

UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION

CONCEPTION ASSISTEE PAR ORDINATEUR D'UN PALIER RIGIDE A BILLES

J.F. DEBONGNIE

ESIE, Bingerville, 1988
Rapport LMF/D18

CONCEPTION ASSISTEE PAR
ORDINATEUR D'UN PALIER RIGIDE A
BILLES

J.F. DEBONGNIE

RAPPORT DU CENTRE DE CALCUL DE L'E.S.I.E. N° 7 (1988)

INTRODUCTION

Le présent rapport présente un programme permettant la conception complète d'un palier riside à billes soumis à une sollicitation plane. Ce programme inclut à la fois la consultation d'un catalogue, la définition des tolérances aux deux bases et le calcul du roulement. Ce dernier calcul est réalisé par la formulation exacte du problème non linéaire du roulement et non pas par les formules approchées des catalogues. Il permet en particulier de mettre en évidence l'influence du jeu sur la durée de vie et sur la raideur de la liaison. Le moment de flexion est pris en compte.

Pour résoudre les équations non linéaires de la théorie, un algorithme de Newton-Raphson est présenté. Dans ce problème, le choix du point de départ est particulièrement délicat, car la position de référence est sans raideur. Ce problème est discuté en détail.

La seconde partie de ce rapport présente le fonctionnement du programme ROULBI et en commente les différentes étapes.

I. THEORIE DU ROULEMENT RIGIDE A BILLES

Nous présentons ci-dessous la théorie utilisée pour le calcul proprement dit du roulement.

1. Relations géométriques

Nous choisirons comme position de référence du roulement celle où la bague intérieure est parfaitement centrée sur l'axe de la bague extérieure, et dans la même position axiale, les billes étant maintenues à mi-chemin des deux bagues (fig.1). Dans cette position, le jeu radial e se répartit uniformément entre les différentes pièces, qui sont donc distantes de $e/4$. Les centres de courbure C_i et C_e des bagues intérieure et extérieure sont distantes de

$$r^* = (D_i - D_e)/2 \quad (1)$$

On peut également calculer r^* à partir de la chaîne de cotes représentée à la fig. 2, dont l'équation est

$$r^* = r_e + r_i - d_b - e/2. \quad (2)$$

Nous poserons

$$r_e = (1 + K_e) d_b / 2$$

$$r_i = (1 + K_i) d_b / 2, \quad (3)$$

ce qui introduit les nombres K_e et K_i qui caractérisent l'osculution: cette dernière est d'autant plus forte que K_e et K_i sont plus faibles. Les valeurs normales sont de l'ordre de 0,03.....0,05. Il vient alors

$$r^* = d_b (1/2 + K_e/2 + 1/2 + K_i/2 - 1) - e/2$$

soit

$$r^* = K d_b - e/2, \quad (4)$$

en introduisant l'osculution moyenne

$$K = (K_e + K_i)/2 \quad (5)$$

2. Déformations

Lors d'un déplacement de la bague intérieure, le centre C_i

prend une nouvelle position, à une distance r'_0 de C_e . Nous supposons le contact de la bille établi et nous admettrons que les déformations de contact soient les seules importantes: il y aura donc une déformation δ_e à la base extérieure et une déformation δ_i à la base intérieure. On se convainc aisément que la déformation est minimale lorsque les contacts se font sur la ligne des centres. Cette position, qui représente un minimum d'énergie, est donc la seule stable. On peut alors établir la chaîne de cotes de la figure 3, à laquelle correspond l'équation

$$r'_0 = r_e + \delta_e - d_b + r_i + \delta_i,$$

Introduisant la déformation totale

$$\delta = \delta_i + \delta_e,$$

on obtient

$$\delta = r'_0 - r_e - r_i + d_b = r_0 - K d_b \quad (6)$$

Il ne reste plus qu'à calculer r'_0 et l'angle de contact en fonction des déplacements δ_{ax} et δ_{rad} du centre de courbure de la base intérieure. La figure 4 montre que

$$r'^2_0 = (r^* + \delta_{rad})^2 + \delta_{ax}^2 \quad (7)$$

et

$$\tan \alpha = \delta_{ax} / (r^* + \delta_{rad}) \quad (8)$$

En particulier, lorsque le contact s'amorce, avant toute déformation, la relation (6) donne la valeur particulière r_0 de r'_0 :

$$r_0 = K d_b. \quad (9)$$

Dans ces conditions, en supposant que cet état est atteint par une simple translation axiale de la base intérieure, l'angle de contact α_0 vérifie (fig. 5)

$$\cos \alpha_0 = r^* / r_0 = (K d_b - e/2) / r_0 = 1 - e / (2r_0) \quad (10)$$

Cet angle particulier porte le nom d'angle de contact nominal d'un roulement riside avec Jeu. Dans le cas d'une interférence initiale ($e < 0$), la relation (10) cesse d'être valable et $\alpha_0 = 0$.

Cela étant, on peut donner à la relation (6) la forme suivante:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}/r_0 &= r'_0/r_0 - 1 \\ &= [(1 - e/r_0 + \dot{\theta}_{rad}/r_0)^2 + (\dot{\theta}_{ax}/r_0)^2]^{1/2} - 1\end{aligned}\quad (11)$$

Quant à la relation (8), elle se transforme en

$$\text{tg } \alpha = (\dot{\theta}_{ax}/r_0)/(1 - e/r_0 + \dot{\theta}_{rad}/r_0). \quad (12)$$

On notera que, pour e/r_0 , $\dot{\theta}_{rad}/r_0$ et $\dot{\theta}_{ax}/r_0$ petits, la formule (11) est peu précise numériquement, car elle implique la soustraction de nombres voisins. On lui substituera avec avantage la formule équivalente

$$\begin{aligned}\dot{\theta}/r_0 &= \gamma^{-1} [2(\dot{\theta}_{rad}/r_0 - e/(2r_0)) + (\dot{\theta}_{rad}/r_0 - e/(2r_0))^2 + \\ &+ (\dot{\theta}_{ax}/r_0)^2] \quad (11 \text{ bis}),\end{aligned}$$

avec

$$\gamma = 1 + [(1 - e/r_0 + \dot{\theta}_{rad}/r_0)^2 + (\dot{\theta}_{ax}/r_0)^2]^{1/2}.$$

Enfin, il résulte de la figure (4) que

$$\cos \alpha = (r^* + \dot{\theta}_{rad})/r_0 = (1 - e/(2r_0) + \dot{\theta}_{rad}/r_0)/(1 + \dot{\theta}/r_0) \quad (13)$$

$$\sin \alpha = \dot{\theta}_{ax}/r_0 = (\dot{\theta}_{ax}/r_0)/(1 + \dot{\theta}/r_0). \quad (14)$$

3. Sollicitations planes

Nous considérerons des sollicitations composées

- d'une force axiale F_a , à laquelle est conjuguée le déplacement axial $\dot{\theta}_a$.
- d'une force radiale F_r (c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe), à laquelle est conjugué le déplacement radial $\dot{\theta}_r$.
- d'un moment de flexion M agissant dans le plan (F_a, F_r) , auquel est conjuguée la rotation θ .

Si l'on utilise, pour décrire le cercle des centres de courbure

de la basque intérieure, l'angle ψ , en prenant comme origine la direction de la charge F_r , on peut écrire

$$\dot{\delta}_{rad}(\psi) = \dot{\delta}_r \cos \psi \quad (15)$$

et

$$\dot{\delta}_{ex}(\psi) = \dot{\delta}_e + R \theta \cos \psi, \quad (16)$$

où R est le rayon du cercle des centres de courbure (fig.6). Il est commode d'introduire, à la place de θ , le déplacement

$$\dot{\delta}_t = R \theta :$$

conjugué à la "force rotatoire" $F_t = M/R$.

Nous aurons besoin des dérivées suivantes:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(\dot{\delta}/r_0) / \dot{\delta}(\dot{\delta}_r/r_0) &= 1/2(1+\dot{\delta}/r_0)^{-1} \cdot 2[1 - e/(2r_0) + \dot{\delta}_{rad}/r_0] \cos \psi \\ &= \cos \alpha \cos \psi \end{aligned}$$

$$\dot{\delta}(\dot{\delta}/r_0) / \dot{\delta}(\dot{\delta}_e/r_0) = 1/2(1+\dot{\delta}/r_0)^{-1} \cdot 2\dot{\delta}_{ex}/r_0 = \sin \alpha$$

$$\dot{\delta}(\dot{\delta}/r_0) / \dot{\delta}(\dot{\delta}_t/r_0) = 1/2(1+\dot{\delta}/r_0)^{-1} \cdot 2\dot{\delta}_{ex}/r_0 \cdot \cos \psi = \sin \alpha \cos \psi$$

(17)

4. Energie de déformation et forces

L'étude célèbre de Hertz [3] montre que dans un problème de contact ponctuel, le rapprochement de deux corps en contact est proportionnel à la puissance (2/3) de la charge Q . On a donc, pour le contact de la bille avec la basque intérieure,

$$\dot{\delta}_i = k_i Q^{2/3},$$

où k_i dépend de la géométrie du contact. De la même façon, sur la basque extérieure,

$$\dot{\delta}_e = k_e Q^{2/3}.$$

et, au total,

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_i + \dot{\delta}_e = (k_i + k_e) Q^{2/3},$$

soit

$$Q = C_d \dot{O}^{2/3}, \quad (18)$$

où C_d est une constante dépendant des conditions de contact aux deux bagues. L'énergie ainsi emmagasinée est

$$W_1 = \int Q d\dot{O} = (2/5) C_d \dot{O}^{5/3}.$$

Effectuant la somme sur tous les éléments roulants, on obtient, en notant z le nombre de billes,

$$W_{\text{tot}} = (2/5) C_d \sum \dot{O}_+^{5/2} = z C_d [(1/z) \sum \dot{O}_+^{5/2}] = z C_d W_{\text{moy}} \quad (19)$$

(le signe "+" en indice signifie que l'on ne compte $\dot{O}$ pour non nul que s'il est positif). Malheureusement, cette expression varie quelque peu avec la position des billes. Pour éviter cette indétermination, on remplace l'énergie moyenne

$$W_{\text{moy}} = (1/z) \sum \dot{O}_+^{5/2}$$

par la valeur qu'elle prendrait si le nombre de billes était infini, à savoir,

$$W = (1/n) \int (2/5) \dot{O}_+^{5/2}(\psi) d\psi.$$

(Toutes les intégrales qui suivent sont, sauf spécification contraire, à entendre de 0 à π). Cette simplification a été introduite par Sjöwall [4]. Les dérivées de W_{tot} par rapport aux

déplacements $\dot{O}_r$, $\dot{O}_a$, $\dot{O}_t$ fournissent les charges. On trouve, en utilisant les relations (17),

$$F_r = z C_d r_0^{3/2} \cdot (1/n) \int (\dot{O}/r_0)_+^{3/2} \cos a \cos \psi d\psi$$

$$F_a = z C_d r_0^{3/2} \cdot (1/n) \int (\dot{O}/r_0)_+^{3/2} \sin a d\psi$$

$$F_t = z C_d r_0^{3/2} \cdot (1/n) \int (\dot{O}/r_0)_+^{3/2} \sin a \cos \psi d\psi \quad (20)$$

qui, lorsque les forces sont données, constituent trois équations non linéaires en $\dot{O}_r/r_0$, $\dot{O}_a/r_0$, $\dot{O}_t/r_0$. Ces trois variables apparaissent en effet aussi bien dans le calcul de $\dot{O}/r_0$ que dans celui de $\sin a$ et $\cos a$.

5. Charge purement radiale appliquée à un palier sans jeu

Dans le cas d'un roulement sans jeu soumis à une charge radiale, on a par symétrie $\dot{O}_a = \dot{O}_t = 0$ et $a = 0$. Il en découle

$$\dot{O} = \dot{O}_r \cos \psi, \quad \dot{O}_{\max} = \dot{O}_r,$$

ce qui donne

$$Q_{\max} = z C_d \dot{O}_{\max}^{3/2}$$

et, comme $\dot{O} > 0$ pour $\psi < \pi/2$,

$$F_r = z Q_{\max} \cdot (1/\pi) \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \psi \, d\psi.$$

Cette intégrale peut être calculée analytiquement comme, en général,

$$I_m = (1/\pi) \int_0^{\pi/2} \cos^m \psi \, d\psi.$$

Posant en effet

$$t = \cos^2 \psi,$$

on a

$$dt = -2 \cos \psi \sin \psi \, d\psi,$$

soit

$$d\psi = -(1/2) t^{-1/2} (1-t)^{-1/2} dt,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} I_m &= (1/2\pi) \int_0^1 t^{(m-1)/2} (1-t)^{-1/2} dt \\ &= (1/2\pi) B((m+1)/2, 1/2) \end{aligned} \quad (21)$$

où le symbole B désigne la fonction Bêta d'Euler. En particulier, pour $m = 5/2$, on obtient

$$I_{5/2} = (1/2\pi) B(7/4, 1/2) = 0,2288,$$

ce qui donne

$$F_r = 0,2288 z Q_{\max} \quad (22)$$

Du fait de sa simplicité, ce cas de charge particulier sert souvent de référence.

6. Charge dynamique équivalente

L'expérience montre que tous les roulements finissent un jour par voir le chemin de roulement d'une de leurs deux bagues - le plus souvent, celui de la bague intérieure - s'éciller. Une

petite écaillage de la surface se détache, ce qui provoque, lors du fonctionnement, un rebondissement des billes et se manifeste par des vibrations - un bruit caractéristique.

Il s'agit d'un phénomène de fatigue superficielle, lié au fait que les points du chemin de roulement sont alternativement chargés et déchargés à chaque passage de bille.

L'expérience montre qu'il n'existe pas, dans cette situation, de limite d'endurance: toute charge, si petite soit-elle, mène à la destruction. En outre, on constate que la durée de vie L^* du roulement, mesurée en tours, est inversement proportionnelle au cube de la charge:

$$L^* = k F^{-3} \quad (23)$$

Cette propriété se vérifie quelle que soit la direction de la charge, mais le coefficient k dépend de cette direction. Nous donnerons ici un exposé inductif simple de la loi expérimentale k . Dans cet exposé élémentaire, abstraction sera faite de l'aspect statistique du problème. Les conclusions obtenues en sont en effet indépendantes.

Examinons d'abord le cas d'une charge purement axiale. Toutes les billes supportent la même charge Q et, au cours d'une rotation, un point du chemin de roulement rencontre un certain nombre n_1 de billes, ce qui donne n_1 cycles sous la charge Q d'une bille. Pour

$$F = k_1 Q,$$

le nombre de cycles constituant la durée de vie est donc

$$N = n_1 L^* = k k_1^{-3} Q^{-3} = k_2 Q^{-3} \quad (24)$$

Après n cycles, on peut donc dire que l'on a consommé une fraction n/N de la durée de vie. On donne à cette fraction le nom de dommage D :

$$D = n/N \quad (25)$$

Il est clair que la durée de vie est atteinte lorsque le dommage vaut l'unité.

Les autres cas de charge sont plus délicats à traiter, car la charge varie lors de la rotation de la bague. Pour résoudre ce problème, Palmgren [5] a été le premier à énoncer le principe du dommage cumulatif, mieux connu sous le nom de règle de Miner [6]. Ce principe consiste à admettre ceci: après avoir subi n_1 cycles sous une charge Q_1 correspondant à une durée de vie N_1 , n_2 cycles sous une charge Q_2 correspondant à une durée de vie N_2 , etc ..., le roulement aura subi un dommage total

$$D = n_1/N_1 + n_2/N_2 + \dots + n_p/N_p \quad (26)$$

quel que soit l'ordre d'application des charges. Appliquons ce principe à un point du chemin de roulement qui a rencontré des éléments roulants sous des charges successives $Q_1, \dots, Q_p$: le dommage vaut

$$D = 1/N_1 + 1/N_2 + \dots + 1/N_p = 1/k_2 (Q_1^3 + Q_2^3 + \dots + Q_p^3) .$$

On peut encore exprimer ce nombre en fonction du nombre de charges rencontrées, sous la forme

$$D = (p/k_2) . Q_{eq}^3$$

où apparaît la charge équivalente

$$Q_{eq} = [(1/p) \sum Q_i^3]^{1/3} \quad (27)$$

qui est la moyenne cubique des charges rencontrées.

Après un grand nombre n de cycles, on peut considérer que chaque point du chemin de roulement a rencontré toutes les charges possibles du roulement. Il aura donc le même comportement qu'un roulement soumis à une charge uniforme

$$Q_{eq} = [(1/\pi) \int_0^\pi Q^3 d\psi]^{1/3} . \quad (28)$$

Il découle de tout ceci que deux cas de charge correspondant à la même valeur de Q_{eq} conduiront à la même durée de vie. On dit qu'ils sont dynamiquement équivalents. Parmi les différents cas de charge dynamiquement équivalents, il en est un particulièrement simple, qui sert de référence: il s'agit du cas du railier soumis à une charge purement radiale. Par définition, la charge dynamique équivalente P d'un cas de charge donné est la charge purement radiale qui, dans un railier sans jeu, correspond à la même valeur de Q_{eq} que le cas de charge donné dans le railier donné. Pour la calculer, partons de la relation

$$Q = Q_{max} \cos \psi ,$$

qui conduit à

$$Q = Q_{max} \cos^{3/2} \psi$$

et

$$Q_{eq} = Q_{max} [(1/\pi) \int_0^{\pi/2} \cos^{4,5} \psi d\psi]^{1/3} = Q_{max} (I_{4,5})^{1/3} .$$

Or,

$$I_{4,5} = (1/(2\pi)) B(2,75, 0,5) = 0,1780 ,$$

ce qui donne

$$Q_{eq} = 0,5625 Q_{max}$$

Tenant compte de (22), on obtient comme charge dynamique équivalente

$$P = (0,2288/0,5625) \times Q_{eq} = 0,4068 \times Q_{eq} \quad (29)$$

ou encore,

$$P = 0,4068 \times (z C_d r_0^{3/2}) \cdot [(1/\pi) \int_0^{2\pi} (Q/r_0)^{4,5} d\psi]^{1/3} \quad (30)$$

La durée de vie est donc inversement proportionnelle au cube de P . Appelant capacité dynamique C la charge dynamique équivalente qu'il peut supporter pendant un million de tours et L la durée de vie en millions de tours, on a donc

$$L = (C/P)^3 \quad (31)$$

7. Charge statique équivalente

La déformation plastique des contacts est préjudiciable à la précision du guidage et au fonctionnement silencieux du roulement. En fait, il y a toujours une très légère déformation plastique et on se fixe comme référence une déformation égale au dix-millième du diamètre des billes.

La déformation plastique dépend uniquement de la charge maximale appliquée à un élément roulant. Par conséquent, deux cas de charge menant au même Q_{max} sont équivalentes en ce qui concerne la déformation plastique. Parmi tous ces cas de charge, on choisit le plus simple, c'est-à-dire une charge radiale dans un palier sans Jeu. La charge statique équivalente P_0 d'un cas de charge donné est donc, par définition, la charge purement radiale qui, dans un palier sans Jeu, donnerait le même Q_{max} . En vertu de la formule (22), elle se calcule par

$$P_0 = 0,2288 \times Q_{max} = 0,2288 \times (z C_d r_0^{3/2}) \cdot (Q_{max}/r_0)^{3/2} \quad (32)$$

la valeur de P_0 menant à une déformation permanente d'un dix-millième du diamètre des billes est appelée capacité statique du roulement. Selon les exigences de précision et de silence, on exige en général une sécurité statique

$$C_0/P_0 \quad (33)$$

comprise entre 1/2 et 2.

8. Résolution des équations du roulement par la méthode de Newton-Raphson

Pour résoudre les équations (20) du roulement, nous utiliserons les variables réduites suivantes:

- déplacements réduits:

$$\alpha_r = \dot{\theta}_r / r_0, \quad \alpha_s = \dot{\theta}_s / r_0, \quad \alpha_t = \dot{\theta}_t / r_0$$

- forces réduites:

$$s_r = F_r / (z C_d r_0^{3/2}), \quad s_s = F_s / (z C_d r_0^{3/2}),$$

$$s_t = F_t / (z C_d r_0^{3/2}).$$

- déformation réduite:

$$e = (\dot{\theta} / r_0)_+.$$

- jeu réduit:

$$d = e / r_0.$$

Les équations s'écrivent alors

$$s_r = (1/\pi) \int_0^\pi e^{3/2} \cos \alpha \cos \psi \, d\psi$$

$$s_s = (1/\pi) \int_0^\pi e^{3/2} \sin \alpha \, d\psi$$

$$s_t = (1/\pi) \int_0^\pi e^{3/2} \sin \alpha \cos \psi \, d\psi \quad (34)$$

Supposons que l'on se donne arbitrairement des déplacements réduits $\alpha_r, \alpha_s, \alpha_t$. On peut alors calculer les valeurs s_r, s_s, s_t qui leur correspondent par les équations (34). Bien entendu, ces valeurs diffèrent en général des valeurs prescrites $\bar{s}_r, \bar{s}_s, \bar{s}_t$. Il faut donc remplacer les déplacements $\alpha_r, \alpha_s, \alpha_t$ par d'autres déplacements $\alpha_r + \Delta\alpha_r, \alpha_s + \Delta\alpha_s, \alpha_t + \Delta\alpha_t$. Pour choisir les incréments convenables, écrivons la modification des charges au premier ordre:

$$\Delta s_r = \partial s_r / \partial \alpha_r \Delta \alpha_r + \partial s_r / \partial \alpha_s \Delta \alpha_s + \partial s_r / \partial \alpha_t \Delta \alpha_t$$

$$\Delta s_s = \partial s_s / \partial \alpha_r \Delta \alpha_r + \partial s_s / \partial \alpha_s \Delta \alpha_s + \partial s_s / \partial \alpha_t \Delta \alpha_t$$

$$\Delta s_t = \partial s_t / \partial \alpha_r \Delta \alpha_r + \partial s_t / \partial \alpha_s \Delta \alpha_s + \partial s_t / \partial \alpha_t \Delta \alpha_t$$

A partir de la matrice de raideur tangente

$$K = \begin{vmatrix} \frac{\partial s_r}{\partial a_r} & \frac{\partial s_r}{\partial a_\theta} & \frac{\partial s_r}{\partial a_t} \\ \frac{\partial s_\theta}{\partial a_r} & \frac{\partial s_\theta}{\partial a_\theta} & \frac{\partial s_\theta}{\partial a_t} \\ \frac{\partial s_t}{\partial a_r} & \frac{\partial s_t}{\partial a_\theta} & \frac{\partial s_t}{\partial a_t} \end{vmatrix}$$

visiblement symétrique, puisque les charges dérivent de l'énergie totale de déformation Ψ_{tot} , on peut donc calculer une correction convenable par

$$\begin{vmatrix} \Delta a_r \\ \Delta a_\theta \\ \Delta a_t \end{vmatrix} = K^{-1} \begin{vmatrix} s_r - s_r \\ s_\theta - s_\theta \\ s_t - s_t \end{vmatrix}$$

Les déplacements ainsi corrigés sont pris comme nouveau point de départ pour répéter le processus. On arrête le calcul lorsque l'erreur relative sur les forces devient négligeable.

Passons au calcul effectif de la matrice de raideur tangente. On a d'abord $\Delta s = \cos \alpha \cos \psi \Delta a_r + \sin \alpha \Delta a_\theta + \sin \alpha \cos \psi \Delta a_t$.

Pour les angles,

$$\Delta(\cos \alpha) = (1+\epsilon)^{-2} [(1+\epsilon) \Delta(\dot{\theta}_{rad}/r_0) - (1-J+\dot{\theta}_{rad}/r_0) \Delta \theta]$$

$$= (1+\epsilon)^{-1} [\Delta(\dot{\theta}_{rad}/r_0)/(1+\epsilon) - \cos \alpha \Delta \theta]$$

$$= (1+\epsilon)^{-1} [\cos \psi \Delta a_r - \cos^2 \alpha \cos \psi \Delta a_r - \sin \alpha \cos \alpha \Delta a_\theta - \sin \alpha \cos \alpha \cos \psi \Delta a_t]$$

$$= (1+\epsilon)^{-1} [\sin \alpha \cos \psi \Delta a_r - \cos \alpha \Delta a_\theta - \cos \alpha \cos \psi \Delta a_t] \cdot \sin \alpha$$

et

$$\Delta(\sin \alpha) = (1+\epsilon)^{-1} \Delta(\dot{\theta}_{ax}/r_0) - (1+\epsilon)^{-2} \cdot (\dot{\theta}_{ax}/r_0)$$

$$= (1+\epsilon)^{-1} [\Delta(\dot{\theta}_{ax}/r_0) - \sin \alpha \Delta \theta]$$

$$= (1+\epsilon)^{-1} [\Delta a_\theta + \cos\psi \Delta a_t - \sin\theta \cos\alpha \cos\psi \Delta a_r - \sin^2\theta \Delta a_\theta - \sin^2\theta \cos\psi \Delta a_t]$$

$$= - (1+\epsilon)^{-1} \cos\alpha [\sin\theta \cos\psi \Delta a_r - \cos\alpha \Delta a_\theta - \cos\alpha \cos\psi \Delta a_t]$$

Par conséquent,

$$\partial(\cos\alpha)/\partial a_r = (1+\epsilon)^{-1} \sin^2\theta \cos\psi$$

$$\partial(\cos\alpha)/\partial a_\theta = (1+\epsilon)^{-1} \sin\theta \cos\alpha$$

$$\partial(\cos\alpha)/\partial a_t = (1+\epsilon)^{-1} \sin\theta \cos\alpha \cos\psi$$

$$\partial(\sin\theta)/\partial a_r = -(1+\epsilon)^{-1} \sin\theta \cos\alpha \cos\psi$$

$$\partial(\sin\theta)/\partial a_\theta = -(1+\epsilon)^{-1} \cos^2\theta$$

$$\partial(\sin\theta)/\partial a_t = -(1+\epsilon)^{-1} \cos^2\theta \cos\psi$$

Nous pouvons à présent calculer la matrice de raideur engendrée :

$$K_{rr} = 3/(2\pi) \int_0^{2\pi} e^{1/2} \cos^2\theta \cos^2\psi d\psi$$

$$1/\pi \int_0^{2\pi} e^{3/2} (1+\epsilon)^{-1} \sin^2\theta \cos^2\psi d\psi$$

$$K_{\theta r} = 3/(2\pi) \int_0^{2\pi} e^{1/2} \sin\theta \cos\alpha \cos\psi d\psi$$

$$1/\pi \int_0^{2\pi} e^{3/2} (1+\epsilon)^{-1} \sin\theta \cos\alpha \cos\psi d\psi$$

$$K_{tr} = 3/(2\pi) \int_0^{2\pi} e^{1/2} \sin\theta \cos\alpha \cos^2\psi d\psi$$

$$1/\pi \int_0^{2\pi} e^{3/2} (1+\epsilon)^{-1} \sin\theta \cos\alpha \cos^2\psi d\psi$$

$$K_{\theta\theta} = 3/(2\pi) \int_0^{2\pi} e^{1/2} \sin^2\theta d\psi$$

$$1/\pi \int_0^{2\pi} e^{3/2} (1+\epsilon)^{-1} \cos^2\theta d\psi$$

$$K_{\theta t} = 3/(2\pi) \int_0^{2\pi} e^{1/2} \sin^2\theta \cos\psi d\psi$$

$$1/\pi \int_0^{2\pi} e^{3/2} (1+\epsilon)^{-1} \cos^2\theta \cos\psi d\psi$$

$$K_{tt} = 3/(2\pi) \int e^{1/2} \sin^2 \alpha \cos^2 \psi \, d\psi \\ + 1/\pi \int e^{3/2} (1+e)^{-1} \cos^2 \alpha \cos^2 \psi \, d\psi$$

9. Choix du point de départ

Très souvent, en calcul des structures, on choisit comme point de départ la position de référence. Ce choix traditionnel n'est pas possible dans le cas présent, car, dans la position de référence, la matrice de raideur tangente est identiquement nulle. Pour choisir une position initiale raide, il faut se donner des déplacements initiaux comblant au moins les Jeux. Ces Jeux sont:

- dans la direction radiale: $a_r = J/2$

- dans la direction axiale: $a_a = J^{1/2}$

- dans la direction rotatoire: $a_t = J^{1/2}$

Un procédé donnant de bons résultats consiste à prendre le point de départ suivant:

$$a_r = \begin{cases} 0 & \text{si } s_r = 0 \\ J/2 + 0,1 & \text{si } s_r \neq 0 \end{cases}$$

$$a_a = \begin{cases} 0 & \text{si } s_a = 0 \\ J^{1/2} + 0,1 & \text{si } s_a \neq 0 \end{cases}$$

$$a_t = \begin{cases} 0 & \text{si } s_t = 0 \\ J^{1/2} + 0,1 & \text{si } s_t \neq 0 \end{cases}$$

10. Grandeurs nécessaires au calcul

Dans ce qui précède, on a besoin de connaître les grandeurs suivantes, non données dans les catalogues:

$$r_0, z, C_d, r_0^{3/2}, e.$$

a) La valeur de r_0 est sensiblement proportionnelle au diamètre des billes. Or, celui-ci peut être déduit des deux relations [1,2]

$$C = f_c z^{2/3} d_b^{1,8} \quad \text{avec } f_c \approx 59,5 \quad \text{pour les paliers bien construits}$$

et

$$C_0 = f_0 z d_b^2 \quad \text{avec } f_0 = 12.$$

On en déduit

$$r_0 = K C^{15/7} / C_0^{10/7}.$$

La valeur de K a été ajustée par nos soins sur un échantillon de roulements, à partir de données graphiques d'Eschmann et al. [1]. Nous avons obtenu

$$K = 184,9 \cdot 10^{-6} N^{-5/7} .mm.$$

b) D'après Eschmann et al. [1], on peut admettre, pour les roulements rigides à billes, la relation

$$z C_d r_0^{3/2} = 50 C_0.$$

c) Quant à la valeur du jeu e , elle dépend du roulement adopté (il existe quatre jeux normalisés) et des ajustements choisis pour les deux bagues. En effet, un serrage des bagues tend à réduire le jeu. Les états de surface jouent également un certain rôle, car les aspérités laissées par l'outil tendent à s'aplanir au cours du frettage, ce qui tend à diminuer la réduction de jeu (c'est-à-dire à augmenter le jeu définitif). Ces considérations montrent qu'il n'est possible de calculer correctement un roulement que dans la mesure où l'on a préalablement défini ses conditions de montage. En d'autres termes, un programme de calcul des roulements bien conçu doit nécessairement inclure la conception même du palier, à partir de données technologiques réalistes.

II. LE PROGRAMME ROULBI

1. INTRODUCTION

1.1 - Le programme ROULBI permet de

- (1) Choisir un roulement visé à billes dans un catalogue.
- (2) Définir, en fonction de la charge, les ajustements appropriés à l'arbre et au logement.
- (3) En déduire la réduction de Jeu du roulement du fait des ajustements serrés.
- (4) Choisir en conséquence un des Jeux relatifs disponibles.
- (5) Calculer le point de fonctionnement en tenant compte de la variation de l'angle de contact, et en déduire la durée de vie (pour une fiabilité de 90%) et la sécurité statique du roulement.

1.2 - Unités - Les unités utilisées sont:

- pour les forces: le Newton.
- pour les longueurs: le millimètre, excepté pour les tolérances et les Jeux, qui sont exprimés en micromètres, comme le veut l'usage.
- pour les angles, le radian, sauf indication contraire.
- pour les moments: le Newton.millimètre.

2. DEROULEMENT DU PROGRAMME

2.1 - Consultation du catalogue

Le programme ROULBI commence par proposer à l'utilisateur les divers alésages disponibles dans son catalogue. L'utilisateur ayant choisi l'un de ceux-ci, le programme lui propose les divers roulements de son catalogue qui possèdent cet alésage, sous la forme d'un tableau:

Alésage	Diam. ext.	Largeur	Cap. dyn.	Cap. stat.	Désignation
***	***	***	***	***	***
***	***	***	***	***	***
***	***	***	***	***	***
***	***	***	***	***	***
***	***	***	***	***	***

L'utilisateur choisit alors une désignation.

2.2 - Calcul de la distance des centres de courbure

Ce choix fait, le programme calcule immédiatement l'échelle fondamentale de longueur du roulement, à savoir, la distance r_0 des centres de courbure des deux chemins de roulement (voir partie théorique). Cette distance est calculée par la formule approchée

$$r_0 = K C^{15/7} / C_0^{10/7},$$

où C et C_0 sont respectivement les capacités dynamique et statique (N), r_0 est exprimé en mm, et

$$K = 184,9 \cdot 10^{-6} N^{-5/7} \text{ mm}.$$

2.3 - Définition de la mise en charge

Le programme interroge alors l'utilisateur sur la mise en charge. Celle-ci peut comporter

- une charge radiale F_r
- une charge axiale F_a
- un moment de flexion M tendant à faire tourner les bagues l'une par rapport à l'autre dans le plan (F_a , F_r).

2.4 - Définition des tolérances

Les tolérances à choisir pour l'arbre et le logement dépendent des facteurs suivants:

- La charge et son mouvement par rapport à chacune des deux bagues. Il faut en effet serrer les bagues en mouvement par rapport à la direction de la charge et ce, d'autant plus que la charge est plus grande et éventuellement accompagnée de chocs.
- Dans le cas d'un moyeu mince serré, l'interférence doit être renforcée par rapport au cas du moyeu massif, car le moyeu mince est plus souple.

Pour résoudre ce problème, le programme demande d'abord s'il y a des chocs. Il demande ensuite, pour chaque bague, si elle tourne par rapport à la charge. Si la réponse est négative, il choisit un ajustement glissant sûrment. Au contraire, si l'utilisateur répond "oui", le programme choisit, en fonction de la charge, de l'existence éventuelle de chocs et du diamètre, un ajustement convenable. Il s'inspire, dans ce choix, des préconisations des constructeurs. Dans le cas du moyeu, il demande si le moyeu est mince et, si oui, il renforce l'interférence.

Le programme affiche alors les tolérances choisies, en qualité 6 pour l'arbre et en qualité 7 pour l'alésage. L'utilisateur peut à ce moment choisir d'autres tolérances s'il le désire (f, g, h, js, k, m, n, p, F, G, H, J, K, M, N, P, dans les qualités 4 à 7 pour l'arbre et 5 à 7 pour le moyeu). On notera que les tolérances notées J et JS par le programme sont en fait les tolérances js et JS.

2.5 - Calcul des tolérances

Les intervalles formels de tolérances étant choisis, le programme consulte ses tables de tolérances. Il affiche alors les écarts inférieurs et supérieurs pour l'arbre, l'alésage du roulement (tolérance KB), le diamètre extérieur du roulement (tolérance hb) et le logement. Il en déduit les valeurs extrêmes et moyennes des interférences. C'est sur les valeurs moyennes que seront effectués les calculs ultérieurs.

2.6 - Calcul de la réduction du Jeu

Seules, les bagues serrées provoquent une réduction de Jeu. A l'interférence calculée, il faut soustraire le tassement de rugosité, que l'on peut évaluer comme suit [1]:

Etat de surface	Tassement G (micromètres)
Très finement rectifié	1
Finement rectifié	2,5
Tourné au plus fin	5
Finement tourné	7

L'interférence utile est alors

$$\hat{O} = \hat{O}_{\text{theor}} - G.$$

Pour calculer cette correction, le programme demande, pour chaque côté serré, quel est l'état de surface.

Soient alors

$\hat{O}_i$ l'interférence à la basque intérieure

$\hat{O}_e$ l'interférence à la basque extérieure

d l'alésage du roulement

D le diamètre extérieur du roulement

h le diamètre extérieur moyen de la basque intérieure

H le diamètre intérieur moyen de la basque extérieure

D_e le diamètre extérieur du losement

d_i le diamètre intérieur de l'arbre, s'il est creux.

Les grandeurs h et H sont évaluées par les formules approchées suivantes [2]

$$h \approx 0,7 d + 0,3 D$$

$$H \approx 0,3 d + 0,7 D.$$

Les réductions de Jeu dues au serrage des deux basques se calculent alors comme suit:

- basque intérieure:

$$\Delta_i = \hat{O}_i \cdot (d/h) \cdot \frac{1 - (d_i/d)^2}{1 - (d_i/h)^2}$$

- basque extérieure:

$$\Delta_e = \hat{O}_e \cdot (H/D) \cdot \frac{1 - (D/D_e)^2}{1 - (H/D_e)^2}$$

et la réduction totale de Jeu vaut

$$\Delta = \Delta_i + \Delta_e$$

Pour la calculer, le programme demande à l'utilisateur les valeurs de d_i et D_e . Il affiche alors Δ , puis propose les quatre Jeux disponibles en catalogue, à savoir, par ordre croissant:

C2, NORMAL, C3, C4.

L'utilisateur choisit un de ceux-ci. Pour le guider dans son choix, disons que

- Lorsque la charge est purement radiale, il convient de choisir un Jeu final $e = e_{\text{constr}}$ - à très petit ou même un léger serrage initial: la charge s'en trouvera mieux répartie, et la durée de vie du roulement sera accrue.

- Lorsque la charge est purement axiale, plus le Jeu est grand, plus l'angle de contact en service est élevé, ce qui diminue les efforts internes et augmente la durée de vie. Ceci est également vrai dans le cas d'un moment pur et, très souvent, pour une charge combinée.

Cependant, l'augmentation du Jeu diminue nécessairement la raideur du guidage, ce qui peut nuire au bon fonctionnement de la machine que l'on conçoit.

Ce choix fait, le programme calcule le Jeu (ou le serrage initial) qui en résulte, ainsi que le Jeu réduit e/r_0 .

2.7 - Fixations

Selon le problème pratique qui se pose, il peut arriver que certains déplacements soient fixés. Ainsi, en première approximation, si l'arbre est rigide, on peut souvent admettre que la rotation est nulle. Le programme permet d'assigner une valeur nulle ou non nulle à chaque composante de déplacement.

2.8 - Calcul proprement dit

Les étapes précédentes ont permis de préciser toutes les données du problème. Le programme résout alors par une méthode de Newton-Raphson les équations linéaires qui régissent le roulement (voir partie théorique). Ces calculs faits, il affiche:

- les déplacements et les rotations;
- les réactions axiale et radiale et le moment de réaction;
- l'angle de contact moyen;
- les charges équivalentes, statique et dynamique;
- la durée de vie et la sécurité statique.

Il convient de vérifier que l'angle de contact n'est pas trop grand, car on risquerait de voir les billes sortir des chemins de roulement. Eschmann et al. [1] fixent les limites suivantes:

$$\begin{aligned} \text{Pour } d &\leq 60 \text{ mm : } \alpha \leq 22,3^\circ \\ \text{Pour } d &> 60 \text{ mm : } \alpha \leq 24,4^\circ. \end{aligned}$$

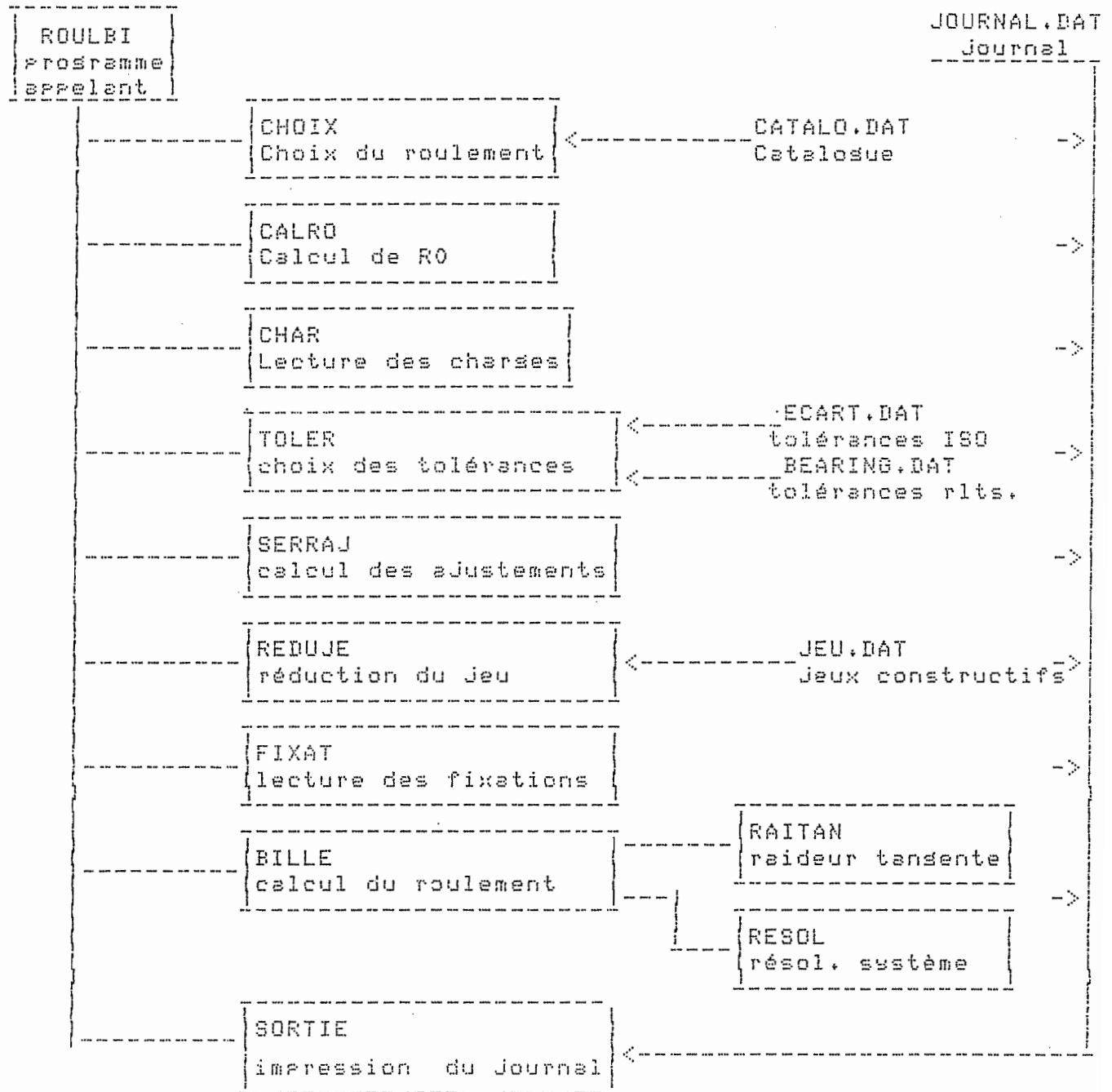
2.9 - Journal

Tous les choix faits lors de la préparation des données et

tous les résultats de calcul sont enregistrés au fur et à mesure par le programme, dans un fichier appelé Journal. A la fin de l'exécution, on peut:

- abandonner le Journal
- le faire apparaître à l'écran
- l'imprimer sur listing
- le conserver sous forme de fichier.

STRUCTURE DU PROGRAMME ROULBI



Tous les fichiers utilisés sont des fichiers séquentiels avec format, excepté CATALO.DAT qui est un fichier à accès direct sans format.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCHMANN - HASBARGEN - WEIGAND - Die Wälzlagerpraxis
R. Oldenbers Verlag, München, Wien, 1978

[2] A. PALMGREN - Les roulements
Editions S.K.F.

[3] HERTZ - Gesammelte Werke
Vol. 1, Leipzig, 1895

[4] SJÖWALL - "Belastningsfördelningen inom kul- och rullager
vid såvne ett radial- och axialbelastningar"
Sfären (1933) 2, pp. 5-11

[5] A. PALMGREN - "Die Lebensdauer von Kugellagern"
Z.V.D.I. 68 (1924) 14, pp. 339-341

[6] SINES, GEORGE, J.L., WAISMAN (eds): Metal Fatigue
Mac Graw Hill Book Company, 1959

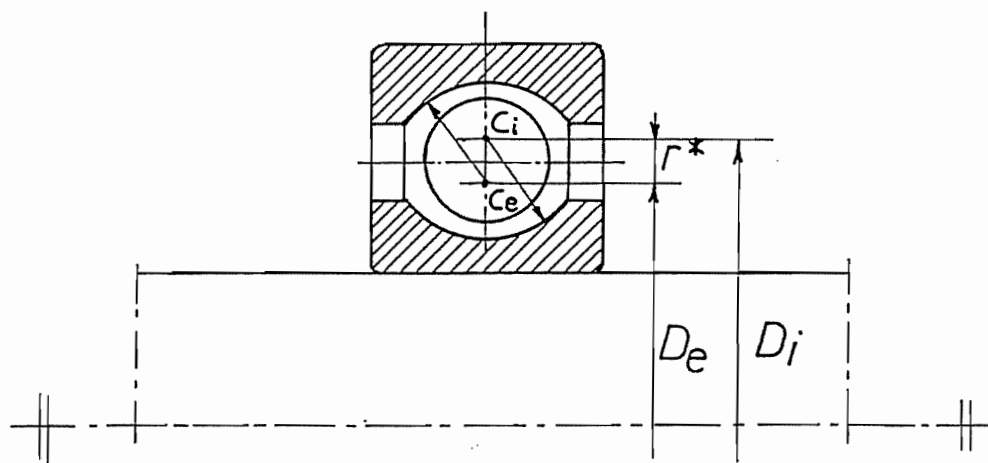


Fig. 1

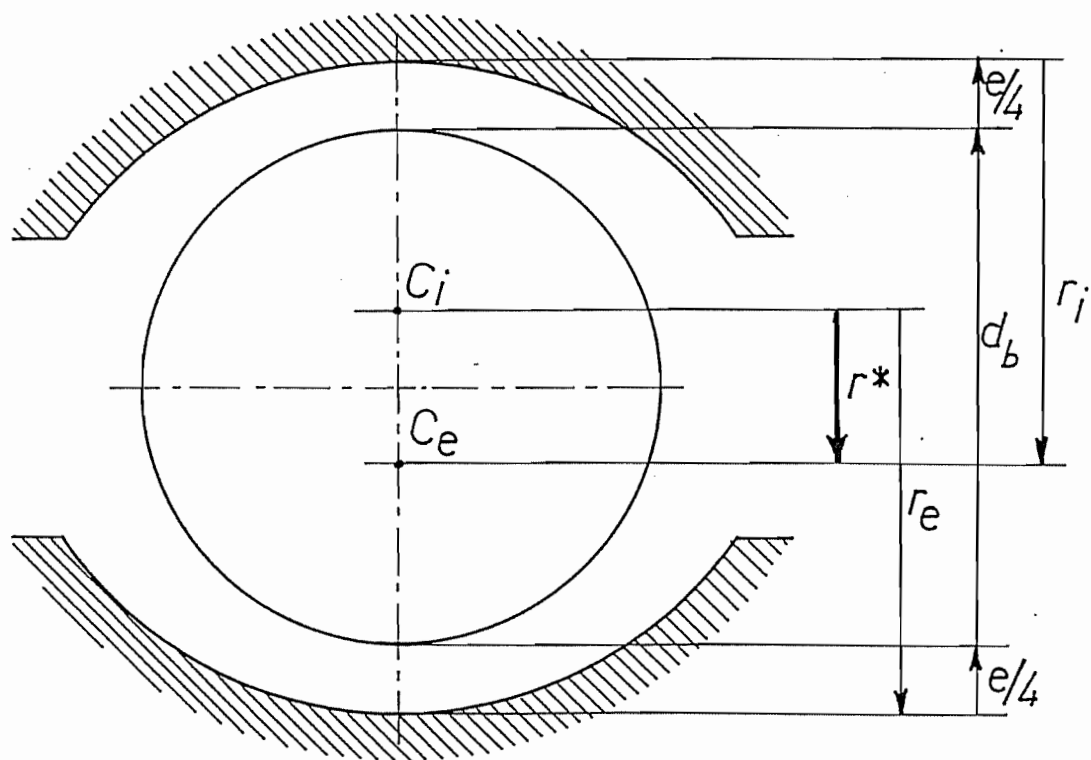


Fig. 2

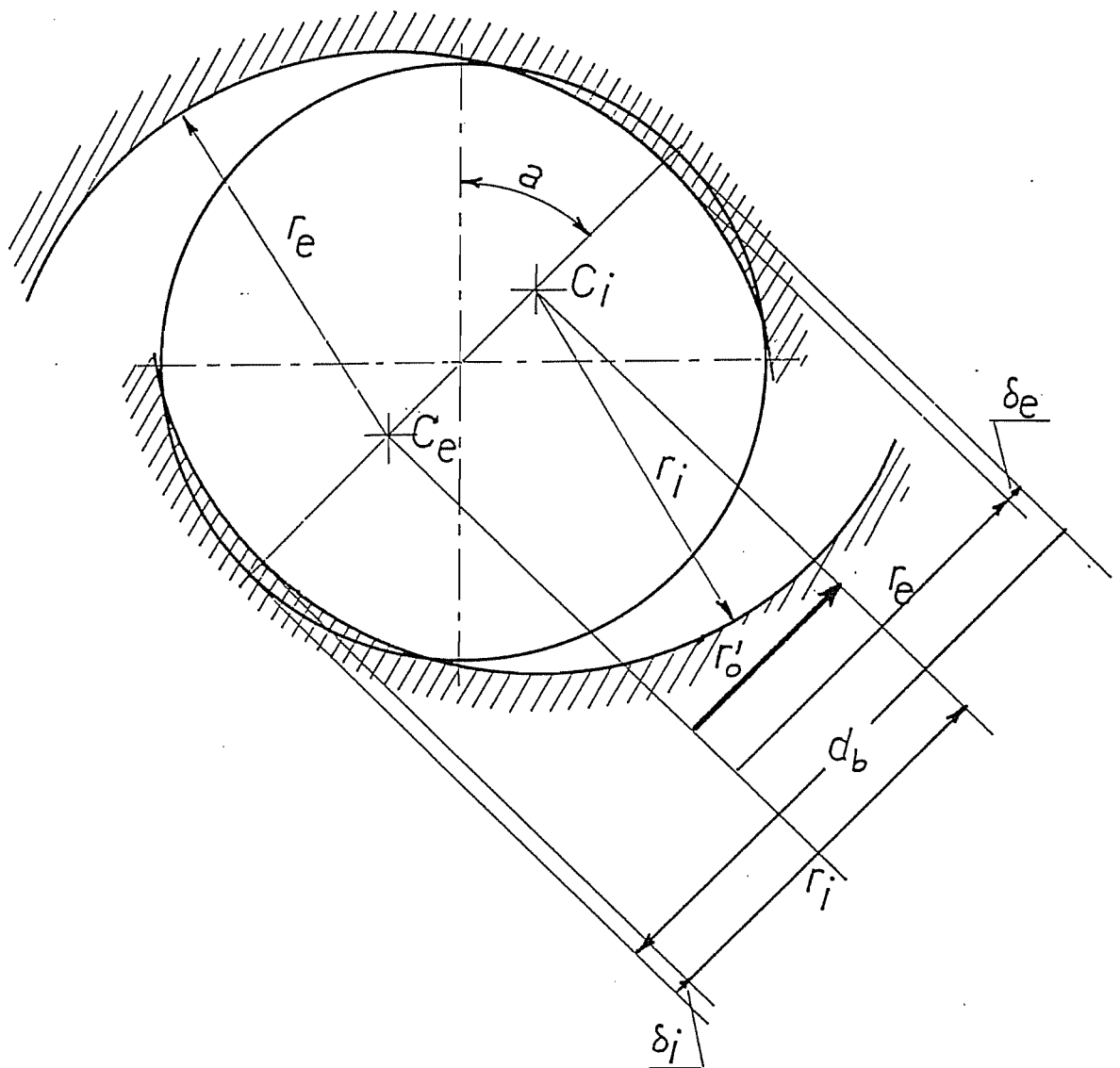


Fig. 3

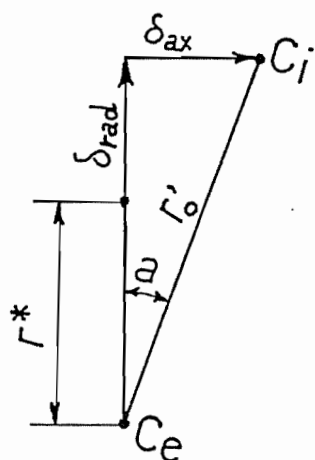


Fig. 4

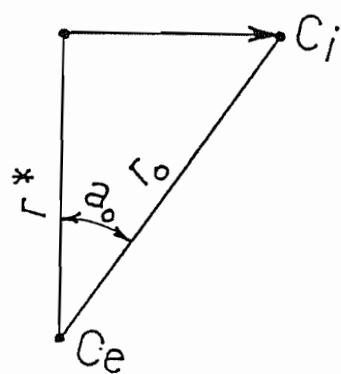


Fig. 5