UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION

CONSIDERATIONS ECONOMIQUES RELATIVES A L'USINAGE LEGER

J.F. DEBONGNIE

Rapport LMF/D29, juin 1993

1. Introduction

Le problème de la recherche de la vitesse optimale de coupe a été évoqué pour la première fois par TAYLOR [1] dans son gigantesque article publié en 1907, où il faisait le bilan de vingt-sept années de recherche. Taylor adoptait comme critère d'optimalisation la *production maximale*, ce qui est assez discutable en soi. En effet, c'est rarement en produisant le plus possible *sans se soucier du prix de revient* que l'on gagne le plus. En dernière analyse, une stratégie de production maximale ne se justifie que dans un contexte économique très particulier, par exemple l'état de guerre. D'autres après lui ont développé la philosophie du *coût minimal*. C'est l'excès inverse, car il faut également produire en suffisance pour s'enrichir. Aucune de ces deux stratégies n'est donc satisfaisante. En fait, le choix d'une stratégie appropriée doit se faire à l'aide de l'attirail classique des économistes, c'est-à-dire les courbes d'offre et de demande. C'est la démarche adoptée dans le présent rapport.

Nous nous limiterons au cas classique du *chariotage*, d'une part parce que c'est le cas le plus simple, d'autre part parce que bien souvent, le chariotage représente la plus grande partie du temps de tournage. A l'instar de Taylor et de ses successeurs, nous supposerons que la géométrie de la coupe est donnéeet qu'il ne reste plus à ajuster que la *vitesse*.

La restriction apportée dans le titre, à savoir *relatives à l'usinage* léger, fait allusion au fait que les considérations tayloriennes font abstraction à toute limitation provenant de la puissance de la machine. L'usinage *lourd* est pour nous celui dont la réalisation dépend de la machine utilisée. L'étude de ce cas, plus complexe, fera l'objet d'un prochain rapport.

2. Décompte des temps

Soit à réaliser N_p pièces. Pour chacune de celles-ci, il faut prévoir:

- le temps de montage et démontage t_m
- le temps d'usinage t_u ,

ce qui fait au total un temps $N_p(t_m + t_u)$. En outre, l'usinage de ces N_p pièces nécessitera l'utilisation de N_o outils et par conséquent, si un changement d'outil demande un temps t_o, on passera un temps $N_o t_o$ à changer des outils. Le temps total est donc

$$t_{tot} = N_p (t_m + t_u) + N_o t_o \qquad (1)$$

3. Coût du temps passé

Si M est le coût horaire, le coût du temps passé est

$$C_t = M\,[N_p\,(t_m + t_u) + N_o t_o] \tag{2}$$

4. Coûts fixes

Les coûts fixes ne dépendent que du temps, indépendamment du fait que l'on produise ou non:

$$C_f = \dot{C}_f\, t_{tot} \tag{3}$$

5. Coût de l'énergie

Si seule, la vitesse de coupe varie, l'énergie nécessaire pour réaliser une pièce est une constante W_u. En négligeant les variations du rendement (1/k) de la machine, le coût de l'énergie est

$$C_e = N_p\, k\, W_u \tag{4}$$

6. Coût des outils

Si C_o est le coût d'un outil, on dépensera $N_o C_o$ pour l'achat des outils.

7. Coût total de la production; coût par pièce

Le coût total de la production est

$$C = C_t + C_f + C_e + N_o C_o$$

$$= C_f + N_p\, k\, W_u + M\,[N_p (t_m + t_u) + N_o t_o] + N_o C_o$$

$$= C_f + N_p\,[k\, W_u + M\,(t_m + t_u) + M \frac{N_o}{N_p}\, t_o + \frac{N_o}{N_p}\, C_o] \tag{5}$$

La grandeur entre crochets représente le *coût marginal* C_1 d'une pièce:

$$C_1 = k\, W_u + M\,(t_m + t_u) + M \frac{N_o}{N_p}\, t_o + \frac{N_o}{N_p}\, C_o \tag{6}$$

8. Minimisation du coût marginal

Les grandeurs $k\ W_u$ et $M\ t_m$ sont indépendantes de la vitesse de coupe. Elles interviennent cependant dans le coût marginal et, en particulier, le temps de montage et de démontage peut être très important. La compression de ce temps improductif est un des objectifs de la *robotique*. La vitesse de coupe n'a d'influence que sur le groupement

$$C_1^* = M\ t_u + M\ \frac{N_o}{N_p}\ t_o + \frac{N_o}{N_p}\ C_o \qquad (7)$$

Le quotient (N_o/N_p) s'obtient en notant que le temps d'usinage total est aussi la somme des durées de vie des outils utilisés, soit

$$N_p t_u = N_o T \quad ,$$

où T est la durée de vie d'un outil. On a donc

$$\frac{N_o}{N_p} = \frac{t_u}{T} \quad , \qquad (8)$$

ce qui ramène l'expression (7) à

$$C_1^* = M\ t_u + M\ \frac{t_u}{T}\ t_o + \frac{t_u}{T}\ C_o \quad . \qquad (9)$$

Par ailleurs, le temps d'usinage en chariotage vaut

$$t_u = \frac{\ell}{v_f} \quad ,$$

où ℓ est la longueur de la pièce à charioter, et v_f, la vitesse d'avance. Cette dernière s'exprime en fonction de l'avance par tour f et de la fréquence de rotation N par la formule

$$v_f = N\ f$$

soit, en introduisant la vitesse de coupe v et le diamètre D,

$$v_f = \frac{v}{\pi D}\ f \ .$$

Il en découle

$$t_u = \frac{\ell \pi D}{f v} \quad .$$

Tenant compte de la *loi de Taylor*

$$v\ T^n = C \quad ,$$

on a encore

$$t_u = \frac{\ell\pi D T^n}{Cf} \quad .$$

Ce résultat permet de transformer la relation (9) en

$$C_1^* = \frac{M\ell\pi D}{Cf} \left[T^n + \left(t_o + \frac{C_o}{M}\right) T^{n-1}\right] \tag{10}$$

Le second membre admet visiblement un minimum pour

$$T = T_{cm} \triangleq \frac{1-n}{n} \left(t_o + \frac{C_o}{M}\right) \tag{11}$$

9. Production maximale

Le temps de réalisation d'une pièce est

$$t_1 = t_m + t_u + \frac{N_o}{N_p} t_o \quad .$$

Algébriquement, c'est l'expression de $(C_1^* + t_m)$ dans laquelle on a posé $M = 1$ et $C_o = 0$. Ce temps sera donc minimum si

$$T = T_{PM} \triangleq \frac{1-n}{n} t_o \quad . \tag{12}$$

Il faut donc, pour assurer la production maximale, travailler à plus grande vitesse, en usant plus d'outils qu'au coût minimal.

10. Débit de production. Courbe des coûts

Soit une entreprise fabriquant continuellement le même produit avec, pour fixer les idées, une seule machine. Le *débit de production* q est par définition le nombre de pièces produites par unité de temps. C'est donc l'inverse du temps nécessaire à produire une pièce:

$$q = 1/t_1 \quad . \tag{13}$$

Le *coût par unité de temps* est égal à

$$\dot{C} = \dot{C}_f + \frac{C_1}{t_1} = \dot{C}_f + k\, W_u\, q + M\, t_m\, q + C_1^*\, q \, . \tag{14}$$

Nous appellerons *courbe des coûts variables* la courbe donnant le coût C_1^* en fonction du débit. L'allure de cette courbe peut être déduite des deux courbes connues de C_1^* et t_1 en fonction de T (fig.1) de la manière suivante. Tout d'abord, q atteint un maximum pour $T = T_{PM}$. Ce maximum vaut

$$q_{max} = \frac{1}{t_{PM}} \quad .$$

La zone $q > (1/t_{PM})$ est donc *interdite*. D'autre part, pour $T = T_{cm}$, C_1^* atteint son minimum C_{1cm}^*, et $q = 1/t_{cm}$. A partir de ce point, les débits croissants correspondent à la partie AB de la courbe de t_1. Quant à la branche BC, elle correspond à une augmentation de C_1^* à débit décroissant. Pour T très petit, on a

$$C_1^* \simeq \frac{M\ell\pi D}{Cf} \left(t_o + \frac{C_o}{M}\right) T^{n-1} \quad ,$$

$$q \simeq \frac{Cf}{\ell\pi D} \; \frac{1}{t_o T^{n-1}}$$

et

$$C_1^* \simeq \frac{C_o + Mt_o}{t_o} \; \frac{1}{q} \quad .$$

Dans la branche AD, correspondant à une augmentation simultanée de C_1^* et t_1, on a, pout T très grand,

$$C_1^* \simeq \frac{M\ell\pi D}{Cf} T^n \quad ,$$

$$q \simeq \frac{Cf}{\ell\pi D} T^{-n}$$

et

$$C_1^* \simeq \frac{M}{q} \quad .$$

Il est clair que les coûts correspondants à la branche DAB sont toujours inférieurs à ceux de la branche BC. Par conséquent, *il est toujours anti-économique de travailler à une vitesse de coupe correspondant à une durée de vie d'outil inférieure à T_{PM}.*

11. Prix de vente. Gain

La pièce produite à un coût (C/N_p), se vendra à un prix P dépendant du marché et de la politique de vente de l'entreprise. La différence entre les deux représente le *gain*. La tendance du marché est indiquée par la *courbe de demande* qui exprime le prix que les acheteurs sont décidés à payer pour un débit q. En général, on a

$$\frac{dP}{dq} < 0 \quad . \tag{15}$$

Le *gain par unité de temps* est

$$\dot{G} = Pq - \dot{C} = Pq - \dot{C}_f - k\,W_u\,q - M\,t_m q - C_1^*\,q \quad .$$

Introduisons la grandeur

$$P^* = P - k\,W_u - M\,t_m \quad . \tag{16}$$

Il s'agit du prix diminué des frais incompressibles par pièce, énergie et coût de montage/démontage. La différence $P_1^* - C_1^*$ représente alors le *gain variable*. On peut écrire

$$\dot{G} = (P^* - C_1^*)\,q - \dot{C}_f \tag{17}$$

et

$$\frac{d\dot{G}}{dq} = (P^* - C_1^*) + q\,\frac{d}{dq}\,(P^* - C_1^*) \quad . \tag{18}$$

En un point stationnaire de $\dot{G}$, on a donc

$$\frac{P^* - C_1^*}{q} = -\,\frac{d(P^* - C_1^*)}{dq} \quad , \tag{19}$$

ce qui signifie que la sécante et la tangente en ce point de la courbe de $(P^* - C_1^*)$ forment avec l'axe des q un triangle équilatéral (fig. 3). Mais s'agit-il d'un maximum? La dérivée seconde de $\dot{G}$ est

$$\frac{d^2\dot{G}}{dq^2} = 2\,\frac{d}{dq}\,(P^* - C_1^*) + q\,\frac{d^2}{dq^2}\,(P^* - C_1^*) \quad ,$$

ce qui donne, au point stationnaire,

$$\frac{d^2\dot{G}}{dq^2} = -\,2\,\frac{P^* - C_1^*}{q} + q\,\frac{d^2}{dq^2}\,(P^* - C_1^*) \quad . \tag{20}$$

On peut généralement admettre que la dérivée seconde de $(P^* - C_1^*)$ est négative. C'est du reste une certitude si la courbe de demande est une droite. Dans ces conditions, si $(P^* - C_1^*)$ est positif au point stationnaire, il s'agit bien d'un maximum.

Dans le cas d'une perte franche, nous entendons par là que le gain variable est toujours négatif, il peut s'agir en fait d'un minimum. La condition (20) implique en effet

$$-\frac{q}{2}\frac{d^2\dot{G}}{dq^2} = P^* - C_1^* - \frac{q^2}{2}\frac{d^2}{dq^2}(P^* - C_1^*) \quad . \tag{21}$$

On aura donc un gain maximum si

$$P^* - C_1^* > \frac{q^2}{2}\frac{d^2}{dq^2}(P^* - C_1^*) \tag{22}$$

et un gain minimum dans le cas contraire. Or, le second membre de (22) a pour graphe une parabole décroissante ayant son maximum à l'origine et, en ce point, une courbure égale à

$$\frac{d^2}{dq^2}(P^* - C_1^*)_B$$

Dès lors, si le point stationnaire se situe *en-dessous de la parabole* (fig. 4), c'est en fait un point de gain *minimal*. Le meilleur choix, dans ce cas, est l'arrêt de la production, seul cas où la perte se réduit aux coûts fixes.

Notons que de toute manière, même si $(P^* - C_1^*) > 0$, c'est l'importance des coûts fixes qui décidera du gain ou de la perte.

Revenant au cas d'une situation bénéficiaire, observons que l'équation (19) implique

$$\frac{dC_1^*}{dq} = \frac{P^* - C_1^*}{q} + \frac{dP^*}{dq} \quad .$$

Dans le cas particulier où $dP^*/dq = 0$, cas approximativement obtenu par un *petit* producteur, on a à l'optimum

$$\frac{dC_1^*}{dq} > 0 \quad ,$$

ce qui signifie qu'il convient de se placer dans une situation de coûts croissants, soit entre T_{PM} et T_{cm}. La décroissance de P avec la cadence déplace l'optimum vers des valeurs plus faibles de q, soit vers des durées de vie d'outil plus grandes.

12. Autre point de vue: gain proportionnel au coût marginal

Une politique de vente assez courante consiste à exiger un gain proportionnel au coût marginal. On vendra donc au prix

$$P = (1 + \alpha)\, C_1 = (1 + \alpha)\, [k\, W_u + M\, t_m + C_1^*] \quad . \tag{23}$$

Ainsi que le montre la figure 5, deux débits q sont possibles. Le gain brut (avant déduction des frais fixes) par unité de temps est αC_1. Il est figuré, à l'échelle $1/\alpha$, par l'aire du rectangle OA'AA"O dans le cas de la solution A, et similairement pour B. Des deux solutions, c'est le point A qui correspond au plus grand gain brut. En effet, lorsque q est petit, on a

$$C_1^* \simeq M/q \qquad \text{donc} \qquad C_1^* \, q \simeq M \quad ;$$

pour q plus grand, la forme de la courbe de C_1^* indique que C_1^*q est croissant. Dès lors,

$$\alpha C_1 q = \alpha \ [k \ W_u q + M \ t_m q + C_1^* \ q]$$

est une fonction *croissante* de q. Il est peut-être utile de préciser que le gain brut obtenu doit servir à payer *au moins* les frais fixes, pour assurer la rentablilité.

Quelle est l'influence d'une modification du taux de gain α ? A un $\delta\alpha$ donné correspond par (23) une variation de débit δq donnée par

$$\frac{dP}{dq} \, \delta q = \delta\alpha \ C_1 + (1 + \alpha) \frac{dC_1^*}{dq} \, \delta q \quad ,$$

soit

$$\delta q = \frac{C_1 \ \delta\alpha}{\dfrac{dP}{dq} - (1+\alpha) \dfrac{dC_1^*}{dq}}$$

Le gain brut par unité de temps devient donc

$$\alpha \ C_1 \ q + \delta\alpha \ C_1 \ q + \alpha \ (C_1 + q \frac{dC_1^*}{dq}) \ \delta q =$$

$$= \alpha \ C_1 \ q + \delta\alpha \ C_1 \ q + \alpha \ (C_1 + q \frac{dC_1^*}{dq}) \frac{C_1 \delta\alpha}{\dfrac{dP}{dq} - (1+\alpha) \dfrac{dC_1^*}{dq}}$$

$$= \alpha \ C_1 q + C_1 \ \delta\alpha \ \frac{q \dfrac{dP}{dq} - (1+\alpha) q \dfrac{dC_1^*}{dq} + \alpha C_1 + \alpha q \dfrac{dC_1^*}{dq}}{\dfrac{dP}{dq} - (1+\alpha) \dfrac{dC_1^*}{dq}}$$

$$= \alpha \ C_1 q \ + C_1 \delta\alpha \ \frac{q \ (\dfrac{dP}{dq} - \dfrac{dC_1^*}{dq}) + \alpha \ C_1}{\dfrac{dP}{dq} - (1+\alpha) \dfrac{dC_1^*}{dq}} \quad .$$

Le dénominateur de cette expression est toujours *négatif*. Quant au numérateur, il sera également négatif, et le gain augmentera, si

$$q \frac{d}{dq} (P - C_1) < - \alpha C_1$$

soit

$$q > \frac{\alpha C_1}{\frac{d}{dq}(C_1 - P)} \quad .$$

Il peut arriver que la courbe de $P/(1+\alpha)$ ne coupe la courbe de C_1 qu'en un point B. Dans ce cas, on pourra soit augmenter le taux de gain, soit envisager de travailler avec *deux* machines, ce qui permet de produire deux fois plus. Cependant, le gain brut fera moins que doubler, pour deux raisons:

a) le prix baisse (voir fig. 6)

b) Les frais généraux augmentent sensiblement.

Il y a là une étude économique à effectuer pour chaque cas particulier.

* *
*

BIBLIOGRAPHIE

[1] F.W. TAYLOR - "On the art of cutting metals"
Transactions A.S.M.E., vol 28, paper n^r 1119, 1907

[2] G. BOOTHROID - *Fundamentals of metal machining and machine tools* - International Student Edition, Mc graw Hill, 1981

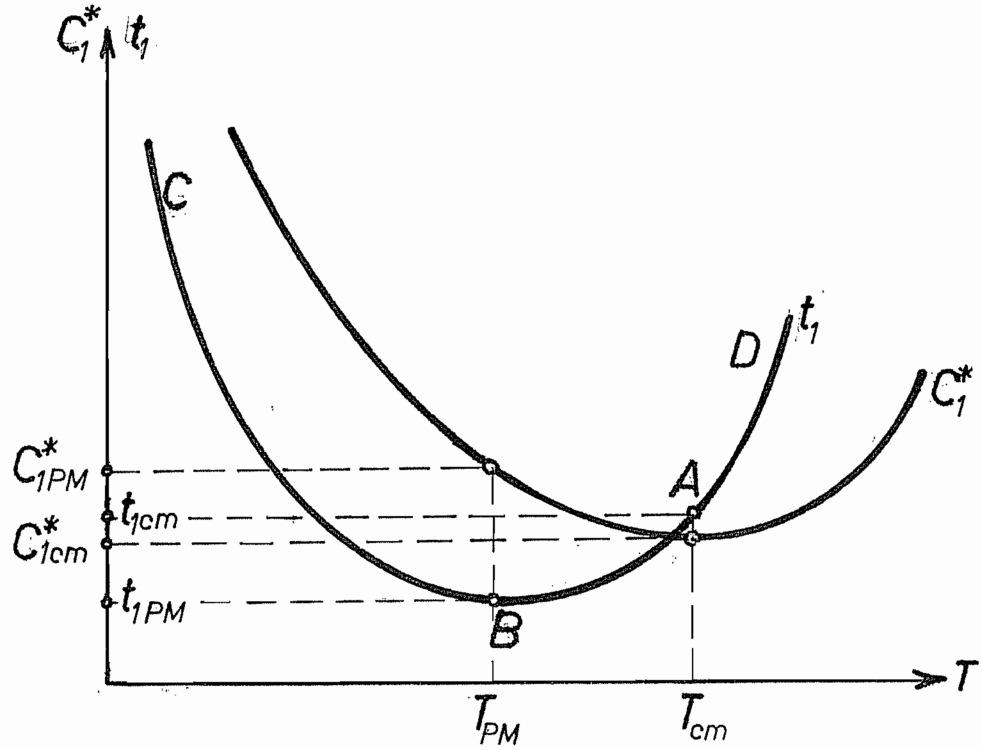
C_1^* t_1
C
D
t_1
C_1^*
C^*_{1PM}
t_{1cm}
C^*_{1cm}
t_{1PM}
A
B
T
T_{PM}
T_{cm}

Fig. 1

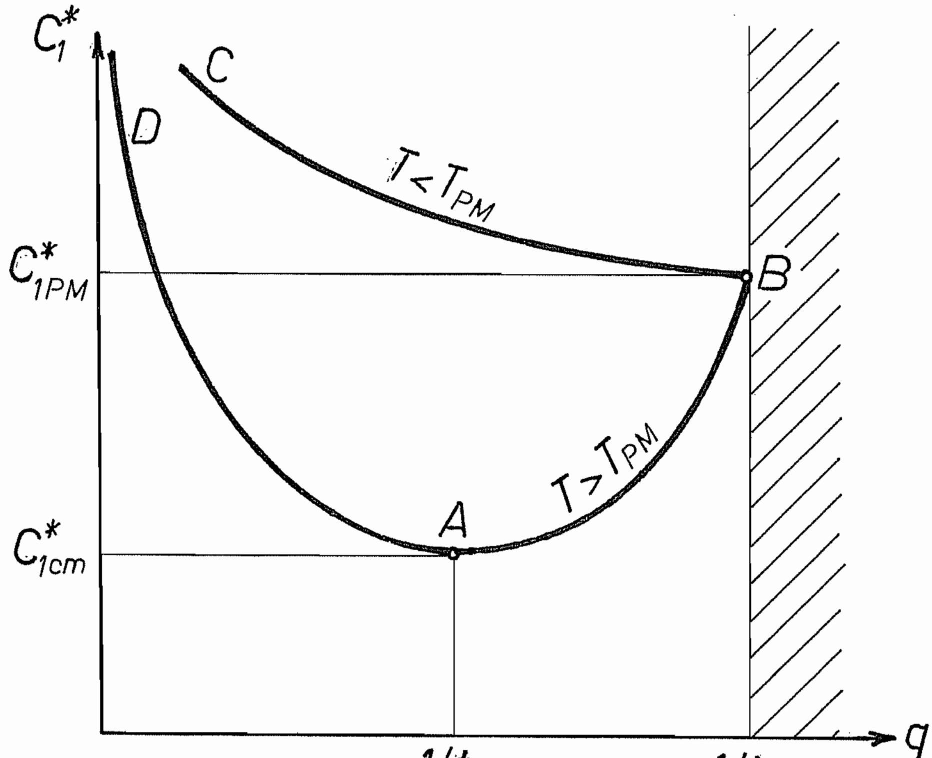
C_1^*
C
D
$T < T_{PM}$
C^*_{1PM}
B
$T > T_{PM}$
A
C^*_{1cm}
q
$1/t_{1cm}$
$1/t_{1PM}$

Fig. 2

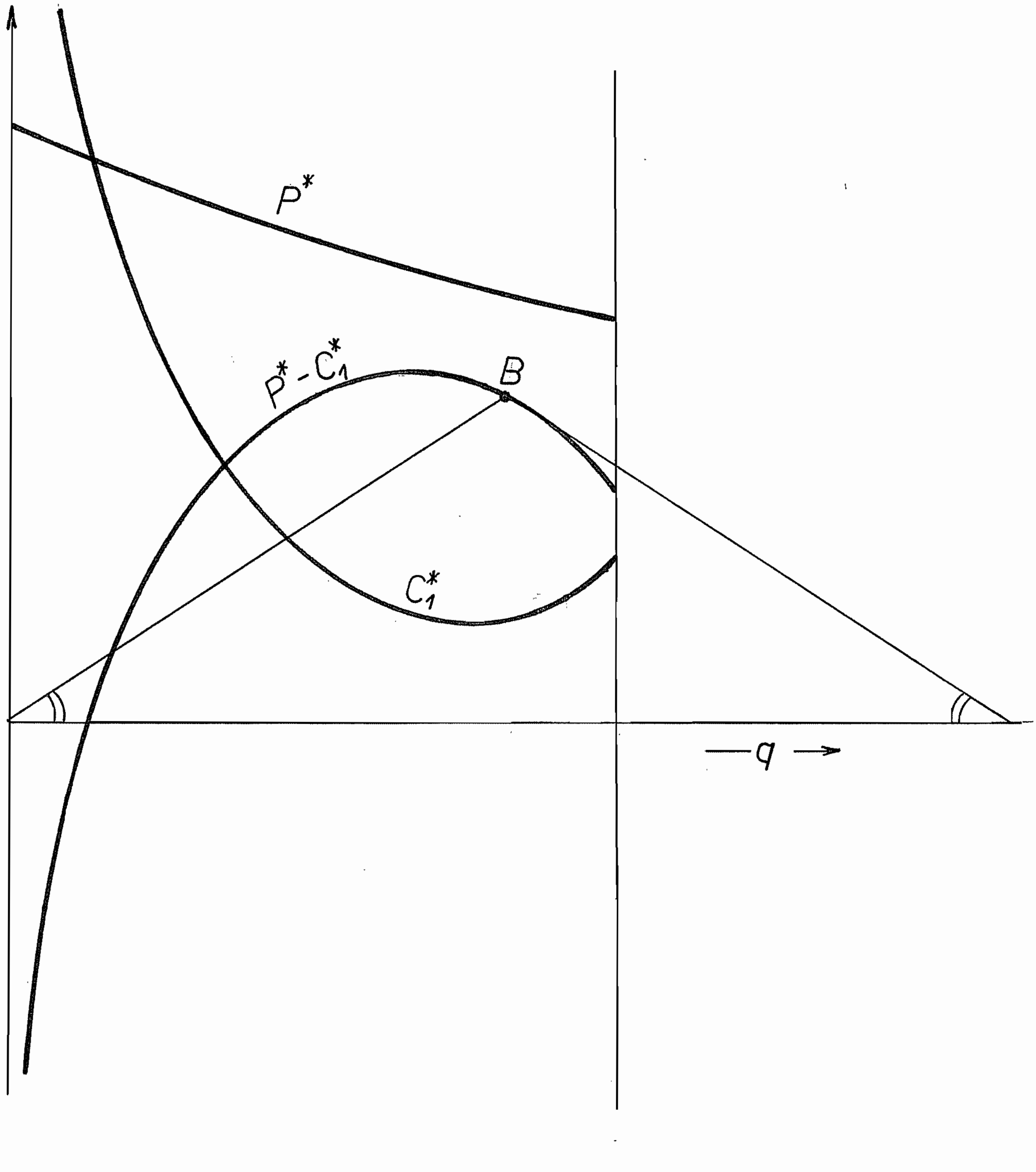

Fig. 3

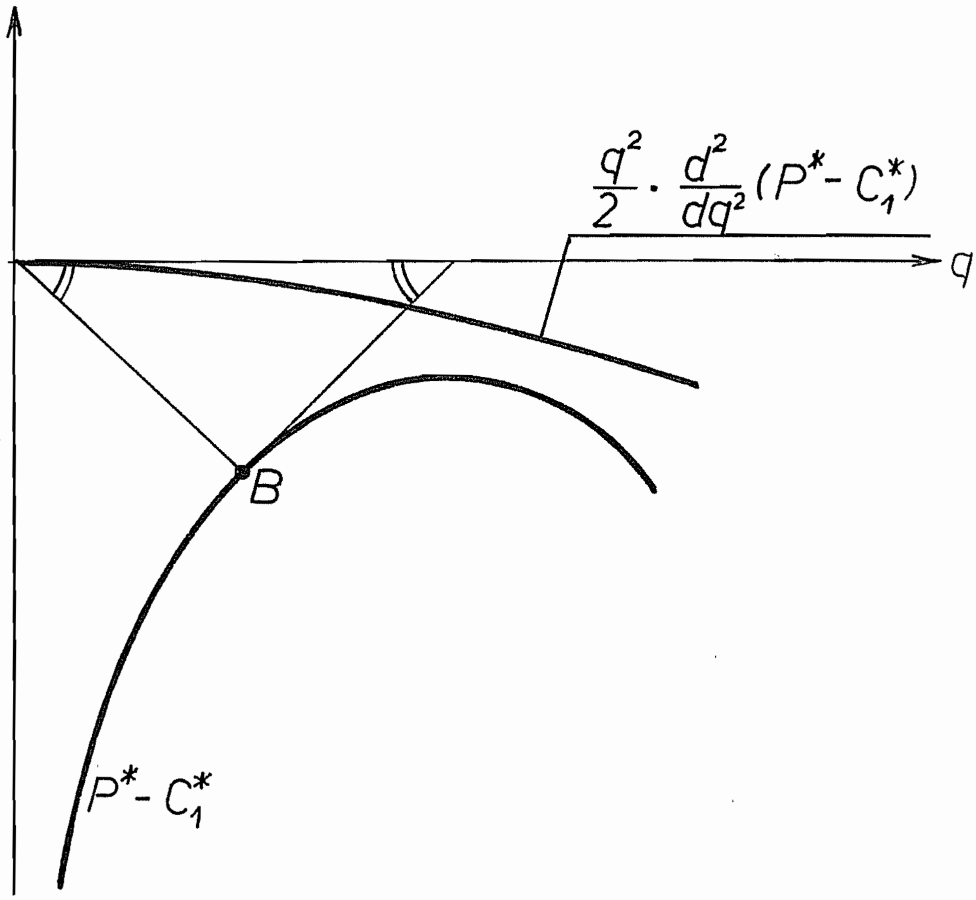

Fig. 4

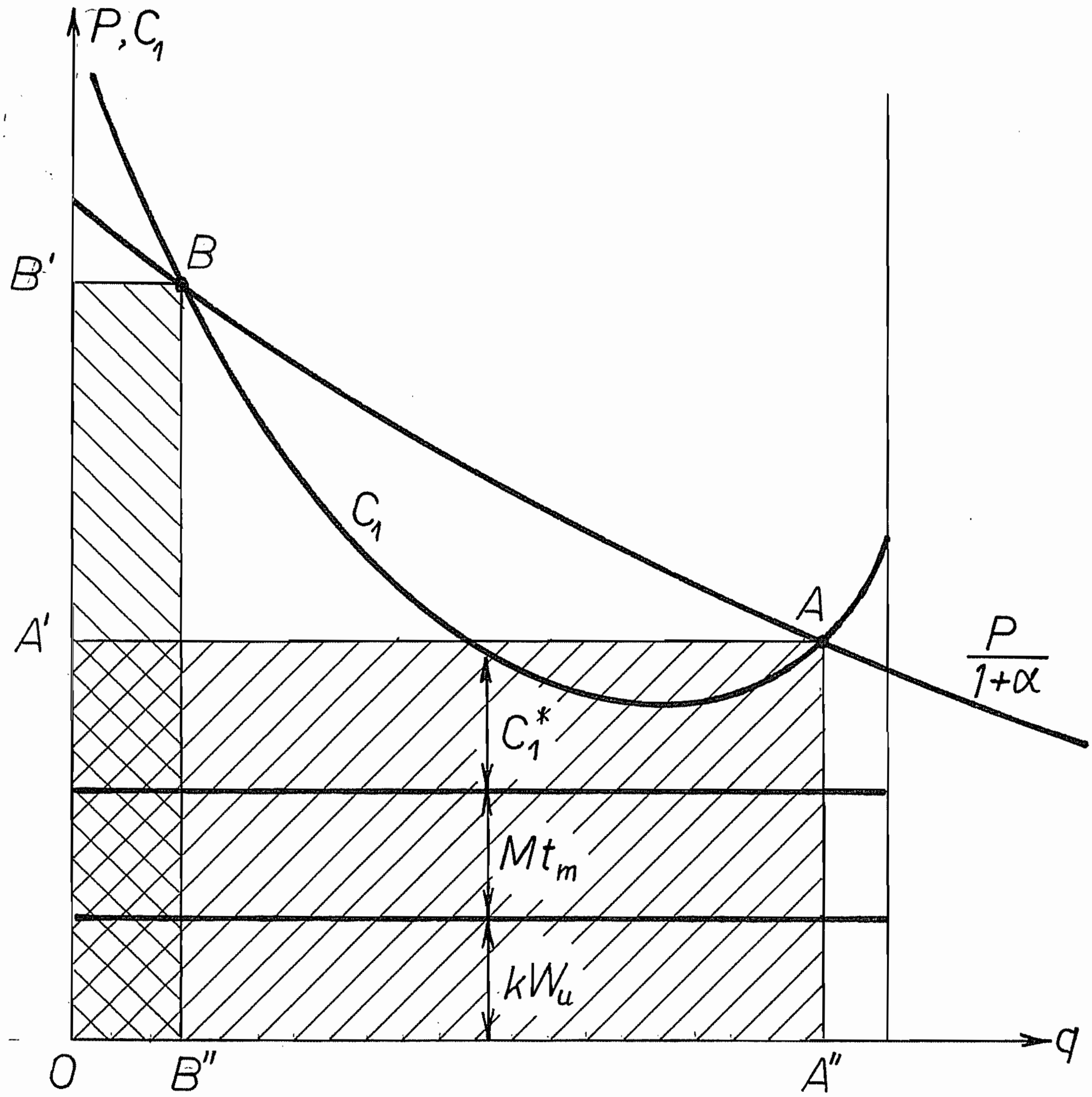

Fig. 5

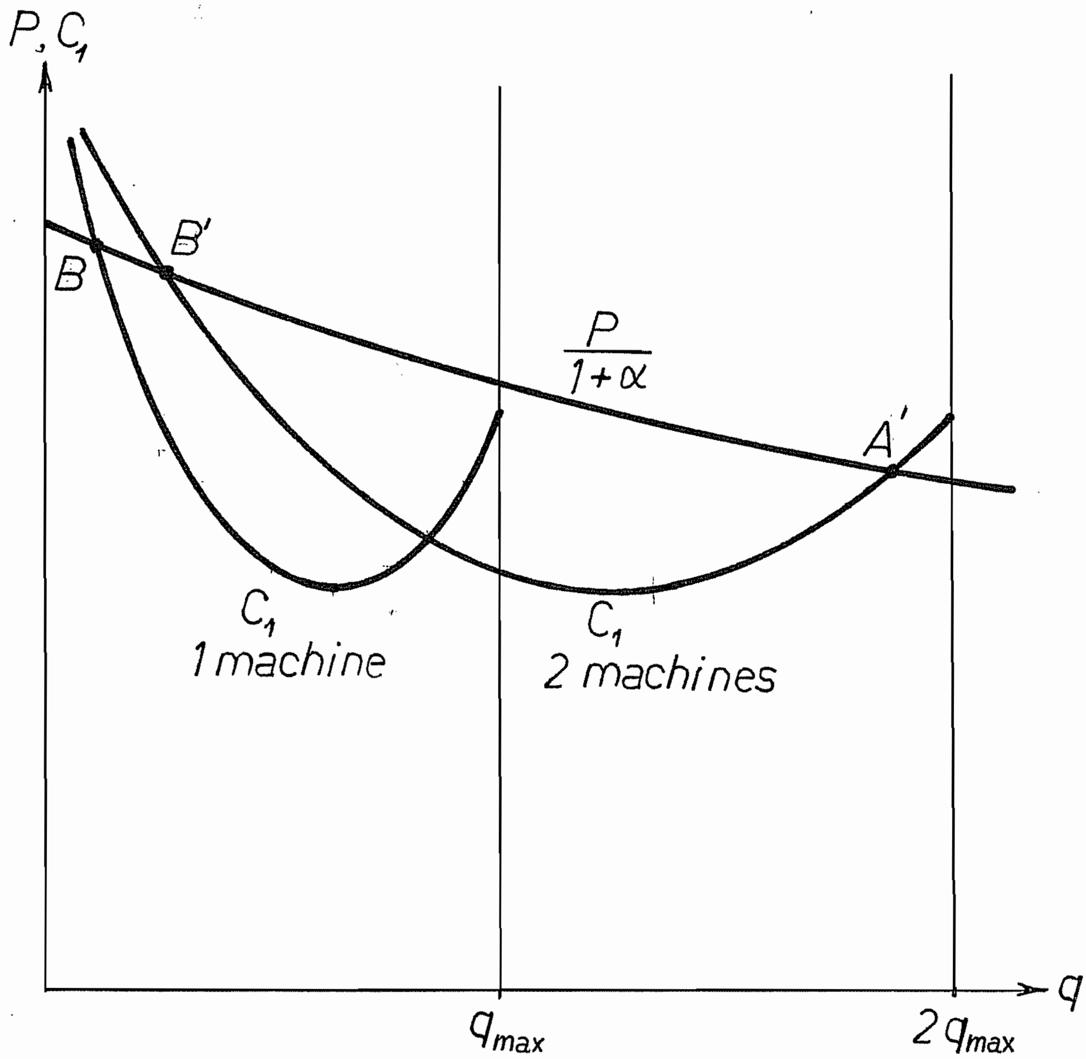

Fig. 6