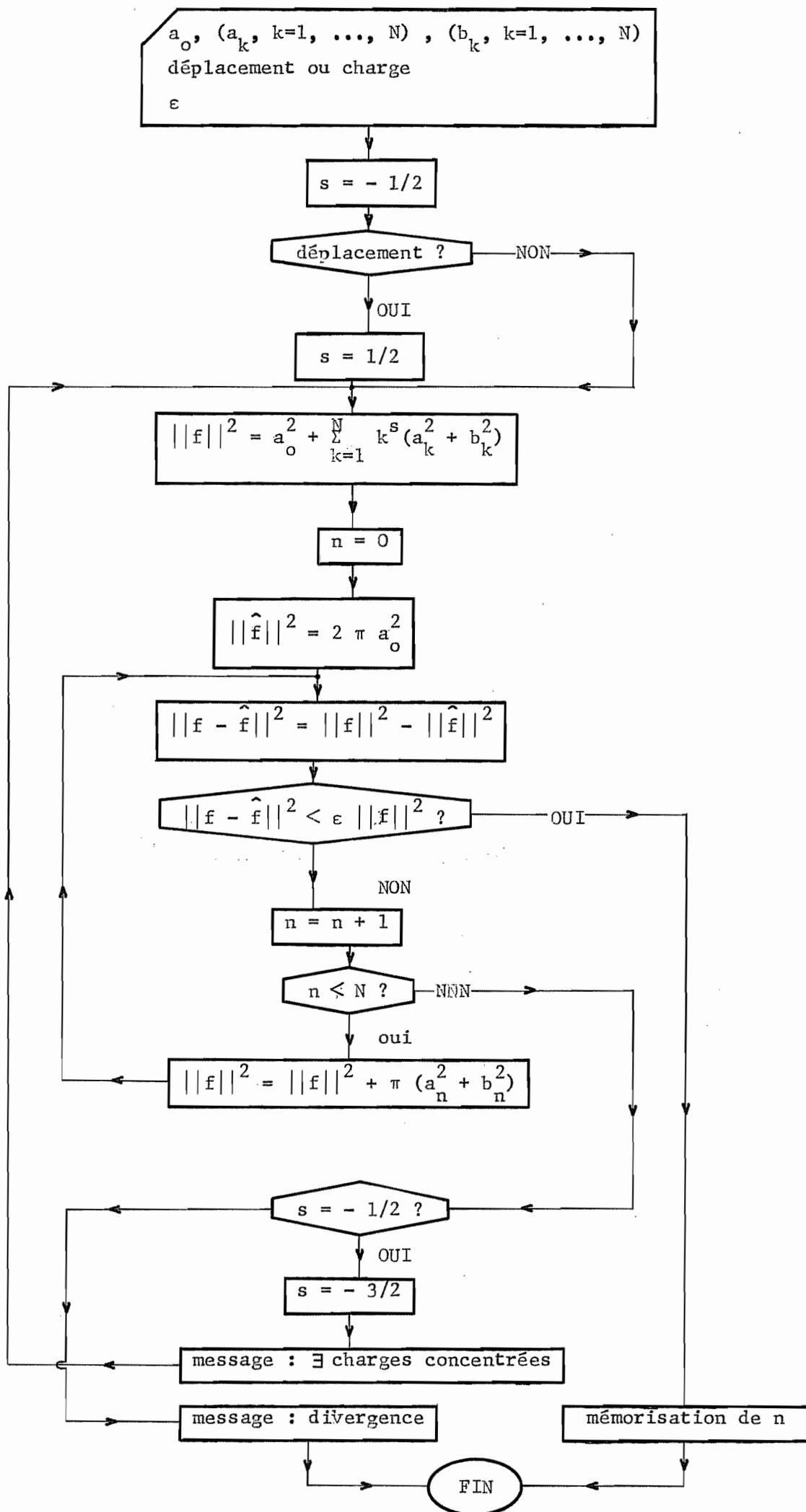
avec

$$\|G\|_{-3/2}^2 = \pi \left\{ 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n^2 + b_n^2) \right\} .$$

Ici (a fortiori) il n'y a pas non plus convergence ponctuelle.

7. Principe de calcul des développements limités

Qu'il s'agisse de déplacements ou de tensions, les développements sont limités à un ordre $n=N$ grand (ex : $N = 99$), ce qui fait 199 termes dans la série). L'utilisateur spécifie une précision ε et déclare si la fonction correspond à une charge ou un déplacement. On admet a priori que pour $n=N$, la fonction est bien représentée. L'organigramme général de limitation du développement est alors le suivant :



II Les données pour le calcul des harmoniques d'une fonction

1. Ces données commencent invariablement par la carte

.FØN (.....)

Entre parenthèses, le numéro de la fonction. C'est une étiquette, permettant de la reconnaître.

2. La carte suivante régit le critère de convergence. Elle comporte 2 variables :

IDEP PREC

La première est une variable logique, qui vaut 1 si la fonction correspond à des déplacements imposés (critère de convergence dans $H^{1/2}$) ou 0 si la fonction correspond à des forces, des températures ou des pressions (critères de convergence dans $H^{-1/2}$ ou $H^{-3/2}$).

La seconde variable, PREC, correspond à la précision désirée. C'est un nombre réel. 0.01 semble être une valeur raisonnable.

Cette carte se tape en format libre (un blanc au moins pour séparer les variables).

3. Les cartes suivantes permettent de décrire la fonction

a) fonctions de bibliothèque

écriture	signification	(*)
CØSI ($\alpha, \theta_1, \theta_2, \beta$)	$\alpha \cdot \cos(\beta\theta) \cdot \delta(\theta_1, \theta_2)$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} (\theta_1 < \theta_2, \text{ en } \underline{\text{degré}})$
SINU ($\alpha, \theta_1, \theta_2, \beta$)	$\alpha \cdot \sin(\beta\theta) \cdot \delta(\theta_1, \theta_2)$	
CARA ($\alpha, \theta_1, \theta_2$)	$\alpha \cdot \delta(\theta_1, \theta_2)$	
DELT (α, θ_0)	$\alpha \cdot \delta(\theta - \theta_0)$ (Dirac)	

(*) fonction caractéristique de l'intervalle (θ_1, θ_2) :

$$\delta(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \notin (\theta_1, \theta_2) \\ 1 & \text{si } \theta \in (\theta_1, \theta_2) \end{cases}$$

Chaque appel de fonction s'exprime à l'aide d'une carte. Les fonctions successives s'additionnent. L'ordre des arguments doit être respecté. un argument final manquant est supposé égal à 0

Conventions particulières :

CØSI ($\alpha, 0, 360, \beta$) peut encore s'écrire CØSI ($\alpha, 0, 0, \beta$)
ou CØSI ($\alpha, , , \beta$)

Attention : le nom de la fonction doit se trouver dans les colonnes 1 à 4. Dans les arguments, les blancs sont ignorés, les séparateurs étant les virgules

b) fonctions définies par points

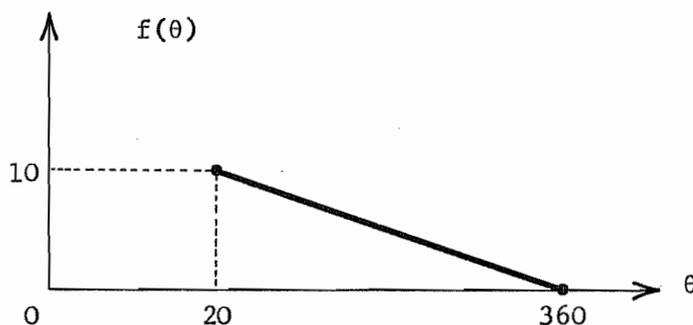
On écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{PØIN} \\ \theta \quad f(\theta) \\ \theta \quad f(\theta) \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

Entre les points donnés, il y a interpolation linéaire. il peut y avoir des sauts : un saut en $\theta = 20^\circ$, par exemple $f(20^-) = 0$, $f(20^+) = 10$ s'écrit par simple répétition de l'abscisse. Sauf spécification contraire, on admet que $f(360) = f(0)$.

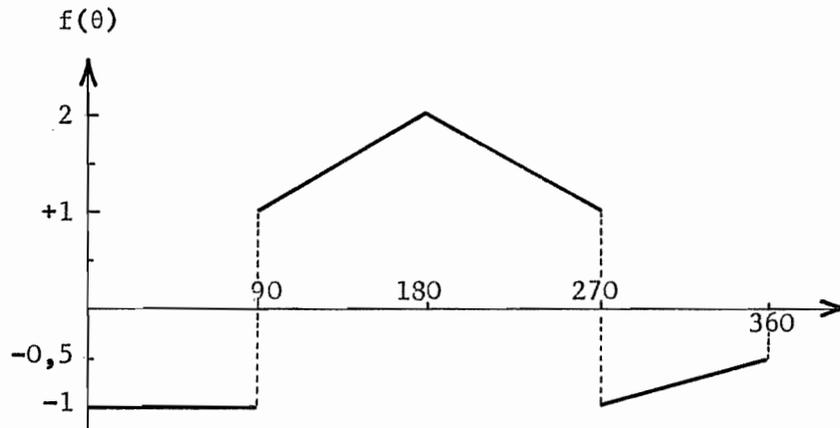
La table des valeurs s'écrit en format libre, comme les autres données.

exemple de fonction



Les données sont :

PØIN	
0	0
20	0
20	10

Autre exempleDonnées

PÔIN	
0	-1
90	-1
90	1
180	2
270	1
270	-1
360	-0,5

Ici, on définit la valeur en 360°, car il y a un saut (En l'absence de la carte.

360 -0,5

le programme supposerait que $f(360) = f(0) = -1$)

C) fonctions récurrentes

Supposons que la fonction 10 soit égale à α fois la fonction 9 tournée de θ_0 degrés. On écrira alors

$$R\theta TA (9, \theta_0, \alpha) ,$$

ce qui signifie

$$\alpha \cdot f_9 (\theta - \theta_0) .$$

Dans le cas où $\alpha = 1$, on peut écrire

$$R\theta TA (9, \theta_0)$$

S'il s'agit simplement de répéter f_9 , on écrira

RØTA (9)

Attention : S'il n'y a que des RØTA dans la fonction, le test de convergence s'arrêtera au même nombre de termes que pour la fonction que l'on fait tourner, quel que soit PREC. (Ceci afin d'éviter la dégradation des résultats). Pour forcer le programme à utiliser un test plus faible, il faut ajouter une fonction nulle, par exemple

CARA (0)

d) Remarque : Par l'option $PREC = 0.$, on évite le test de convergence. Le programme mémorise alors tous les harmoniques qu'il a calculés.

Exemple

.FØN (1)

0 0.

DELT (1)

.FØN (2)

0 0.01

RØTA (1,0)

RØTA (1,120)

RØTA (1,2.4E02)

CARA (0)

$$\delta_0 + \delta_{120} + \delta_{240}$$

Le programme calculera la fonction 1 avec la plus grande précision ($n=99$). Il effectuera ensuite les trois rotations de la fonction 2, puis se limitera à $n = 9$ par exemple. Cette dernière limitation a été rendue possible par la présence de la fonction fictive CARA (0) : en l'absence de celle-ci, on aurait conservé un développement jusqu'à $n=99$.

On pourrait évidemment écrire, à la place de CARA (0),

DELT (0) , SINU (0) ou CØSI (0).

III Du calcul des harmoniques

On calcule toujours les harmoniques duaux

1. Fonctions de bibliothèque

Ce calcul ne pose guère de difficultés, puisqu'il résulte d'intégrations élémentaires.

a) Décomposition d'un cosinus : soit la fonction $\cos p\theta \delta(\theta_1, \theta_2)$

On a

$$a_o^x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos p\theta \, d\theta = \frac{\sin p\theta_2 - \sin p\theta_1}{p}$$

$$\begin{aligned} a_n^x &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos p\theta \cos n\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos (p-n)\theta \, d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos (p+n)\theta \, d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin (p-n)\theta_2 - \sin (p-n)\theta_1}{p-n} + \frac{\sin (p+n)\theta_2 - \sin (p+n)\theta_1}{p+n} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n^x &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos p\theta \sin n\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin (n-p)\theta \, d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin (n+p)\theta \, d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos (n-p)\theta_1 - \cos (n-p)\theta_2}{n-p} + \frac{\cos (p+n)\theta_1 - \cos (p+n)\theta_2}{p+n} \right\} \end{aligned}$$

Cependant, ces formules ne sont valables que si $n \neq p$. Si $n = p$, on a

$$a_n^x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2 n\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (1 + \cos 2n\theta) \, d\theta = \frac{1}{2} \left\{ (\theta_2 - \theta_1) + \frac{\sin 2n\theta_2 - \sin 2n\theta_1}{2n} \right\}$$

$$b_n^x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos n\theta \sin n\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin 2n\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos 2n\theta_1 - \cos 2n\theta_2}{2n} \right\}$$

b) Décomposition d'un sinus : soit la fonction $\sin p\theta \delta(\theta_1, \theta_2)$

On a

$$a_o^x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin p\theta \, d\theta = \frac{\cos p\theta_1 - \cos p\theta_2}{p}$$

$$\begin{aligned}
 a_n^* &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin p\theta \cos n\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin(p+n)\theta \, d\theta + \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin(p-n)\theta \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos(p+n)\theta_1 - \cos(p+n)\theta_2}{p+n} + \frac{\cos(p-n)\theta_1 - \cos(p-n)\theta_2}{p-n} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n^* &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin p\theta \sin n\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(p-n)\theta \, d\theta - \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(p+n)\theta \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(p-n)\theta_2 - \sin(p-n)\theta_1}{p-n} + \frac{\sin(p+n)\theta_1 - \sin(p+n)\theta_2}{p+n} \right\}
 \end{aligned}$$

Encore une fois, ces formules ne s'appliquent que si $p \neq n$. Dans le cas contraire, on a

$$b_n^* = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2 n\theta \, d\theta = \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1) + \frac{\sin 2n\theta_1 - \sin 2n\theta_2}{2n}$$

$$a_n^* = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin n\theta \cos n\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \frac{\cos 2n\theta_1 - \cos 2n\theta_2}{2n}$$

c) Décomposition d'une fonction caractéristique

Pour la fonction $\delta(\theta_1, \theta_2)$, on a

$$a_0^* = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$a_n^* = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos n\theta \, d\theta = \frac{\sin n\theta_2 - \sin n\theta_1}{n}$$

$$b_n^* = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin n\theta \, d\theta = \frac{\cos n\theta_1 - \cos n\theta_2}{n}$$

d) Décomposition d'une mesure de Dirac

Pour la mesure δ_{θ_0} , on a

$$a_0^* = 1$$

$$a_n^* = \cos n\theta_0$$

$$b_n^* = \sin n\theta_0$$

2. Rotation

On connaît les harmoniques $a_0^{\times}(f)$, $a_n^{\times}(f)$, $b_n^{\times}(f)$ d'une fonction $f : \theta \rightarrow f(\theta)$. Quels sont les harmoniques de la fonction $\rho_{\alpha} f : \theta \rightarrow f(\theta - \alpha)$?

On a tout d'abord

$$a_0^{\times}(\rho_{\alpha} f) = \int_0^{2\pi} f(\theta - \alpha) d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = a_0^{\times}(f)$$

Calculons à présent

$$a_n^{\times}(\rho_{\alpha} f) = \int_0^{2\pi} f(\theta - \alpha) \cos n\theta d\theta$$

Faisant le changement de variables

$$\xi = \theta - \alpha \quad \rightarrow \quad \theta = \xi + \alpha ,$$

on a - pour $\theta = 0$: $\xi = -\alpha$

- pour $\theta = 2\pi$: $\xi = 2\pi - \alpha$,

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} a_n^{\times}(\rho_{\alpha} f) &= \int_{-\alpha}^{2\pi - \alpha} f(\xi) \cos n(\xi + \alpha) d\xi \\ &= \cos n\alpha \int_{-\alpha}^{2\pi - \alpha} f(\xi) \cos n\xi d\xi - \sin n\alpha \int_{-\alpha}^{2\pi - \alpha} f(\xi) \sin n\xi d\xi \end{aligned}$$

Comme les harmoniques peuvent se calculer sur tout intervalle de longueur 2π , on obtient

$$a_n^{\times}(\rho_{\alpha} f) = \cos n\alpha a_n^{\times}(f) - \sin n\alpha b_n^{\times}(f)$$

De même, on a

$$\begin{aligned} b_n^{\times}(\rho_{\alpha} f) &= \int_0^{2\pi} f(\theta - \alpha) \sin n\theta d\theta \\ &= \int_{-\alpha}^{2\pi - \alpha} f(\xi) \sin n(\xi + \alpha) d\xi \\ &= \sin n\alpha \int_{-\alpha}^{2\pi - \alpha} f(\xi) \cos n\xi d\xi + \cos n\alpha \int_{-\alpha}^{2\pi - \alpha} f(\xi) \sin n\xi d\xi , \end{aligned}$$

soit

$$b_n^{\alpha}(\rho f) = \cos n\alpha b_n^{\alpha}(f) + \sin n\alpha a_n^{\alpha}(f)$$

3. Les fonctions définies par points

Pour les fonctions définies par points, il faut nécessairement utiliser une technique de calcul des harmoniques. Mais ce faisant, on risque de détruire l'ordre de convergence des séries et donc, d'interdire le processus de troncature du développement. Ce problème est assez complexe.

Mais tout d'abord, quels ordres de convergence peut-on attendre ?

- Lorsque la fonction est continue, la convergence de la série de Fourier est uniforme, ce qui ne se produit que si les harmoniques sont $O(n^{-\alpha})$, $\alpha > 1$

- Lorsque la fonction est dans L^2 mais admet des sauts, on ne peut avoir convergence uniforme, si bien que les harmoniques seront, au mieux, $O(n^{-1})$

- Les harmoniques d'une mesure de Dirac sont $O(1)$

[Signalons au passage que la continuité n'implique pas nécessairement l'appartenance à $H^{1/2}$. Hadamard cite en particulier la fonction

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^4 \theta}{n^2}$$

La convergence est uniforme ($|\text{terme général}| \leq \frac{1}{n^2}$), donc f est continue.

Mais

$$a_{(n^4)} = \cos n^4 \theta,$$

donc

$$\|f\|_{1/2}^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n^4)^{2 \cdot \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{n^2}\right)^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty \quad (\ast)]$$

(*) Cet exemple est cité par Sobolev [10]. La présentation de cet auteur est cependant différente, car la théorie des espaces de Sobolev d'ordre fractionnaires n'était pas encore développée. (Pour ceux-ci, cf. Lions et Magenes [12] ou Nečas [7].

Considérons à présent une fonction continue f , donnée en N points $\theta_1, \dots, \theta_N$. Nous admettrons, pour simplifier, que $\theta_1 = 0$, $\theta_N = 2\pi$. Une manière très naturelle de calculer les coefficients de Fourier serait l'application répétée de la formule des trapèzes :

$$a_0^{\#} = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \sim \sum_{k=1}^{N-1} (\theta_{k+1} - \theta_k) \frac{f(\theta_k) + f(\theta_{k+1})}{2}$$

$$a_n^{\#} = \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \sim \sum_{k=1}^{N-1} (\theta_{k+1} - \theta_k) \frac{f(\theta_k) \cos n\theta_k + f(\theta_{k+1}) \cos n\theta_{k+1}}{2}$$

$$b_n^{\#} = \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \sim \sum_{k=1}^{N-1} (\theta_{k+1} - \theta_k) \frac{f(\theta_k) \sin n\theta_k + f(\theta_{k+1}) \sin n\theta_{k+1}}{2}$$

ce qui peut encore s'écrire,

$$a_0^{\#} = \frac{1}{2} \left\{ (\theta_1 - \theta_0) f(\theta_0) + (\theta_N - \theta_{N-1}) f(\theta_N) + \sum_{k=2}^{N-1} (\theta_{k+1} - \theta_{k-1}) f(\theta_k) \right\}$$

$$a_n^{\#} = \frac{1}{2} \left\{ (\theta_1 - \theta_0) f(\theta_0) \cos n\theta_0 + (\theta_N - \theta_{N-1}) f(\theta_N) \cos n\theta_N \right. \\ \left. + \sum_{k=2}^{N-1} (\theta_{k+1} - \theta_{k-1}) f(\theta_k) \cos n\theta_k \right\}$$

$$b_n^{\#} = \frac{1}{2} \left\{ (\theta_1 - \theta_0) f(\theta_0) \sin n\theta_0 + (\theta_N - \theta_{N-1}) f(\theta_N) \sin n\theta_N \right. \\ \left. + \sum_{k=2}^{N-1} (\theta_{k+1} - \theta_{k-1}) f(\theta_k) \sin n\theta_k \right\}$$

Il est aisé de remarquer qu'il ne s'agit de rien d'autre que des harmoniques de la mesure.

$$F = \frac{1}{2} \left\{ (\theta_1 - \theta_0) f(\theta_0) \delta_{\theta_0} + (\theta_N - \theta_{N-1}) f(\theta_N) \delta_{\theta_N} + \sum_{k=2}^{N-1} (\theta_{k+1} - \theta_{k-1}) f(\theta_k) \delta_{\theta_k} \right\}$$

Ainsi donc, cette méthode d'intégration numérique - apparemment bien innocente - équivaut à remplacer la fonction continue f par une somme de mesures de Dirac. Il en découle que les harmoniques seront $O(1)$, et il n'y aura convergence ni dans $H^{1/2}$ ni même dans $H^{-1/2}$.

Pour des intervalles égaux, $\theta_{i+1} - \theta_i = \Delta\theta = \frac{2\pi}{N-1}$,

et les formules ci-dessus se ramènent à

$$a_0^{*n} = \Delta\theta \left\{ \frac{f(\theta_0) + f(\theta_N)}{2} + \sum_{k=2}^{N-1} f(\theta_k) \right\}$$

$$a_n^{*n} = \Delta\theta \left\{ \frac{f(\theta_0) \cos n\theta_0 + f(\theta_N) \cos n\theta_N}{2} + \sum_{k=2}^{N-1} f(\theta_k) \cos n\theta_k \right\}$$

$$b_n^{*n} = \Delta\theta \left\{ \frac{f(\theta_0) \sin n\theta_0 + f(\theta_N) \sin n\theta_N}{2} + \sum_{k=2}^{N-1} f(\theta_k) \sin n\theta_k \right\},$$

expressions qui s'identifient au résultat de l'interpolation trigonométrique exposée dans notre thèse. Mais dans cette dernière présentation, il n'était pas question de calculer des harmoniques d'ordre $n \geq N$, sauf à étendre la méthode par les moindres carrés.

Bien sûr, pour $N \rightarrow \infty$, la situation s'améliore, car les harmoniques convergent vers leur vraie valeur, mais il n'est pas question, en pratique, d'effectuer les calculs sur trop de points, d'autant que cela implique un volume de données insupportable (*).

Il convient donc d'imaginer une autre méthode. Mais pour mener à bien cette tâche, il est utile de comprendre pourquoi la méthode précédente ne permet pas de calculer convenablement les harmoniques d'ordre élevé. C'est que, lorsque l'on calcule une intégrale par la méthode des trapèzes, on remplace en fait la fonction f par une fonction \tilde{f} linéaire par morceaux qui l'interpole aux points de la base d'interpolation ($\theta_1, \dots, \theta_N$). Entre deux de ceux-ci, on a, par la théorie de l'interpolation (pour $f \in C^2$),

$$|f(\theta) - \tilde{f}(\theta)| \leq \frac{|\theta_{i+1} - \theta_i|^2}{2} \sup_{\theta \in]\theta_i, \theta_{i+1}[} |D^2 f(\theta)|$$

Intégrant, on obtient

$$\int_{\theta_1}^{\theta_N} (f(\theta) - \tilde{f}(\theta)) d\theta \leq \sup_{i=1, \dots, N-1} \frac{|\theta_{i+1} - \theta_i|^2}{2} \sup_{\theta \in]\theta_i, \theta_{i+1}[} |D^2 f(\theta)| \cdot 2\pi$$

(*) Les firmes IBM et CDC, par exemple, fournissent des routines de calcul des harmoniques par interpolation trigonométrique. Il est surprenant de constater que le problème que nous venons d'exposer semble n'avoir jamais été soulevé.

Soit donc à intégrer numériquement

$$f(\theta) = g(\theta) \cos n\theta$$

Il vient

$$|\Delta a_n^*| \leq 2\pi \cdot \sup_{i=1, \dots, N-1} \frac{|\theta_{i+1} - \theta_i|^2}{2} \sup_{\theta \in]0, 2\pi[} |D^2 g \cos n\theta - 2nDg \sin n\theta - n^2 g \cos n\theta|,$$

d'où

$$\begin{aligned} |\Delta a_n^*| &\leq 2\pi \sup_{i=1, \dots, N-1} \frac{|\theta_{i+1} - \theta_i|^2}{2} \cdot \left\{ n^2 \sup_{\theta} |g(\theta)| + n \sup_{\theta} |Dg(\theta)| + \sup_{\theta} |D^2 g(\theta)| \right\} \\ &= O(n^2) \end{aligned}$$

Le problème réside donc dans le fait que l'interpolation est d'autant plus mauvaise que l'harmonique est de rang plus élevé.

Pour éviter cet écueil, nous avons utilisé la méthode suivante : soit à développer $f \in H^s$ en série de Fourier. Supposons que l'on trouve une fonction $\tilde{f} \in H^s$ dont le développement soit simple à calculer et qui, en outre, jouisse de la propriété d'approximation suivante :

$$\|f - \tilde{f}\|_s^2 \leq \eta,$$

η petit. On a donc

$$\|f - \tilde{f}\|_s^2 = \pi \left\{ (a_0 - \tilde{a}_0)^2 + \sum_n^{2s} [(a_n - \tilde{a}_n)^2 + (b_n - \tilde{b}_n)^2] \right\} \leq \eta.$$

Dès lors, on a a fortiori

$$(a_0 - \tilde{a}_0)^2 \leq \eta$$

$$(a_n - \tilde{a}_n)^2 \leq n^{-2s} \eta, \quad (b_n - \tilde{b}_n)^2 \leq n^{-2s} \eta$$

Bien plus, comme le terme général d'une série convergente tend vers zéro, on a

$$n^{2s} (a_n - \tilde{a}_n) \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty$$

$$n^{2s} (b_n - \tilde{b}_n) \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty$$

Dans $]\theta_i, \theta_{i+1}[$, on a

$$\tilde{f}(\theta) = f(\theta_i) \frac{\theta_{i+1} - \theta}{\theta_{i+1} - \theta_i} + f(\theta_{i+1}) \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}$$

Tous calculs faits, on obtient

$$a) \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \tilde{f}(\theta) d\theta = (\theta_{i+1} - \theta_i) \frac{f(\theta_i) + f(\theta_{i+1})}{2}$$

$$b) \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \tilde{f}(\theta) \cos n\theta d\theta = \frac{1}{n} [f(\theta_{i+1}) \sin n\theta_{i+1} - f(\theta_i) \sin n\theta_i]$$

$$+ \frac{1}{n^2} [f(\theta_{i+1}) - f(\theta_i)] \frac{\cos n\theta_{i+1} - \cos n\theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}$$

$$c) \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \tilde{f}(\theta) \sin n\theta d\theta = \frac{1}{n} [f(\theta_i) \cos n\theta_i - f(\theta_{i+1}) \sin n\theta_i]$$

$$+ \frac{1}{n^2} [f(\theta_{i+1}) - f(\theta_i)] \frac{\sin n\theta_{i+1} - \sin n\theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}$$

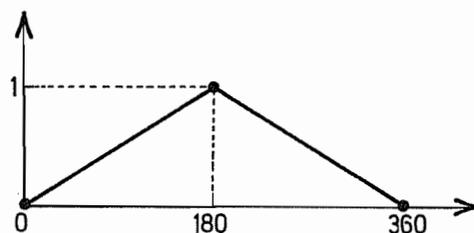
Dans les expressions b) et c), on observe l'apparition d'un terme en $\frac{1}{n}$, correspondant aux discontinuités et qui, si la fonction est continue, disparaît lorsque l'on fait la somme sur les divers intervalles. Lorsque la fonction est continue, on a donc

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

comme il se doit.

Remarques et compléments

1) Dans notre méthode, la distance entre deux points d'interpolation n'influence la précision du calcul que dans la mesure où la différence entre f et \tilde{f} est grande, indépendamment de l'ordre des harmoniques. Ainsi, la fonction représentée ci-dessous :



Cette table illustre bien les différences entre la méthode d'interpolation de $f \left\{ \begin{smallmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{smallmatrix} \right\}$ et la méthode d'interpolation de f .

3) Le développement formel de δ_{θ_0}

$$\frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(\theta - \theta_0)$$

ne converge pas ponctuellement, même pour $\theta \neq \theta_0$. En effet,

$$\sum_{n=1}^N \cos n(\theta - \theta_0) = \Re \sum_{n=1}^N e^{in(\theta - \theta_0)} = \Re \sum_{n=1}^N e^{in\alpha},$$

avec $\alpha = \theta - \theta_0$. Or,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N e^{in\alpha} &= \frac{e^{i(N+1)\alpha} - e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - 1} = \frac{e^{i(N/2+1)\alpha} (e^{i\frac{N}{2}\alpha} - e^{-i\frac{N}{2}\alpha})}{e^{i\frac{\alpha}{2}} (e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}})} \\ &= e^{i\frac{N}{2}\alpha} \cdot \frac{2i \sin \frac{N}{2}\alpha}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} = e^{i\frac{N}{2}\alpha} \frac{\sin \frac{N}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^N \cos n\alpha = \frac{\sin \frac{N}{2}\alpha \cos \frac{N}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\sin N\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Pour α fixé, il n'y a pas convergence.

Ceci n'altère cependant en rien la convergence du travail sur tout déplacement $u \in H^s$, $s > \frac{1}{2}$, qui elle, est acquise, du fait que $\delta \in H^{-s}$, $s > \frac{1}{2}$.

4) Deux normes $\|\cdot\|_A$ et $\|\cdot\|_B$ sont équivalentes sur un espace U s'il existe deux constantes c et C telles que $\forall u \in U$,

$$c \|u\|_A \leq \|u\|_B \leq C \|u\|_A.$$

Cette propriété a déjà été utilisée au début de l'exposé. Deux normes équivalentes définissent la même topologie, c'est-à-dire la même notion de limite, les mêmes ouverts et les mêmes fermés. Ainsi, dans \mathbb{R}^n , les normes

$$\|x\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{euclidienne})$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right\}^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty$$

sont toutes équivalentes. (La vérification est simple, mais s'appuie sur le fait que n est fini. La même équivalence ne tient pas pour les espaces de suites). Cependant, les boules correspondantes sont différentes, l'équivalence signifiant simplement que la boule

$$B_2(0, 1) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1 \}$$

contient une boule de chaque autre type, et inversement.

La boule $B_1(0, 1)$ est le cube dont les diagonales sont les segments d'axes $(-1, +1)$; la boule $B_2(0, 1)$, le cercle de rayon 1; la boule $B_\infty(0, 1)$, le cube dont les médianes sont les segments d'axes $(-1, +1)$, et les boules intermédiaires B_3, B_4, \dots sont des ensembles convexes (*) contenus entre le cercle B_2 et le carré B_∞ . Toutes ces boules conduisent à la même notion de limite, caractérisée par la convergence de chacune des composantes. Mais pour définir une notion de proximité, il est différent d'écrire

$$\|x\|_1 \leq \eta$$

$$\|x\|_2 \leq \eta$$

ou

$$\|x\|_p \leq \eta, \quad 2 < p \leq \infty$$

pour η fini. Ainsi, par exemple, supposons que

$$x_1 = \eta, \quad x_2 = \eta, \quad \dots, \quad x_n = \eta$$

On aura

$$\|x\|_{\infty} = \eta$$

$$\|x\|_p = \eta^{1/p} \quad \text{si } 1 < p < \infty$$

donc seule la condition $\|x\|_{\infty} \leq \eta$ sera satisfaite. Il y a donc une légère différence.

Pour les espaces H^s , on peut choisir toute norme du type

$$\|u\|_s = \pi^{1/2} \left\{ 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_s(n) [a_n^2 + b_n^2] \right\}^{1/2},$$

vérifiant la condition de comparaison

$$cn^{2s} \leq \rho_s(n) \leq Cn^{2s},$$

au moins à partir d'un certain n fini.

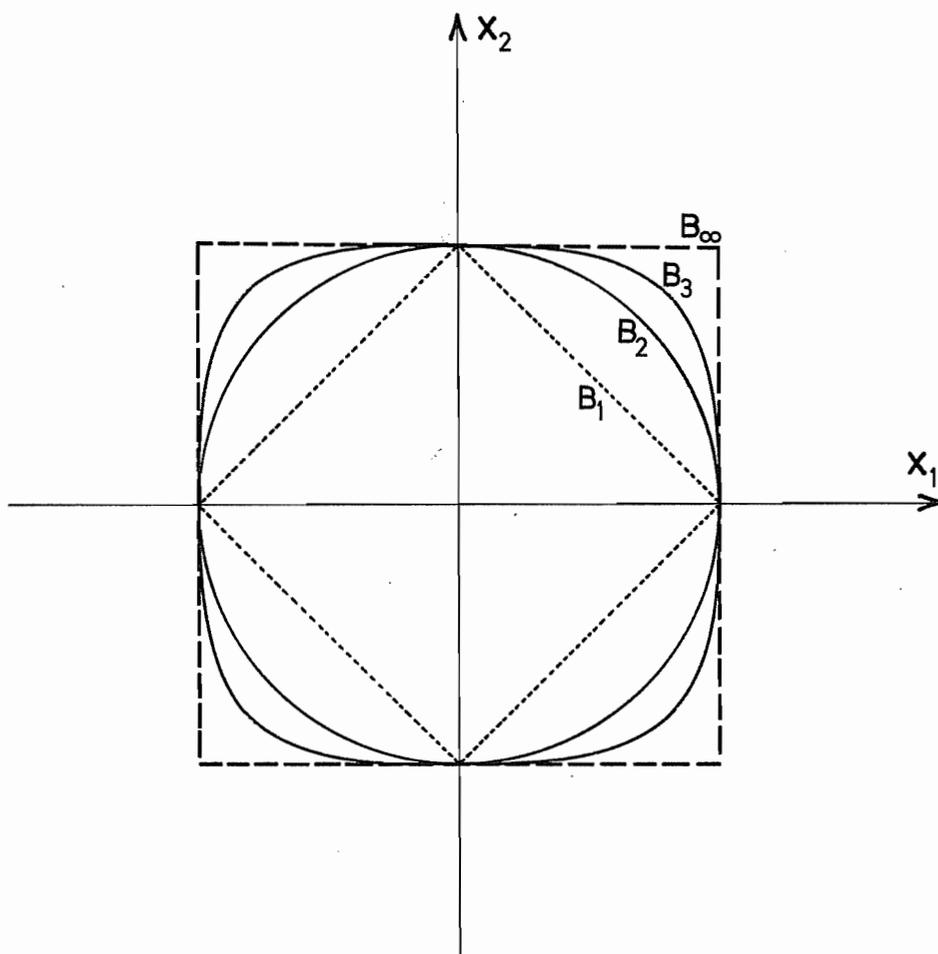
Pour les applications, nous avons choisi les normes suivantes :

$$\|u\|_{1/2} = \pi^{1/2} \left\{ 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (1+n) (a_n^2 + b_n^2) \right\}^{1/2}$$

$$\|u\|_{1/2} = \pi^{1/2} \left\{ 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n)}{n^2} (a_n^2 + b_n^2) \right\}^{1/2}$$

$$\|u\|_{3/2} = \pi^{1/2} \left\{ 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (a_n^2 + b_n^2) \right\}^{1/2}$$

qui semblaient conduire aux meilleurs résultats. Par rapport aux normes standard, les normes ci-dessus donnent un poids un peu plus grand aux premiers termes du développement.



Les différentes boules unitaires de \mathbb{R}^2

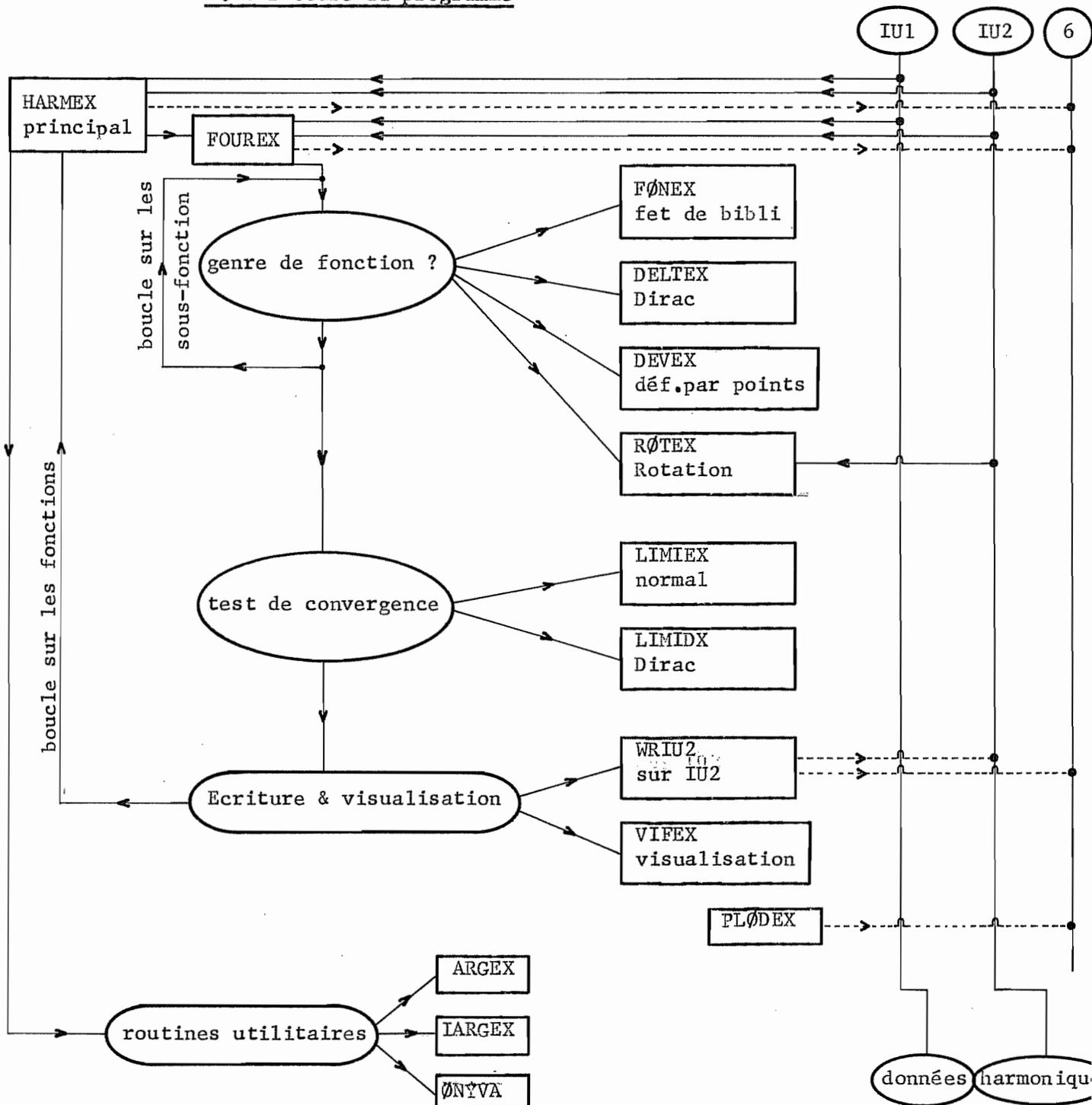
IV. Description du programme

1. Présentation

La routine principale du programme de décomposition en séries de Fourier s'appelle HARMEX.

Les routines appelées ont en général un nom terminé par - EX. Exception : ØNYVA (identique à celui de DYNAM) et WRIU2, qui écrit les résultats sur l'unité 2.

2. Structure du programme



3. Organisation de la mémoire

On utilise une zone appelée S et contenant LS composantes REAL*4. LS est défini à 2000, ce qui devrait normalement toujours suffire.

Deux variables dépendent directement de LS. Ce sont :

- . NTERM = nombre maximum de termes du développement :

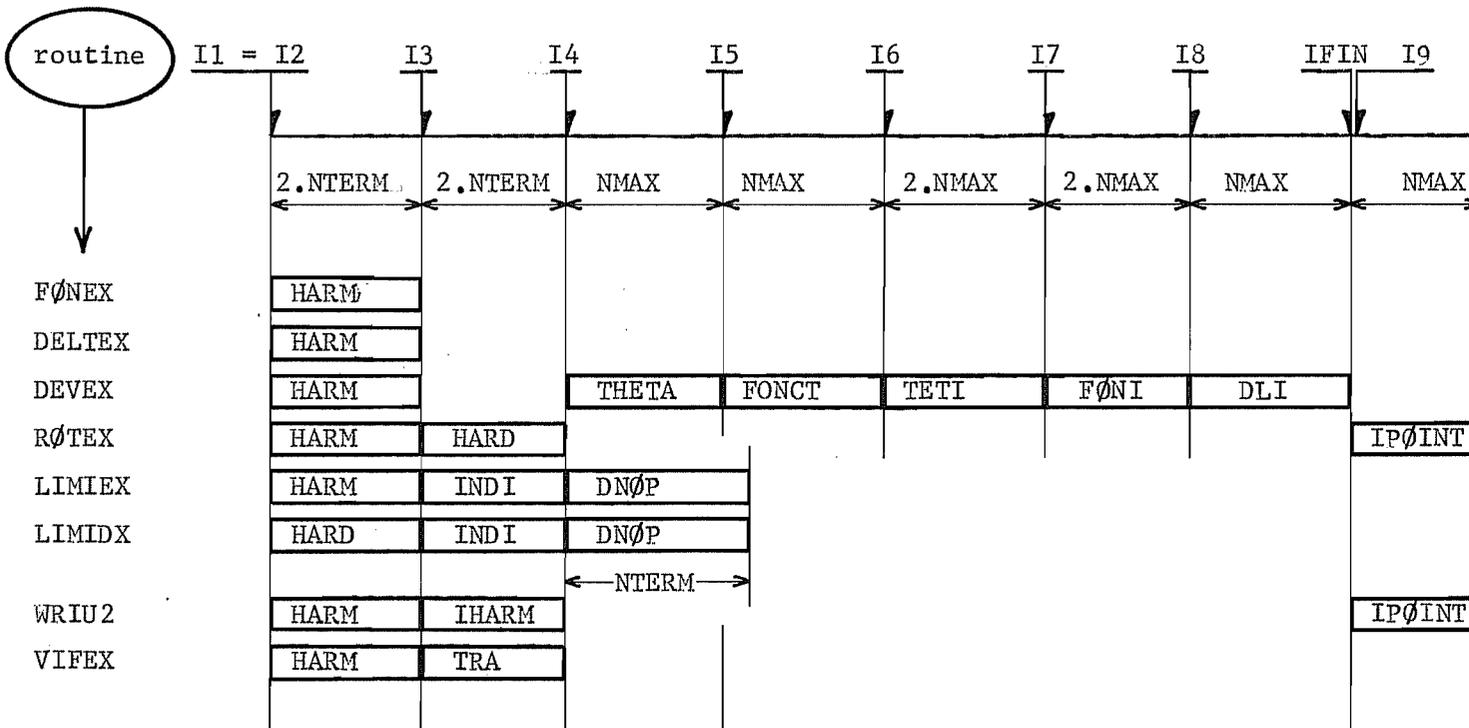
$$NTERM = \text{ent} ((7.LS)/36) \quad (= 388)$$

- . NMAX = dimension de base pour les autres tableaux :

$$NMAX = \text{ent} ((LS - 4.NTERM)/8) \quad (= 56)$$

- . NMU = 4.NTERM + 3 \quad (= 1555)

L'occupation est réglée comme suit :



La zone où est situé IPØINT est sacrée. Le cas de pleine occupation correspond donc à

$$(DEVEX) \rightarrow 4.NTERM + 8.NMAX = LS$$

$$(LIMIEX) \rightarrow 5.NTERM + NMAX = LS$$

Dans ce cas, on a donc

$$4NTERM + 8 NMAX = LS$$

$$4ONTERM + 8 NMAX = 8LS$$

$$36NTERM = 7 LS \quad \rightarrow \quad NTERM = 7LS/36 ,$$

ce qui justifie la formule adoptée par NTERM.

4. Accès à l'unité IU2

L'accès à l'unité IU2 est une simulation d'accès direct : le tableau IPØINT est une table des numéros des fonctions déjà enregistrées. A chaque instant, on mémorise dans IPA la position actuelle sur IU2. Veut-on retrouver la fonction numéro k, il suffit de chercher la position du nombre k dans le vecteur IPØINT. Cette position sera appelée IPS. On fait alors un

CALL ØNYVA (IU2, IPS, IPA) ,

et on est automatiquement en position pour lire les harmoniques de la fonction k. L'écriture sur IU2 se fait dans la routine WRIU2, qui complète également le vecteur IPØINT.

5. "Nettoyage" des harmoniques dans LIMIEX et LIMIDX

Outre la troncature du développement, les routines LIMIEX et LIMIDX effectuent un "nettoyage" des harmoniques en annulant arbitrairement tout harmonique a_n^* ou b_n^* tel que

$$n^{2s} (a_n^*)^2 \leq \epsilon \quad ||f||_s^2 ,$$

ϵ étant la précision définie par l'utilisateur. Ceci permet d'éliminer les faux zéros et les termes négligeables.

En outre, ces routines remplissent le tableau INDI de nombres égaux à 0 ou 1 selon que les harmoniques considérés sont nuls (après nettoyage) ou non.

6. Visualisation des développements

Afin de permettre une vérification rapide de la précision des développements, on visualise, en petit format adapté à l'affichage sur écran alpha-numérique, l'approximation retenue de la fonction. (Se rappeler que la mesure de Dirac ne converge pas ponctuellement !).

La visualisation proprement dite est faite dans la routine PLØDEX, qui n'est autre qu'une adaptation de la routine PLØRDY de REPDYN. La table des valeurs, de 6° en 6°, est calculée dans VIFEX.

Ce calcul est conçu pour limiter au maximum le nombre d'appel des fonctions CØS et SIN. C'est pourquoi il peut paraître assez compliqué. Son principe est le suivant :

- 1) On passe des harmoniques duaux aux harmoniques primaux par les formules

$$a_0 = a_0^x / 2\pi \quad , \quad a_n = a_n^x / \pi \quad , \quad b_n = b_n^x / \pi \quad .$$

Les harmoniques primaux sont rangés dans le tableau TRA.

- 2) On fait une table des cosinus et sinus de 6° en 6°, de 0 à 354°.

$$C(I) = \cos (I - 1) \cdot 6^\circ$$

$$S(I) = \sin (I - 1) \cdot 6^\circ$$

Dès lors, si l'on cherche le $\left. \begin{array}{l} \text{cosinus} \\ \text{sinus} \end{array} \right\}$ d'un angle égal à $k \cdot 6^\circ$, il sera égal au $\left. \begin{array}{l} \text{cosinus} \\ \text{sinus} \end{array} \right\}$ de l'angle égal à

$$[k - 60 \cdot \text{ent}(k/60)] \quad \text{degrés.}$$

C'est cette propriété qui est utilisée.

Pour l'établissement de la table, on fait appel aux fonctions COS et SIN à chaque angle. Nous avons également essayé d'utiliser les formules de récurrence

$$\cos (\alpha + 6^\circ) = \cos \alpha \cos 6^\circ - \sin \alpha \sin 6^\circ$$

$$\sin (\alpha + 6^\circ) = \sin \alpha \cos 6^\circ + \cos \alpha \sin 6^\circ ,$$

mais la précision était déplorable. (N'oublions pas qu'on travaille en simple précision !).

ANNEXE . Pourquoi choisir la norme du déplacement dans $H^{1/2}$?

1. Tout d'abord, la norme choisie pour la représentation circonférentielle des déplacements devrait en principe dépendre de leur régularité selon z . Malheureusement, on n'en connaît rien lors de la décomposition. Aussi est-on obligé de choisir un problème modèle et de se borner à espérer que les cas pratiques ne s'en éloigneront pas au point de **ruiner** les conclusions du modèle.

2. Cette hypothèse d'uniformité ramène le problème au cas du cercle Ω . Sur celui-ci, nous définirons l'espace de Sobolev d'ordre 1, qui se note $H^1(\Omega)$ de la manière suivante [7, chapitre 1] : on définit d'abord la norme :

$$\|u\|_{1,\Omega} = \left\{ \int_{\Omega} (u^2 + R^2 D_i u D_i u) dx \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

qui est définie sur $C^1(\bar{\Omega})$, ensemble des fonctions $C^1(\Omega)$ dont le prolongement sur la frontière est défini. Malheureusement, $C^1(\bar{\Omega})$ n'est pas complet pour cette norme. Aussi, on considère toutes les suites $\{u_n\} \in C^1(\bar{\Omega})$ qui sont de CAUCHY pour la norme (1), c'est-à-dire

$$\inf_{(p,q)} \lim_{p,q \rightarrow \infty} \|u_p - u_q\|_{1,\Omega} = 0 \quad (2)$$

Il est clair que cette relation entraîne

$$\inf_{(p,q)} \lim_{p,q \rightarrow \infty} \|u_p - u_q\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

$$\inf_{(p,q)} \lim_{p,q \rightarrow \infty} \|D_i u_p - D_i u_q\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

En vertu du fait que $L^2(\Omega)$ est complet, on a donc

$$u_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} v, \quad D_i u_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} v(i)$$

Mais les $v(i)$ sont-elles les dérivées de v ? Au sens classique, ce n'est généralement pas vrai. Mais considérons l'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions $C^\infty(\Omega)$, à support (ensemble où la fct est $\neq 0$) compact contenu dans Ω .

Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} D_i u_n \cdot \phi \, dx = - \int_{\Omega} u_n \cdot D_i \phi \, dx$$

C'est la vérification de cette relation pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui sert de définition de la dérivée au sens des distributions [1, 8]. On dira donc que $v(i)$ est la dérivée de v au sens des distributions et on note encore

$$v(i) = D_i v$$

si pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} v(i) \phi \, dx = - \int_{\Omega} v D_i \phi \, dx$$

Montrons que cette relation est bien vérifiée pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$.

On a en effet

$$\int_{\Omega} D_i u_n \phi \, dx = - \int_{\Omega} u_n D_i \phi \, dx ;$$

dès lors,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v(i) \phi \, dx &= (v(i), \phi)_{L^2} = (v(i) - D_i u_n, \phi)_{L^2} + (D_i u_n, \phi)_{L^2} \\ &= (v(i) - D_i u_n, \phi)_{L^2} - (u_n, D_i \phi)_{L^2} \\ &= (v(i) - D_i u_n, \phi)_{L^2} - (u_n - v, D_i \phi)_{L^2} - (v, D_i \phi)_{L^2}, \end{aligned}$$

et les deux premiers termes sont majorés par

$$[\|v(i) - D_i u_n\|_{L^2} + \|u_n - v\|_{L^2}] \|\phi\|_{1, \Omega} \rightarrow 0$$

3. Cet espace $H^1(\Omega)$ est complet. En effet, par définition de $H^1(\Omega)$ à toute fonction $v_n \in H^1(\Omega)$, on peut associer une fonction $u_n \in C^1(\bar{\Omega})$ telle que

$$\|u_n - v_n\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{n}$$

Alors, si la suite $\{v_n\}$ est de GAUCHY, on a

$$\begin{aligned} \|u_p - u_q\| &\leq \|u_p - v_p\| + \|v_p - v_q\| + \|v_q - u_q\| \\ &\leq \|v_p - v_q\| + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \end{aligned} ,$$

et cette quantité tend vers 0 pour $\inf(p,q) \rightarrow \infty$. Dès lors, la suite $\{u_n\}$ est de Cauchy, et, par définition de $H^1(\Omega)$, elle converge vers une fonction $v \in H^1(\Omega)$. Donc $H^1(\Omega)$ est complet.

4. On a vu que si $v \in H^1(\Omega)$, on a automatiquement $v \in L^2(\Omega)$ et $D_i v \in L^2(\Omega)$, $D_i v$ étant, faut-il le rappeler? la dérivée de L^2 au sens des distributions. La réciproque, c'est-à-dire

$$\{v \in L^2(\Omega) \mid D_i v \in L^2(\Omega), i = 1,2\} = H^1(\Omega)$$

est également vraie. Mais elle est difficile à démontrer.

5. On appelle $(H^1(\Omega))^2$ le produit cartésien de $H^1(\Omega)$ par lui-même, soit

$$(H^1(\Omega))^2 = \{(u,v) : u \in H^1(\Omega) \text{ et } v \in H^1(\Omega)\} ,$$

muni de la norme

$$\|(u,v)\|_{1,\Omega}^2 = \|u\|_{1,\Omega}^2 + \|v\|_{1,\Omega}^2 .$$

On peut montrer que l'énergie de déformation est une norme équivalente à la norme ci-dessus par

- $1 < \nu < 1$ dans le cas de l'état plan de tension
- $1 < \nu < 1/2$ dans le cas de l'état plan de déformation

La démonstration dépend de l'inégalité de KORN [7,15]

$$\int_{\Omega} \frac{1}{4} (D_i u_j + D_j u_i) (D_i u_j + D_j u_i) dx \geq C(\Omega) \| (u,v) \|_{1,\Omega}^2$$

(La démonstration de cette inégalité est d'ailleurs très difficile. Signalons au passage que l'on en a besoin pour démontrer l'existence et l'unicité du problème élastique).

6. Pour ce qui est des questions de régularité, le fait qu'il y ait deux composantes de déplacement ne joue aucun rôle. Aussi, raisonnerons-nous seulement sur une fonction $u \in H^1(\Omega)$.

Remarquons tout d'abord qu'une fonction $u \in H^1(\Omega)$ n'est définie que presque partout. Aussi, il n'est pas du tout évident qu'on puisse lui attribuer une valeur sur la frontière $\Gamma = \hat{\Omega}$, qui est un ensemble négligeable. Cependant, on peut utiliser la définition de $H^1(\Omega)$ et noter qu'à toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on peut associer une suite $\{u_m\}$ de fonctions de $C^1(\bar{\Omega})$ telles que

$$\|u_m - v\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{m}$$

Pour toute fonction u_m , on peut alors définir la fonction ∂u_m sur Γ qui est formée de ses valeurs à la frontière. Or non a, pour θ donné,

$$\int_0^R r^2 D_r u_m(r, \theta) dr = [r^2 u_m(r, \theta)]_0^R - \int_0^R 2r u_m(r, \theta) dr,$$

soit

$$R^2 \partial u_m(\theta) = 2 \int_0^R r u_m(r, \theta) dr + \int_0^R r^2 D_r u_m(r, \theta) dr$$

Tenant compte de l'inégalité générale

$$|a + b|^2 \leq 2 \{ |a|^2 + |b|^2 \},$$

on a donc

$$R^4 |\partial u_m(\theta)|^2 \leq 4 \left(\int_0^R r u_m(r, \theta) dr \right)^2 + 2 \left(\int_0^R r^2 D_r u_m(r, \theta) dr \right)^2.$$

L'inégalité de Schwarz - Cauchy généralisée sous la forme

$$\int_0^R rfg \, dr \leq \left(\int_0^R rf^2 \, dr \right)^{1/2} \left(\int_0^R rg^2 \, dr \right)^{1/2}$$

entraîne alors

$$\begin{aligned} R^4 |\partial u_n(\theta)|^2 &\leq 4 \int_0^R r \, dr \cdot \int_0^R r u_n^2(r, \theta) \, dr + 2 \int_0^R r^3 \, dr \int_0^R r (D_r u_n(r, \theta))^2 \, dr, \\ &\leq 4 \frac{R^2}{2} \int_0^R r u_n^2(r, \theta) \, dr + 2 \frac{R^4}{4} \int_0^R r (D_r u_n(r, \theta))^2 \, dr, \end{aligned}$$

d'où, a fortiori,

$$|\partial u_n(\theta)|^2 \leq \frac{2}{R^2} \int_0^R r [u_n^2(r, \theta) + R^2 (D_r u_n(r, \theta))^2] \, dr$$

Intégrant alors selon θ , on obtient

$$\|\partial u_n\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \int_0^{2\pi} (\partial u_n)^2 \, d\theta \leq \frac{2}{R^2} \int_{\Omega} [u_n^2 + R^2 (D_r u_n)^2] \, dx$$

et, à plus forte raison,

$$\|\partial u_n\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \frac{2}{R^2} \|u_n\|_{1, \Omega}^2,$$

ce qui fournit une borne supérieure de la norme de ∂u_n dans $L^2(\Gamma)$ en termes de la norme de u_n dans $H^1(\Omega)$. Dès lors, si la suite $\{u_n\}$ converge vers l'élément v de $H^1(\Omega)$, on a

$$\|\partial u_p - \partial u_q\|_{L^2(\Gamma)} \leq \frac{\sqrt{2}}{R} \|u_p - u_q\|_{1, \Omega},$$

donc la suite $\{\partial u_n\}$ est de Cauchy dans $L^2(\Gamma)$, et il existe un élément limite ∂v , que l'on appelle trace de v , qui prolonge l'application "valeurs à la frontière" $u \rightarrow \partial u$ aux fonctions de $H^1(\Omega)$. (C'est ce que l'on appelle un prolongement par densité).

Donc, les traces des fonctions de $H^1(\Omega)$ sont des fonctions de $L^2(\Gamma)$. Mais l'inverse n'est pas vrai : pour qu'une fonction $g \in L^2(\Gamma)$ soit trace d'une fonction $u \in H^1(\Omega)$, il faut plus que cela. Appelons provisoirement T

l'espace des traces des fonctions de $H^1(\Omega)$. Comment caractériser ces fonctions ? Le plus simple est de revenir à leur définition : une fonction $g \in T$ si et seulement s'il existe une fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\partial u = g$. Si tel est le cas, il en existe une infinité. Il suffit en effet de remarquer que toutes les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$, ainsi que toutes leurs limites dans $H^1(\Omega)$, qui forment le sous-espace appelé $H_0^1(\Omega)$, ont leur trace nulle, si bien que si $\partial u = g$, on a

$$\partial v = g$$

pour tout v de la forme $v = u + w$, avec $w \in H_0^1(\Omega)$.

Donc, si $g \in T$, et si $\partial u = g$, pour tout v appartenant à l'ensemble

$$u + H_0^1(\Omega) = \{ v : v = u + w, w \in H_0^1(\Omega) \},$$

on a également

$$\partial v = g,$$

et inversement. Il en découle que la relation

$$u \sim v \quad \text{si } \partial u = \partial v$$

est une équivalence car on vérifie aisément que

$$u \sim u$$

$$u \sim v \rightarrow v \sim u$$

$$u \sim v \text{ et } v \sim w \rightarrow u \sim w.$$

Comme toujours, les classes de fonctions équivalentes forment une partition de $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire que les classes sont disjointes et que leur union est $H^1(\Omega)$. On peut donc considérer l'ensemble de ces classes, que l'on appelle quotient [16] de $H^1(\Omega)$ par $H_0^1(\Omega)$, ce qui se note $H^1(\Omega) / H_0^1(\Omega)$. Il est évident qu'il y a correspondance biunivoque entre T et cet ensemble et, par conséquent, le problème revient à étudier $H^1(\Omega) / H_0^1(\Omega)$. Sur cet ensemble, définissons une addition par (cl $\hat{=}$ "classe")

$$cl(u) + cl(v) = \{ w + z \mid w \in cl(u), z \in cl(v) \}$$

Du fait que $H^1_0(\Omega)$ est vectoriel, on a encore

$$\text{cl}(u) + \text{cl}(v) = \text{cl}(u + v) = \{w : w = u + v + z, z \in H^1_0(\Omega)\}.$$

De même pour la multiplication par un scalaire : définissant

$$\lambda \text{cl}(u) = \{\lambda v \mid v \in \text{cl}(u)\},$$

on vérifie aisément que

$$\lambda \text{cl}(u) = \text{cl}(\lambda u).$$

Ces deux définitions donnent à $H^1(\Omega) / H^1_0(\Omega)$ une structure vectorielle compatible avec sa définition comme quotient. Si l'on parvient à présent à trouver une norme convenable sur cet espace, on aura du coup trouvé une manière de normer T qui lui correspond biunivoquement : il suffira en effet de poser [7]

$$\|g\|_T = \|\{u \in H^1(\Omega) \mid \partial u = g\}\|_{H^1(\Omega)/H^1_0(\Omega)}$$

On vérifie aisément que la grandeur

$$\|\text{cl}(u)\| : \inf_{v \in \text{cl}(u)} \|v\|_{1,\Omega}$$

convient. En effet, on a les deux propriétés fondamentales d'une norme :

$$\begin{aligned} \|\lambda \text{cl}(u)\| &= \|\text{cl}(\lambda u)\| = \inf_{v \in \text{cl}(\lambda u)} \|v\|_{1,\Omega} = \inf_{v \in \text{cl}(u)} \|\lambda v\|_{1,\Omega} \\ &= |\lambda| \inf_{v \in \text{cl}(u)} \|v\|_{1,\Omega} = |\lambda| \|\text{cl}(u)\| \end{aligned}$$

$$\|\text{cl}(u) + \text{cl}(v)\| = \|\text{cl}(u + v)\| = \inf_{w \in \text{cl}(u + v)} \|w\|_{1,\Omega} =$$

$$= \inf_{\substack{w \in \text{cl}(u) \\ z \in \text{cl}(v)}} \|w + z\|_{1,\Omega} \leq \inf_{\substack{w \in \text{cl}(u) \\ z \in \text{cl}(v)}} [\|w\| + \|z\|] \leq \|\text{cl}(u)\| + \|\text{cl}(v)\|$$

Donc, on peut poser

$$\|\partial u\|_T = \|\{u \in H^1(\Omega) \mid \partial u = g\}\|.$$

(Ce sera d'ailleurs la plus grande des normes de ∂u pour lesquelles on a

$$\|\partial u\|_T \leq \|u\|_{1,\Omega}.$$

condition nécessaire de continuité de l'opérateur ∂ . Ce choix est donc le meilleur possible).

Or la recherche de ce nombre revient à minimiser la fonctionnelle

$$\int_{\Omega} (u^2 + R^2 D_i u D_i u) dx = \int_{\Omega} \left\{ u^2 + R^2 [(D_r u)^2 + \frac{1}{r^2} (D_{\theta} u)^2] \right\} r dr d\theta,$$

∂u étant fixé à g .

La solution de ce problème existe et est unique. En effet, soit u_0 une fonction particulière de l'équation $\partial u = g$. Le problème revient à minimiser

$$\|u_0 + v\|_{1,\Omega}^2$$

sur l'ensemble des $v \in H_0^1(\Omega)$. La fonctionnelle à minimiser s'écrit encore, comme $H^1(\Omega)$ est un Hilbert,

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 + 2(u_0, v)_{1,\Omega} + \|u_0\|^2,$$

et la condition d'extremum sera

$$(v, w) = -(u_0, w)$$

pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$. Cet espace est complet, comme partie fermée de $H^1(\Omega)$. Dès lors, le problème revient à chercher le représentant de Riesz v de

$$(-u_0) \text{ dans } H_0^1(\Omega).]$$

Pour trouver la solution, développons u et y en séries de Fourier :

$$u = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta]$$

$$g = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

Il faut évidemment que

$$A_0 = a_0(R), \quad A_n = a_n(R), \quad B_n = b_n(R)$$

D'autre part,

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 = \pi \int_0^R \left\{ 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+n^2 \frac{R^2}{r^2}\right) (a_n^2 + b_n^2) + R^2 [2(D_r a_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (D_r a_n)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (D_r b_n)^2] \right\} r dr$$

ou encore, en faisant usage de la variable réduite $\rho = r/R$,

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 = \pi R^2 \int_0^1 \left\{ 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{n^2}{\rho^2}\right) (a_n^2 + b_n^2) + 2(D_{\rho} a_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(D_{\rho} a_n)^2 + (D_{\rho} b_n)^2] \right\} \rho d\rho$$

Les conditions de minimum sont donc

$$\delta u_0 \rightarrow -D_{\rho} (\rho D_{\rho} a_0) + \rho a_0 = 0 \quad (3)$$

$$\delta a_n \rightarrow -\frac{1}{\rho} D_{\rho} (\rho D_{\rho} a_n) + \left(1 + \frac{n^2}{\rho^2}\right) a_n = 0 \quad (4)$$

$$\delta b_n \rightarrow -\frac{1}{\rho} D_{\rho} (\rho D_{\rho} b_n) + \left(1 + \frac{n^2}{\rho^2}\right) b_n = 0 \quad (5)$$

La première de celles-ci admet une solution du type

$$a_0 = \text{cte. } r^1,$$

avec

$$l^2 - 1 = 0,$$

ce qui entraîne

$$a_0 = M_0 \rho + N_0 \frac{1}{\rho}.$$

Seul le premier terme doit être retenu, car le second est singulier.

Les équations (4) et (5) sont des équations de Bessel modifiées. Leur solution s'écrit

$$\begin{Bmatrix} a_n \\ b_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_n \\ P_n \end{Bmatrix} I_n(\rho) + \begin{Bmatrix} N_n \\ Q_n \end{Bmatrix} K_n(\rho).$$

Ici encore, seul le premier terme doit être retenu, car les K_n sont singulières. On a donc

$$u = M_0 \rho + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\rho) (M_n \cos n\theta + P_n \sin n\theta),$$

et il est aisé de vérifier que

$$\begin{aligned} M_0 &= A_0 \\ M_n &= A_n / I_n(1) \\ P_n &= B_n / I_n(1), \end{aligned}$$

d'où

$$u = A_0 \frac{r}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n\left(\frac{r}{R}\right)}{I_n(1)} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

Pour calculer $\|u\|^2$, on notera que

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} (u^2 + D_i u D_i u) dx = \int_{\Omega} (u^2 - \Delta u) u dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

Or on vient de vérifier les conditions pour que le terme de volume soit nul. Il reste donc à calculer

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} u \frac{\partial u}{\partial x} ds &= \\ &= \pi \left[2 A_0 \cdot \frac{A_0}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{I_n^2(1)} I_n(1) \cdot \frac{1}{R} D I_n(1) \cdot (A_n^2 + B_n^2) \right] \\ &= \frac{\pi}{R} \left[2 A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \frac{D I_n(1)}{I_n(1)} \right] \end{aligned}$$

Or les fonctions de Bessel modifiées vérifient [6]

$$D I_n(\rho) = \frac{n}{\rho} I_n(\rho) + I_{n+1}(\rho) \quad (a)$$

$$I_n(\rho) \geq 0 \quad (b)$$

$$I_n(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} \quad (c)$$

De (a) et (b) , on déduit

$$DI_n(1) \geq n I_n(1)$$

Comme, en vertu de (c),

$$\begin{aligned} I_{n+1}(\rho) &= \left(\frac{\rho}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (n+k+1)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} \\ &\leq \left(\frac{\rho}{2}\right) \cdot \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (n+k)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} = \frac{\rho}{2} I_n(\rho) \end{aligned}$$

on déduit de (a)

$$DI_n(1) \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) I_n(1) \leq 2n I_n(1) \quad ,$$

d'où

$$\frac{\pi}{R} \left[2 A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n(A_n^2 + B_n^2) \right] \leq \|u\|_{1,\Omega}^2 \leq 2 \frac{\pi}{R} \left[2 A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n(A_n^2 + B_n^2) \right] \quad ,$$

Ainsi, l'espace des traces s'identifie à $H^{1/2}(\Gamma)$.

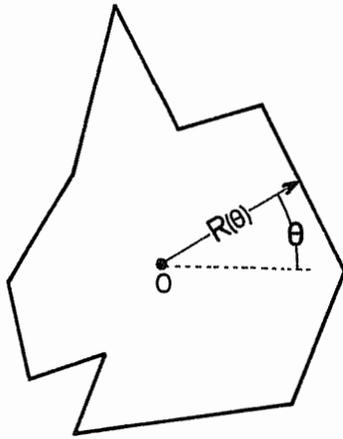
Pour les charges, on devra travailler dans le dual, qui est $H^{-1/2}(\Gamma)$. On montrerait de même que les traces d'une fonction de $H^2(\Omega)$ sont dans $H^{3/2}(\Gamma)$ (déplacements des plaques).

Épilogue - D'après Nečas (nous particularisons à $H^1(\Omega)$ ses considérations sur les traces des espaces plus généraux $w_p^{(1)}(\Omega)$), "[...] les espaces $L^2(\Omega)$ [...] sont plus grands que les espaces des traces. [...] La topologie naturelle des traces de $H^1(\Omega)$ est celle de l'espace $H^1(\Omega) / H_0^1(\Omega)$. D'autre part, cette considération est plutôt formelle et ne donne aucune caractérisation de cet espace" (Nečas [7], p. 91, n°5.1)

Or, précisément, la caractérisation que nous venons de présenter se base sur la topologie de $H^1(\Omega) / H_0^1(\Omega)$. Bien sûr, cet exposé est limité au cas du cercle, mais des extensions sont possibles. Nous pensons entre autres aux ensembles étoilés dont la frontière admet une équation de la forme

$$r = R(\theta) \quad ,$$

avec $R(\theta)$ vérifiant pour tout couple (θ_1, θ_2)



$$c |\theta_2 - \theta_1| \leq |R(\theta_2) - R(\theta_1)| \leq c |\theta_2 - \theta_1| ,$$

qui se ramènent au cercle unité par la transformation

$$r = R\rho \quad , \quad \theta = \theta$$

dont la matrice jacobienne

$$\frac{D(r, \theta)}{D(\rho, \theta)} = \begin{bmatrix} R & \rho D_\theta R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est bornée, inversible, de jacobien égal à R , ce qui permet de travailler sur le cercle après avoir démontré une équivalence de normes.

Bibliographie relative au chapitre 3

- [1] H.G. GARNIER -
"Les problèmes aux limites de la physique mathématique. Introduction à leur étude générale."
 Birkhäuser Verlag, Basel und Stättgart, 1958
- [2] F. RIESZ et B. Sz. NAGY
"Leçons d'Analyse fonctionnelle"
 6è édition, Gauthier-Villars, Paris, 1975
- [3] M. DECUYPER
"Compléments de mathématiques"
 Coll. Dunod Université, Dunod, Paris, 1968
- [4] HO VAN THI SI
"Espaces de Hilbert"
 Séminaires d'Analyse Fonctionnelle Appliquée, Service de Math. Gén.
 (Prof. Etienne), Univ. de Liège, 1974 - 1975
- [5] H.G. GARNIER
"Fonctions de Variables Réelles, II"
 Librairie Univ., Louvain et Gauthier - Villars, Paris, 1965
- [6] A. ANGOT
"Compléments de Mathématiques"
 5è édition, Editions de la Revue d'Optique, Paris, 1965
- [7] J. NECAS
"Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques"
 Masson et Cie, Paris et Academia, Prague, 1967
- [8] L. SCHWARTZ
"Théorie des Distributions"
 Hermann, Paris, 1966
- [9] Y. CHOQUET - BRUHAT
"Distribution - Théorie et Problèmes"
 Masson et Cie, Paris, 1973

- [10] S.L. SOBOLEV
"Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics"
The American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1963
- [11] I.M. GUELFAND - G.E. CHILOV
"Les Distributions"
Tome 1, Dunod, Paris, 1972
- [12] J.L. LIONS et E. MAGENES
"Problèmes aux limites non homogènes et applications"
Volume 1, Dunod, Paris, 1968
- [13] J.T. ODEN and J.N. REDDY
"An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements"
John Wiley & Sons, New York, London, Sidney, Toronto, 1976
- [14] P.G. CIARLET
"The finite element method for elliptic problems"
North Holland, 1978
- [15] J.L. LIONS
"Cours d'Analyse numérique"
Cours de l'Ecole Polytechnique, Hermann, 1974
- [16] H.G. GARNIR, M. DE WILDE, J. SCHMETS
"Analyse Fonctionnelle"
Vol. 1, Birkhäuser Verlag, Basel, 1968

Chapitre 4

CONSTRUCTION DES DONNEES D'HARMONIQUES

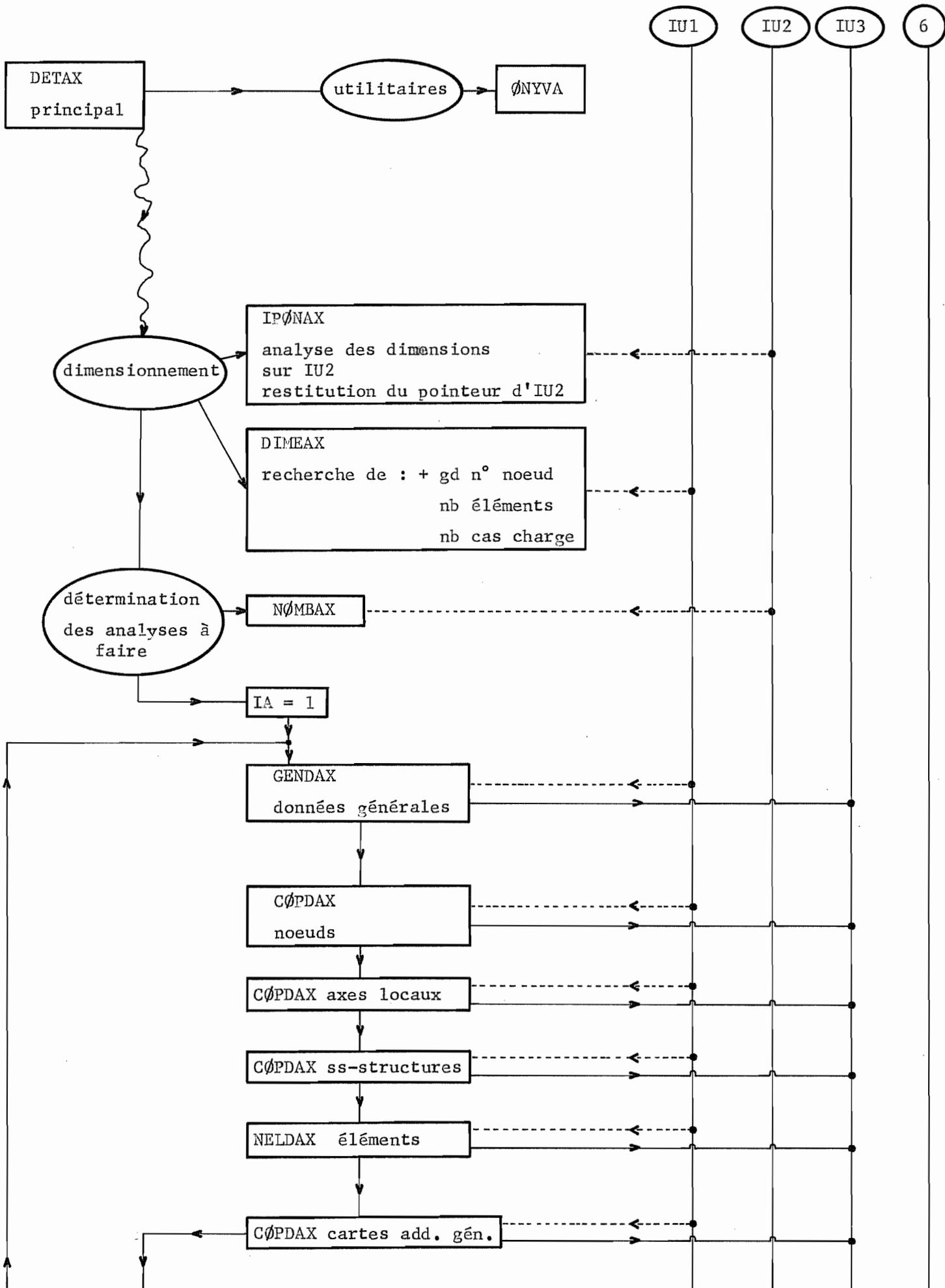
1. Objet : On est en possession de données en format rigide sur IU1 et de développements de Fourier sur IU2. Il faut à présent les combiner pour obtenir les données propres à chaque harmoniques de Fourier.

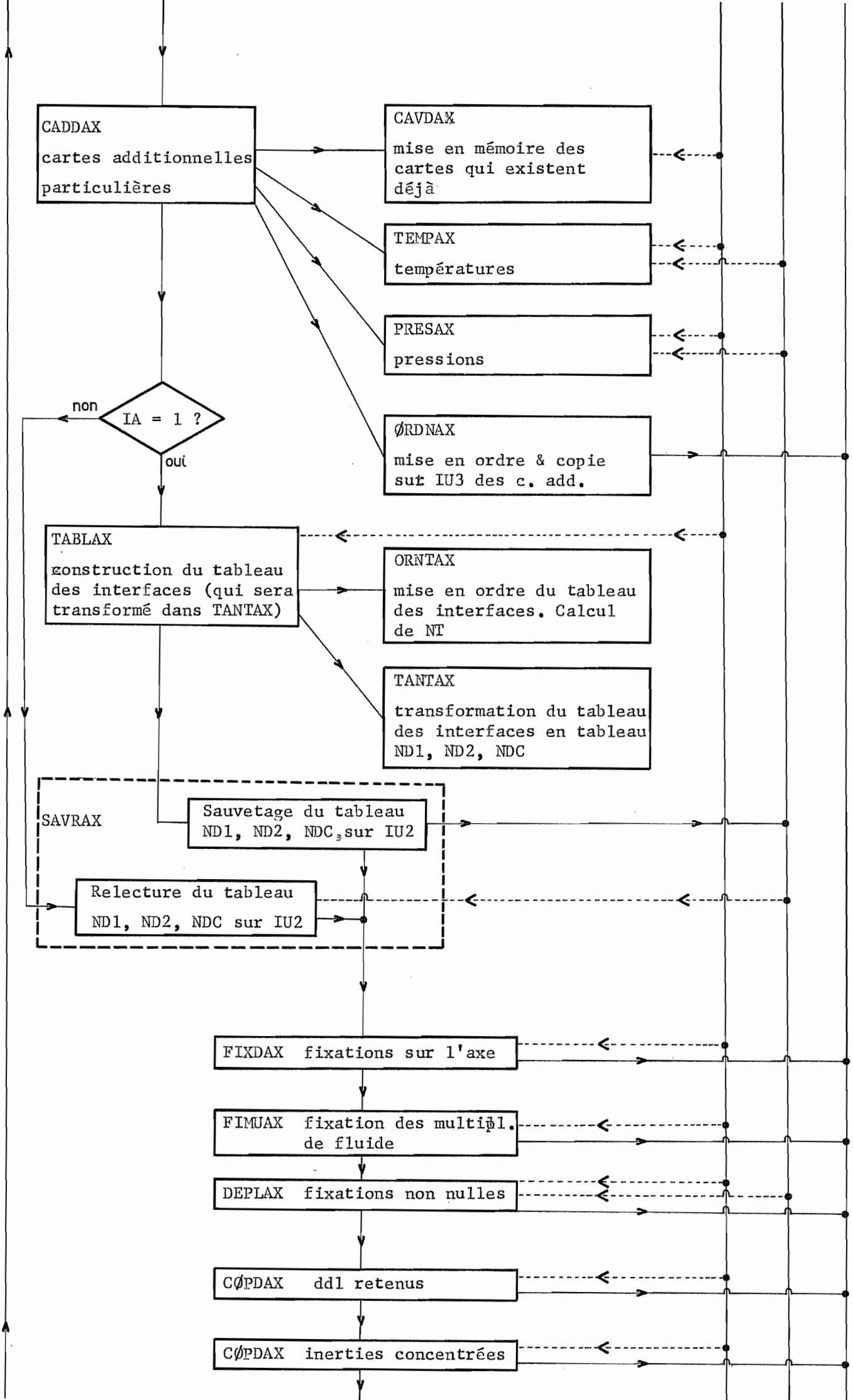
2. Présentation informatique

- Le programme principal s'appelle DETAX
- Les sous-programmes ont un nom se terminant par le suffixe - AX

3. Structure du programme

STRUCTURE DE DETAX





CADDAX
cartes additionnelles
particulières

CAVDAX
mise en mémoire des
cartes qui existent
déjà

TEMPAX
températures

PRESAX
pressions

ØRDNAX
mise en ordre & copie
sur IU3 des c. add.

IA = 1 ?
non
oui

TABLAX
construction du tableau
des interfaces (qui sera
transformé dans TANTAX)

ORNTAX
mise en ordre du tableau
des interfaces. Calcul
de NT

TANTAX
transformation du tableau
des interfaces en tableau
ND1, ND2, NDC

SAVRAX

Sauvetage du tableau
ND1, ND2, NDC, sur IU2

Relecture du tableau
ND1, ND2, NDC sur IU2

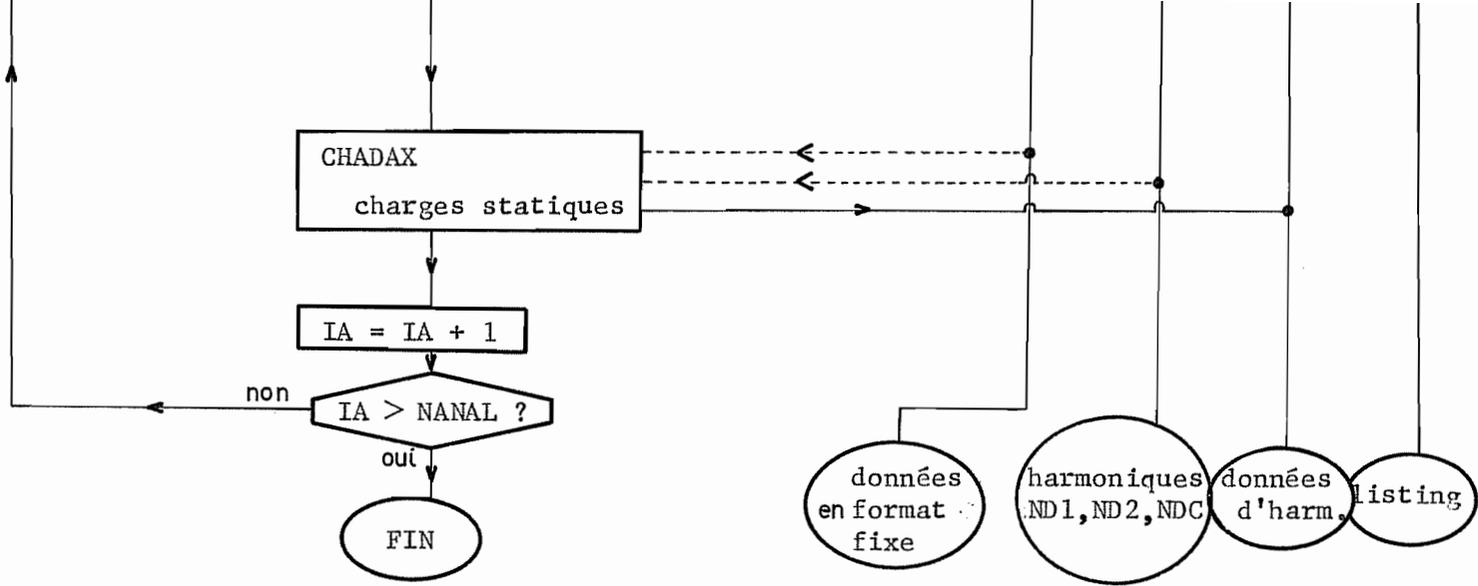
FIXDAX fixations sur l'axe

FIMUAX fixation des multipl.
de fluide

DEPLAX fixations non nulles

CØPDAX ddl retenus

CØPDAX inerties concentrées



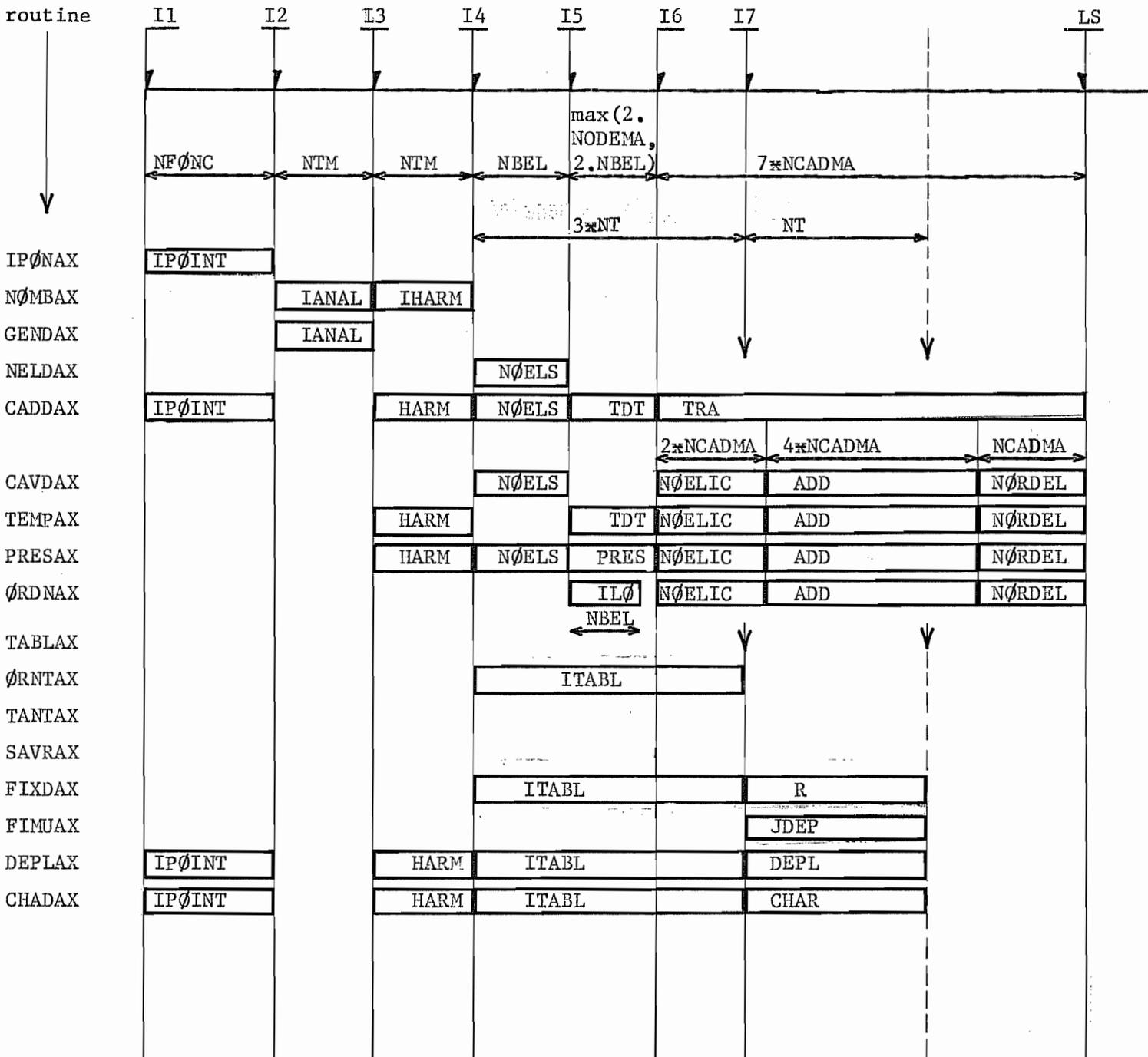
4. Gestion de la mémoire

Dans DETAX, on définit une zone S dimensionnée à LS positions Real \approx 4.
 Dans la version standard du programme, LS = 20000.

Les variables présidant à la gestion de la mémoire sont :

- . NFO θ NC = nombre de fonctions de θ
- . NTM = nb. max. de termes d'un développement
- . NBEL = nombre d'éléments
- . N θ DEMA = le plus grand numéro de noeud
- . NT = nb de d;d.l.
- . NCADMA = nb max de cartes additionnelles particulières

On pose NCADMA = (LS - I6) / 7



5. Principes de fonctionnement des diverses routines

- IPØNAX** lit l'unité IU2 d'un bout à l'autre, de manière à déterminer le nombre de fonctions et le nombre maximum d'harmoniques d'une fonction. A cette occasion, on reconstruit le vecteur IPØINT
- Si plusieurs fonctions ont le même numéro, seule la dernière de celles-ci est prise en considération. Pour ce faire, dans IPØINT, on change le signe des numéros identiques précédents.
- DEMEAX** lit l'unité IU1 pour déterminer les dimensions du problème :
- le plus grand numéro de noeud, dans la rubrique .NØE
 - le nombre d'éléments dans la rubrique .ELE
 - le plus grand numéro de cas de charge, par exploration des rubriques .TEM, .PRE, .CHA
- En outre, pour toutes les charges et tous les déplacements imposés, on inspecte les composantes spécifiées, de manière à déterminer s'il s'agit uniquement de composantes en $\cos(n\theta + m \frac{\pi}{2})$ ou si, au contraire, il y a des composantes en $\sin(n\theta + m \frac{\pi}{2})$.
- Dans ce dernier cas, en effet, il y aura lieu de doubler le nombre d'analyses, c'est-à-dire faire chaque fois les 2 valeurs de NPHASE. C'est le rôle de la variable IDØUBL.
- NØMBAX** détermine les analyses à faire. A cet effet, on lit sur IU2 les tableaux IHARM déterminant les modes actifs. Alors,
- si IDØUBL = 1, un mode est actif s'il est dans une fonction au moins,
 - si IDØUBL = 2, un mode est actif si lui-même ou l'autre mode de même NTHETA est actif.
- On obtient ainsi un tableau IHARM qui est la somme logique des précédents :
- $$\text{IHARM}(I) \begin{cases} = 1 & \text{si c'est vrai pour au moins une des fonctions} \\ = 0 & \text{si non} \end{cases}$$
- GENDAX** recopie les données générales en y ajoutant les valeurs particulières de NTHETA et NPHASE
- CØPDAX** consiste en une copie servile des données sur IU3

- NELDAX a un double rôle : d'une part, recopier les éléments sur IU3 et, d'autre part, construire un tableau des numéros d'éléments
- CADDAX gère la copie et la génération éventuelle des cartes additionnelles particulières, ainsi que leur mise en ordre
- CAVDAX met en mémoire les cartes additionnelles particulières de l'utilisateur. A l'aide du tableau NØELS, on vérifie que l'élément spécifié par l'utilisateur existe. On range alors dans le vecteur NØRDEL le numéro d'ordre de l'élément NØEL dans le vecteur NØELS
- TEMPAX construit les cartes additionnelles de températures. Tout d'abord, on part des températures aux noeuds, dont on recombine les différentes formes en θ dans le vecteur TDT. On crée alors des cartes additionnelles de type
$$100 i + 30 + j ,$$

$$i = n^{\circ} \text{ du cas de charge, } j = \begin{cases} 0 & \text{pour les températures} \\ 1 & \text{pour les } \Delta T. \end{cases}$$
Pour ce faire, on balaie les éléments sur IU1, ce qui permet
 - de retrouver leurs noeuds et de construire les cartes add.
 - de ranger dans le vecteur NØRDEL le numéro d'ordre de l'élément dont on vient de construire une carte additionnelle
Remarque : Il n'y a aucun inconvénient à attribuer des T° à un noeud n'appartenant à aucun élément.
- PRESAX construit les cartes additionnelles de pression. Elles ont le type
$$100 i + 11 ,$$
 i étant le numéro du cas de charge. Pour chaque carte de pression, on range dans le vecteur NØRDEL le numéro d'ordre de l'élément, c'est-à-dire sa place dans le vecteur NØELS. La spécification par l'utilisateur d'une pression sur un élément n'existant pas entraîne un message d'erreur et l'interruption du programme.

ØRDNAX

s'occupe du rangement des cartes additionnelles dans l'ordre des éléments. Cette routine procède du même principe que la routine correspondante de GENDON, due à Madame M.L. WEELEN, mais la gestion de la mémoire est différente, ce qui complique encore un peu les choses.

- a) le vecteur $IL\emptyset$, de longueur NBEL, est mis à zéro
- b) on lit alors le vecteur NØRDEL qui, rappelons-le, donne pour chaque carte additionnelle le n° d'ordre de l'élément concerné.

Pour I donné, on lit donc NØRDEL(I), et on donne à ce nombre le nom N. Imaginons un instant que chaque élément ait au plus une carte additionnelle : dans ce cas le problème serait élémentaire, car il suffirait d'écrire

$$IL\emptyset(N) = I$$

pour chaque carte additionnelle, puis de balayer $IL\emptyset$ pour savoir quelle carte additionnelle attribuer à chaque élément. Malheureusement, il y a en général plus d'une carte additionnelle par élément. Supposons donc que $NL = IL\emptyset(N)$ soit déjà non nul : on ne peut évidemment le détruire. Mais ce nombre NL est le numéro d'une carte additionnelle précédant celle que l'on considère actuellement et, dès lors, on n'aura plus jamais besoin du nombre

$$NØRDEL(NL)$$

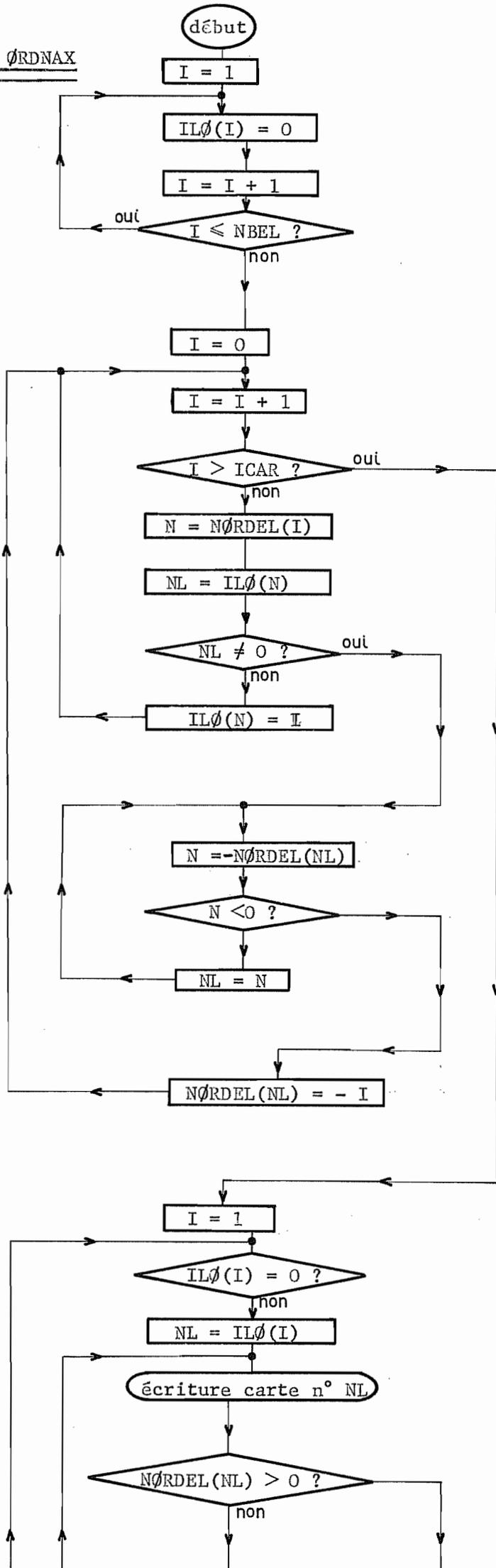
Aussi, au lieu de mettre I dans $IL\emptyset(N)$, on met (-I) dans $NØRDEL(NL)$. Mais il se pourrait encore que $NØRDEL(NL)$ soit déjà négatif, ce qui signifierait que deux cartes au moins ont déjà été définies pour l'élément N

Alors, on recommence en posant

$$NL = - NØRDEL(NL)$$

Pour réécrire les cartes additionnelles dans l'ordre, on balaie les éléments. Pour l'élément I, on écrit la carte additionnelle n° $IL\emptyset(I)$. On pose alors $NL = IL\emptyset(I)$, et on va voir si $NØRDEL(NL)$ est négatif. Si c'est le cas, on écrit la carte additionnelle n° $(- NØRDEL(NL))$, puis on recommence avec $NL = - NØRDEL(NL)$. Si l'on tombe sur un $NØRDEL(NL)$ positif, on passe à l'élément $I + 1$.

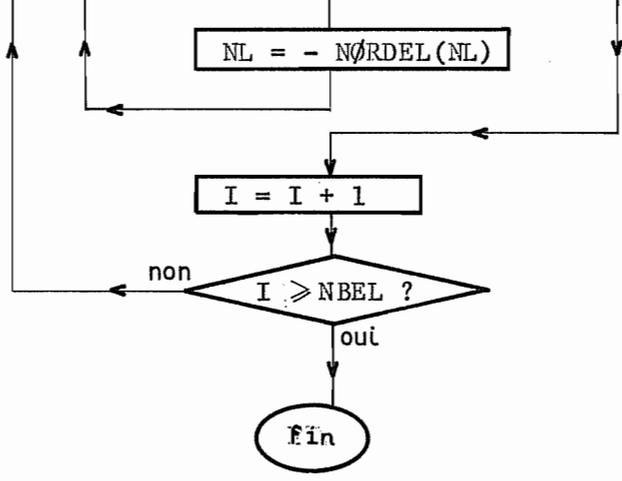
Routine \emptyset RDNAX



Mise à zéro de
ILØ

Remplissage de
ILØ et NØRDEL

Ecriture des
cartes addition-
nelles dans l'ordr



TABLAX gère la construction du tableau ND1, ND2, NDC et en effectue une étape préliminaire

a) on balaie les éléments pour repérer leurs interfaces. On range alors dans ITABL :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{1ère ligne : ND1} \\ \text{2ème ligne : ND2} \\ \text{3ème ligne : nb de ddl de l'interface} \end{array} \right.$$

et ce, pour chaque interface de chaque élément. La construction de ce tableau dépend des types d'éléments. Pour les interfaces de fluide, on change le signe du nb de ddl.

b) le produit de l'étape a) est un tableau où chaque interface est répétée pour chaque élément adjacent, éventuellement avec un nb de ddl différents. Il faut tasser ce tableau : c'est le rôle de la routine ØRNTAX qui, en plus calcule NT

c) on peut alors construire le tableau ND1, ND2, NDC. Ce travail est fait dans TANTAX

ØRNTAX commence par mettre le tableau ND1 ND2 NDDL dans l'ordre croissant des (ND1, ND2) pour la relation d'ordre définie par

$$(a, b) \leq (c, d)$$

si

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq c \\ \text{ou} \\ a = c \text{ et } b \leq d \end{array} \right.$$

C'est bien une relation d'ordre dans NXN car

$$\left\{ \begin{array}{l} ((a, b) \leq (c, d) \text{ et } (c, d) \leq (e, f)) \rightarrow (a, b) \leq (e, f) \\ (a, b) \leq (a, b) \\ ((a, b) \leq (c, d) \text{ et } (c, d) \leq (a, b)) \rightarrow (a, b) = (c, d) \end{array} \right.$$

Lorsque l'on rencontre deux fois la même interface, on garde des deux définitions celle qui donne NDDL le plus proche de zéro (et non le plus petit, car NDDL peut être < 0).

L'autre définition est mise hors circuit en y posant $ND1 = 0$.

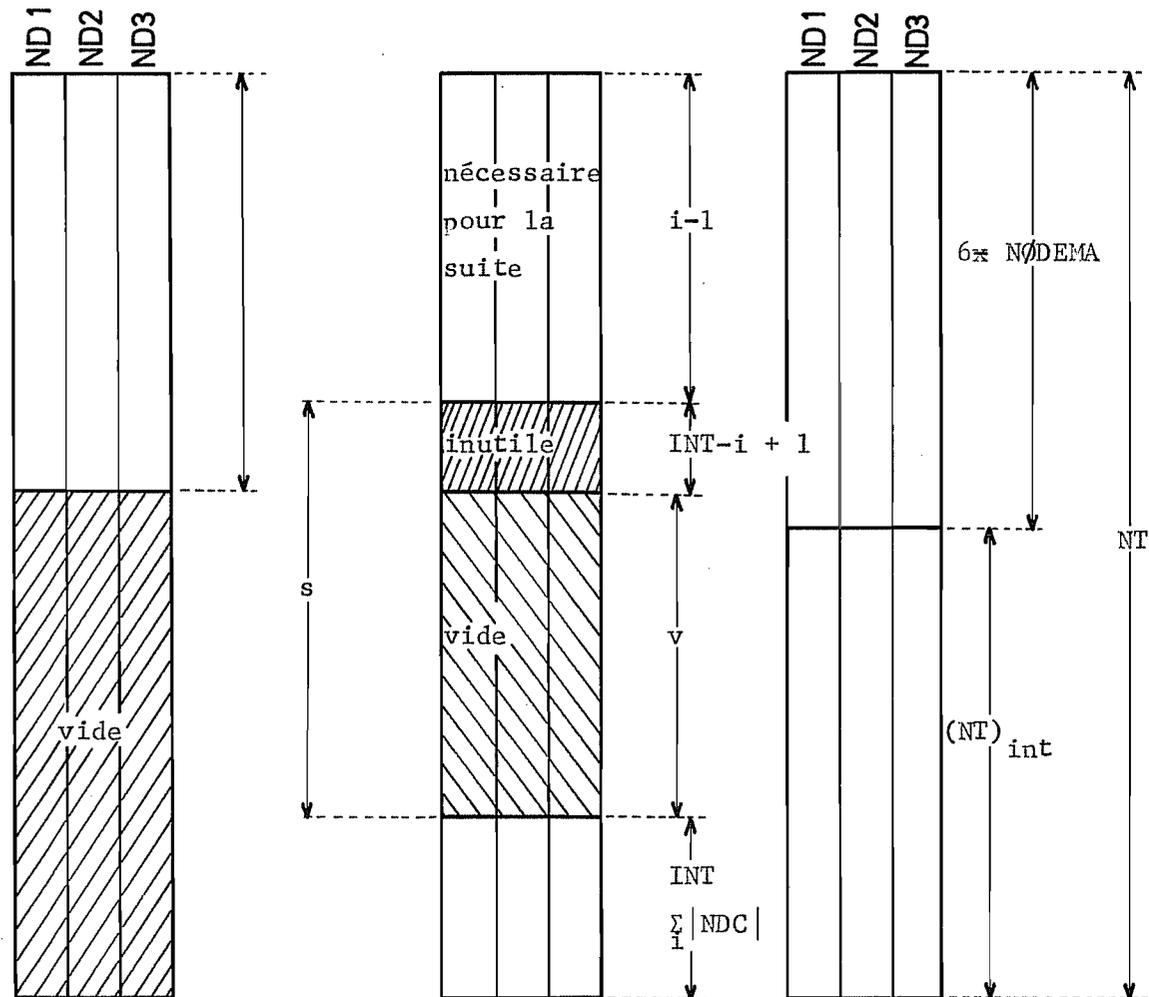
Ayant ordonné le tableau, on le tasse en supprimant les définitions d'interfaces telles que $ND1 = 0$ ou $NDDL = 0$. Simultanément, on calcule la contribution des interfaces à NT par

$$(NT)_{\text{interf}} = \sum_{\text{interf}} NDDL$$

Dans TABLAX, on calculera

$$NT = (NT)_{\text{interf}} + 6 \times N\text{ØDEMA}$$

TANTAX construit le tableau ND1, ND2, NDC dans la même zone que le tableau ND1, ND2, NDDL. Ceci est possible, à condition de partir de l'arrière



Situation
de départ

situation
à l'étape i

situation
à l'arrivée

En effet, à l'étape i de la définition des ddl d'interface, on a une zone de sécurité s donnée par

$$s = NT - (i-1) \sum_i^{INT} |NDC|$$

Le tout est de montrer que $s \geq 0$. Mais c'est évident, car pour toute interface, on a

$$|NDC| \geq 1,$$

donc

$$\sum_1^{i-1} |NDC| \geq (i-1)$$

et

$$\begin{aligned} s &\geq NT - \sum_1^{i-1} |NDC| - \sum_i^{INT} |NDC| \\ &\geq NT - (NT)_{\text{interf}} \geq 0. \quad (\text{cqfd}) \end{aligned}$$

Le fait que $|NDC|$ doive être plus grand que 1 pour chaque interface montre la nécessité de supprimer dans \emptyset RNTAX les interfaces vides.

Le tableau étant construit pour les interfaces, on y ajoute les noeuds en partant du début, en suivant la numérotation traditionnelle pour $NDN = 6$

~~SAVRAX~~ a un rôle double :

- lors de l'élaboration des données pour le premier couple (NTHETA, NPHASE) le tableau ND1, ND2, NDC est construit comme on vient de l'expliquer ci-dessus, et on le sauve sur IU2, derrière la définition des fonctions.
- lors de l'élaboration des données des autres harmoniques, on relit le tableau ND1, ND2, NDC sur IU2.

FIXDAX construit les fixations sur l'axe, selon la valeur du couple (NTHETA, NPHASE). On repère aisément les noeuds situés sur l'axe. Quant aux interfaces, on considère qu'elles sont entièrement sur l'axes quand les deux noeuds qui les définissent sont sur l'axe. Pour repérer les ddl situés sur l'axe, on construit le vecteur $R(NT)$ tel que

$$R(i) \begin{cases} = \text{rayon du noeud si le ddl n}^\circ i \text{ est à un noeud} \\ = \sum \text{rayons des noeuds qui définissent l'interface} \\ \text{portant le ddl considéré, pour } i > 6 \times \text{N}^\circ \text{DEMA} \end{cases}$$

Alors, le ddl n° i est candidat à la fixation si $R(i) = 0$

FIMJAX fixe les multiplicateurs du fluide pour

$$(NTHETA, NPHASE) \neq 0$$

on repère les multiplicateurs par le fait qu'ils sont portés par le 5è noeud d'un élément 42 ou 43.

DEPLAX s'occupe des fixations non nulles par recombinaison des harmoniques dans le vecteur DEPL

CHADAX s'occupe des charges par recombinaison des harmoniques dans le vecteur CHAR

6. Remarque concernant les limitations dues à la place en mémoire

La zone S doit avoir une longueur LS supérieure ou égale à

$$\text{a) } NF\emptyset NC + 2NTM + NBEL + \max(2.N\emptyset DEMA, 2.NBEL) \\ + 7.NCAD$$

où

$NF\emptyset NC$ = nb de fonctions de θ
 NTM = nb max de termes du développements
 $NBEL$ = nb d'éléments
 $N\emptyset DEMA$ = plus grand numéro de noeud
 $NCAD$ = nb de cartes additionnelles

Dans le plus mauvais des cas,

$$NCAD = NCADO + IPAN.3.NBEL ,$$

où

$NCADO$ = nb de cartes additionnelles définies par l'utilisateur
 $IPAN$ = nb de cas de charge

$$\text{b) } NF\emptyset NC + 2NTM + \max(4.NT, 3.IJK)$$

où

NT = nb de ddl d'interfaces + $6.N\emptyset DEMA$

$IJK = \sum_{\text{interf.}} (\text{valencè}),$

la valencè de l'interface étant le nombre d'éléments adjacents.

Dans le calcul de IJK, même les interfaces vides doivent être comptées.

Dans la version actuelle, on a posé $LS = 20000$